Con bristol, luci ed ombre alla riscoperta di Talete e dei suoi teoremi

Letizia Mucelli*

Introduzione

Tenendo conto anche delle più recenti indicazioni del Ministero della Pubblica Istruzione sulla centralità dell'insegnamento della matematica e soprattutto della geometria nelle scuole di ogni ordine e grado, e delle discussioni svoltesi in merito durante le riunioni del Nucleo di Ricerca Didattica del Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università degli Studi di Trieste, si è scelto di partecipare all'edizione 2004 della manifestazione "La matematica dei ragazzi" con un lavoro relativo ai cosiddetti cinque teoremi di Talete

1 – angoli opposti al vertice sono tra loro congruenti;
2 – in un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti;
3 – ogni angolo inscritto in una semicirconferenza è retto;
4 – ogni diametro divide il cerchio in due parti congruenti;
5 – metodo di Talete per misurare l'altezza di Piramide;

e intitolato "*Con bristol, luci e ombre alla riscoperta di Talete e dei suoi teoremi*".

Sono stati così ripresi alcuni fondamentali concetti che si ritrovano nello studio della geometria euclidea. L'approccio alla geometria euclidea risulta spesso problematico e difficoltoso per i ragazzi, soprattutto perché essi non sono abituati a lavorare in modo rigoroso e ipotetico-deduttivo e mancano ancora (purtroppo sempre più spesso) dei supporti all'intuizione, che dovrebbero essere stati forniti dallo studio descrittivo della geometria nei cicli di istruzione precedenti.

Il lavoro affrontato in classe mira a passare gradualmente dall'intuizione a una dimostrazione rigorosa dei teoremi presi in considerazione, utilizzando giochi e modelli di cartoncino ideati e realizzati dagli stessi studenti, con lo scopo di rendere evidenti e riscoprire assieme proprietà geometriche già note agli antichi.

La sfida per i ragazzi, coinvolti in prima persona nello spirito della manifestazione, è quella di imparare a collaborare per acquisire competenze, proprietà di linguaggio e capacità di comunicazione adeguate a far comprendere anche ad altri i risultati raggiunti.

Non si trascura di dare una collocazione storica ai concetti, così da rendere evidente che le stesse difficoltà che incontrano gli studenti di oggi si ritrovano anche nell'evoluzione storica del pensiero e delle teorie matematiche (mal comune... mezzo gaudio!). Ciò aiuta a dare un "volto" e "un'anima" a percorsi che rimangono altrimenti puramente astratti.

La realizzazione dei modelli in cartoncino viene supportata dalla lettura in classe di frammenti storici relativi alla figura di Talete e di testi di divulgazione scientifica come "Talete l'uomo dell'ombra" (da *Il Teorema del Pappagallo*), dai quali si traggono nuove idee e spunti di riflessione (ad esempio, si discute sulla *portata universale* dei risultati enunciati nei teoremi, si cerca di creare *situazioni nuove* da affrontare utilizzando i concetti già acquisiti, dimostrando così di averli compresi fino in fondo e di non aver fissato nozioni in modo puramente mnemonico e improduttivo, si realizzano alcuni controesempi, che evidenzino invece situazioni in cui i concetti non sono applicabili...).

Il percorso viene inoltre documentato dai ragazzi mediante la realizzazione di cartelloni illustrativi, da utilizzare in sede di manifestazione come supporto per coinvolgere in modo il più possibile attivo e dinamico il "pubblico".

Di seguito si riporta una breve descrizione della classe con cui si è scelto di affrontare il lavoro (per la presentazione scritta dai ragazzi in merito all'attività di preparazione svolta, si rimanda alla parte iniziale del presente volume). Si procede quindi alla descrizione dei contenuti proposti in sede di manifestazione e si riportano alcune osservazioni e ripensamenti emersi.

Descrizione della classe

La classe con cui si è scelto di lavorare è una prima del Liceo Linguistico Europeo "P. d'Aquileia". Semplici test e quesiti proposti all'inizio dell'anno scolastico hanno evidenziato nei ragazzi una preparazione matematica di base alquanto disomogenea e differenziata a seconda della scuola secondaria inferiore di provenienza.

La classe è costituita da 20 ragazzi, di cui soltanto tre sono maschi; una ragazza e un ragazzo hanno frequentato scuole con lingua d'insegnamento slovena; un'altra ragazza proviene dall'Armenia e ha ancora notevoli difficoltà di comunicazione in lingua italiana.

Descrizione delle cinque postazioni

In questo paragrafo si procede alla descrizione dettagliata dei modelli e dei contenuti proposti dai ragazzi in ciascuna delle cinque postazioni realizzate, seguendo l'ordine di esposizione adottato in sede di manifestazione.

Postazione 1: metodo di Talete per misurare l'altezza della Piramide di Cheope

Per presentare tale metodo si è realizzato il modello riportato in Fig. 1: su una base di compensato è fissata un'asta verticale, sulla quale scorre una pallina da tennis che rappresenta il sole[1] che si alza e abbassa sull'orizzonte, variando così l'inclinazione dei propri raggi, di cui uno è simulato dal filo di lana che parte dalla pallina-sole e raggiunge il suolo passando per il vertice del modello di *piramide retta a base quadrata* realizzata in cartoncino bristol. Congiungendo con un pennarello il punto T, in cui il raggio tocca il suolo, con gli estremi del lato AB della base della piramide opposto a tale punto, si ottiene la traccia dell'ombra della piramide proiettata al suolo (vedi Fig. 2).

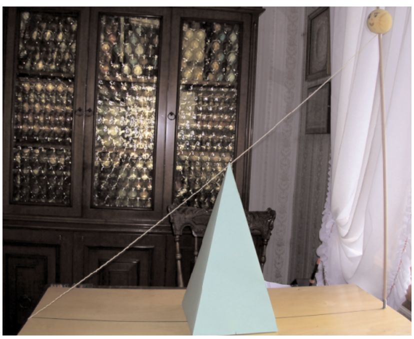

Figura 1

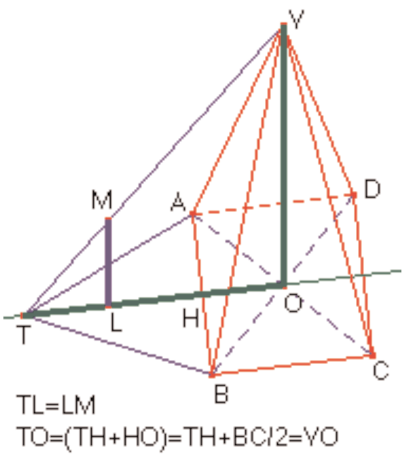

Figura 2

Si dispone il modello in modo da riprodurre la situazione probabilmente considerata da Talete, cioè si descrive il caso in cui i raggi di sole giungono al suolo (orizzontale) formando un angolo di 45° con esso e, nel caso qui considerato, appartengono a un piano perpendicolare al lato AB della piramide[2] (vedi Fig. 2). In tal caso, il triangolo rettangolo VTO è isoscele, con i lati VO e TO congruenti tra loro, quindi l'altezza della piramide uguaglia la lunghezza del segmento TO, somma del segmento TH, facilmente misurabile, e del segmento HO, che, nel caso del modello, è pari alla metà del lato del quadrato, essendo stata orientata la piramide in modo che OT sia perpendicolare ad AB. Si ricorda che Talete individuava tale situazione utilizzando un bastone: misurava la lunghezza dell'ombra della piramide nell'istante in cui la lunghezza di un bastone piantato al suolo uguagliava la lunghezza della propria ombra (in Fig. 2 il segmento-bastone ML è congruente alla propria ombra TL). Entra quindi in gioco il concetto di similitudine... Nell'illustrare il modello e la sua possibilità di utilizzo i ragazzi usano anche un modello di *piramide con una faccia aperta*, in cui è stato inserito uno spago, che congiunge il vertice della piramide con il centro della base: risulta così più agevole e di immediata comprensione, anche per i visitatori più piccoli, capire cosa sia da intendersi per altezza di una piramide.

Postazione 2: gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti

Per presentare questo teorema di geometria euclidea (Teorema diretto del triangolo isoscele, ricordato anche come "*pons asinorum*"), i ragazzi hanno costruito un cartellone in cui, per completezza, è illustrata la classica dimostrazione del teorema. Tenendo conto che studenti loro coetanei o più grandi dovrebbero già conoscere tale dimostrazione, che risulterebbe invece di troppo difficile comprensione per bambini più piccoli, durante l'esposizione si preferisce far ricorso a modelli intuitivi per verificare l'enunciato del teorema esposto. Su un cartoncino viene disegnato un triangolo isoscele, e su di un altro cartoncino se ne disegna un secondo congruente al primo: si fa osservare che, anche "girando" il secondo triangolo ritagliato, gli angoli alla base continuano a coincidere con quelli del primo disegno sul cartoncino. Con un modello analogo al precedente, in cui si utilizza allo stesso modo un triangolo scaleno, si sottolinea l'importanza dell'ipotesi di questo teorema: se il triangolo non è isoscele, "girando" il triangolo ritagliato, gli angoli alla base non sono più congruenti a quelli del triangolo disegnato sul cartoncino!

Postazione 3: ogni angolo inscritto in una semicirconferenza è retto

La dimostrazione del teorema, riproposta su un cartellone, viene condotta utilizzando le conoscenze che i ragazzi hanno a disposizione a questo punto dei loro studi. In riferimento alla Fig. 3, si osserva che, essendo AO, OC e OB raggi di una stessa circonferenza, i due triangoli AOC e COB sono entrambi isosceli. Quindi, per il Teorema diretto del triangolo isoscele, i rispettivi angoli alla base sono congruenti. Si ha perciò $y = 2a$ e $x = 2b$ per il Teorema dell'angolo esterno. Sommando membro a membro tali relazioni, si ha: $x + y = 2(a + b)$, ed essendo anche $x + y = 180°$ perché x ed y sono adiacenti, si ricava che $a + b = 90°$.

Per convincere i visitatori più piccini si costruisce invece un modello (vedi Fig. 4), in cui la circonferenza è rappresentata da un *hula-hoop*, e l'angolo ACB da un elastico fissato in A e B in corrispondenza di un diametro e legato in un punto C in modo da poter scorrere lungo l'*hula-hoop*. I visitatori sono invitati a variare la posizione di C e a verificare che l'angolo ACB è retto, confrontandolo con una squadra messa a disposizione.

Postazione 4: un cerchio viene diviso in due parti congruenti dal diametro

In questo caso, la dimostrazione riportata sul cartellone viene svolta utilizzando il ragionamento per assurdo, che i ragazzi hanno imparato a conoscere studiando in classe la dimostrazione del Teorema delle parallele. Se, per assurdo, i due archi nei quali una circonferenza rimane divisa dal diametro non fossero congruenti, si individuerebbero (vedi Fig. 5) almeno due raggi OC e OD della stessa circonferenza non congruenti, contraddicendo la definizione stessa di circonferenza.

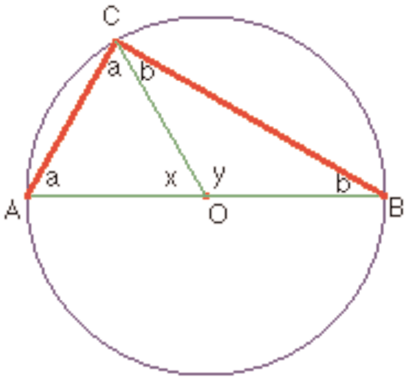

Figura 3

Figura 4

Per convincere empiricamente i visitatori, si costruisce un disco di cartoncino: piegandolo lungo un diametro, le due parti si sovrappongono perfettamente (vedi Fig. 6), mentre, piegandola lungo corde che non siano diametri, ciò non accade (vedi Fig. 7; di nuovo, con il controesempio, si sottolinea il peso dell'ipotesi del teorema). Si trae inoltre spunto da questo teorema e dal seguente passo riportato nel testo *Il Teorema del Pappagallo* per sottolineare la portata generale dei teoremi: «*La soluzione di Talete non si applica ad un cerchio in particolare, bensì a qualsiasi cerchio. La sua ambizione consiste nell'accertare verità che riguardano un'intera classe di oggetti. Una classe infinita! … non ci sarà neanche un piccolo cerchio nascosto chissà dove nel mondo, un clandestino… sfuggito al suo Teorema? … Nessuno, mai, a nessun costo!*».

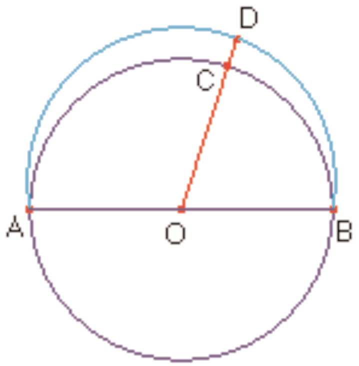

Figura 5

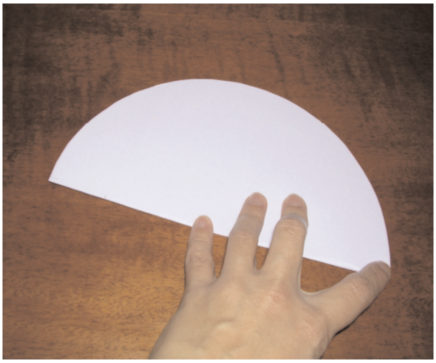

Figura 6

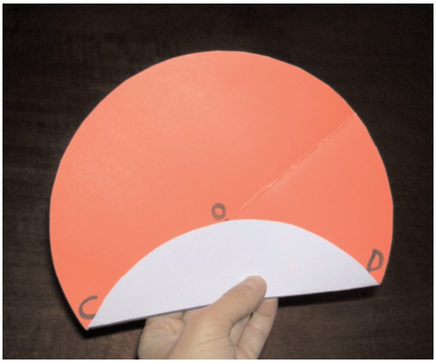

Figura 7

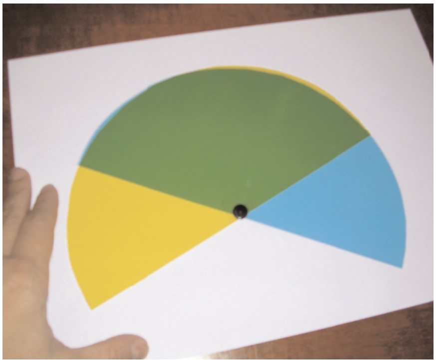

Figura 8

Postazione 5: due rette che si intersecano formano angoli opposti al vertice congruenti

Nella dimostrazione riportata sul cartellone si osserva che, dette a e c le misure degli angoli opposti al vertice considerati e b quella di uno dei due angoli adiacenti ad entrambi, si ha: $a + b = 180°$ e $b + c = 180°$. Da tali relazioni si ricava che $a = c$. Detto in altri termini, "se da cose uguali si toglie una parte comune, ciò che resta sono cose uguali". Per verificare e rendere il più evidente possibile il teorema, si costruiscono, con due fogli di acetato gialli e blu, due semicerchi e si fissano al centro del cerchio per simulare due angoli piatti liberi di ruotare l'uno sull'altro (vedi Fig. 8). Si evidenzia che, comunque si ruotino i due angoli, eliminando la parte sovrapposta, che appare di colore verde, ciò che rimane sono due angoli (colorati rispettivamente in giallo e blu) opposti al vertice e congruenti.

Per sottolineare l'importanza dell'ipotesi di partire da due angoli congruenti tra loro e utilizzare al contempo in contesti diversi lo stesso tipo di ragionamento usato per dimostrare il Teorema degli angoli opposti al vertice, si costruiscono altri due modelli. In un caso, si parte da due angoli di ampiezza qualsiasi, ma congruenti tra loro, e si ripropone lo stesso tipo di "dimostrazione" empirica visto per gli angoli opposti al vertice. Nell'altro caso, invece, si toglie una parte comune a due angoli che, in origine, non sono congruenti: ciò che resta non sono parti congruenti.

Alcune osservazioni

I ragazzi hanno deciso di presentare le cinque postazioni in modo sequenziale. Ritenevano, infatti, che, così facendo, il lavoro potesse esser svolto con maggiore ordine, chiarezza e possibilità di concentrazione anche per i visitatori.

L'esposizione è stata impostata cercando di interagire quanto più possibile con il pubblico. Il dialogo mirava a coinvolgere i visitatori attivamente, sollecitandoli anche con domande mirate e invitandoli a "giocare" essi stessi con i semplici modellini realizzati. Il dialogo attivo si è rivelato fondamentale per rispondere all'esigenza di adattare il linguaggio e le modalità espositive a seconda dell'età e delle supposte conoscenze del pubblico-interlocutore.

La maggior parte della classe si è dimostrata entusiasta e collaborativa (seppur non del tutto autonoma) fin dalle prime fasi di preparazione del lavoro, tanto da richiedere un'ulteriore possibilità di partecipazione alla prossima edizione di "La matematica dei ragazzi". Inoltre, alcuni studenti che nel corso dell'anno non avevano dato contributi, durante il convegno hanno manifestato il desiderio di prendervi parte attivamente, trascinati dall'entusiasmo del resto della classe, riuscendo così, seppur all'ultimo momento, a ritagliarsi un piccolo spazio. Per alcuni di loro è stata l'occasione per interrompere un atteggiamento di chiusura e rifiuto totale della matematica, che affondava le proprie radici molto lontano nel tempo.

Con il susseguirsi delle visite, gli studenti impegnati nell'esposizione hanno dichiarato di aver superato la timidezza e l'imbarazzo iniziali, acquistando anche maggior sicurezza e padronanza espositiva. L'imbarazzo è risultato, comunque, più evidente di fronte ai propri coetanei, mentre si è rivelato più semplice instaurare un dialogo costruttivo con i più piccoli, più curiosi ed entusiasti.

Il venirsi a trovare per una volta "dall'altra parte della cattedra" è stato inoltre utile per provare sulla propria pelle cosa significhi spiegare a qualcuno che non ascolta, o quanto sia spiacevole rivolgersi a chi intanto presta attenzione solo ai giochini del proprio telefonino o alle chiacchiere del compagno!

Nel complesso la partecipazione al convegno si è rivelata positiva e ha effettivamente aiutato gli studenti a imparare a relazionarsi con un pubblico, motivandoli a impegnarsi ad esprimersi in modo appropriato e chiaro al tempo stesso, il che presuppone, alla base, una reale comprensione e acquisizione dei concetti che si vogliono trasmettere.

Anche a distanza di quasi un anno dall'esperienza, sottoposti a un semplice questionario relativo ai contenuti esposti durante la manifestazione, la maggior parte dei ragazzi ha dimostrato di aver assimilato "in modo permanente" i concetti fondamentali.

NOTE

* Liceo Linguistico Europeo "Paolino d'Aquileia", via Seminario, 7, I-34170 Gorizia
e-mail: letizia.mucelli@libero.it

1 Inizialmente, nella fase di progettazione del modello, si era pensato di utilizzare una lampada per simulare il sole, ma l'idea è stata abbandonata per le difficoltà tecniche e pratiche incontrate. Infatti, oltre al fatto che la luce della lampada, non potendo essere collocata sufficientemente distante, non produce raggi pressoché paralleli come quelli solari, l'ombra prodotta non era facilmente evidenziabile con precisione in un ambiente comunque illuminato.

2 Anche interagendo con i visitatori con opportune domande, si evidenziano le difficoltà e complicazioni cui si andrebbe incontro se non ci si ponesse in questa particolare situazione, prima fra tutte quella di risalire alla lunghezza del segmento HO e quindi a quella dell'intero segmento TO.

BIBLIOGRAFIA

Boyer C. B., 1994, *Storia della matematica*, Mondadori, Milano.

Colli G., 1992, *La sapienza greca*, Adelphi, Milano.

Dodero N., Toscani J., 1988, *Lezioni di matematica*, Ghisetti & Corvi, Milano.

Guedj D., 2000, *Il Teorema del Pappagallo*, Longanesi, Milano.

Mariscotti M., Canobbio M., 2000, *Classe di matematica – Geometria vol. A e B*, Petrini, Torino.