

SR/62/SU

1004856

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Sede Amministrativa del Dottorato di Ricerca

UNIVERSITÀ CA' FOSCARI DI VENEZIA    UNIVERSITÀ L. BOCCONI DI MILANO  
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO    UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE

Sedi Convenzionate

XV CICLO DEL  
DOTTORATO DI RICERCA IN  
MATEMATICA PER LE DECISIONI ECONOMICHE

## Misure di Choquet, indici di Shapley e il problema dell'estensione

### di un operatore di media pesata ad un integrale di Choquet

DOTTORANDO:

SILVIA BORTOT '68

CN

COORDINATORE DEL COLLEGIO DEI DOCENTI:

CHIAR.MO PROF. MARCO ZECCHIN  
(UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE)

FIRMA: *Marco Zecchin* .....

TUTORE:

CHIAR.MO PROF. ELENA MORETTI  
(UNIVERSITÀ CA' FOSCARI DI VENEZIA)

FIRMA: .....

RELATORE:

CHIAR.MO PROF. ELIO CANESTRELLI  
(UNIVERSITÀ CA' FOSCARI DI VENEZIA)

FIRMA: .....

CORRELATORE:

CHIAR.MO PROF. RICARDO ALBERTO MARQUES PEREIRA  
(UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO)

FIRMA: .....

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>vi</b>
<b>1 Misure di Choquet</b>	<b>1</b>
1.1 Introduzione . . . . .	1
1.2 Misure di Choquet . . . . .	2
1.3 Indici di Shapley . . . . .	3
1.4 Indici di Banzhaf . . . . .	7
1.5 Rappresentazioni di una misura di Choquet . . . . .	8
1.6 Misure di Choquet $k$ -additive . . . . .	11
<b>2 Integrali rispetto ad una misura di Choquet</b>	<b>13</b>
2.1 Introduzione . . . . .	13
2.2 Integrali di Choquet . . . . .	13
2.3 Proprietà e caratterizzazione . . . . .	16
2.4 Casi Particolari . . . . .	20
2.4.1 Media pesata . . . . .	20
2.4.2 Operatore $OWA$ . . . . .	22
2.5 Integrale di Shapley . . . . .	24
<b>3 Esempi</b>	<b>26</b>
3.1 Introduzione . . . . .	26
3.2 Misure additive . . . . .	26
3.3 Misure 2-additive . . . . .	28
3.4 La misura consensuale . . . . .	30
3.4.1 Caso $N = \{1, 2\}$ . . . . .	35
3.4.2 Caso $N = \{1, 2, 3\}$ . . . . .	36
3.5 La misura di Saaty . . . . .	38
3.5.1 Premessa . . . . .	38

3.5.2	L'estensione del modello AHP . . . . .	40
3.5.3	Esempi . . . . .	49
3.5.4	La funzione di scala estesa . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Orness</b>	<b>55</b>
4.1	Introduzione . . . . .	55
4.2	Grado di Orness . . . . .	55
4.3	Operatore <i>OWA</i> associato ad una misura di Choquet . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Dualità</b>	<b>66</b>
5.1	La misura duale associata ad una misura di Choquet . . . . .	66
5.2	Misure di Choquet self-dual . . . . .	69
5.3	La misura self-dual associata ad una misura di Choquet . . . . .	73
5.4	La misura consensuale . . . . .	76
5.5	La misura di Saaty . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Estensione di un operatore di media pesata (<i>WA</i>) ad un integrale di Choquet</b>	<b>88</b>
6.1	Introduzione . . . . .	88
6.2	Il problema dell'estensione: metodologia classica . . . . .	89
6.3	Critica alla metodologia classica . . . . .	92
6.4	Il problema dell'estensione: nuova metodologia . . . . .	93
6.4.1	Esempio $n=3$ . . . . .	96
6.4.2	Esempio $n=4$ . . . . .	98
6.4.3	Esempio $n=5$ . . . . .	101
6.5	Ricerca di una misura self-dual . . . . .	104
6.6	Caso $n=3$ . . . . .	109
6.6.1	Esempio $n=3$ . . . . .	110
6.6.2	Esempio $n=3$ (seconda parte) . . . . .	111
6.7	Caso $n=4$ . . . . .	112
6.7.1	Esempio $n=4$ . . . . .	116
6.7.2	Esempio $n=4$ (seconda parte) . . . . .	117
6.8	Caso $n=5$ . . . . .	119
6.8.1	Esempio $n=5$ . . . . .	123
6.9	Considerazioni sul caso generale $n \geq 3$ . . . . .	125
	<b>Conclusioni</b>	<b>129</b>

<b>Allegati</b>	<b>131</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>154</b>

# Elenco delle tabelle

1.1	Tavola di conversione tra $\mu$ , $m_\mu$ e $I_\mu$ . . . . .	9
1.2	Tavole di conversione tra $\mu$ , $m_\mu$ e $I_\mu^B$ . . . . .	10
3.1	Valori di $\mu(S)$ , $m_\mu(S)$ e $I_\mu(S)$ per $S \subseteq N = \{1, 2\}$ . . . . .	35
3.2	Valori di $\mu(S)$ , $m_\mu(S)$ e $I_\mu(S)$ per $S \subseteq N = \{1, 2, 3\}$ . . . . .	37
4.1	Valore atteso e grado di orness di alcuni operatori di aggregazione. . . . .	59

# Elenco delle figure

2.1	L'integrale di Choquet di $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ . . . . .	16
2.2	Sottoclassi degli integrali di Choquet. . . . .	24
3.1	Rappresentazione di una misura di Choquet 2-additiva tramite grafo. . . . .	30
3.2	La funzione sigmoide $\sigma$ . . . . .	31
3.3	Rappresentazione della matrice di interazione $\mathbf{V}$ tramite grafo. . . . .	32
3.4	Monotonia della misura consensuale. . . . .	33
3.5	Valore di Shapley di un agente $i \in N$ . . . . .	34
3.6	Caso $N = \{1, 2\}$ . . . . .	35
3.7	Caso $N = \{1, 2, 3\}$ . . . . .	36
3.8	Struttura gerarchica dell'AHP. . . . .	39
3.9	I vettori delle priorità. . . . .	39
3.10	Intorno $U(a_{ij})$ dell'elemento $a_{ij}$ . . . . .	42
3.11	Grafico della funzione di scala $f$ . . . . .	43
3.12	Rappresentazione della misura di Saaty tramite grafo. . . . .	45
3.13	Monotonia della misura di Saaty. . . . .	46
3.14	Gerarchia per la scelta di un'automobile. . . . .	50
3.15	Grafici di alcune funzioni di scala $f_\beta$ . . . . .	53
6.1	Il triangolo di Pascal. . . . .	108

# Introduzione

Le misure di Choquet e gli operatori di aggregazione ad esse associati vengono largamente utilizzate da molti autori non solo in Teoria delle Decisioni, ma anche in Teoria degli Insiemi Fuzzy ed in Teoria dei Giochi.

Storicamente le misure di Choquet furono introdotte nel 1953 da Choquet [5] con il nome di capacità e poi riprese e sviluppate con nomi differenti in diverse aree quali la Teoria delle Decisioni da Schmeidler [39] con il nome di misure di probabilità non additive e la Teoria degli Insiemi Fuzzy da Sugeno [41] con il nome di misure fuzzy. Schmeidler utilizza le misure di Choquet in un contesto probabilistico nel quale, sostituendo l'assioma di indipendenza con l'assioma di indipendenza comotonona ristretto ai soli atti comotononi, estende la teoria dell'utilità attesa additiva di von Neumann e Morgenstern coprendo situazioni, come il paradosso di Ellsberg, che sono in contrasto con l'utilità attesa additiva. Il modello di Schmeidler permette di calcolare l'utilità attesa di un atto utilizzando non più un operatore di media pesata, come nella teoria dell'utilità attesa additiva di von Neumann e Morgenstern, ma un integrale di Choquet rispetto ad una misura di probabilità non additiva.

Sugeno ha il merito di aver studiato le misure di Choquet non solo nel continuo, ma anche nel discreto utilizzando gli integrali di Choquet come operatori di aggregazione.

Gli integrali di Choquet rappresentano una generalizzazione dei più noti e utilizzati operatori di media pesata ai quali si riducono se le misure di Choquet sono additive. Ciò che distingue gli integrali di Choquet come operatori di aggregazione dagli operatori di media pesata è la loro utilità in presenza di elementi che interagiscono.

L'interazione tra gli elementi è stata studiata da Murofushi e Soneda [28, 29] che hanno proposto l'uso del valore di Shapley, introdotto da Shapley [40] in Teoria dei Giochi, come indice di importanza. L'utilizzo degli indici di importanza e di interazione viene poi ripreso da Grabisch [14] e Roubens [33] e applicato alla Teoria delle Decisioni multicriterio.

Da un punto di vista applicativo in Teoria delle Decisioni le misure di Choquet risultano quindi particolarmente utili in presenza di elementi che interagiscono perchè permettono di modellizzare l'importanza e le interazioni tra i vari elementi. Questa ricchezza delle misure di Choquet comporta però una maggiore complessità. Le misure di Choquet sono difficili da trattare: definire una misura di Choquet su un

insieme  $N$  di  $n$  elementi richiede infatti  $2^n$  coefficienti, corrispondenti ai valori della misura sui  $2^n$  sottoinsiemi di  $N$ , che non sempre il decisore è in grado di assegnare.

Grabisch [14] propone di distinguere le misure di Choquet a seconda del loro ordine di additività definendo le misure di Choquet  $k$ -additive : al variare di  $k$  si possono ricoprire tutte le misure di Choquet da quelle additive ( $k = 1$ ) definite da  $n$  coefficienti, a quelle più generali ( $k = n$ ) definite da  $2^n$  coefficienti.

Di particolare interesse nelle applicazioni risultano le misure di Choquet 2-additive perchè, pur rimanendo molto semplici e con un numero limitato di coefficienti permettono comunque di modellizzare le interazioni tra gli elementi di  $N$ .

Il lavoro di tesi considera la teoria delle misure di Choquet e degli operatori di aggregazione associati nell'ambito della Teoria delle Decisioni multicriterio e multiagente.

La tesi riguarda principalmente il problema dell'aggregazione: in ambito multicriterio per ogni alternativa si vogliono aggregare le valutazioni relative ai vari criteri per ottenere una valutazione globale per l'alternativa; in ambito multiagente si vogliono aggregare le strutture di preferenza individuali per ottenere una struttura di preferenza collettiva.

In particolare viene trattato il problema dell'estensione di un operatore di aggregazione lineare, la media pesata, ad un operatore di aggregazione non lineare, l'integrale di Choquet.

Nel Capitolo 1 viene considerata la teoria delle misure di Choquet nel caso discreto e vengono descritti alcuni importanti risultati noti in letteratura riguardo gli indici di importanza e di interazione e le misure  $k$ -additive.

Nel Capitolo 2 vengono esaminati gli operatori di aggregazione associati ad una misura di Choquet, gli integrali di Choquet con le loro proprietà, caratterizzazioni ed alcune sottoclassi.

Il Capitolo 3 contiene esempi di misure di Choquet. In particolare, riguardo alle misure 2-additive, vengono proposti due modelli originali costruiti sulla base di misure 2-additive in due contesti decisionali diversi. In un contesto multiagente viene definita la misura consensuale che è utilizzata per trattare la questione dell'interazione tra agenti nella formulazione di una preferenza collettiva. In un contesto multicriterio viene definita la misura di Saaty che permette di trattare l'inconsistenza tra le valutazioni di importanza relativa dei vari criteri, in una proposta di estensione del modello AHP di Saaty.

Il Capitolo 4 e il Capitolo 5 riguardano il concetto di grado di orness di un operatore di aggregazione e il concetto di dualità delle misure di Choquet rispettivamente. Iniziano entrambi con definizioni e risultati di base noti in letteratura e proseguono poi con alcuni risultati originali. Viene definito l'operatore *OWA* associato ad una misura di Choquet. Questo ci permette di vedere il grado di orness di un integrale di Choquet da un punto di vista originale: come grado di orness dell'operatore *OWA* associato alla stessa misura di Choquet. I risultati originali più interessanti riguardano la relazione tra il grado di orness di un integrale di Choquet e quello dell'integrale di Choquet rispetto alla misura duale, oltre alle interessanti proprietà



delle misure self-dual. Ogni integrale di Choquet associato ad una misura self-dual ha, in media nei vari domini di comonotonia, un comportamento neutrale rispetto ai valori grandi e piccoli delle variabili di aggregazione. Questo è particolarmente rilevante nelle applicazioni in cui i valori da aggregare rappresentano confronti a coppie tra alternative (AHP di Saaty, SSB di Fishburn e matrici di preferenza fuzzy, ad esempio), poiché in questo caso i valori grandi e piccoli, rispetto ad un valore centrale neutro associato all'indifferenza, rappresentano sostanzialmente la stessa informazione: l'intensità della preferenza di un'alternativa rispetto ad un'altra.

Nel Capitolo 6 viene trattato il problema dell'estensione di un operatore di aggregazione lineare, la media pesata, ad un operatore di aggregazione non lineare, l'integrale di Choquet, attraverso una proposta metodologica originale. La media pesata è l'operatore di aggregazione più noto e più utilizzato nelle applicazioni, ma non è appropriato in presenza di interazioni tra criteri e/o agenti. Queste interazioni possono invece essere modellizzate attraverso il maggior numero di gradi di libertà delle misure di Choquet ( $2^n - 2$ ) rispetto a quelli ( $n - 1$ ) degli operatori di media pesata. L'integrale di Choquet consiste in una generalizzazione dell'operatore di media pesata, in cui il vettore dei pesi è sostituito da una misura di Choquet che assegna un valore ad ogni coalizione di elementi. Esiste infatti una corrispondenza biunivoca tra gli operatori di media pesata e gli integrali di Choquet rispetto ad una misura additiva.

Dato un operatore di media pesata, e quindi un vettore di pesi  $w = [w_i]$ , si vuole costruire un'appropriata misura di Choquet  $\mu$  in modo tale che l'integrale di Choquet  $C_\mu$  risulti un'estensione dell'operatore di media pesata originale.

L'esempio più noto in letteratura di un problema di questo tipo è dovuto a Grabisch (1995). In questo esempio si vogliono valutare gli studenti di una scuola superiore ad indirizzo scientifico in base al loro livello di preparazione, espresso in voti, in tre materie: matematica, fisica e letteratura. Il preside della scuola esprime delle preferenze. Utilizzando un semplice operatore di media pesata, che associ un peso più alto ai voti relativi alle materie scientifiche ritenute più importanti, non si riesce ad esprimere l'interazione tra le varie materie, talvolta sub-additiva, come nel caso di matematica e fisica, e talvolta super-additiva, come nel caso di matematica e letteratura o fisica e letteratura. Nell'esempio specifico si può infatti dimostrare che un operatore di media pesata non è in grado di rappresentare le preferenze del preside. Grabisch propone allora di utilizzare come operatore di aggregazione un integrale di Choquet, definendo sull'insieme delle tre materie un'appropriata misura. Nella presentazione di Grabisch viene seguita la metodologia classica, in cui la misura di Choquet  $\mu$  viene costruita a partire dall'identificazione dei suoi singletons con i pesi della media pesata originale, ossia  $\mu(i) = w_i$ .

In questo modo, però, se una volta costruita la misura andiamo a calcolare il peso medio che, al variare dei domini di comonotonia, viene associato a ciascuna delle tre materie, notiamo che quello relativo a letteratura è più grande di quello relativo alle materie scientifiche, pur se ritenute più importanti. Il peso medio relativo ad una materia coincide in realtà con l'indice di potere di Shapley della materia considerata.

Riteniamo quindi che questa metodologia classica abbia dei problemi e che ad essere identificati con i pesi  $w_i$  della media pesata originale non debbano essere i valori  $\mu(i)$  dei singletons della misura, ma i valori di Shapley  $\phi_\mu(i)$ . Il problema da risolvere è quindi il seguente: noti i valori  $\phi(i) = w_i$  vogliamo costruire un'appropriata misura di Choquet  $\mu$  che abbia quei valori come indici di Shapley e il cui integrale di Choquet  $\mathcal{C}_\mu$  sia in grado di rappresentare le preferenze del decisore.

Viste le interessanti proprietà delle misure di Choquet self-dual, viene infine considerata la possibilità di estendere un operatore di media pesata ad un integrale di Choquet associato ad una misura self-dual. Queste misure hanno il vantaggio che necessitano, per essere definite, di un numero di coefficienti che è la metà rispetto a quello dei coefficienti per una generica misura di Choquet. Inoltre il loro grado di orness è pari a  $1/2$  esattamente come per l'operatore di media pesata originale.

# Capitolo 1

## Misure di Choquet

### 1.1 Introduzione

Nel 1974 Sugeno [41] ha introdotto una generalizzazione delle misure di probabilità, ritenute spesso troppo rigide e inflessibili, sostituendo la proprietà di additività con una proprietà più debole: la monotonia. Sugeno chiamò queste misure monotone non additive *misure fuzzy*, pur non avendo nulla a che fare con gli insiemi fuzzy. Altri autori dopo di lui utilizzarono queste misure con nomi differenti (si vedano ad esempio le *misure di probabilità non additive* di Schmeidler [39]). Storicamente queste misure sono strettamente collegate con il concetto di *capacità* proposto nel 1953 da Choquet [5]. Chiameremo quindi queste nuove misure con il nome di *misure di Choquet*.

Da un punto di vista applicativo le misure di Choquet, che noi considereremo nel solo caso discreto, risultano particolarmente utili in presenza di elementi che interagiscono, poichè costituiscono uno strumento flessibile per modellizzare l'importanza delle coalizioni.

In questo capitolo introduciamo il concetto di misura di Choquet e di indici di Shapley; inoltre mostriamo che una misura di Choquet ammette differenti rappresentazioni tra loro equivalenti.

Nel seguito indicheremo con  $\mu$  una misura di Choquet, con  $\mathcal{P}(N)$  l'insieme delle parti di  $N$ , i.e. la famiglia di tutti i sottoinsiemi di  $N$ , mentre  $T \setminus S$  è la differenza tra gli insiemi  $T$  e  $S$ . Per evitare di appesantire troppo la notazione scriveremo  $\mu(i)$ ,  $\mu(ij)$ ,  $N \setminus i$  anziché  $\mu(\{i\})$ ,  $\mu(\{i, j\})$ ,  $N \setminus \{i\}$ . Inoltre quando possibile indicheremo la cardinalità degli insiemi  $S$ ,  $T$  con le lettere minuscole  $s$ ,  $t$  anziché la notazione standard  $|S|$ ,  $|T|$ .

## 1.2 Misure di Choquet

Consideriamo  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  un insieme finito di  $n$  elementi che interagiscono tra loro. A seconda delle applicazioni, gli elementi di  $N$  possono rappresentare giocatori in un gioco cooperativo, agenti decisori in un problema di decisioni di gruppo, criteri in un problema di decisioni multicriterio.

**Definizione 1.1** Una *misura di Choquet discreta sull'insieme  $N$*  è una funzione  $\mu : \mathcal{P}(N) \rightarrow [0, 1]$  che soddisfa le seguenti condizioni:

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0, \mu(N) = 1$  (condizioni di frontiera);
- (ii)  $S \subseteq T \subseteq N \Rightarrow \mu(S) \leq \mu(T)$  (monotonia).

La quantità  $\mu(S)$ , dove  $S \subseteq N$ , rappresenta il peso di  $S$ , il valore della coalizione  $S$  senza gli altri elementi in  $N \setminus S$ .

Notiamo che se  $T = S \cup i$  la condizione di monotonia è equivalente a

$$\mu(S) \leq \mu(S \cup i) \quad i \in N, \quad S \subseteq N \setminus i$$

quindi, per la monotonia, aggiungendo un elemento ad una coalizione, il valore della coalizione non può diminuire.

Una misura di Choquet è detta

- *additiva* se  $\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T)$   $S, T \subseteq N$  con  $S \cap T = \emptyset$ ;
- *superadditiva* se  $\mu(S \cup T) \geq \mu(S) + \mu(T)$   $S, T \subseteq N$  con  $S \cap T = \emptyset$  dove la disuguaglianza è stretta per almeno una coppia  $S, T$ ;
- *subadditiva* se  $\mu(S \cup T) \leq \mu(S) + \mu(T)$   $S, T \subseteq N$  con  $S \cap T = \emptyset$  dove la disuguaglianza è stretta per almeno una coppia  $S, T$ .

In generale, per definire una misura di Choquet, occorre assegnare  $2^n - 2$  coefficienti, corrispondenti ai valori della misura sui  $2^n$  sottoinsiemi di  $N$ , eccetto  $\emptyset$  e  $N$ . Osserviamo però che, se la misura è additiva, il numero di coefficienti necessari per definire  $\mu$  è molto inferiore. Sono infatti sufficienti solo  $n - 1$  coefficienti: i valori  $\mu(1), \dots, \mu(n - 1)$ .

Vediamo un esempio di misura di Choquet dovuto a Murofushi e Sugeno [31].

**Esempio 1.1:** Indichiamo con  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  l'insieme dei lavoratori di un'azienda e supponiamo che producano gli stessi beni.

Definiamo sull'insieme  $N$  una funzione  $\mu : \mathcal{P}(N) \rightarrow [0, 1]$ : per ogni gruppo di lavoratori  $S \subseteq N$ , il valore  $\mu(S)$  rappresenta la quantità di beni prodotta in un'ora

dal gruppo  $S$ , rispetto alla quantità di beni prodotta in un'ora dalla totalità  $N$  dei lavoratori.

Supponiamo che ogni gruppo lavori nella maniera più efficiente: ciò fa sì che la funzione  $\mu$  sia monotona. Se infatti  $S$  e  $T$  sono due gruppi disgiunti di lavoratori tra i quali vi sono rapporti tesi, la loro produttività ne risente e può accadere che la quantità di beni prodotta in un'ora dal gruppo  $S \cup T$  sia inferiore alla quantità di beni che produrrebbe in un'ora il solo gruppo  $S$  o il solo gruppo  $T$ ,

$$\mu(S \cup T) < \mu(S) \quad \text{e/o} \quad \mu(S \cup T) < \mu(T).$$

Ma se i due gruppi lavorano nella maniera più efficiente allora

$$\mu(S \cup T) \geq \mu(S), \quad \mu(S \cup T) \geq \mu(T),$$

e la funzione  $\mu$  risulta essere monotona.

Si ha inoltre che  $\mu(\emptyset) = 0$  e  $\mu(N) = 1$ . La funzione  $\mu$  è quindi una misura di Choquet.

Notiamo che la misura di Choquet  $\mu$  non è necessariamente additiva. Se infatti  $S$  e  $T$  sono due gruppi disgiunti di lavoratori che lavorano separatamente, allora

$$\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T).$$

Ma poiché generalmente i lavoratori interagiscono tra loro, se vi è cooperazione tra i membri di  $S \cup T$ , allora

$$\mu(S \cup T) > \mu(S) + \mu(T),$$

mentre se vi è incompatibilità tra i membri di  $S$  e  $T$  e l'impossibilità di lavorare separatamente, allora

$$\mu(S \cup T) < \mu(S) + \mu(T).$$

### 1.3 Indici di Shapley

Sia  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  un insieme di  $n$  elementi. Vogliamo poter assegnare ad ogni elemento  $i$  in  $N$  un coefficiente che ne indichi il grado di importanza.

Sappiamo che il valore  $\mu(i)$  indica il peso di  $i$ , il suo valore senza gli altri elementi in  $N \setminus i$ , ma non ne misura l'importanza globale. Può infatti accadere che

- $\mu(i) = 0$ ,
- $\mu(T \cup i) \gg \mu(T)$  per molti  $T \subseteq N \setminus i$ ,

ossia  $i$  è un elemento non importante se considerato singolarmente, ma diviene importante all'interno di una coalizione. Per valutare l'importanza globale dell'elemento  $i$  non è quindi sufficiente considerare il valore  $\mu(i)$ , ma occorre determinare per ogni coalizione  $T$  che non contiene  $i$  il plusvalore che  $i$  porta a questa coalizione

$$\mu(T \cup i) - \mu(T) \quad T \subseteq N \setminus i \quad (1.1)$$

e farne una media al variare delle coalizioni.

Nel 1992 Murofushi [28] propose, nell'ambito della Teoria delle Decisioni multicriterio, l'uso di un indice di importanza introdotto nel 1953 da Shapley [40] in Teoria dei Giochi definendo l' *indice di potere di Shapley* per ogni elemento  $i$ .

**Definizione 1.2** Sia  $\mu$  una misura di Choquet su  $N$ . L'*indice di potere di Shapley* (o *valore di Shapley*) per ogni  $i \in N$  è definito da

$$\begin{aligned}\phi_\mu(i) &= \sum_{T \subseteq N \setminus i} \frac{(n-1-t)!t!}{n!} [\mu(T \cup i) - \mu(T)] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t}^{-1} \sum_{\substack{T \subseteq N \setminus i \\ |T|=t}} [\mu(T \cup i) - \mu(T)].\end{aligned}\quad (1.2)$$

Il valore di Shapley di un elemento  $i$  è quindi il contributo medio di  $i$  a tutte le possibili coalizioni, calcolato prima su tutte le coalizioni  $T \subseteq N \setminus i$  della stessa dimensione  $t$ , e poi su tutte le possibili dimensioni  $t \in \{0, \dots, n-1\}$ .

I valori di Shapley, per qualunque elemento  $i$  in  $N$ , sono sempre positivi e compresi nell'intervallo  $[0, 1]$ . Inoltre sono tali che

$$\sum_i \phi_\mu(i) = 1. \quad (1.3)$$

Notiamo poi che se  $\mu$  è una misura additiva

$$\mu(T \cup i) - \mu(T) = \mu(i) \quad i \in N, \quad T \subseteq N \setminus i \quad (1.4)$$

e il valore di Shapley dell'elemento  $i$  coincide con il valore  $\mu(i)$

$$\phi_\mu(i) = \mu(i) \quad i \in N. \quad (1.5)$$

La (1.5) non vale in generale per misure non additive. Ciò prova che è ragionevole cercare un coefficiente che indichi il grado di importanza di ogni elemento.

Vediamo ora una caratterizzazione dei valori di Shapley [23].

**Proposizione 1.1** I numeri  $\psi_\mu(i)$ , dove  $i \in N$  e  $\mu$  è una misura di Choquet su  $N$ ,

(i) sono lineari rispetto alla misura di Choquet  $\mu$ , i.e. esistono delle costanti  $p_T^i$  tali che

$$\psi_\mu(i) = \sum_{T \subseteq N} \mu(T) p_T^i$$

(ii) sono simmetrici, i.e.

$$\psi_\mu(i) = \psi_{\pi\mu}(\pi(i))$$

per ogni permutazione  $\pi$  su  $N$

(iii) soddisfano l'assioma dell'“elemento nullo”

$$\mu(T \cup i) = \mu(T) \quad \forall T \subseteq N \setminus i \quad \Rightarrow \quad \psi_\mu(i) = 0$$

(iv) soddisfano l'assioma di “efficienza”

$$\sum_{i=1}^n \psi_\mu(i) = 1$$

se e solo se  $\psi_\mu(i)$  sono i valori di Shapley.

Un altro concetto importante è il concetto di *interazione* tra elementi. Il valore di Shapley  $\phi_\mu(i)$  misura l'importanza dell'elemento  $i$ , ma non ci dà alcuna informazione su come l'elemento  $i$  interagisce con gli altri elementi.

Sappiamo che, se una misura di Choquet non è additiva, alcuni elementi interagiscono. Se, ad esempio,  $\mu(ij) \neq \mu(i) + \mu(j)$  tra gli elementi  $i$  e  $j$  c'è interazione.

In particolare:

- gli elementi  $i$  e  $j$  hanno *interazione positiva* quando il valore della coalizione  $ij$  è maggiore della somma dei valori individuali, ossia  $\mu(ij) > \mu(i) + \mu(j)$ ;
- gli elementi  $i$  e  $j$  hanno *interazione negativa* quando il valore della coalizione  $ij$  è minore della somma dei valori individuali, ossia  $\mu(ij) < \mu(i) + \mu(j)$ ;
- gli elementi  $i$  e  $j$  non interagiscono quando il valore della coalizione  $ij$  è uguale alla somma dei valori individuali, ossia  $\mu(ij) = \mu(i) + \mu(j)$ .

Per valutare l'interazione tra due elementi  $i$  e  $j$  dovremo confrontare il contributo che  $j$  porta ad una coalizione in presenza di  $i$ , con il contributo che  $j$  porta ad una coalizione in assenza di  $i$ , per tutte le possibili coalizioni.

Se allora consideriamo una coppia di elementi  $\{i, j\} \subset N$  può accadere che

- $\mu(ij) \neq \mu(i) + \mu(j)$ ,
- $\mu(T \cup ij) - \mu(T \cup i) \neq \mu(T \cup j) - \mu(T)$  per molti  $T \subseteq N \setminus \{i, j\}$ ,

ossia gli elementi  $i$  e  $j$  interagiscono, positivamente o negativamente, ed il contributo che  $j$  porta ad una coalizione  $T$ , che non contiene  $i$  e  $j$ , in presenza di  $i$  è differente dal contributo portato alla stessa coalizione in assenza di  $i$ .

Per avere informazioni riguardo all'interazione tra i due elementi  $i$  e  $j$ , non è quindi sufficiente confrontare  $\mu(ij)$  con  $\mu(i)$  e  $\mu(j)$  ma, analogamente a quanto visto per il valore di Shapley, dovremo considerare la media su tutte le possibili coalizioni  $T \subseteq N \setminus \{i, j\}$  di

$$\mu(T \cup ij) - \mu(T \cup i) - \mu(T \cup j) + \mu(T). \quad (1.6)$$

Nel 1993 Murofushi e Soneda [29] hanno proposto la seguente definizione di *indice di interazione di Shapley* tra due elementi  $i$  e  $j$

**Definizione 1.3** Sia  $\mu$  una misura di Choquet su  $N$  e  $i$  e  $j$  due elementi di  $N$ . L'*indice di interazione di Shapley* tra gli elementi  $i$  e  $j$  è definito da

$$\begin{aligned} I_\mu(ij) &= \sum_{T \subseteq N \setminus \{i,j\}} \frac{(n-2-t)!t!}{(n-1)!} [\mu(T \cup ij) - \mu(T \cup i) - \mu(T \cup j) + \mu(T)] \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{t=0}^{n-2} \binom{n-2}{t}^{-1} \sum_{\substack{T \subseteq N \setminus \{i,j\} \\ |T|=t}} [\mu(T \cup ij) - \mu(T \cup i) - \mu(T \cup j) + \mu(T)]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

L'indice di interazione tra due elementi  $i$  e  $j$  è quindi il valor medio dell'interazione marginale  $\mu(T \cup ij) - \mu(T \cup i) - \mu(T \cup j) + \mu(T)$  calcolato prima su tutte le coalizioni  $T \subseteq N \setminus \{i, j\}$  della stessa dimensione  $t$ , e poi su tutte le possibili dimensioni  $t \in \{0, \dots, n-2\}$ .

Gli indici di interazione, tra due qualunque elementi  $i$  e  $j$  in  $N$ , possono essere positivi o negativi: quando  $I_\mu(ij)$  è positivo diremo che l'interazione tra  $i$  e  $j$  è positiva, quando  $I_\mu(ij)$  è negativo diremo che l'interazione tra  $i$  e  $j$  è negativa.

Notiamo poi che se  $\mu$  è una misura additiva

$$\mu(T \cup ij) - \mu(T \cup i) - \mu(T \cup j) + \mu(T) = 0 \quad i, j \in N, \quad T \subseteq N \setminus \{i, j\} \quad (1.8)$$

e gli indici di interazione sono nulli

$$I_\mu(ij) = 0 \quad i, j \in N. \quad (1.9)$$

La definizione di indice di interazione di Shapley è stata estesa nel 1997 da Grabisch [14] ad una qualsiasi coalizione  $S \subseteq N$  nel modo seguente:

**Definizione 1.4** Sia  $\mu$  una misura di Choquet su  $N$ . L'*indice di interazione di Shapley* per un qualunque sottoinsieme  $S \subseteq N$  è definito da

$$I_\mu(S) = \sum_{T \subseteq N \setminus S} \frac{(n-s-t)!t!}{(n-s+1)!} \sum_{L \subseteq S} (-1)^{s-l} \mu(L \cup T). \quad (1.10)$$

Notiamo che si tratta di una generalizzazione sia del valore di Shapley che dell'indice di interazione di Shapley. Infatti

$$I_\mu(S) = \begin{cases} \phi_\mu(i) & S = \{i\} \\ I_\mu(ij) & S = \{i, j\} \end{cases} \quad (1.11)$$



## 1.4 Indici di Banzhaf

Un altro indice di importanza, usato meno frequentemente, è dovuto a Banzhaf [1]. Tale indice prende il nome di *indice di potere di Banzhaf* e rappresenta un'alternativa al valore di Shapley.

**Definizione 1.5** Sia  $\mu$  una misura di Choquet su  $N$ . L'*indice di potere di Banzhaf* (o *valore di Banzhaf*) per ogni  $i \in N$  è definito da

$$\phi_{\mu}^B(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{T \subseteq N \setminus i} [\mu(T \cup i) - \mu(T)]. \quad (1.12)$$

Il valore di Banzhaf di un elemento  $i$  è quindi il contributo medio di  $i$  a tutte le possibili coalizioni  $T \subseteq N \setminus i$ . Notiamo che se  $\mu$  è una misura additiva

$$\mu(T \cup i) - \mu(T) = \mu(i) \quad i \in N, \quad T \subseteq N \setminus i \quad (1.13)$$

e, come per il valore di Shapley, anche il valore di Banzhaf dell'elemento  $i$  coincide con il valore  $\mu(i)$

$$\phi_{\mu}^B(i) = \mu(i) \quad i \in N. \quad (1.14)$$

Gli indici di potere di Banzhaf, per qualunque elemento  $i$  in  $N$ , sono sempre positivi ed assumono valori compresi nell'intervallo  $[0, 1]$ , ma a differenza dei valori di Shapley, non sommano ad uno, nè ad alcun numero fissato

$$\sum_i \phi_{\mu}^B(i) \neq 1. \quad (1.15)$$

La definizione di valore di Banzhaf è stata estesa da Roubens [33] che ha definito l'*indice di interazione di Banzhaf* per una coalizione  $S \subseteq N$  nel modo seguente:

**Definizione 1.6** Sia  $\mu$  una misura di Choquet su  $N$ . L'*indice di interazione di Banzhaf* per un qualunque sottoinsieme  $S \subseteq N$  è definito da

$$I_{\mu}^B(S) = \frac{1}{2^{n-s}} \sum_{T \subseteq N \setminus S} \sum_{L \subseteq S} (-1)^{s-l} \mu(L \cup T). \quad (1.16)$$

In particolare l'indice di interazione di Banzhaf tra due elementi  $i$  e  $j$  è dato da

$$I_{\mu}^B(ij) = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{T \subseteq N \setminus \{i,j\}} [\mu(T \cup ij) - \mu(T \cup i) - \mu(T \cup j) + \mu(T)]$$

Notiamo che si tratta di una generalizzazione del valore di Banzhaf. Infatti

$$I_{\mu}^B(S) = \phi_{\mu}^B(i) \quad \text{se } S = \{i\}.$$

## 1.5 Rappresentazioni di una misura di Choquet

Esistono differenti rappresentazioni tra loro equivalenti di una misura di Choquet. Queste rappresentazioni sono delle altre funzioni sull'insieme delle parti di  $N$ , quindi del tipo  $\nu : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathfrak{R}$ , il cui contenuto informativo è lo stesso della misura  $\mu$ . In altre parole due rappresentazioni sono equivalenti se una è ottenibile a partire dall'altra.

Un primo esempio di rappresentazione equivalente è dato dalla **trasformata di Möbius** (Rota [32]).

**Definizione 1.7** *Sia  $\mu$  una misura di Choquet su  $N$ . La trasformata di Möbius di  $\mu$  è data da*

$$m_\mu(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{s-t} \mu(T) \quad T \subseteq N. \quad (1.17)$$

In particolare si ha

$$m_\mu(\emptyset) = 0, \quad m_\mu(i) = \mu(i), \quad m_\mu(ij) = \mu(ij) - \mu(i) - \mu(j), \quad \text{etc.} \quad (1.18)$$

Dalla trasformata di Möbius  $m_\mu$  è possibile risalire alla misura di Choquet  $\mu$  attraverso la cosiddetta *trasformata zeta*

$$\mu(S) = \sum_{T \subseteq S} m_\mu(T) \quad S \subseteq N. \quad (1.19)$$

In particolare si ha

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(i) = m_\mu(i), \quad \mu(ij) = m_\mu(i) + m_\mu(j) + m_\mu(ij), \quad \text{etc.} \quad (1.20)$$

È possibile, in generale, definire una trasformata di Möbius  $m_\mu$  per una qualsiasi funzione  $\mu : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathfrak{R}$  e non solo per misure di Choquet.

Perché un insieme di  $2^n$  coefficienti  $\{m_\mu(T) \mid T \subseteq N\}$  sia una trasformata di Möbius di una misura di Choquet dobbiamo imporre alcune condizioni di frontiera e monotonia. Tali condizioni le vediamo nel seguente risultato dovuto a Chateaufeuf e Jaffray [4]:

**Proposizione 1.2** *Un insieme di  $2^n$  coefficienti  $m_\mu(T)$ ,  $T \subseteq N$  corrisponde ad una rappresentazione di Möbius di una misura di Choquet se e solo se*

- (i)  $m_\mu(\emptyset) = 0, \quad \sum_{T \subseteq N} m_\mu(T) = 1;$
- (ii)  $\sum_{T \mid i \in T \subseteq S} m_\mu(T) \geq 0 \quad \forall S \subseteq N, \forall i \in S.$

Come la rappresentazione di Möbius anche gli **indici di interazione di Shapley** costituiscono una rappresentazione equivalente di una misura di Choquet. Le formule di conversione tra le differenti rappresentazioni sono le seguenti ricavate da Grabisch [14].

	$\mu(S)$	$m_\mu(S)$	$I_\mu(S)$
$\mu(S)$	$\mu(S)$	$\sum_{T \subseteq S} m_\mu(T)$	$\sum_{T \subseteq N} \beta_{ S \cap T }^t I_\mu(T)$
$m_\mu(S)$	$\sum_{T \subseteq S} (-1)^{s-t} \mu(T)$	$m_\mu(S)$	$\sum_{T \subseteq N \setminus S} \alpha_t I_\mu(T \cup S)$
$I_\mu(S)$	$\sum_{T \subseteq N \setminus S} \frac{(n-s-t)! t!}{(n-s+1)!} \sum_{L \subseteq S} (-1)^{s-l} \mu(L \cup T)$	$\sum_{T \subseteq N \setminus S} \frac{m_\mu(T \cup S)}{t+1}$	$I_\mu(S)$

Tabella 1.1: Tavola di conversione tra  $\mu$ ,  $m_\mu$  e  $I_\mu$ .

I numeri  $\alpha_k$  sono calcolati ricorsivamente attraverso

$$\alpha_k = - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\alpha_l}{k-l+1} \binom{k}{l} \quad k > 0$$

partendo da  $\alpha_0 = 1$ . I primi termini della sequenza sono  $\alpha_1 = -1/2$ ,  $\alpha_2 = 1/6$ ,  $\alpha_3 = 0$ ,  $\alpha_4 = -1/30$ ,  $\alpha_5 = 0$ , dove  $\alpha_{2k+1} = 0$  per ogni  $k > 0$ .

I numeri  $\beta_k^l$  sono definiti a partire dagli  $\alpha_k$  come

$$\beta_k^l = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \alpha_{l-j}.$$

I primi valori di  $\beta_k^l$  sono

$k \setminus l$	0	1	2	3	4
0	1	-1/2	1/6	0	-1/30
1		1/2	-1/3	1/6	-1/30
2			1/6	-1/6	2/15
3				0	-1/30
4					-1/30

Un altro esempio di rappresentazione equivalente di una misura di Choquet è dato dagli **indici di interazione di Banzhaf**. Le formule di conversione tra  $\mu$ ,  $m_\mu$  e  $I_\mu^B$  sono le seguenti ricavate da Roubens [33]

	$\mu(S)$	$m_\mu(S)$
$I_\mu^B(S)$	$\frac{1}{2^{n-s}} \sum_{T \subseteq N \setminus S} \sum_{L \subseteq S} (-1)^{s-l} \mu(L \cup T)$	$\sum_{T \subseteq N \setminus S} \frac{m_\mu(T \cup S)}{2^t}$

	$I_\mu^B(S)$
$\mu(S)$	$\sum_{T \subseteq N} \frac{1}{2^t} (-1)^{t-s} I_\mu^B(T)$
$m_\mu(S)$	$\sum_{T \subseteq N \setminus S} (-1/2)^t I_\mu^B(T \cup S)$

Tabella 1.2: Tavole di conversione tra  $\mu$ ,  $m_\mu$  e  $I_\mu^B$ .

È possibile, in generale, definire degli indici di interazione di Shapley e di Banzhaf per una qualsiasi funzione  $\mu : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathfrak{R}$  e non solo per misure di Choquet.

Perché gli insiemi di  $2^n$  coefficienti  $\{I_\mu(T) \mid T \subseteq N\}$  e  $\{I_\mu^B(T) \mid T \subseteq N\}$  siano rispettivamente indici di interazione di Shapley e indici di interazione di Banzhaf di una misura di Choquet, dobbiamo imporre alcune condizioni di frontiera e monotonia.

Nella seguente proposizione dovuta a Grabisch [14] vediamo le condizioni per gli indici di interazione di Shapley

**Proposizione 1.3** *Un insieme di  $2^n$  coefficienti  $I_\mu(T)$ ,  $T \subseteq N$  corrisponde ad una rappresentazione attraverso gli indici di interazione di Shapley di una misura di Choquet se e solo se*

$$(i) \sum_{T \subseteq N} \alpha_t I_\mu(T) = 0;$$

$$(ii) \sum_{i \in N} I_\mu(i) = 1;$$

$$(iii) \sum_{T \subseteq N \setminus i} \beta_{|T \cap S|}^t I_\mu(T \cup i) \geq 0 \quad \forall i \in N \quad \forall S \subseteq N \setminus i.$$

Nella seguente proposizione dovuta a Roubens [19] vediamo le condizioni per gli indici di interazione di Banzhaf

**Proposizione 1.4** *Un insieme di  $2^n$  coefficienti  $I_\mu^B(T)$ ,  $T \subseteq N$  corrisponde ad una rappresentazione attraverso gli indici di interazione di Banzhaf di una misura di Choquet se e solo se*

$$\begin{aligned} (i) \quad & \sum_{T \subseteq N} (-1/2)^t I_\mu^B(T) = 0; \\ (ii) \quad & \sum_{T \subseteq N} \frac{1}{2^t} I_\mu^B(T) = 1; \\ (iii) \quad & \sum_{T \subseteq N \setminus i} \frac{1}{2^t} (-1)^{t-s} I_\mu^B(T \cup i) \geq 0 \quad \forall i \in N \quad \forall S \subseteq N \setminus i. \end{aligned}$$

## 1.6 Misure di Choquet $k$ -additive

Le misure di Choquet sono uno strumento molto potente in Teoria delle Decisioni perché ci permettono di modellizzare l'importanza delle coalizioni, ma allo stesso tempo sono difficili da trattare.

Definire una misura di Choquet su un insieme  $N$  di  $n$  elementi, richiede  $2^n$  coefficienti, corrispondenti ai valori della misura sui  $2^n$  sottoinsiemi di  $N$ . Tali coefficienti devono comunque soddisfare alle condizioni di frontiera e monotonia. In un problema di decisioni che coinvolge  $n$  elementi, non sempre il decisore è in grado di assegnare i  $2^n$  coefficienti per definire una misura di Choquet  $\mu$  su ogni coalizione. Spesso riesce ad assegnare un valore ai singletons ed alle coppie di elementi, ma non alle coalizioni con più elementi.

Al contrario, il significato dei valori  $\mu(T)$  non è sempre chiaro per il decisore; data una misura di Choquet  $\mu$ , risulta spesso difficile riuscire ad interpretarla.

Si può ridurre la complessità utilizzando misure di Choquet additive, che possono essere definite con soli  $n$  coefficienti, ma in tal caso oltre alla complessità si perde anche gran parte della ricchezza di queste misure.

Grabisch [14] propone delle soluzioni intermedie definendo delle misure di Choquet additive di ordine  $k$ .

**Definizione 1.8** *Una misura di Choquet  $\mu$  si dice **additiva di ordine  $k$**  (o semplicemente una misura  $k$ -additiva) se  $m_\mu(S) = 0$  per ogni  $S$  tale che  $s > k$ , ed esiste almeno un sottoinsieme  $T$  di  $k$  elementi tale che  $m_\mu(T) \neq 0$ .*

Variando  $k$  da 1 a  $n$  possiamo ricoprire tutte le possibili misure di Choquet, da quelle additive ( $k = 1$ ) definite da  $n$  coefficienti, a quelle più generali ( $k = n$ ) definite da  $2^n$  coefficienti.

L'importanza delle misure di Choquet  $k$ -additive, per  $k < n$ , sta nel fatto che per essere definite necessitano di un numero di coefficienti inferiore a  $2^n$ : solo  $n$  coefficienti per  $k = 1$ ,  $n + \binom{n}{2}$  coefficienti per  $k = 2$  ed in generale  $\sum_{j=1}^k \binom{n}{j}$  coefficienti per  $k < n$ .

Di particolare interesse nelle applicazioni sono le misure di Choquet 2-additive le quali, pur rimanendo molto semplici e con un numero limitato di coefficienti, permettono di modellizzare le interazioni tra gli elementi di  $N$ .

Per tali misure si ha

$$\begin{aligned}\mu(S) &= \sum_{i \in S} m_\mu(i) + \sum_{\{i,j\} \subseteq S} m_\mu(ij) \\ &= \sum_{\{i,j\} \subseteq S} \mu(ij) - (s-2) \sum_{i \in S} \mu(i) \quad S \subseteq N \quad s \geq 2\end{aligned}\quad (1.21)$$

e sono quindi determinate solamente dai coefficienti  $\mu(i)$  e  $\mu(ij)$ .

Esprimendo gli indici di interazione di Shapley e di Banzhaf in funzione della rappresentazione di Möbius, si può facilmente provare [15] la seguente proposizione

**Proposizione 1.5** *Sia  $\mu$  una misura di Choquet  $k$ -additiva su  $N$ . Allora:*

- (i)  $I_\mu(S) = I_\mu^B(S) = m_\mu(S)$  per ogni  $S \subseteq N$  tale che  $|S| = k$ ;
- (ii)  $I_\mu(S) = 0$  per ogni  $S \subseteq N$  tale che  $|S| > k$ ;
- (iii) se  $\mu$  è una misura 2-additiva,  $I_\mu(S) = I_\mu^B(S)$  per ogni  $S \subseteq N$ .

## Capitolo 2

# Integrali rispetto ad una misura di Choquet

### 2.1 Introduzione

L'operatore di aggregazione più conosciuto e più utilizzato nelle applicazioni è l'operatore di media pesata. Tale operatore permette di tener conto nell'aggregazione della diversità di importanza dei vari elementi utilizzando pesi differenti. L'operatore di media pesata, però, non è in grado di modellizzare l'interazione tra gli elementi e non è quindi un aggregatore appropriato in presenza di elementi che interagiscono. Una generalizzazione di tale aggregatore è data dall'integrale di Choquet discreto in cui il vettore dei pesi è sostituito da una misura di Choquet  $\mu$  che assegna un peso ad ogni coalizione di elementi.

In questo capitolo introduciamo gli integrali di Choquet, che noi considereremo nel solo caso discreto, con le loro proprietà e alcune caratterizzazioni: consideriamo poi, come particolari integrali di Choquet, gli operatori di media pesata e gli operatori OWA. Infine introduciamo un altro integrale rispetto ad una misura di Choquet: l'integrale di Shapley.

### 2.2 Integrali di Choquet

L'integrale di Choquet fu proposto in Teoria delle Decisioni da Schmeidler [38], come integrale rispetto ad una misura di probabilità non additiva, e successivamente da Murofushi e Sugeno [30], come integrale rispetto ad una misura fuzzy, utilizzando la definizione di integrale rispetto ad una capacità introdotta nel 1953 da Choquet [5].

Sia  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  un insieme finito di elementi che interagiscono tra di loro. Ad ogni elemento  $i \in N$  è associata una quantità  $x_i \in \mathfrak{R}$ . Si vogliono aggregare le quantità  $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{R}$ .

**Definizione 2.1** Sia  $\mu$  una misura di Choquet su  $N$ . Si definisce *integrale di Choquet* del vettore di valori  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n$  rispetto a  $\mu$  la quantità

$$\begin{aligned} C_\mu(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n x_{(i)} [\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})] \\ &= \sum_{i=1}^n [x_{(i)} - x_{(i-1)}] \mu(A_{(i)}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

dove  $(\cdot)$  indica una permutazione su  $N$  tale che  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  e  $x_{(0)} = 0$ . Inoltre  $A_{(i)} = \{(i), \dots, (n)\}$  e  $A_{(n+1)} = \emptyset$ .

**Esempio 2.1:** Sia  $N = \{1, 2, 3\}$  e  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  con  $x_2 < x_3 < x_1$ .

Allora

$$x_{(1)} = x_2 \quad x_{(2)} = x_3 \quad x_{(3)} = x_1.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} A_{(1)} &= \{(1), (2), (3)\} = \{2, 3, 1\}, & A_{(2)} &= \{(2), (3)\} = \{3, 1\}, \\ A_{(3)} &= \{(3)\} = \{1\}, & A_{(4)} &= \emptyset. \end{aligned}$$

L' integrale di Choquet del vettore di valori  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  è quindi

$$\begin{aligned} C_\mu(\mathbf{x}) &= [\mu(A_{(1)}) - \mu(A_{(2)})] x_{(1)} + [\mu(A_{(2)}) - \mu(A_{(3)})] x_{(2)} \\ &\quad + [\mu(A_{(3)}) - \mu(A_{(4)})] x_{(3)} \\ &= [\mu(231) - \mu(31)] x_2 + [\mu(31) - \mu(1)] x_3 + [\mu(1) - \mu(\emptyset)] x_1. \end{aligned}$$

Notiamo che se i valori da aggregare appartengono ad un intervallo  $[a, b] \subset \mathfrak{R}$ , anche il valore aggregato risulterà in  $[a, b]$ , ossia

$$C_\mu : [a, b]^n \longrightarrow [a, b].$$

Generalmente, nelle applicazioni, si considerano valori da aggregare appartenenti all'intervallo  $[0, 1]$ .

In tal caso si avrà

$$C_\mu : [0, 1]^n \longrightarrow [0, 1].$$

Vediamo un esempio di integrale di Choquet dovuto a Murofushi e Sugeno [31].

**Esempio 2.2** (Continua dall'Esempio 1.1): Sia  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  l'insieme dei lavoratori di un'azienda. In un giorno ogni lavoratore  $i$  lavora  $x_i$  ore. Indichiamo con  $(\cdot)$  una permutazione su  $N$  tale che

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}.$$



Allora per  $(i) > (2)$

$$x_{(i)} - x_{(i-1)} \geq 0$$

e

$$x_{(i)} = x_{(1)} + [x_{(2)} - x_{(1)}] + [x_{(3)} - x_{(2)}] + \dots + [x_{(i)} - x_{(i-1)}].$$

Uniamo i lavoratori in gruppi a seconda delle ore lavorate.

Il gruppo  $\{(1), (2), \dots, (n)\}$  lavora  $x_{(1)}$  ore, il gruppo  $\{(2), (3), \dots, (n)\}$  lavora  $x_{(2)} - x_{(1)}$  ore, il gruppo  $\{(3), (4), \dots, (n)\}$  lavora  $x_{(3)} - x_{(2)}$  ore,  $\dots$ , il gruppo  $\{(n)\}$  lavora  $x_{(n)} - x_{(n-1)}$  ore. Poichè ogni gruppo  $S \subset N$  produce in un'ora una quantità di beni pari a  $\mu(S)$ , il numero totale di beni prodotto dai lavoratori è dato da

$$\begin{aligned} & x_{(1)} \mu\{(1) \dots (n)\} \\ & + [x_{(2)} - x_{(1)}] \mu\{(2) \dots (n)\} \\ & + [x_{(3)} - x_{(2)}] \mu\{(3) \dots (n)\} \\ & + \dots \\ & = \sum_{i=1}^n [x_{(i)} - x_{(i-1)}] \mu(A_{(i)}) \end{aligned}$$

dove  $x_{(0)} = 0$  e  $A_{(i)} = \{(i), \dots, (n)\}$ .

È questo l'integrale di Choquet di  $(x_1, \dots, x_n)$  rispetto alla misura  $\mu$ .

Vogliamo ora dare un rappresentazione grafica dell'integrale di Choquet.

**Esempio 2.3:** Supponiamo per semplicità sia  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ . Allora l'integrale di Choquet di  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  è dato da

$$C_{\mu}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^4 [x_{(i)} - x_{(i-1)}] \mu(A_{(i)}) = \boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + \boxed{4}$$

dove

$$\boxed{1} = [x_{(1)} - x_{(0)}] \mu\{(1)(2)(3)(4)\}$$

$$\boxed{2} = [x_{(2)} - x_{(1)}] \mu\{(2)(3)(4)\}$$

$$\boxed{3} = [x_{(3)} - x_{(2)}] \mu\{(3)(4)\}$$

$$\boxed{4} = [x_{(4)} - x_{(3)}] \mu\{(4)\}$$

ed è rappresentato graficamente nella figura seguente.

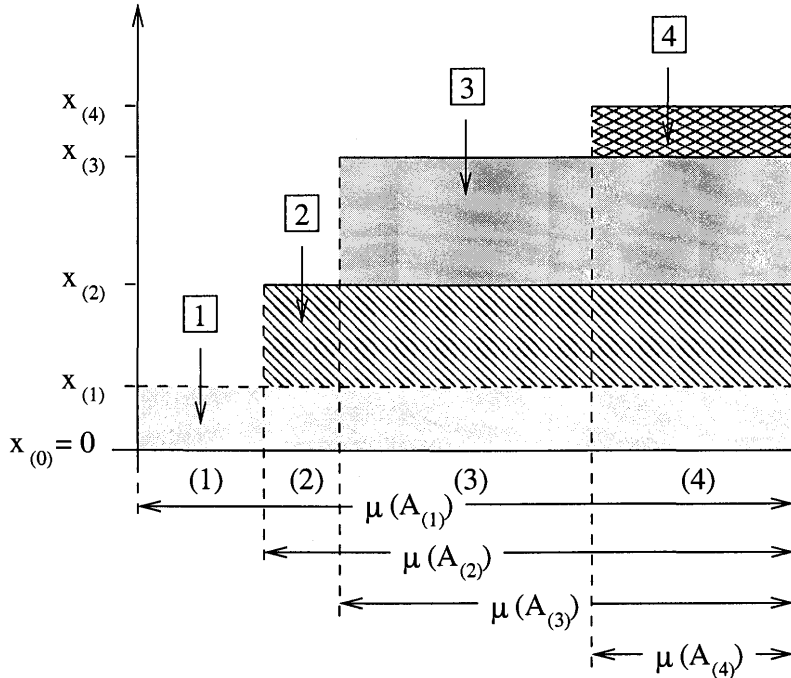


Figura 2.1: L'integrale di Choquet di  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ .

### 2.3 Proprietà e caratterizzazione

Vediamo ora le principali proprietà degli integrali di Choquet come operatore di aggregazione. Uno studio approfondito di tali proprietà, comprese le dimostrazioni, si può trovare in [13, 17].

**Proprietà 1. (Idempotenza):** Per ogni integrale di Choquet si ha che

$$C_\mu(a, \dots, a) = a.$$

In molte applicazioni è desiderabile che un operatore di aggregazione soddisfi questa proprietà di *unanimità*, ossia se tutti i valori  $x_i$  da aggregare sono uguali, l'operatore restituisce il valore comune.

**Proprietà 2. (Monotonia rispetto all'integrando):** Siano  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$  due vettori di valori e  $\mu$  una misura di Choquet su  $N$ . Allora

$$x_i \leq x'_i \quad i \in N \quad \Rightarrow \quad C_\mu(x_1, \dots, x_n) \leq C_\mu(x'_1, \dots, x'_n).$$

Ogni integrale di Choquet presenta una risposta non negativa ad un qualunque incremento nei valori da aggregare: aumentando anche uno solo dei valori  $x_i$ , il risultato dell'aggregazione non decresce.

**Proprietà 3.** (*Monotonia rispetto alla misura*): Siano  $\mu$  e  $\mu'$  due misure di Choquet su  $N$ . Allora

$$\mu(T) \leq \mu'(T) \quad T \subseteq N \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}_\mu(x_1, \dots, x_n) \leq \mathcal{C}_{\mu'}(x_1, \dots, x_n).$$

**Proprietà 4.** Per le particolari misure

$$\mu_{min}(T) = \begin{cases} 1 & T = N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\mu_{max}(T) = \begin{cases} 1 & T \neq \emptyset \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

l'integrale di Choquet si riduce rispettivamente all'operatore minimo e massimo

$$\mathcal{C}_{\mu_{min}}(x_1, \dots, x_n) = \min(x_1, \dots, x_n), \quad \mathcal{C}_{\mu_{max}}(x_1, \dots, x_n) = \max(x_1, \dots, x_n).$$

Dalle proprietà 3. e 4. segue immediatamente la seguente

**Proprietà 5.** L'integrale di Choquet è compreso tra min e max

$$\min(x_1, \dots, x_n) \leq \mathcal{C}_\mu(x_1, \dots, x_n) \leq \max(x_1, \dots, x_n).$$

**Proprietà 6.** L'integrale di Choquet, rispetto ad una misura additiva  $\mu$ , coincide con la media pesata (integrale di Lebesgue discreto)

$$\mathcal{C}_\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \mu(i).$$

**Proprietà 7.** (*Continuità*)[20]: Per ogni misura di Choquet, l'integrale di Choquet è un operatore continuo.

L'integrale di Choquet non presenta quindi alcuna reazione caotica a piccole variazioni dei valori da aggregare.

**Proprietà 8.** (*Stabilità sotto trasformazioni affini non negative*): Per ogni integrale di Choquet si ha che

$$\mathcal{C}_\mu(rx_1 + t, \dots, rx_n + t) = r\mathcal{C}_\mu(x_1, \dots, x_n) + t \quad r > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

In generale l'integrale di Choquet non è additivo, ma risulta additivo per vettori di valori comonotoni.

**Definizione 2.2** Due vettori di valori  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathfrak{R}^n$  si dicono **comonotoni** se esiste una permutazione  $\pi$  tale che

$$x_{\pi(1)} \leq \dots \leq x_{\pi(n)} \quad e \quad x'_{\pi(1)} \leq \dots \leq x'_{\pi(n)}.$$

La permutazione  $\pi$  ordina quindi le componenti di  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$  simultaneamente.

Un altro modo per dire che  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$  sono comonotoni è

$$(x_i - x_j)(x'_i - x'_j) \geq 0 \quad i, j \in N.$$

**Proprietà 9.** (*Additività comonotona*): Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathfrak{R}^n$  due vettori di valori comonotoni. Allora

$$\mathcal{C}_\mu(x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n) = \mathcal{C}_\mu(x_1, \dots, x_n) + \mathcal{C}_\mu(x'_1, \dots, x'_n).$$

**Definizione 2.3** Una matrice  $\mathbf{X} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  è **ordinata** se i suoi elementi sono tali che

$$x_{ij} \leq x_{kl} \quad i \leq k, \quad j \leq l.$$

La matrice è detta **ordinabile** se è possibile renderla ordinata permutando alcune righe e/o alcune colonne.

**Proprietà 10.** (*Bisimmetria per matrici ordinabili*): Per ogni integrale di Choquet si ha che

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}_\mu([\mathcal{C}_\mu([x_{11}, \dots, x_{1n}]_{\pi'}), \dots, \mathcal{C}_\mu([x_{n1}, \dots, x_{nn}]_{\pi'})]_{\pi}) \\ &= \mathcal{C}_\mu([\mathcal{C}_\mu([x_{11}, \dots, x_{n1}]_{\pi}), \dots, \mathcal{C}_\mu([x_{1n}, \dots, x_{nn}]_{\pi})]_{\pi'}). \end{aligned}$$

per ogni permutazione  $\pi$  e  $\pi'$  e ogni matrice ordinata

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ogni integrale di Choquet può essere scritto in una forma equivalente attraverso la trasformata di Möbius. Vale infatti [21, 4] la seguente

**Proposizione 2.1** Ogni integrale di Choquet  $\mathcal{C}_\mu$  può essere scritto come

$$\mathcal{C}_\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{T \subseteq N} a_T \min_{i \in T} (x_i) \quad (2.2)$$

dove  $a_T$  coincide con  $m_\mu(T)$ , la trasformata di Möbius di  $\mu$ .

Inoltre, ogni integrale di Choquet può essere scritto nella forma

$$\sum_{T \subseteq N} \alpha_T \max_{i \in T}(x_i).$$

Vale infatti [21] la seguente

**Proposizione 2.2** *Ogni integrale di Choquet  $C_\mu$  può essere scritto come*

$$C_\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{T \subseteq N} \alpha_T \max_{i \in T}(x_i) \quad (2.3)$$

dove  $\alpha_T$  coincide con  $m_{\mu^*}(T)$ , la trasformata di Möbius della misura duale  $\mu^*$ .

(Per la definizione di misura duale si veda cap.5).

L' integrale di Choquet è stato caratterizzato da parecchi autori (Schmeidler [38], Grabisch et al. [17], Marichal [21]). Vediamo di seguito alcune caratterizzazioni dovute prevalentemente a Marichal.

**Proposizione 2.3** *Un operatore  $M : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  soddisfa le proprietà di*

- (i) *monotonia rispetto all'integrando;*
- (ii) *stabilità sotto trasformazioni affini non negative;*
- (iii) *additività comonotona;*

se e solo se esiste una misura di Choquet  $\mu$  su  $N$  tale che  $M = C_\mu$ .

**Proposizione 2.4** *Un operatore  $M : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  soddisfa le proprietà di*

- (i) *monotonia rispetto all'integrando;*
- (ii) *stabilità sotto trasformazioni affini non negative;*
- (iii) *bisimmetria per matrici ordinabili;*

se e solo se esiste una misura di Choquet  $\mu$  su  $N$  tale che  $M = C_\mu$ .

Una terza caratterizzazione comprende altre due proprietà dell'integrale di Choquet: la linearità rispetto ad una misura di Choquet ed il fatto che l'integrale di Choquet sia un' estensione della misura di Choquet associata.

**Definizione 2.4** *Un operatore  $M_\mu : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  che dipende da una misura di Choquet  $\mu$  su  $N$  è **lineare rispetto a  $\mu$**  se per ogni  $k \in \mathbb{N}_0$ , se  $\mu^1, \dots, \mu^k$  e  $\mu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu^i$  ( $\alpha_i \in \mathfrak{R}$ ) sono misure di Choquet su  $N$  allora*

$$M_\mu = \sum_{i=1}^k \alpha_i M_{\mu^i}.$$

**Definizione 2.5** Un operatore  $M_\mu : \mathfrak{R}^n \longrightarrow \mathfrak{R}$  che dipende da una misura di Choquet  $\mu$  su  $N$  è una estensione di  $\mu$  se

$$M_\mu(e_S) = \mu(S) \quad S \subseteq N$$

dove  $e_S$  è il vettore caratteristico di  $S \subseteq N$  in  $\{0, 1\}^n$  definito da

$$e_S(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n \quad \text{con} \quad x_i = 1 \Leftrightarrow i \in S.$$

**Proposizione 2.5** Un operatore  $M_\mu : \mathfrak{R}^n \longrightarrow \mathfrak{R}$ , che dipende da una misura di Choquet  $\mu$  su  $N$ , soddisfa le seguenti proprietà

- (i) monotonìa rispetto all'integrando;
- (ii) stabilità sotto trasformazioni affini non negative;
- (iii) linearità rispetto alla misura di Choquet  $\mu$ ;
- (iv) è un' estensione di  $\mu$ ;

se e solo se  $M_\mu$  è l'integrale di Choquet.

## 2.4 Casi Particolari

Esaminiamo ora le due principali sottoclassi degli integrali di Choquet: gli operatori di media pesata e gli operatori OWA.

### 2.4.1 Media pesata

L'operatore di aggregazione più conosciuto e più utilizzato nelle applicazioni è la media pesata (weighted averaging WA).

**Definizione 2.6** Per ogni vettore di pesi  $w = (w_1, \dots, w_n) \in [0, 1]^n$  tale che

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

l'operatore *media pesata* associato ad  $w$  è definito da

$$\mathcal{W}_w(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i w_i. \quad (2.4)$$

Un operatore WA permette di tener conto nell'aggregazione della diversità di importanza degli elementi, utilizzando per i valori da aggregare pesi differenti.

Il seguente risultato [11] mostra che esiste una corrispondenza biunivoca tra gli integrali di Choquet rispetto ad una misura additiva e gli operatori WA.

**Proposizione 2.6** Sia  $\mu$  una misura di Choquet. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i)  $\mu$  è additiva;
- (ii) esiste un vettore di pesi  $w$  tale che  $C_\mu = \mathcal{W}_w$ ;
- (iii)  $C_\mu$  è additivo, i.e.

$$C_\mu((x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n)) = C_\mu(x_1, \dots, x_n) + C_\mu(x'_1, \dots, x'_n).$$

La misura di Choquet  $\mu$  associata a  $\mathcal{W}_w$  è data da

$$\mu(S) = \sum_{i \in S} w_i \quad S \subseteq N \quad S \neq \emptyset$$

la cui rappresentazione di Möbius è

$$m_\mu(S) = \begin{cases} w_i & S = \{i\} \\ 0 & |S| \neq 1 \end{cases} \quad S \subseteq N.$$

Al contrario, i pesi associati ad un operatore WA sono dati da

$$w_i = \mu(i) \quad i \in N.$$

La classe degli operatori WA include due importanti casi particolari:

- la media aritmetica

$$\text{mean}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

dove  $w_i = 1/n$  per ogni  $i \in N$ .

In tal caso

$$\mu(S) = \frac{s}{n} \quad S \subseteq N.$$

Inoltre

$$m_\mu(i) = \frac{1}{n} \quad i \in N.$$

- la proiezione  $k$ -esima

$$P_k(x_1, \dots, x_n) = x_k$$

dove  $w_k = 1$ .

In tal caso

$$\mu(S) = \begin{cases} 1 & k \in S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre

$$m_\mu(i) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

### 2.4.2 Operatore OWA

Nel 1988 Yager [43] ha introdotto una nuova famiglia di operatori di aggregazione chiamati OWA (ordered weighted averaging).

**Definizione 2.7** Per ogni vettore di pesi  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in [0, 1]^n$  tale che

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

l'operatore OWA associato ad  $\omega$  è definito da

$$\mathcal{O}_\omega(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_{(i)} \omega_i \quad (2.5)$$

dove  $(\cdot)$  indica una permutazione su  $N$  tale che  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ .

L'aspetto fondamentale degli operatori OWA è il riordinamento delle quantità da aggregare. Tali operatori differiscono infatti da una classica media pesata in quanto i pesi non vengono associati direttamente ad un particolare valore da aggregare, ma piuttosto ad una particolare posizione nell'ordinamento dei valori.

**Esempio 2.4:** Sia  $\omega = (0.4, 0.1, 0.3, 0.2)$  un vettore di pesi e  $\mathbf{x} = (0.6, 1, 0.3, 0.5)$  il vettore delle quantità da aggregare. Riordinando tali quantità otteniamo  $x_{(1)} = 0.3$ ,  $x_{(2)} = 0.5$ ,  $x_{(3)} = 0.6$  e  $x_{(4)} = 1$ .

Allora

$$\mathcal{O}_\omega(0.6, 1, 0.3, 0.5) = (0.4)(0.3) + (0.1)(0.5) + (0.3)(0.6) + (0.2)(1) = 0.55$$

Diamo ora la definizione di misura di Choquet simmetrica.

**Definizione 2.8** Una misura di Choquet è detta *simmetrica* se soddisfa

$$|S| = |T| \Rightarrow \mu(S) = \mu(T) \quad S, T \subseteq N$$

Il seguente risultato [11, 10] mostra che esiste una corrispondenza biunivoca tra gli integrali di Choquet rispetto ad una misura simmetrica e gli operatori OWA.

**Proposizione 2.7** Sia  $\mu$  una misura di Choquet. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i)  $\mu$  è simmetrica;
- (ii) esiste un vettore di pesi  $\omega$  tale che  $\mathcal{C}_\mu = \mathcal{O}_\omega$ ;
- (iii)  $\mathcal{C}_\mu$  è simmetrico, i.e.

$$\mathcal{C}_\mu(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{C}_\mu(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$$

dove  $\pi$  è una qualunque permutazione degli indici.



La misura di Choquet  $\mu$  associata a  $\mathcal{O}_\omega$  è data da

$$\mu(S) = \sum_{i=n-s+1}^n \omega_i \quad S \subseteq N \quad S \neq \emptyset$$

la cui rappresentazione di Möbius è

$$m_\mu(S) = \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^{s-1-j} \omega_{n-j} \quad S \subseteq N \quad S \neq \emptyset.$$

Entrambe le rappresentazioni dipendono solo dalla cardinalità dei sottoinsiemi. Al contrario, i pesi associati ad un operatore OWA sono dati da

$$\omega_{n-s} = \mu(S \cup i) - \mu(S) = \sum_{T \subseteq S} m_\mu(T \cup i) \quad i \in N \quad S \subseteq N \setminus i.$$

La classe degli operatori OWA include alcuni importanti casi particolari:

- la media aritmetica

$$\text{mean}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

dove  $\omega_i = 1/n$  per ogni  $i \in N$ .

- l'operatore min

$$\min(x_1, \dots, x_n) = \min_{i \in N} x_i$$

dove  $\omega_1 = 1$ .

In tal caso

$$\mu(S) = \begin{cases} 1 & S = N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre

$$m_\mu(S) = \begin{cases} 1 & S = N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- l'operatore max

$$\max(x_1, \dots, x_n) = \max_{i \in N} x_i$$

dove  $\omega_n = 1$ .

In tal caso

$$\mu(S) = \begin{cases} 1 & S \neq \emptyset \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre

$$m_\mu(S) = \begin{cases} (-1)^{s+1} & S \neq \emptyset \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

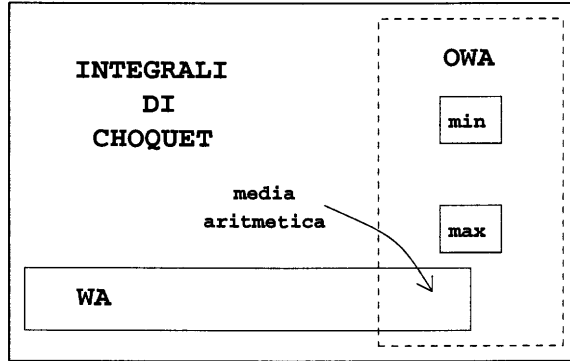


Figura 2.2: Sottoclassi degli integrali di Choquet.

## 2.5 Integrale di Shapley

Introduciamo ora un nuovo tipo di integrale rispetto ad una misura di Choquet: l'integrale di Shapley.

**Definizione 2.9** Sia  $\mu$  una misura di Choquet su  $N$ . Si definisce *integrale di Shapley* del vettore di valori  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$  rispetto a  $\mu$  la quantità

$$\mathcal{S}_\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \phi_\mu(i). \quad (2.6)$$

Così definito l'integrale di Shapley coincide con un operatore WA che utilizza come pesi  $w_i$  i valori di Shapley  $\phi_\mu(i)$ .

Data una misura di Choquet  $\mu$  possiamo definire una misura additiva  $\mu_A$  associata alla misura  $\mu$ , attribuendo ai singletons di  $\mu_A$  i valori di Shapley derivati dalla misura  $\mu$ .

**Definizione 2.10** Sia  $\mu$  una misura di Choquet su  $N$ . La *misura di Shapley* associata a  $\mu$  è definita da

$$\mu_A(T) = \sum_{i \in T} \phi_\mu(i) \quad T \subseteq N. \quad (2.7)$$

Notiamo che l'integrale di Shapley rispetto ad una misura di Choquet  $\mu$  coincide con l'integrale di Choquet calcolato rispetto alla misura di Shapley  $\mu_A$ . Si ha infatti:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mu_A}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n x_{(i)} [\mu_A(A_{(i)}) - \mu_A(A_{(i+1)})] \\ &= \sum_{i=1}^n x_{(i)} \mu_A(i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n x_{(i)} \phi_{\mu}(i) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i \phi_{\mu}(i) \\
&= \mathcal{S}_{\mu}(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Ricordando che

$$\phi_{\mu}(i) = \sum_{T \subseteq N \setminus i} \frac{m_{\mu}(T \cup i)}{t+1}$$

si può esprimere l'integrale di Shapley in funzione della rappresentazione di Möbius nel modo seguente

$$\mathcal{S}_{\mu}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} x_i \sum_{T \subseteq N \setminus i} \frac{m_{\mu}(T \cup i)}{t+1}.$$

A differenza degli integrali di Choquet, gli integrali di Shapley non sono estensioni di  $\mu$ , ossia

$$\mathcal{S}_{\mu}(e_S) \neq \mu(S) \quad S \subseteq N$$

dove  $e_S$  è il vettore caratteristico di  $S \subseteq N$  in  $\{0, 1\}^n$  definito da

$$e_S(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n \quad \text{con} \quad x_i = 1 \Leftrightarrow i \in S.$$

Infatti

$$\mathcal{S}_{\mu}(e_S) = \sum_{i=1}^n \phi_{\mu}(i) = \mu_A(S) \neq \mu(S).$$

# Capitolo 3

## Esempi

### 3.1 Introduzione

In questo capitolo vediamo alcuni esempi di misure di Choquet. In particolare, vengono esaminate misure additive e 2-additive e gli integrali associati a tali misure.

Riguardo alle misure 2-additive, vengono proposti due modelli originali costruiti sulla base di misure 2-additive in due contesti decisionali diversi.

In un contesto multiagente, viene definita la misura consensuale utilizzata per trattare la questione dell'interazione tra agenti nella formulazione di una preferenza collettiva.

In un contesto multicriterio, viene definita la misura di Saaty che permette di trattare l'inconsistenza tra le valutazioni di importanza relativa dei vari criteri, in una proposta di estensione del modello AHP di Saaty.

### 3.2 Misure additive

L'esempio più semplice di misure di Choquet è dato da misure di Choquet additive.

Per definire una misura di Choquet additiva su un insieme  $N$  di  $n$  elementi, non è necessario assegnare tutti i  $2^n$  coefficienti corrispondenti ai valori della misura sui  $2^n$  sottoinsiemi di  $N$ , ma è sufficiente assegnare  $n$  coefficienti

$$\mu(i) = m_\mu(i) \quad i \in N.$$

Gli altri coefficienti sono allora dati da

$$\mu(S) = \sum_{i \in S} m_\mu(i) = \sum_{i \in S} \mu(i) \quad S \subseteq N.$$

In questo caso le condizioni sui coefficienti  $m_\mu(\emptyset)$  e  $m_\mu(i)$ , con  $i \in N$ , per definire una misura di Choquet, stabilite dalla proposizione 1.2 si riducono a

- (i)  $m_\mu(\emptyset) = 0$ ,  $\sum_{i \in N} m_\mu(i) = 1$ ;  
(ii)  $m_\mu(i) \geq 0$   $i \in N$ .

Le misure di Choquet additive, pur se molto semplici, risultano però di scarso interesse nelle applicazioni perchè non permettono di modellizzare le interazioni tra gli elementi di  $N$ : sono infatti nulli sia gli indici di interazione di Shapley che gli indici di interazione di Banzhaf. Ricordando le definizioni 1.3 e 1.16 rispettivamente di indice di interazione di Shapley e indice di interazione di Banzhaf tra gli elementi  $i$  e  $j$  di  $N$

$$I_\mu(ij) = \sum_{T \subseteq N \setminus \{i,j\}} \frac{(n-2-t)!t!}{(n-1)!} [\mu(T \cup ij) - \mu(T \cup i) - \mu(T \cup j) + \mu(T)]$$

$$I_\mu^B(ij) = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{T \subseteq N \setminus \{i,j\}} [\mu(T \cup ij) - \mu(T \cup i) - \mu(T \cup j) + \mu(T)]$$

osserviamo che se la misura di Choquet  $\mu$  è additiva

$$\begin{aligned} \mu(T \cup ij) - \mu(T \cup i) - \mu(T \cup j) + \mu(T) &= (\mu(T) + \mu(i) + \mu(j)) - (\mu(T) + \mu(i)) \\ &\quad - (\mu(T) + \mu(j)) + \mu(T) \\ &= 0 \quad i, j \in N, \quad T \subseteq N \setminus \{i, j\} \end{aligned}$$

e gli indici di interazione di Shapley e di Banzhaf sono quindi nulli

$$I_\mu(ij) = I_\mu^B(ij) = 0 \quad i, j \in N.$$

Coincidono inoltre, per la proposizione 1.5, i valori di Shapley e di Banzhaf. Ricordando infatti le definizioni 1.2 e 1.5 rispettivamente di valore di Shapley e valore di Banzhaf di un elemento  $i \in N$

$$\phi_\mu(i) = \sum_{T \subseteq N \setminus i} \frac{(n-1-t)!t!}{n!} [\mu(T \cup i) - \mu(T)]$$

$$\phi_\mu^B(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{T \subseteq N \setminus i} [\mu(T \cup i) - \mu(T)]$$

osserviamo che se la misura di Choquet  $\mu$  è additiva, il plusvalore che  $i$  porta ad una qualsiasi coalizione  $T \subseteq N \setminus i$  coincide con il valore  $\mu(i)$

$$\begin{aligned} \mu(T \cup i) - \mu(T) &= (\mu(T) + \mu(i)) - \mu(T) \\ &= \mu(i) \quad i \in N, \quad T \subseteq N \setminus i \end{aligned}$$

da cui segue che anche il valor medio del plusvalore che  $i$  porta a tutte le possibili coalizioni coincide con il valore  $\mu(i)$ , ossia

$$\phi_{\mu}(i) = \phi_{\mu}^B(i) = \mu(i) \quad i \in N.$$

Poco interessanti per le applicazioni risultano anche gli integrali di Shapley e di Choquet rispetto ad una misura di Choquet additiva poichè tali integrali si riducono ad una media pesata i cui pesi sono  $\mu(i)$ .

Infatti, poichè il valore di Shapley di ogni elemento  $i$  coincide con il valore  $\mu(i)$ , l'integrale di Shapley è

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mu}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i \in N} x_i \phi_{\mu}(i) \\ &= \sum_{i \in N} x_i \mu(i). \end{aligned}$$

Ma se la misura  $\mu$  è additiva si ha

$$\begin{aligned} \mu(A_{(i)}) &= \mu((i) \dots (n)) \\ &= \mu((i)) + \mu((i+1)) + \dots + \mu((n)) \end{aligned}$$

e anche l'integrale di Choquet si riduce ad una media pesata

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mu}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n x_{(i)} [\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})] \\ &= \sum_{i=1}^n x_{(i)} \mu((i)) \\ &= \sum_{i \in N} x_i \mu(i). \end{aligned}$$

### 3.3 Misure 2-additive

Di particolare interesse nelle applicazioni risultano le misure di Choquet 2-additive perchè, pur rimanendo molto semplici e con un numero limitato di coefficienti, a differenza delle misure di Choquet additive permettono di modellizzare le interazioni tra gli elementi di  $N$ .

Per definire una misura di Choquet 2-additiva su un insieme  $N$  di  $n$  elementi, è sufficiente assegnare  $n + \binom{n}{2} = n(n+1)/2$  coefficienti

$$\begin{aligned} \mu(i) &= m_{\mu}(i) & i \in N, \\ \mu(ij) &= m_{\mu}(i) + m_{\mu}(j) + m_{\mu}(ij) & i \in N. \end{aligned}$$

Gli altri coefficienti sono allora dati da

$$\begin{aligned}\mu(S) &= \sum_{i \in S} m_\mu(i) + \sum_{\{i,j\} \subseteq S} m_\mu(ij) \\ &= \sum_{\{i,j\} \subseteq S} \mu(ij) - (s-2) \sum_{i \in S} \mu(i) \quad S \subseteq N \quad s \geq 2\end{aligned}$$

In questo caso le condizioni della proposizione 1.2 sui coefficienti  $m_\mu(\emptyset)$ ,  $m_\mu(i)$  e  $m_\mu(ij)$ , con  $i, j \in N$ , per definire una misura di Choquet sono

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad m_\mu(\emptyset) &= 0, \quad \sum_{i \in N} m_\mu(i) + \sum_{\{i,j\} \subseteq N} m_\mu(ij) = 1; \\ \text{(ii)} \quad m_\mu(i) &\geq 0, \quad m_\mu(i) + \sum_{j \in T} m_\mu(ij) \geq 0 \quad i \in N, \quad T \subseteq N \setminus i.\end{aligned}$$

Per la proposizione 1.5, se una misura di Choquet è 2-additiva, gli indici di interazione di Shapley e di Banzhaf (ed in particolare i valori di Shapley e di Banzhaf) coincidono. Infatti, esprimendo gli indici di interazione di Shapley e di Banzhaf in funzione della rappresentazione di Möbius

$$\begin{aligned}I_\mu(S) &= \sum_{T \subseteq N \setminus S} \frac{m_\mu(T \cup S)}{t+1} \\ I_\mu^B(S) &= \sum_{T \subseteq N \setminus S} \frac{m_\mu(T \cup S)}{2^t}\end{aligned}$$

se la misura  $\mu$  è 2-additiva si ha

$$I_\mu(S) = I_\mu^B(S) = \begin{cases} \phi_\mu(i) = \phi_\mu^B(i) = m_\mu(i) + \frac{1}{2} \sum_{j \in N \setminus i} m_\mu(ij) & S = \{i\} \\ m_\mu(ij) & S = \{i, j\} \\ 0 & |S| > 2 \end{cases}$$

Con una misura di Choquet 2-additiva è quindi indifferente utilizzare indici di interazione di Shapley o di Banzhaf.

A differenza di quanto accade per misure di Choquet additive, in questo caso integrali di Shapley e di Choquet non coincidono. Infatti, espressi in termini della rappresentazione di Möbius, l'integrale di Shapley è

$$S_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} x_i \left[ m_\mu(i) + \sum_{j \in N \setminus i} \frac{m_\mu(ij)}{2} \right]$$

mentre l'integrale di Choquet è

$$\mathcal{C}_\mu(x) = \sum_{i \in N} x_i m_\mu(i) + \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \min(x_i, x_j) m_\mu(ij)$$

**Osservazione:** Ogni misura di Choquet 2-additiva definita su un insieme  $N$  ammette una rappresentazione tramite grafo:

- ogni nodo del grafo rappresenta un elemento  $i$  dell'insieme  $N$  e ad esso è associato il valore  $\mu(i) = m_\mu(i)$ ;
- ogni arco del grafo rappresenta l'interazione tra i due nodi  $\{i\}$  e  $\{j\}$  che unisce e ad esso è associato l'indice di interazione  $m_\mu(ij)$  tra gli elementi  $i$  e  $j$ .

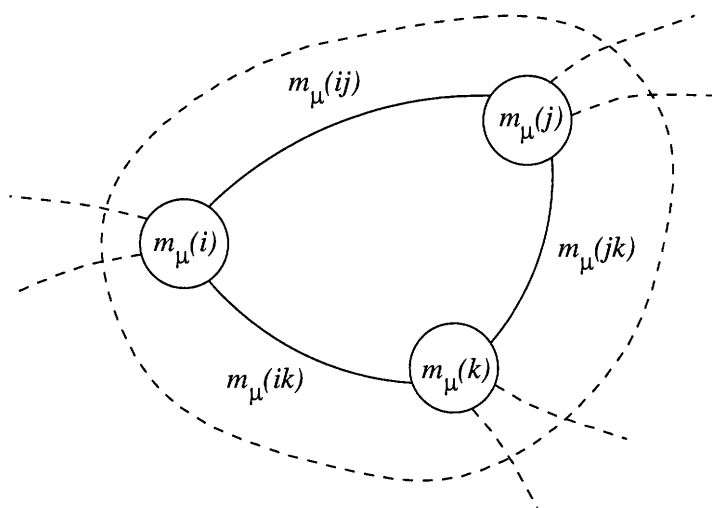


Figura 3.1: Rappresentazione di una misura di Choquet 2-additiva tramite grafo.

Il valore della misura 2-additiva  $\mu$  su una coalizione  $S \subseteq N$

$$\mu(S) = \sum_{i \in S} m_\mu(i) + \sum_{\{i,j\} \subseteq S} m_\mu(ij) = \sum_S \text{nodi} + \sum_S \text{archi}$$

può quindi essere espressa come la somma dei nodi e degli archi contenuti nel sottografo associato alla coalizione  $S \subseteq N$ .

### 3.4 La misura consensuale

Sia  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  un insieme di agenti che interagiscono tra loro, ciascuno con una propria struttura di preferenza individuale  $x_i$ .



L'interazione tra gli agenti rappresenta il grado di influenza reciproca che gli agenti esercitano tra di loro. Questa influenza reciproca è espressa dalla matrice  $\mathbf{V} = [v_{ij}]$  simmetrica e irreflessiva con coefficienti di interazione

$$v_{ij} = \begin{cases} v_{ji} \in (0, 1) & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Noi consideriamo coefficienti di interazione  $v_{ij}$  costanti nel tempo. Tali coefficienti possono venir dati dall'esterno, come accade nei modelli tradizionali di dinamica consensuale (si veda ad esempio De Groot [6]), oppure possono venir calcolati sulla base delle strutture di preferenza individuali  $x_i$ .

**Esempio 3.1:** Nel *Soft Consensus Model* [8] i coefficienti di interazione  $v_{ij}$  con  $i \neq j$  sono definiti a partire dalle opinioni individuali filtrando i valori del quadrato della differenza  $(x_i - x_j)^2$  con una funzione sigmoide decrescente

$$v_{ij} = \sigma((x_i - x_j)^2) \quad i \neq j$$

dove

$$\sigma(t) = \frac{1}{1 + e^{\beta(t-\alpha)}} \quad \alpha \in (0, 1), \quad \beta \in (0, \infty).$$

Ne risulta che se due agenti  $i$  e  $j$  hanno opinioni simili ( $(x_i - x_j)^2 < \alpha$ ) allora  $v_{ij}$  è grande e tra loro vi è una forte interazione. Al contrario se i due agenti hanno opinioni differenti ( $(x_i - x_j)^2 > \alpha$ ), allora  $v_{ij}$  risulta piccolo e l'interazione tra loro è debole.

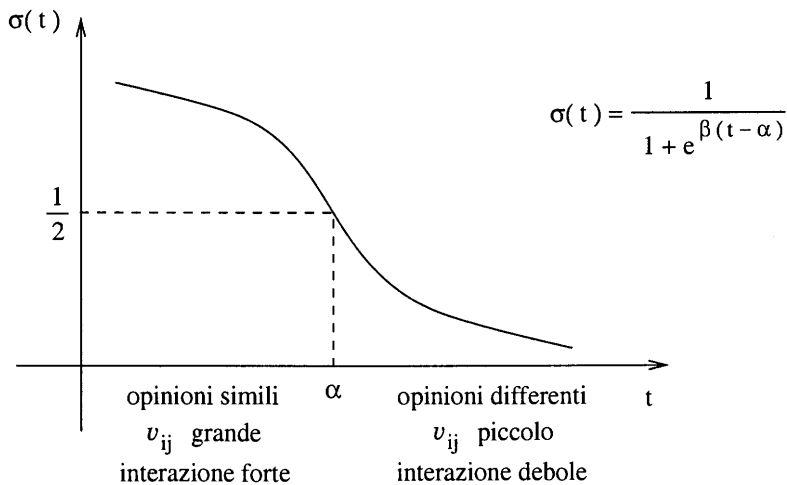


Figura 3.2: La funzione sigmoide  $\sigma$ .

La matrice di interazione  $\mathbf{V}$  ammette una rappresentazione tramite grafo. Ogni nodo  $\{i\}$  rappresenta un agente, mentre ad ogni arco  $\{i, j\}$  è associato il coefficiente di interazione  $v_{ij}$ .

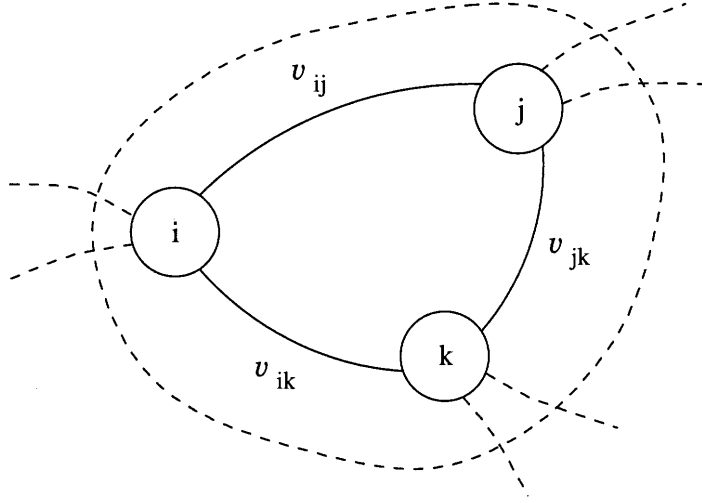


Figura 3.3: Rappresentazione della matrice di interazione  $\mathbf{V}$  tramite grafo.

Notiamo che come la matrice  $\mathbf{V}$  è simmetrica, così è simmetrico il grafo associato, ossia gli archi non sono orientati.

Questa rappresentazione tramite grafo è la base per la costruzione della *misura consensuale* [24, 25], una misura di Choquet  $\mu : \mathcal{P}(N) \rightarrow [0, 1]$  che codifica il valore consensuale di ogni coalizione.

**Definizione 3.1** Sia  $\mathbf{V} = [v_{ij}, i, j \in N]$  una matrice di interazione con coefficienti di interazione  $v_{ij} = v_{ji} \in (0, 1)$  per  $i \neq j$  e  $v_{ii} = 0$ .

Una *misura consensuale* è una funzione  $\mu : \mathcal{P}(N) \rightarrow [0, 1]$  definita da

$$\mu(S) = \sum_{\{i,j\} \subseteq S} \frac{v_{ij}}{\mathcal{N}} \quad S \subseteq N, \quad (3.1)$$

dove

$$\mathcal{N} = \sum_{\{i,j\} \subseteq N} v_{ij}.$$

Il valore  $\mu(S)$  della misura consensuale di una coalizione di agenti  $S \subseteq N$  si definisce proporzionale alla somma degli archi contenuti nel sottografo associato alla coalizione  $S$  dove il fattore di normalizzazione  $\mathcal{N}$  è dato dalla somma di tutti gli archi in  $N$ .

La misura consensuale  $\mu$  è una misura di Choquet. Soddisfa infatti le condizioni di frontiera

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(N) = \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \frac{v_{ij}}{\mathcal{N}} = \frac{1}{\mathcal{N}} \mathcal{N} = 1,$$

e di monotonia

$$\mu(S \cup i) > \mu(S) \quad i \in N \setminus S, \quad S \subseteq N.$$

Se infatti ad una coalizione  $S$  viene aggiunto un nodo  $i$ , si aggiungono alla misura tutti gli archi che collegano al nodo  $i$  i nodi di  $S$ , e quindi la misura cresce.

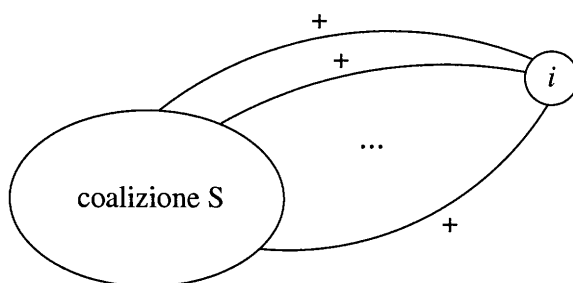


Figura 3.4: Monotonia della misura consensuale.

In particolare la misura consensuale è una misura di Choquet con singletons nulli

$$\mu(i) = 0, \quad \mu(ij) = \frac{v_{ij}}{\mathcal{N}}, \quad \dots$$

e superadditiva

$$\mu(S \cup T) \geq \mu(S) + \mu(T) \quad S, T \subseteq N, \quad S \cap T = \emptyset,$$

infatti oltre agli archi contenuti in  $S$  e  $T$ ,  $\mu(S \cup T)$  contiene anche tutti gli archi tra un nodo in  $S$  e un nodo in  $T$ .

I valori della trasformata di Möbius della misura consensuale  $\mu$  sono dati da

$$m_{\mu}(S) = \begin{cases} 0 & S = \{i\} \\ v_{ij}/\mathcal{N} & S = \{i, j\} \\ 0 & |S| > 2 \end{cases}$$

La misura consensuale è quindi una misura 2-additiva.

Mediante la trasformata di Möbius possiamo calcolare i valori di Shapley che codificano quanto un agente decisore è consensuale relativamente all'insieme delle opinioni individuali espresse dal gruppo.

Il valore di Shapley di un agente  $i \in N$  risulta

$$\phi_\mu(i) = \sum_{T \subseteq N \setminus i} \frac{m_\mu(T \cup i)}{t+1} = \frac{1}{2} \sum_{j \in N \setminus i} \frac{v_{ij}}{\mathcal{N}}$$

e può quindi essere espresso come metà della somma degli archi che collegano l'agente  $i$  con gli altri agenti in  $N$ .

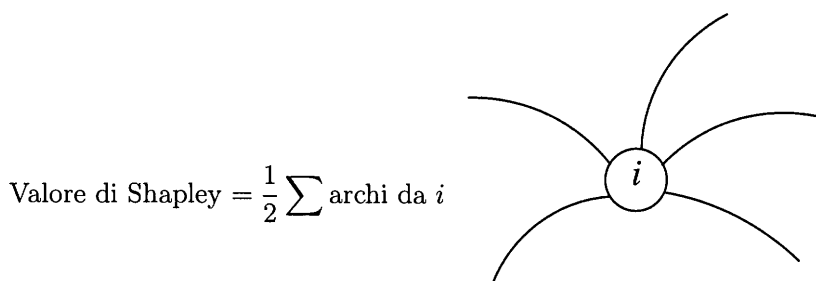


Figura 3.5: Valore di Shapley di un agente  $i \in N$ .

Osserviamo che il valore di Shapley  $\phi_\mu(i)$  è proporzionale al valor medio dei coefficienti di interazione tra l'agente  $i$  e gli altri agenti, ossia  $\sum_{j \in N \setminus i} v_{ij}/(n-1)$ . Il valore di Shapley riflette quindi il grado di consenso attorno all'agente  $i$ : più un agente è consensuale, maggiore è il suo valore di Shapley.

Mediante la trasformata di Möbius possiamo calcolare gli indici di interazione di Shapley

$$I_\mu(S) = \sum_{T \subseteq N \setminus S} \frac{m_\mu(T \cup S)}{t+1} = \begin{cases} v_{ij}/\mathcal{N} & S = \{i, j\} \\ 0 & |S| > 2 \end{cases}$$

Osserviamo che l'indice di interazione di Shapley tra due agenti  $i$  e  $j$ , a parte il fattore di normalizzazione  $\mathcal{N}$ , coincide con il coefficiente di interazione  $v_{ij}$ .

Attraverso gli integrali di Shapley e di Choquet le opinioni individuali dei singoli agenti vengono aggregate nell'opinione collettiva.

Espressi in termini della trasformata di Möbius l'integrale di Shapley relativo alla misura consensuale è

$$\mathcal{S}_\mu(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \sum_{i \in N} x_i \sum_{j \in N \setminus i} v_{ij}/\mathcal{N},$$

mentre l'integrale di Choquet relativo alla misura consensuale è

$$C_\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \min(x_i, x_j) v_{ij} / \mathcal{N}.$$

### 3.4.1 Caso $N = \{1, 2\}$

Consideriamo la misura del consenso relativa ad un caso limite con due soli agenti decisori, ossia  $N = \{1, 2\}$ .

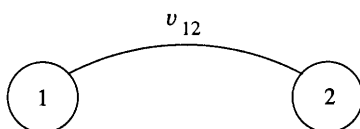


Figura 3.6: Caso  $N = \{1, 2\}$ .

In tal caso  $\mathcal{N} = v_{12}$  ed i risultati relativi alla misura consensuale  $\mu$  sono riassunti nella tabella seguente

$S$	$\mu(S)$	$m_\mu(S)$	$I_\mu(S)$
$\emptyset$	0	0	0
$\{1\}$	0	0	$\frac{v_{12}}{2\mathcal{N}} = \frac{1}{2}$
$\{2\}$	0	0	$\frac{v_{12}}{2\mathcal{N}} = \frac{1}{2}$
$\{1, 2\}$	1	$\frac{v_{12}}{\mathcal{N}} = 1$	$\frac{v_{12}}{\mathcal{N}} = 1$

Tabella 3.1: Valori di  $\mu(S)$ ,  $m_\mu(S)$  e  $I_\mu(S)$  per  $S \subseteq N = \{1, 2\}$ .

Si tratta chiaramente di un caso limite: i due agenti decisori hanno infatti lo stesso valore di Shapley, pari a  $1/2$ , mentre l'indice di interazione di Shapley tra i due agenti è pari a 1.

Indichiamo con  $x_1$  e  $x_2$  le opinioni individuali rispettivamente del primo e del secondo

agente decisore. Poichè i due agenti hanno lo stesso valore di Shapley, l'opinione collettiva ottenuta attraverso l'integrale di Shapley risulta il valor medio delle opinioni individuali

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\mu(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} \left( x_1 v_{12}/\mathcal{N} + x_2 v_{12}/\mathcal{N} \right) \\ &= \frac{1}{2} (x_1 + x_2)\end{aligned}$$

mentre l'opinione collettiva ottenuta attraverso l'integrale di Choquet risulta il valore minimo delle opinioni individuali

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\mu(x_1, x_2) &= \min(x_1, x_2) v_{12}/\mathcal{N} \\ &= \min(x_1, x_2)\end{aligned}$$

### 3.4.2 Caso $N = \{1, 2, 3\}$

Consideriamo la misura del consenso relativa ad un caso con tre agenti decisori, ossia  $N = \{1, 2, 3\}$ . Indichiamo con  $x_1, x_2, x_3$  le opinioni individuali dei tre agenti e supponiamo che gli agenti 1 e 2 abbiano opinioni molto simili, mentre l'agente 3 abbia un'opinione totalmente differente.

Calcoliamo i valori dei coefficienti di interazione  $v_{ij}$  sulla base delle opinioni individuali  $x_i$  come nel Soft Consensus Model.

Allora, poichè gli agenti 1 e 2 hanno opinioni molto simili, tra loro vi è un'interazione molto forte ed il coefficiente di interazione risulta  $v_{12} \sim 1$ .

Al contrario poichè gli agenti 1 e 3 e gli agenti 2 e 3 hanno opinioni totalmente differenti, tra loro vi è un'interazione molto debole ed i coefficienti di interazione risultano  $v_{13} \sim v_{23} \sim 0$ .

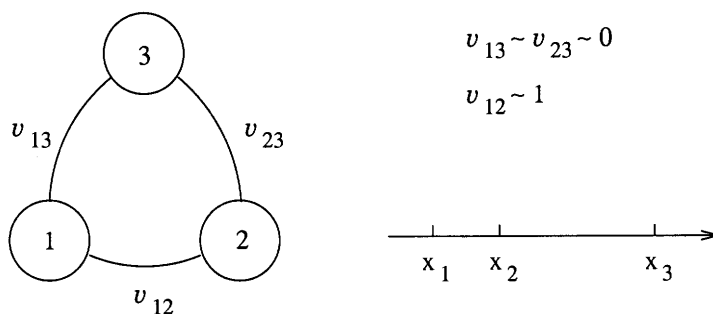


Figura 3.7: Caso  $N = \{1, 2, 3\}$ .

In tal caso  $\mathcal{N} = v_{12} + v_{13} + v_{23}$  ed i risultati relativi alla misura consensuale  $\mu$  sono riassunti nella tabella seguente

$S$	$\mu(S)$	$m_\mu(S)$	$I_\mu(S)$
$\emptyset$	0	0	0
$\{1\}$	0	0	$(v_{12} + v_{13})/2\mathcal{N}$
$\{2\}$	0	0	$(v_{12} + v_{23})/2\mathcal{N}$
$\{3\}$	0	0	$(v_{13} + v_{23})/2\mathcal{N}$
$\{1, 2\}$	$v_{12}/\mathcal{N}$	$v_{12}/\mathcal{N}$	$v_{12}/\mathcal{N}$
$\{1, 3\}$	$v_{13}/\mathcal{N}$	$v_{13}/\mathcal{N}$	$v_{13}/\mathcal{N}$
$\{2, 3\}$	$v_{23}/\mathcal{N}$	$v_{23}/\mathcal{N}$	$v_{23}/\mathcal{N}$
$\{1, 2, 3\}$	1	0	0

Tabella 3.2: Valori di  $\mu(S)$ ,  $m_\mu(S)$  e  $I_\mu(S)$  per  $S \subseteq N = \{1, 2, 3\}$ .

Osserviamo che gli agenti 1 e 2, con opinioni simili, hanno valore di Shapley quasi uguale

$$\phi_\mu(1) = \frac{v_{12} + v_{13}}{2\mathcal{N}} \sim \frac{1}{2}, \quad \phi_\mu(2) = \frac{v_{12} + v_{23}}{2\mathcal{N}} \sim \frac{1}{2},$$

Per l'agente 3, che ha opinione totalmente differente, il valore di Shapley è invece quasi nullo

$$\phi_\mu(3) = \frac{v_{13} + v_{23}}{2\mathcal{N}} \sim 0.$$

Abbiamo infatti visto che il valore di Shapley di un qualunque agente riflette il grado di consenso attorno all'agente stesso. Più un agente è consensuale, maggiore è il suo valore di Shapley. Al contrario, meno un agente è consensuale, minore è il suo valore di Shapley.

Osserviamo inoltre l'indice di interazione di Shapley tra i due agenti 1 e 2 è quasi massimo

$$I_\mu(12) = \frac{v_{12}}{\mathcal{N}} \sim 1,$$

mentre quello tra i due agenti 1 e 3 e quello tra i due agenti 2 e 3 è quasi nullo

$$I_\mu(13) = \frac{v_{13}}{\mathcal{N}} \sim 0, \quad I_\mu(23) = \frac{v_{23}}{\mathcal{N}} \sim 0.$$

Aggregando le opinioni individuali dei singoli agenti nell'opinione collettiva attraverso l'integrale di Shapley si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\mu(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \frac{v_{12} + v_{13}}{2\mathcal{N}} + x_2 \frac{v_{12} + v_{23}}{2\mathcal{N}} + x_3 \frac{v_{13} + v_{23}}{2\mathcal{N}} \\ &= \frac{1}{2} \left( (x_1 + x_2) \frac{v_{12}}{\mathcal{N}} + (x_1 + x_3) \frac{v_{13}}{\mathcal{N}} + (x_2 + x_3) \frac{v_{23}}{\mathcal{N}} \right) \\ &\sim \frac{1}{2} (x_1 + x_2) \end{aligned}$$

mentre l'opinione collettiva ottenuta attraverso l'integrale di Choquet risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\mu(x_1, x_2, x_3) &= \min(x_1, x_2) \frac{v_{12}}{\mathcal{N}} + \min(x_1, x_3) \frac{v_{13}}{\mathcal{N}} + \min(x_2, x_3) \frac{v_{23}}{\mathcal{N}} \\ &\sim \min(x_1, x_2) \end{aligned}$$

## 3.5 La misura di Saaty

Vediamo ora un nuovo esempio di misura di Choquet 2-additiva definita in un contesto di Teoria delle Decisioni multicriterio.

Questa nuova misura nasce da una proposta di estensione del modello AHP di Saaty basata sulle misure di Choquet e verrà quindi chiamata *misura di Saaty*. La misura di Saaty ci permetterà di trattare l'inconsistenza tra le valutazioni di importanza relativa dei vari criteri.

### 3.5.1 Premessa

L'*Analytic Hierarchy Process* (AHP) sviluppato da Thomas L. Saaty [34, 35, 36, 37], è un modello di aggregazione multicriterio molto noto. È basato su matrici di confronto a coppie a due livelli fondamentali: un livello inferiore che riguarda matrici di confronto a coppie tra alternative (una per ogni criterio), e un livello superiore che riguarda un'unica matrice di confronto a coppie tra criteri.

Nella sua forma più generale il livello superiore dell'AHP può essere strutturato gerarchicamente con diversi strati di criteri, ma qui viene considerato il caso di un'unica strato con un'unica matrice di confronto a coppie tra criteri detta matrice di confronto a coppie *principale*.



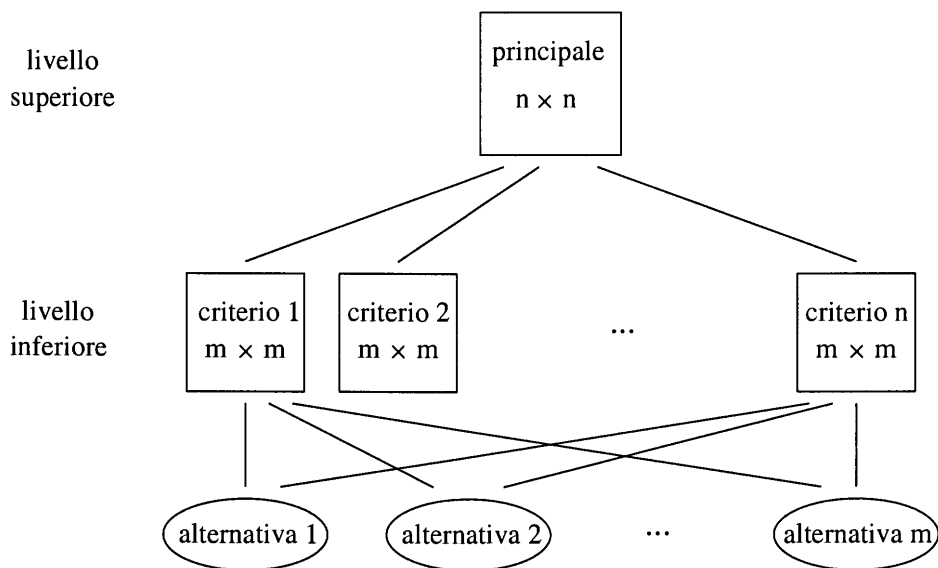


Figura 3.8: Struttura gerarchica dell'AHP.

Le matrici di confronto a coppie sono tipicamente inconsistenti. Comunque l'AHP estrae da ogni matrice di confronto a coppie un vettore di pesi di importanza, detti anche *priorità*, dati dall'autovettore principale normalizzato o, in alternativa, dal vettore media geometrica normalizzato. In entrambi i casi le componenti positive dei vettori delle priorità sono normalizzati a somma uno. Qui viene considerato solo il metodo della media geometrica perchè le sue proprietà strutturali sono più adatte al nostro studio.

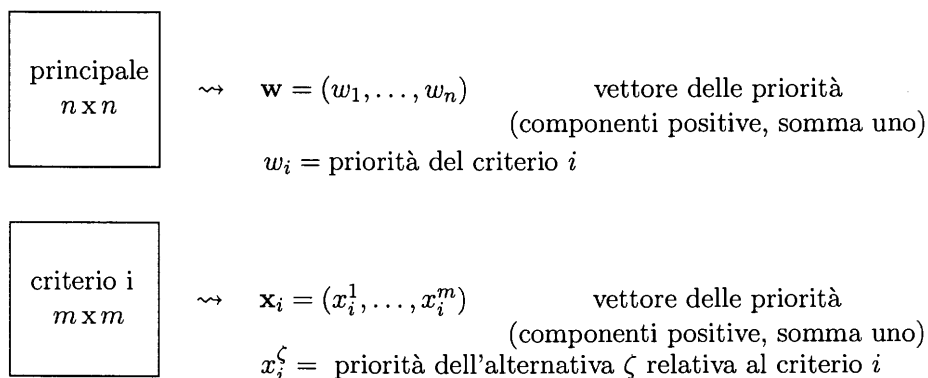


Figura 3.9: I vettori delle priorità.

Una volta ottenuti i vettori delle priorità l'AHP utilizza il vettore delle priorità al livello superiore per aggregare, attraverso una media pesata, i vettori delle priorità del livello inferiore.

Lo schema di aggregazione dell'AHP è quindi il seguente

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \xrightarrow{\text{vettore aggregato}} \mathcal{W}_w(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \sum_{i=1}^n w_i \mathbf{x}_i.$$

In particolare, per una data alternativa  $\zeta$

$$\mathbf{x}^\zeta = (x_1^\zeta, \dots, x_n^\zeta) \xrightarrow{\text{valore aggregato}} \mathcal{W}_w(x_1^\zeta, \dots, x_n^\zeta) = \sum_{i=1}^n w_i x_i^\zeta$$

Viene qui proposta un'estensione del modello AHP di Saaty basata sulle misure di Choquet. In questo nuovo modello, la matrice di confronto a coppie principale induce la costruzione di una misura di Choquet sulla base dell'inconsistenza media associata ad ogni coppia di criteri. Lo schema di aggregazione è perciò ridefinito attraverso l'integrale di Choquet estendendo così l'usuale media pesata dell'AHP di Saaty.

Il nuovo schema di aggregazione, per una data alternativa  $\zeta$ , è quindi il seguente

$$\mathbf{x}^\zeta = (x_1^\zeta, \dots, x_n^\zeta) \xrightarrow{\text{valore aggregato}} \mathcal{C}_\mu(x_1^\zeta, \dots, x_n^\zeta)$$

Un effetto importante del nuovo schema di aggregazione basato sull'integrale di Choquet è che da un lato enfatizza le priorità effettive di quei criteri che hanno un basso livello di inconsistenza media con gli altri, mentre attenua le priorità effettive di quei criteri che hanno un alto livello di inconsistenza media con gli altri. Questo meccanismo di compensazione, che enfatizza alcuni valori di priorità effettivi e ne attenua altri, è descritto dai valori di Shapley associati alla misura di Choquet.

### 3.5.2 L'estensione del modello AHP

Sia  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  una matrice  $n \times n$  positiva e reciproca,

$$a_{ij} > 0 \quad a_{ji} = 1/a_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Tutte le matrici di confronto a coppie nell'AHP di Saaty sono di questo tipo. Il nostro modello, comunque, riguarda solo l'unica matrice di confronto a coppie tra criteri al livello superiore, la matrice di confronto a coppie principale. È infatti la matrice di confronto a coppie principale che controlla il processo di aggregazione: nell'AHP di Saaty l'aggregazione si ottiene attraverso una media pesata i cui pesi sono le componenti del vettore delle priorità del livello superiore.

**Definizione 3.2** Una matrice  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  è detta *consistente* se soddisfa la seguente condizione

$$a_{ij} = a_{ik} a_{kj} \quad i, j, k = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Le matrici positive e reciproche generalmente sono inconsistenti.

Possiamo associare ad ogni matrice positiva e reciproca  $\mathbf{A}$  una matrice positiva e reciproca  $\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{a}_{ij}]$  consistente.

Indichiamo con  $\mathbf{u} = [u_i]$  il vettore media geometrica, degli elementi delle righe, associato alla matrice  $\mathbf{A}$

$$u_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}} \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

e indichiamo con  $\mathbf{w} = [w_i]$  il vettore media geometrica normalizzato, o vettore delle priorità, associato alla matrice  $\mathbf{A}$

$$w_i = u_i / \sum_{j=1}^n u_j \quad i = 1, \dots, n \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1. \quad (3.4)$$

**Definizione 3.3** Sia  $\mathbf{A}$  una matrice positiva e reciproca e  $\mathbf{w} = [w_i]$  il vettore delle priorità associato. La **matrice consistente**  $\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{a}_{ij}]$  associata alla matrice  $\mathbf{A}$  è definita come

$$\tilde{a}_{ij} = w_i / w_j \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Osserviamo che

$$\tilde{a}_{ij} = w_i / w_j = u_i / u_j = (u_i / u_k)(u_k / u_j) = \tilde{a}_{ik} \tilde{a}_{kj} \quad i, j, k = 1, \dots, n$$

e perciò la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  è effettivamente consistente.

**Proposizione 3.1** Una matrice  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  è consistente se e solo se coincide con la sua matrice consistente associata,

$$\mathbf{A} \text{ è consistente} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}.$$

**Dimostrazione:** Se la matrice  $\mathbf{A}$  è consistente, allora

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij} &= u_i / u_j = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_{ik}} / \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_{jk}} \\ &= \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_{ik} / \prod_{k=1}^n a_{jk}} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_{ik} / a_{jk}} \\ &= \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_{ij}} \\ &= a_{ij} \end{aligned}$$

e quindi la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  coincide con la matrice  $\mathbf{A}$ .

Viceversa, se la matrice consistente  $\tilde{\mathbf{A}}$  coincide con la matrice  $\mathbf{A}$ , allora anche la matrice  $\mathbf{A}$  risulta ovviamente consistente.  $\square$

**Proposizione 3.2** La matrice consistente associata alla matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  è la stessa matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$ .

**Dimostrazione:** Il vettore media geometrica  $\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}_i]$  associato alla matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  è semplicemente un multiplo del vettore originale  $\mathbf{u}$  associato alla matrice  $\mathbf{A}$ ,

$$\tilde{u}_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n u_i/u_j} = u_i / \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n u_j} .$$

Il vettore delle priorità  $\tilde{\mathbf{w}} = [\tilde{w}_i]$  associato alla matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  coincide quindi con quello associato alla matrice  $\mathbf{A}$ ,

$$\tilde{w}_i = \tilde{u}_i / \sum_{j=1}^n \tilde{u}_j = u_i / \sum_{j=1}^n u_j = w_i .$$

Concludiamo che la matrice consistente associata alla matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  è ancora la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  stessa.  $\square$

**Definizione 3.4** Sia  $a_{ij}$  un elemento della matrice  $\mathbf{A}$ . Si definisce *intorno di  $a_{ij}$*  l'insieme

$$U(a_{ij}) = \{a_{ik}, a_{lj} \mid k, l = 1, \dots, n\} . \quad (3.6)$$

Come si vede dalla figura seguente l'intorno  $U(a_{ij})$  è costituito dagli elementi che stanno sulla stessa riga  $i$  e dagli elementi che stanno sulla stessa colonna  $j$  dell'elemento  $a_{ij}$ .

$$\mathbf{i} \left( \begin{array}{ccccccc} & & & \mathbf{j} & & & \\ & & & a_{1j} & & & \\ & & & a_{2j} & & & \\ & & & \vdots & & & \\ \mathbf{i} & a_{i1} & a_{i2} & \dots & \boxed{a_{ij}} & \dots & a_{in} \\ & & & \vdots & & & \\ & & & a_{nj} & & & \end{array} \right)$$

Figura 3.10: Intorno  $U(a_{ij})$  dell'elemento  $a_{ij}$ .

**Definizione 3.5** Una matrice  $\mathbf{A}$  è detta *localmente consistente* in  $a_{ij}$  se, in media, l'elemento  $a_{ij}$  è consistente con gli elementi nel suo intorno

$$a_{ij} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}} . \quad (3.7)$$

La locale consistenza in  $a_{ij}$  è quindi una forma più debole dell'usuale consistenza in  $a_{ij}$ , che vale indipendentemente per ogni scelta dell'indice  $k$ .

Osserviamo che il lato destro della condizione di locale consistenza in  $a_{ij}$  coincide con l'elemento  $\tilde{a}_{ij}$  della matrice consistente  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Infatti

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_{ik}a_{kj}} &= \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_{ik}} / \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_{jk}} \\ &= u_i/u_j = \tilde{a}_{ij}.\end{aligned}$$

La condizione di locale consistenza in  $a_{ij}$  può quindi essere formulata semplicemente come

$$a_{ij} = \tilde{a}_{ij}$$

il che significa che richiedere la locale consistenza in ogni  $a_{ij}$  in  $\mathbf{A}$  assicura l'usuale consistenza di  $\mathbf{A}$ .

Definiamo la **funzione di scala**  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$  come

$$f(x) = \frac{2}{x + x^{-1}} \quad x > 0, \quad (3.8)$$

il cui grafico è illustrato sotto.

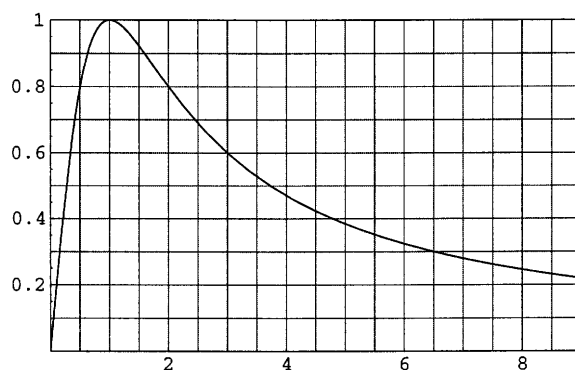


Figura 3.11: Grafico della funzione di scala  $f$ .

Osserviamo che la funzione di scala  $f$  ha un'unico punto critico in  $x = 1$  dove raggiunge il valore massimo  $f(1) = 1$ . Inoltre la funzione di scala ha l'importante proprietà

$$f(x) = f(x^{-1}).$$

Attraverso la funzione di scala  $f$  possiamo associare alla matrice  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  una matrice  $n \times n$  positiva e simmetrica  $\mathbf{V} = [v_{ij}]$  dove

$$v_{ij} = f(a_{ij}/\tilde{a}_{ij}) \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.9)$$

Abbiamo quindi che

$$v_{ij} \in (0, 1] \quad v_{ij} = v_{ji} \quad v_{ii} = 1 \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Il fatto che la matrice  $\mathbf{V} = [v_{ij}]$  sia simmetrica è dovuto alla reciprocità della matrice positiva  $\mathbf{A}$  e al fatto che  $f(x) = f(x^{-1})$ . Infatti

$$v_{ji} = f(a_{ji}/\tilde{a}_{ji}) = f(\tilde{a}_{ij}/a_{ij}) = f(a_{ij}/\tilde{a}_{ij}) = v_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

**Osservazione:** Si noti che  $v_{ij} = 1$  se e solo se  $a_{ij} = \tilde{a}_{ij}$ , altrimenti  $0 < v_{ij} < 1$ . In particolare, più il quoziente  $a_{ij}/\tilde{a}_{ij}$  differisce da 1, più il valore di  $v_{ij}$  si avvicina a 0. La matrice  $\mathbf{V} = [v_{ij}]$  può allora essere considerata come una misura della locale consistenza.

Osserviamo poi che la matrice  $\mathbf{V} = [v_{ij}]$  può essere vista come una versione su scala  $[0, 1]$  della cosiddetta matrice totalmente inconsistente associata alla matrice di confronto a coppie originale  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  (si veda Barzilai [2]).

Sia  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  un insieme di criteri. Data una matrice  $n \times n$  positiva e reciproca  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  tipicamente inconsistente di confronto a coppie tra criteri, possiamo definire una misura di Choquet 2-additiva  $\mu : \mathcal{P}(N) \rightarrow [0, 1]$  che chiameremo **misura di Saaty**.

Mediante la trasformata di Möbius  $m_\mu$  della misura  $\mu$  definiamo  $m_\mu(i) = w_i/\mathcal{N}$  per ogni singlet  $\{i\}$  e  $m_\mu(ij) = -w_i(1 - v_{ij})w_j/\mathcal{N}$  per ogni doublet  $\{i, j\}$ , con i termini di ordine superiore nulli.

La misura di Saaty risulta quindi una misura 2-additiva per la quale il valore della trasformata di Möbius di ogni singolo criterio  $i$  è definito proporzionale al valore  $w_i$  della priorità del criterio  $i$ , mentre il valore della trasformata di Möbius di ogni coppia di criteri  $\{i, j\}$  è definito proporzionale a  $(1 - v_{ij})$ , la misura della locale inconsistenza associata alla coppia di criteri.

Il valore della misura 2-additiva di Saaty  $\mu$  su una coalizione  $S \subseteq N$  è quindi

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \sum_{i \in S} m_\mu(i) + \sum_{\{i, j\} \subseteq S} m_\mu(ij) \\ &= \sum_{\{i\} \subseteq S} w_i/\mathcal{N} + \sum_{\{i, j\} \subseteq S} (-w_i(1 - v_{ij})w_j)/\mathcal{N} \end{aligned} \quad (3.10)$$

dove il fattore di normalizzazione  $\mathcal{N}$  è

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \sum_{i \in N} w_i + \sum_{\{i, j\} \subseteq N} -w_i(1 - v_{ij})w_j \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^n w_i(1 - v_{ij})w_j = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{i, j=1}^n w_i v_{ij} w_j\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{i=1}^n w_i v_i\right) = \frac{1}{2} (1 + v) \end{aligned}$$

e dove  $v_i = \sum_{j=1}^n v_{ij} w_j$  e  $v = \sum_{i=1}^n w_i v_i$  denotano le medie pesate dei valori di locale consistenza.

Poichè

$$v_i = \sum_{j=1}^n v_{ij} w_j = \sum_{j \neq i} v_{ij} w_j + v_{ii} w_i = \sum_{j \neq i} v_{ij} w_j + w_i$$

e  $v_{ij} \in (0, 1]$ , segue che

$$w_i < v_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n w_i^2 < v \leq 1 \quad (3.11)$$

In particolare si ha

$$\mu(i) = w_i/\mathcal{N}, \quad \mu(ij) = (w_i + w_j - w_i(1 - v_{ij})w_j)/\mathcal{N}, \quad \dots$$

Come tutte le misure di Choquet 2-additive, anche la misura di Saaty ammette una rappresentazione tramite grafo in cui i singlets corrispondono ai nodi ed i doublets corrispondono agli archi tra due nodi.

Il valore della misura di Saaty  $\mu$  su una coalizione  $S \subseteq N$  è la somma dei nodi e degli archi contenuti nel sottografo associato alla coalizione  $S$ .

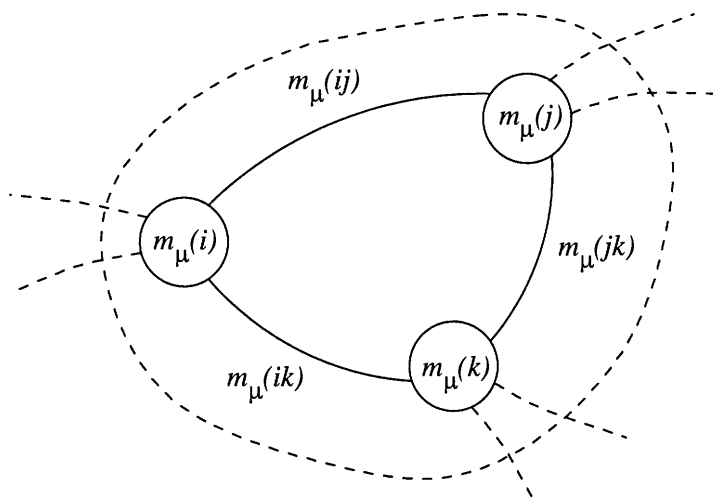


Figura 3.12: Rappresentazione della misura di Saaty tramite grafo.

La misura di Saaty soddisfa le condizioni di frontiera

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(N) = \sum_{\{i\} \subseteq N} w_i/\mathcal{N} + \sum_{\{i,j\} \subseteq N} (-w_i(1 - v_{ij})w_j)/\mathcal{N} = 1,$$

e di monotonia.

$$\mu(S \cup i) > \mu(S) \quad i \in N \setminus S, \quad S \subseteq N.$$

La stretta monotonia della misura è garantita dal fatto che il valore positivo  $w_i$  associato ad ogni nodo del grafo domina, in valore assoluto, la somma dei valori negativi  $-w_i(1 - v_{ij})w_j$  associati agli  $n - 1$  archi che uniscono il nodo con gli altri nodi del grafo,

$$\begin{aligned} w_i - \sum_{j=1}^n w_i(1 - v_{ij})w_j &= w_i - w_i(1 - v_i) \\ &= w_i v_i > w_i^2 > 0 \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

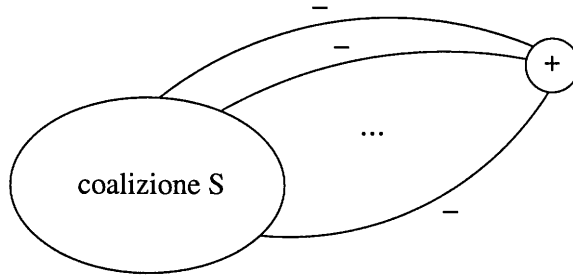


Figura 3.13: Monotonia della misura di Saaty.

In particolare la misura di Saaty è subadditiva

$$\mu(S \cup T) \leq \mu(S) + \mu(T),$$

infatti oltre ai nodi e agli archi contenuti in  $S$  e in  $T$ ,  $\mu(S \cup T)$  contiene anche tutti gli archi negativi tra un nodo di  $S$  e un nodo di  $T$ .

**Osservazione:** Questo modello è un'estensione del modello AHP di Saaty. Infatti se la matrice  $\mathbf{A}$  è consistente, la misura di Saaty  $\mu$  è additiva e l'integrale di Choquet coincide con una media pesata i cui pesi sono  $w_i$ , come nel modello AHP di Saaty.

Mediante la trasformata di Möbius possiamo calcolare i valori di Shapley associati alla misura di Saaty  $\mu$ .

Indichiamo con  $\phi_i$  il valore di Shapley di un criterio  $i \in N$  associato alla misura di Saaty  $\mu$ . Si ha

$$\begin{aligned} \phi_i &= \sum_{T \subseteq N \setminus i} \frac{m_\mu(T \cup i)}{t+1} = m_\mu(i) + \frac{1}{2} \sum_{j \in N \setminus i} m_\mu(ij) \\ &= w_i/\mathcal{N} - \frac{1}{2} \sum_{j \in N \setminus i} w_i(1 - v_{ij})w_j/\mathcal{N}. \end{aligned} \quad (3.12)$$



Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\phi_i &= w_i/\mathcal{N} - \frac{1}{2} \sum_{j \in N \setminus i} w_i(1 - v_{ij})w_j/\mathcal{N} \\
&= w_i/\mathcal{N} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n w_i(1 - v_{ij})w_j/\mathcal{N} + \frac{1}{2} w_i(1 - v_{ii})w_i/\mathcal{N} \\
&= w_i/\mathcal{N} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n w_i w_j/\mathcal{N} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n w_i v_{ij} w_j/\mathcal{N} \\
&= w_i/\mathcal{N} - \frac{1}{2} w_i/\mathcal{N} + \frac{1}{2} w_i v_i/\mathcal{N} \\
&= \frac{1}{2} w_i(1 + v_i)/\mathcal{N}
\end{aligned}$$

e poichè

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2}(1 + v)$$

possiamo scrivere il valore di Shapley di un criterio  $i \in N$  come

$$\phi_i = w_i \frac{1 + v_i}{1 + v}. \quad (3.13)$$

Nel nostro modello di aggregazione multicriterio i valori di Shapley rappresentano i pesi di importanza effettiva dei vari criteri. Quando la matrice  $\mathbf{A}$  è consistente, si ha  $v_{ij} = 1$  per ogni  $i, j = 1, \dots, n$  e l'equazione (3.12) implica che i valori di Shapley sono  $\phi_i = w_i$ .

In generale, il fatto che  $\mathbf{A}$  sia inconsistente cambia l'originale distribuzione dei pesi, attenuando i valori di importanza di quei criteri che, in media, sono più inconsistenti con gli altri ed enfatizzando i valori di importanza di quei criteri che, in media, sono più consistenti con gli altri.

Se infatti  $v_i < v$ , per l'equazione (3.13) i valori di Shapley risultano attenuati ( $\phi_i < w_i$ ), mentre se  $v_i > v$  i valori di Shapley risultano enfatizzati ( $\phi_i > w_i$ ).

Questo si può vedere anche calcolando l'espansione di Taylor del secondo ordine dei valori di Shapley  $\phi_i$  attorno alla condizione di consistenza  $v_i \approx 1$ .

$$\phi_i \approx w_i \left( 1 + \frac{1}{4}(v_i - v)(3 - v) \right) \quad i = 1, \dots, n.$$

Osserviamo che l'espansione di Taylor del secondo ordine dei valori di Shapley è ancora normalizzata a somma uno, dato che

$$\sum_{i=1}^n w_i(v_i - v) = 0.$$

Inoltre l'espansione di Taylor mostra chiaramente che, per piccole approssimazioni di inconsistenza, il valore di Shapley  $\phi_i$  aumenta se  $v_i > v$  e diminuisce se  $v_i < v$ .

In altre parole, il valore di Shapley aumenta o diminuisce a seconda che la singola misura di consistenza  $v_i$  sia più grande o più piccola della misura di consistenza complessiva  $v$ .

**Espansione di Taylor del secondo ordine di  $\phi_i = w_i \frac{1 + v_i}{1 + v}$ :**

Chiamiamo

$$\begin{aligned} x_i &= 1 - v_i & x_i &\in [0, 1) \\ x &= \sum_i w_i x_i = 1 - v & x &\in [0, 1) \end{aligned}$$

$$\psi_i = \phi_i / w_i$$

Calcoliamo l'espansione di Taylor del secondo ordine attorno a  $x_i = 0$  di

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \frac{2 - x_i}{2 - x}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \partial_j \psi_i &= \frac{(-\delta_{ij})(2 - x) - (2 - x_i)(-w_j)}{(2 - x)^2} \\ &= \frac{-\delta_{ij}}{2 - x} + \frac{\psi_i w_j}{2 - x} \\ &= \frac{\psi_i w_j - \delta_{ij}}{2 - x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_k \partial_j \psi_i &= \frac{(w_j \partial_k \psi_i)(2 - x) - (\psi_i w_j - \delta_{ij})(-w_k)}{(2 - x)^2} \\ &= \frac{w_j \partial_k \psi_i}{2 - x} + \frac{w_k (\psi_i w_j - \delta_{ij})}{(2 - x)^2} \\ &= \frac{w_j (\psi_i w_k - \delta_{ik})}{(2 - x)^2} + \frac{w_k (\psi_i w_j - \delta_{ij})}{(2 - x)^2} \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \psi_i(\mathbf{x}) &= 1 + \sum_j \frac{w_j - \delta_{ij}}{2} x_j + \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \left[ \frac{w_j (w_k - \delta_{ik})}{4} + \frac{w_k (w_j - \delta_{ij})}{4} \right] x_j x_k + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x_i + \frac{1}{8} \sum_j \sum_k [w_j w_k + w_k w_j - w_j \delta_{ik} - w_k \delta_{ij}] x_j x_k + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} (x - x_i) + \frac{1}{8} \left[ x^2 + x^2 - \sum_j w_j x_j x_i - \sum_k w_k x_k x_i \right] + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} (x - x_i) + \frac{1}{8} [2x^2 - x x_i - x x_i] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{1}{2}(x - x_i) + \frac{1}{4}[x(x - x_i)] + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{2}(x - x_i)\left(1 + \frac{1}{2}x\right) + \dots
\end{aligned}$$

Sostituendo i valori  $x_i = 1 - v_i$  e  $x = 1 - v$  si ottiene

$$\begin{aligned}
\psi_i(\mathbf{x}) &= 1 + \frac{1}{2}(1 - v - 1 + v_i)\left(1 + \frac{1}{2}(1 - v)\right) + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{4}(v_i - v)(3 - v) + \dots
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\phi_i &= w_i \left( 1 + \frac{1}{4}(v_i - v)(3 - v) + \dots \right) \\
\phi_i &\approx w_i \left( 1 + \frac{1}{4}(v_i - v)(3 - v) \right).
\end{aligned}$$

### 3.5.3 Esempi

Applichiamo l'estensione del modello AHP ad un esempio dovuto a Saaty e Vargas [37]. L'esempio è stato leggermente modificato nei valori numerici per produrre valori di priorità più semplici ed effetti di inconsistenza più evidenti.

Una giovane coppia, che desidera acquistare un'automobile, considera quattro differenti criteri per la scelta dell'automobile: affidabilità, comfort, estetica e costo. Con quattro criteri ci sono sei confronti a coppie indipendenti. La valutazione di questi sei confronti indipendenti viene così effettuata all'interno della coppia: lui stabilisce quelli che coinvolgono il costo, mentre lei stabilisce i rimanenti. Per lui è importante l'estetica e meno il comfort. Per lei è vero il contrario.

La matrice di confronto a coppie tra criteri data dalla coppia è la seguente

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/2 & 1 \\ & 1 & 2 & 1/3 \\ & & 1 & 4/3 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Criterio 1: affidabilità} \\ \text{Criterio 2: comfort} \\ \text{Criterio 3: estetica} \\ \text{Criterio 4: costo} \end{array}$$

Il vettore delle priorità estratto da questa matrice di confronto a coppie con il metodo della media geometrica è

$$\mathbf{w} = [w_i] = (0.3, 0.2, 0.2, 0.3).$$

La giovane coppia può scegliere fra tre differenti alternative:

- 1) Toyota;
- 2) Honda (CVCC);
- 3) Chevrolet (Citation).

Ci sono allora quattro matrici di confronto a coppie fra alternative, una per ogni criterio.

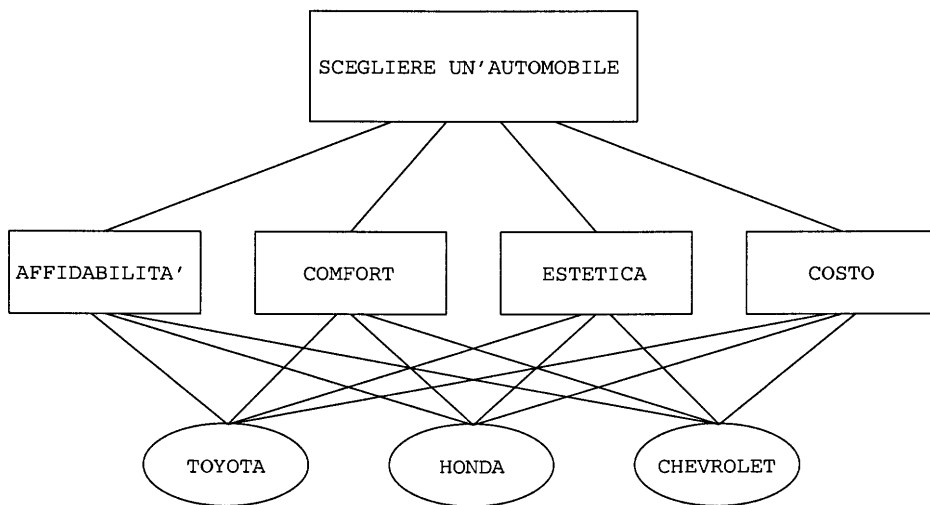


Figura 3.14: Gerarchia per la scelta di un'automobile.

I vettori delle priorità estratti da queste quattro matrici di confronto a coppie con il metodo della media geometrica sono

	Toyota	Honda	Chevrolet
Affidabilità	0.43	0.43	0.14
Comfort	0.43	0.14	0.43
Estetica	0.63	0.22	0.15
Costo	0.41	0.33	0.26

I valori di priorità aggregati delle alternative rispetto ai vari criteri si ottengono con una media pesata, i cui pesi sono dati dalle componenti del vettore delle priorità  $\mathbf{w} = [w_i] = (0.3, 0.2, 0.2, 0.3)$ . Per le tre alternative i valori aggregati risultano allora

- Toyota:  $0.43 \cdot 0.3 + 0.43 \cdot 0.2 + 0.63 \cdot 0.2 + 0.41 \cdot 0.3 = 0.46$
- Honda:  $0.43 \cdot 0.3 + 0.14 \cdot 0.2 + 0.22 \cdot 0.2 + 0.33 \cdot 0.3 = 0.30$
- Chevrolet:  $0.14 \cdot 0.3 + 0.43 \cdot 0.2 + 0.15 \cdot 0.2 + 0.26 \cdot 0.3 = 0.24$

La giovane coppia sceglierà allora l'alternativa Toyota.

Applichiamo l'estensione del modello AHP nel contesto di questo esempio, concentrandoci in particolare sull'effetto dell'inconsistenza sui valori di Shapley dei vari criteri.

La matrice consistente  $\tilde{\mathbf{A}}$  associata alla matrice di confronto a coppie  $\mathbf{A}$  è

$$\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{a}_{ij} = w_i/w_j] = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/2 & 1 \\ & 1 & 1 & 2/3 \\ & & 1 & 2/3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Il vettore delle priorità associato alla matrice consistente  $\tilde{\mathbf{A}}$  coincide con quello associato alla matrice  $\mathbf{A}$ . Consideriamo allora la classe di tutte le matrici di confronto a coppie che hanno lo stesso vettore delle priorità  $\mathbf{w}$ . Ogni matrice di confronto a coppie in questa classe può essere ottenuta da  $\tilde{\mathbf{A}}$  moltiplicandola componente per componente per la matrice positiva e reciproca

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & 1/\alpha_1\alpha_2 \\ & 1 & \alpha_3 & \alpha_1/\alpha_3 \\ & & 1 & \alpha_2\alpha_3 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0.$$

In tale matrice il prodotto degli elementi di ogni riga è uguale a uno.

La matrice consistente  $\tilde{\mathbf{A}}$  corrisponde alla scelta dei parametri  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$  mentre la matrice di confronto a coppie originale  $\mathbf{A}$  corrisponde alla scelta dei parametri  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2$ . Questi valori dei parametri sono ancora ragionevolmente neutrali, ma già i valori di Shapley associati alla matrice di confronto a coppie  $\mathbf{A}$  mostrano alcune deviazioni rispetto ai pesi di importanza  $\mathbf{w} = [w_i]$ . Si ha infatti (si veda allegato calcoli-es.nb)  $\phi_1 = 0.31, \phi_2 = 0.195, \phi_3 = 0.195, \phi_4 = 0.30$ . In questo esempio quindi, l'inconsistenza nelle valutazioni che coinvolgono il comfort e l'estetica ha l'effetto di enfatizzare l'affidabilità.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/2 & 1 \\ & 1 & 1 & 2/3 \\ & & 1 & 2/3 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha_1=1, \alpha_2=1, \alpha_3=2 \quad \mathbf{A}$$

$$\mathbf{w} = (0.3, 0.2, 0.2, 0.3)$$

valori delle priorità

$$\phi = (0.31, 0.195, 0.195, 0.30)$$

valori di Shapley

Possiamo scegliere i valori dei parametri in modo da ottenere un effetto significativo sui valori di Shapley.

**Esempio 3.2:** Come primo esempio consideriamo  $\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$  come valori dei parametri. Questo significa che stiamo enfatizzando l'importanza dell'affidabilità rispetto al comfort, attenuando l'importanza dell'affidabilità rispetto al costo ed enfatizzando l'importanza del comfort rispetto al costo. Questi cambiamenti producono una matrice di confronto a coppie inconsistente, ma conservano i pesi di importanza  $\mathbf{w}$  ottenuti attraverso il metodo della media geometrica. I valori di Shapley associati a questa matrice di confronto a coppie inconsistente sono

$\phi_1 = 0.29, \phi_2 = 0.19, \phi_3 = 0.23, \phi_4 = 0.29$  (si veda allegato calcoli-es.3.2.nb). In questo esempio quindi, l'effetto complessivo dell'inconsistenza è quello di enfatizzare l'estetica rispetto agli altri tre criteri.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/2 & 1 \\ & 1 & 1 & 2/3 \\ & & 1 & 2/3 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha_1=4, \alpha_2=1, \alpha_3=1 \quad \mathbf{A}'$$

$$\mathbf{w} = (0.3, 0.2, 0.2, 0.3) \quad \phi = (0.29, 0.19, 0.23, 0.29)$$

valori delle priorità valori di Shapley

**Esempio 3.3:** Come secondo esempio consideriamo  $\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 1/4, \alpha_3 = 4$  come valori dei parametri. Questo significa che stiamo enfatizzando l'importanza dell'affidabilità rispetto al comfort, attenuando l'importanza dell'affidabilità rispetto all'estetica ed enfatizzando l'importanza del comfort rispetto all'estetica. Nuovamente questi cambiamenti producono una matrice di confronto a coppie inconsistente, ma conservano i pesi di importanza  $\mathbf{w}$  ottenuti attraverso il metodo della media geometrica. I valori di Shapley associati a questa matrice di confronto a coppie inconsistente sono  $\phi_1 = 0.29, \phi_2 = 0.19, \phi_3 = 0.19, \phi_4 = 0.33$  (si veda allegato calcoli-es.3.3.nb). In questo esempio quindi, l'effetto complessivo dell'inconsistenza è quello di enfatizzare il costo rispetto agli altri tre criteri.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/2 & 1 \\ & 1 & 1 & 2/3 \\ & & 1 & 2/3 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha_1=4, \alpha_2=1/4, \alpha_3=4 \quad \mathbf{A}''$$

$$\mathbf{w} = (0.3, 0.2, 0.2, 0.3) \quad \phi = (0.29, 0.19, 0.19, 0.33)$$

valori delle priorità valori di Shapley

### 3.5.4 La funzione di scala estesa

La definizione di funzione di scala può essere estesa introducendo un parametro libero  $\beta \geq 0$ .

Definiamo la **funzione di scala parametrizzata**  $f_\beta : (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$  come

$$f_\beta(x) = \frac{2}{(x^\beta + x^{-\beta})} \quad x > 0. \quad (3.14)$$

Chiaramente per  $\beta = 0$  si ottiene  $f_{\beta=0}(x) = 1$ . I grafici di alcune funzioni di scala  $f_\beta$  per  $\beta = 2, 4, 1/2$  e  $1/4$  sono illustrati sotto

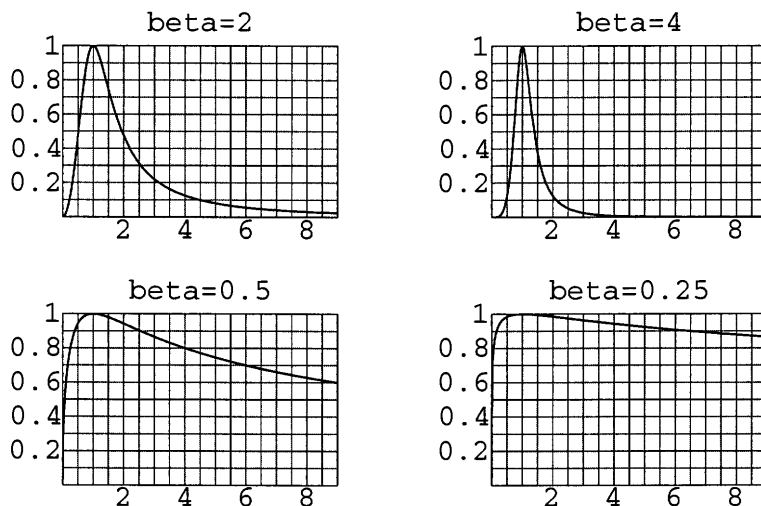


Figura 3.15: Grafici di alcune funzioni di scala  $f_\beta$ .

Come la funzione di scala  $f$ , anche la funzione di scala  $f_\beta$  ha un'unico punto critico in  $x = 1$  dove raggiunge il valore massimo  $f_\beta(1) = 1$ . Inoltre la funzione di scala  $f_\beta$  ha l'importante proprietà

$$f_\beta(x) = f_\beta(x^{-1}).$$

La funzione di scala  $f_\beta$  ha due differenti comportamenti asintotici vicino all'origine, a seconda del valore del parametro  $\beta$ . Osserviamo infatti che la funzione di scala  $f_\beta$  può essere riscritta come

$$f_\beta(x) = \frac{2x^\beta}{1 + x^{2\beta}} \quad x > 0,$$

la cui derivata prima è

$$f'_\beta(x) = \frac{2\beta x^{\beta-1}(1 - x^{2\beta})}{(1 + x^{2\beta})^2} \quad x > 0.$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'_\beta(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } 0 < \beta < 1 \\ 0^+ & \text{se } \beta > 1 \end{cases}$$

La funzione di scala  $f_\beta$  ha quindi un'asintoto verticale nell'origine se  $0 < \beta < 1$ , mentre ha un'asintoto orizzontale nell'origine se  $\beta > 1$ .

Inoltre si vede facilmente che la misura di consistenza che si ottiene mediante la funzione di scala risulta più stretta al crescere dei valori di  $\beta$ . In altre parole, la

crescere di  $\beta$  tutte le misure di locale consistenza  $v_{ij}(\beta)$  decrescono, con eccezione di quelle associate con  $v_{ij} = 1$ . Di conseguenza gli effetti dell'inconsistenza nel contesto del nostro modello possono venire attenuati o enfatizzati, relativamente al caso originario  $\beta = 1$ , attraverso delle scelte appropriate del parametro  $\beta$ : valori elevati di questo parametro comportano effetti di inconsistenza più forti.

**Esempio 3.4:** Riprendiamo l'esempio 3.2 con  $\alpha_1 = 4$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_3 = 1$  come valori dei parametri. I valori di Shapley ottenuti sono  $\phi = (0.29, 0.19, 0.23, 0.29)$  e quindi l'effetto complessivo dell'inconsistenza è quello di enfatizzare l'estetica rispetto agli altri tre criteri.

Utilizziamo ora una funzione di scala parametrizzata

$$f_{\beta=4}(x) = \frac{2x^4}{1+x^8} \quad x > 0,$$

in modo da poter enfatizzare maggiormente gli effetti dell'inconsistenza.

I valori di Shapley ottenuti utilizzando la funzione di scala  $f_{\beta=4}$  sono  $\phi_{\beta=4} = (0.285, 0.18, 0.25, 0.285)$  (si veda allegato calcoli-es.3.4.nb) e quindi l'estetica è stata ulteriormente enfatizzata rispetto agli altri tre criteri.

$$\phi = (0.29, 0.19, 0.23, 0.29) \rightsquigarrow \phi_{\beta=4} = (0.285, 0.18, 0.25, 0.285)$$

**Esempio 3.5:** Riprendiamo l'esempio 3.3 con  $\alpha_1 = 4$ ,  $\alpha_2 = 1/4$ ,  $\alpha_3 = 4$  come valori dei parametri. I valori di Shapley ottenuti sono  $\phi = (0.29, 0.19, 0.19, 0.33)$  e quindi l'effetto complessivo dell'inconsistenza è quello di enfatizzare il costo rispetto agli altri tre criteri.

Utilizziamo ora una funzione di scala parametrizzata

$$f_{\beta=2}(x) = \frac{2x^2}{1+x^4} \quad x > 0,$$

in modo da poter enfatizzare maggiormente gli effetti dell'inconsistenza.

I valori di Shapley ottenuti utilizzando questa funzione di scala parametrizzata sono  $\phi_{\beta=2} = (0.29, 0.18, 0.18, 0.35)$  (si veda allegato calcoli-es.3.5.nb) e quindi il costo è stato ulteriormente enfatizzato rispetto agli altri tre criteri.

$$\phi = (0.29, 0.19, 0.19, 0.33) \rightsquigarrow \phi_{\beta=2} = (0.29, 0.18, 0.18, 0.35)$$



# Capitolo 4

## Orness

### 4.1 Introduzione

Gli integrali di Choquet, al variare della misura di Choquet, assumono sempre valori compresi tra il minimo e il massimo

$$\min(x_1, \dots, x_n) \leq \mathcal{C}_\mu(x_1, \dots, x_n) \leq \max(x_1, \dots, x_n).$$

In questo capitolo introduciamo un indice, il grado di orness di un operatore di aggregazione, che ci permette di poter classificare gli integrali di Choquet, e tutti gli altri operatori di aggregazione che assumono valori compresi tra il minimo e il massimo, in base alla loro posizione all'interno di tale intervallo.

### 4.2 Grado di Orness

Sia  $\mathcal{F}$  un operatore di aggregazione su  $[0, 1]^n$ . Indichiamo con

$$E(\mathcal{F}) = \int_{[0,1]^n} \mathcal{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (4.1)$$

il valore atteso di  $\mathcal{F}$ .  $E(\mathcal{F})$  rappresenta il valore medio di  $\mathcal{F}$  su  $[0, 1]^n$ .

In particolare il valore atteso dell'operatore  $\min$  in  $[0, 1]^n$  è dato [21] da

$$E(\min_{i \in N} x_i) = \int_{[0,1]^n} \min_{i \in N} x_i d\mathbf{x} = \frac{1}{n+1}. \quad (4.2)$$

Diamo una traccia della dimostrazione nei casi  $n=2$  e  $n=3$ .

Nel caso  $n=2$  ci sono due possibilità:  $x_1 < x_2$  oppure  $x_2 < x_1$ .

Supponiamo sia  $x_1 < x_2$ . Allora

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{x_1}^1 x_1 dx_1 dx_2 &= \int_0^1 x_1 \left( x_2 \Big|_{x_1}^1 \right) dx_1 = \int_0^1 x_1 (1 - x_1) dx_1 \\ &= \left( \frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{3} x_1^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \xrightarrow{2 \text{ casi}} \quad \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Nel caso  $n=3$  le possibilità sono sei.

Supponiamo sia  $x_1 < x_2 < x_3$ , allora

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_{x_1}^1 \int_{x_2}^1 x_1 dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_0^1 \int_{x_1}^1 x_1 \left( x_3 \Big|_{x_2}^1 \right) dx_1 dx_2 = \int_0^1 \int_{x_1}^1 x_1 (1 - x_2) dx_1 dx_2 \\
 &= \int_0^1 x_1 \left( x_2 - \frac{1}{2} x_2^2 \right) \Big|_{x_1}^1 dx_1 = \int_0^1 x_1 \left( \frac{1}{2} - x_1 + \frac{1}{2} x_1^2 \right) dx_1 \\
 &= \int_0^1 \left( \frac{1}{2} x_1^3 - x_1^2 + \frac{1}{2} x_1 \right) dx_1 = \left( \frac{1}{8} x_1^4 - \frac{1}{3} x_1^3 + \frac{1}{4} x_1^2 \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{24} \quad \xrightarrow{6 \text{ casi}} \quad \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Analogamente il valore atteso dell'operatore  $\max$  in  $[0, 1]^n$  è dato da

$$E(\max_{i \in N} x_i) = \int_{[0,1]^n} \max_{i \in N} x_i d\mathbf{x} = \frac{n}{n+1}. \quad (4.3)$$

Per un operatore di aggregazione  $\mathcal{F}$  su  $[0, 1]^n$ , la posizione relativa del suo valore atteso  $E(\mathcal{F})$  rispetto a  $E(\max)$  all'interno dell'intervallo  $[E(\min), E(\max)]$  è detta [7] grado di orness dell'operatore  $\mathcal{F}$ .

**Definizione 4.1** Si definisce **grado di orness** di un operatore di aggregazione  $\mathcal{F}$  su  $[0, 1]^n$  la quantità

$$\text{orness}(\mathcal{F}) = \frac{E(\mathcal{F}) - E(\min)}{E(\max) - E(\min)}. \quad (4.4)$$

Osserviamo che se sostituiamo nella definizione di grado di orness i valori di  $E(\max)$  ed  $E(\min)$  otteniamo

$$\begin{aligned}
 \text{orness}(\mathcal{F}) &= \frac{E(\mathcal{F}) - \frac{1}{n+1}}{\frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1}} \\
 &= \left( E(\mathcal{F}) - \frac{1}{n+1} \right) \frac{n+1}{n-1}
 \end{aligned}$$

e quindi la definizione di grado di orness vale solo per  $n \geq 2$ .

Si può notare che  $\text{orness}(\mathcal{F})$  assume sempre valori nell'intervallo  $[0, 1]$ . In particolare

$$\text{orness}(\mathcal{F}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F} = \min$$

$$\text{orness}(\mathcal{F}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F} = \max$$

Più piccolo è il valore di  $\text{orness}(\mathcal{F})$ , più l'operatore  $\mathcal{F}$  tende, nell'aggregazione, a privilegiare i valori più piccoli; al contrario, più il valore di  $\text{orness}(\mathcal{F})$  è vicino a 1, più l'operatore  $\mathcal{F}$  tende a privilegiare i valori più grandi.

Inoltre se  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  sono due operatori di aggregazione su  $[0, 1]^n$ , qualunque sia  $\alpha$  nell'intervallo  $[0, 1]$  si ha

$$\begin{aligned}
\text{orness}(\alpha \mathcal{F} + (1 - \alpha) \mathcal{G}) &= \frac{E(\alpha \mathcal{F} + (1 - \alpha) \mathcal{G}) - E(\min)}{E(\max) - E(\min)} \\
&= \frac{\alpha E(\mathcal{F}) + (1 - \alpha) E(\mathcal{G}) - [\alpha E(\min) + (1 - \alpha) E(\min)]}{E(\max) - E(\min)} \\
&= \alpha \frac{E(\mathcal{F}) - E(\min)}{E(\max) - E(\min)} + (1 - \alpha) \frac{E(\mathcal{G}) - E(\min)}{E(\max) - E(\min)} \\
&= \alpha \text{orness}(\mathcal{F}) + (1 - \alpha) \text{orness}(\mathcal{G}).
\end{aligned}$$

Per un un operatore  $WA$  associato al vettore di pesi  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$  il valore atteso è dato da

$$E(\mathcal{W}_w) = \int_{[0,1]^n} \mathcal{W}_w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{2}. \quad (4.5)$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned}
E(\mathcal{W}_w) &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 (w_1 x_1 + \dots + w_n x_n) dx_1 \dots dx_n \\
&= \int_0^1 \dots \int_0^1 w_1 x_1 dx_1 \dots dx_n + \dots + \int_0^1 \dots \int_0^1 w_{n-1} x_{n-1} dx_1 \dots dx_n \\
&\quad + \int_0^1 \dots \int_0^1 w_n x_n dx_1 \dots dx_n \\
&= \int_0^1 \dots \int_0^1 w_1 x_1 dx_1 \dots dx_{n-1} + \dots + \int_0^1 \dots \int_0^1 w_{n-1} x_{n-1} dx_1 \dots dx_{n-1} \\
&\quad + \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{1}{2} w_n dx_1 \dots dx_{n-1} \\
&= \int_0^1 \dots \int_0^1 w_1 x_1 dx_1 \dots dx_{n-2} + \dots + \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{1}{2} w_{n-1} dx_1 \dots dx_{n-2} \\
&\quad + \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{1}{2} w_n dx_1 \dots dx_{n-2} \\
&= \dots \\
&= \frac{1}{2} w_1 + \frac{1}{2} w_2 + \dots + \frac{1}{2} w_{n-1} + \frac{1}{2} w_n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Applicando la definizione otteniamo quindi il grado di orness di un operatore  $WA$

$$\text{orness}(\mathcal{W}) = \frac{E(\mathcal{W}) - E(\min)}{E(\max) - E(\min)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}}{\frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1}} \\
&= \frac{n-1}{2(n+1)} \cdot \frac{n+1}{n-1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Per un un operatore OWA associato al vettore di pesi  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  il valore atteso è dato da

$$E(\mathcal{O}_\omega) = \int_{[0,1]^n} \mathcal{O}_\omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n i \omega_i. \quad (4.6)$$

Diamo una traccia della dimostrazione nel caso  $n=3$ .

$$\begin{aligned}
E(\mathcal{O}_\omega) &= 3! \int_0^1 \int_{x_1}^1 \int_{x_2}^1 (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= 6 \int_0^1 \int_{x_1}^1 \left( \omega_1 x_1 x_3 + \omega_2 x_2 x_3 + \frac{1}{2} \omega_3 x_3^2 \right) \Big|_{x_2}^1 dx_1 dx_2 \\
&= 6 \int_0^1 \int_{x_1}^1 \left( \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \frac{1}{2} \omega_3 - \omega_1 x_1 x_2 - \omega_2 x_2^2 - \frac{1}{2} \omega_3 x_2^2 \right) dx_1 dx_2 \\
&= 6 \int_0^1 \left( \omega_1 x_1 x_2 + \frac{1}{2} \omega_2 x_2^2 + \frac{1}{2} \omega_3 x_2 - \frac{1}{2} \omega_1 x_1 x_2^2 - \frac{1}{3} \omega_2 x_2^3 - \frac{1}{6} \omega_3 x_2^3 \right) \Big|_{x_1}^1 dx_1 \\
&= 6 \int_0^1 \left( \omega_1 x_1 + \frac{1}{2} \omega_2 + \frac{1}{2} \omega_3 - \frac{1}{2} \omega_1 x_1 - \frac{1}{3} \omega_2 - \frac{1}{6} \omega_3 - \omega_1 x_1^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \omega_2 x_1^2 - \frac{1}{2} \omega_3 x_1 + \frac{1}{2} \omega_1 x_1^3 + \frac{1}{3} \omega_2 x_1^3 + \frac{1}{6} \omega_3 x_1^3 \right) dx_1 \\
&= 6 \left( \frac{1}{2} \omega_1 x_1^2 + \frac{1}{2} \omega_2 x_1 + \frac{1}{2} \omega_3 x_1 - \frac{1}{4} \omega_1 x_1^2 - \frac{1}{3} \omega_2 x_1 - \frac{1}{6} \omega_3 x_1 - \frac{1}{3} \omega_1 x_1^3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{6} \omega_2 x_1^3 - \frac{1}{4} \omega_3 x_1^2 + \frac{1}{8} \omega_1 x_1^4 + \frac{1}{12} \omega_2 x_1^4 + \frac{1}{24} \omega_3 x_1^4 \right) \Big|_0^1 \\
&= 6 \left( \frac{1}{2} \omega_1 + \frac{1}{2} \omega_2 + \frac{1}{2} \omega_3 - \frac{1}{4} \omega_1 - \frac{1}{3} \omega_2 - \frac{1}{6} \omega_3 - \frac{1}{3} \omega_1 - \frac{1}{6} \omega_2 - \frac{1}{4} \omega_3 + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{8} \omega_1 + \frac{1}{12} \omega_2 + \frac{1}{24} \omega_3 \right) \\
&= \frac{\omega_1 + 2\omega_2 + 3\omega_3}{4} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 i \omega_i
\end{aligned}$$

Applicando la definizione otteniamo quindi il grado di orness di un operatore OWA

$$\begin{aligned}
\text{orness}(\mathcal{O}_\omega) &= \frac{E(\mathcal{O}_\omega) - E(\min)}{E(\max) - E(\min)} \\
&= \frac{\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n i \omega_i - \frac{1}{n+1}}{\frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n i \omega_i - 1 \right) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (i-1) \omega_i$$

Otteniamo così il grado di orness come definito da Yager [43] nel caso specifico di un operatore  $OWA$ .

Nella tabella seguente riassumiamo il valore atteso ed il grado di orness di alcuni operatori di aggregazione.

$\mathcal{F}$	$E(\mathcal{F})$	orness( $\mathcal{F}$ )
min	$\frac{1}{n+1}$	0
max	$\frac{n}{n+1}$	1
$\mathcal{W}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathcal{O}_\omega$	$\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n i \omega_i$	$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (i-1) \omega_i$

Tabella 4.1: Valore atteso e grado di orness di alcuni operatori di aggregazione.

Nel caso di un integrale di Choquet possiamo esprimere [21] il grado di orness in funzione della rappresentazione di Möbius. Vale infatti la seguente

**Proposizione 4.1** *Per ogni misura di Choquet  $\mu$  si ha*

$$\text{orness}(C_\mu) = \frac{1}{n-1} \sum_{T \subseteq N} \frac{n-t}{t+1} m_\mu(T). \quad (4.7)$$

**Dimostrazione:** Poichè

$$C_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{T \subseteq N} \min_{i \in T} (x_i) m_\mu(T),$$

possiamo esprimere il valore atteso di  $C_\mu$  in funzione della rappresentazione di Möbius

$$E(C_\mu) = \sum_{T \subseteq N} \frac{1}{t+1} m_\mu(T).$$

Sostituendo nella definizione le espressioni di  $E(\min)$ ,  $E(\max)$  e  $E(C_\mu)$  e ricordando che

$$\sum_{T \subseteq N} m_\mu(T) = \mu(N) = 1$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\text{orness}(\mathcal{C}_\mu) &= \frac{E(\mathcal{C}_\mu) - E(\min)}{E(\max) - E(\min)} \\
&= \frac{\sum_{T \subseteq N} \frac{1}{t+1} m_\mu(T) - \frac{1}{n+1}}{\frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1}} \\
&= \frac{n+1}{n-1} \left[ \sum_{T \subseteq N} \frac{1}{t+1} m_\mu(T) - \frac{1}{n+1} \sum_{T \subseteq N} m_\mu(T) \right] \\
&= \frac{1}{n-1} \sum_{T \subseteq N} \left( \frac{n+1}{t+1} - \frac{n+1}{n+1} \right) m_\mu(T) \\
&= \frac{1}{n-1} \sum_{T \subseteq N} \frac{n-t}{t+1} m_\mu(T)
\end{aligned}$$

e la tesi è provata.  $\square$

La seguente proposizione [21] ci permette di esprimere il grado di orness di  $\mathcal{C}_\mu$  in funzione di  $\mu$ .

**Proposizione 4.2** Per ogni misura di Choquet  $\mu$  si ha

$$\text{orness}(\mathcal{C}_\mu) = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{t}} \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=t}} \mu(T). \quad (4.8)$$

**Dimostrazione:** Ricordiamo che l'indice di interazione di Shapley per un qualunque sottoinsieme  $S \subseteq N$  in funzione della rappresentazione di Möbius è dato da

$$I_\mu(S) = \sum_{T \subseteq N \setminus S} \frac{1}{t+1} m_\mu(T \cup S).$$

Allora

$$E(\mathcal{C}_\mu) = \sum_{T \subseteq N} \frac{1}{t+1} m_\mu(T) = I_\mu(\emptyset).$$

Dalla definizione di indice di interazione di Shapley per un insieme  $S$

$$I_\mu(S) = \sum_{T \subseteq N \setminus S} \frac{(n-s-t)! t!}{(n-s+1)!} \sum_{L \subseteq S} (-1)^{s-l} \mu(L \cup T),$$

si ha

$$E(\mathcal{C}_\mu) = I_\mu(\emptyset) = \sum_{T \subseteq N} \frac{(n-t)! t!}{(n+1)!} \mu(T) = \frac{1}{n+1} \sum_{T \subseteq N} \frac{1}{\binom{n}{t}} \mu(T).$$

Sostituendo questa espressione nella definizione di grado di orness di  $\mathcal{C}_\mu$  si ottiene la tesi.  $\square$

### 4.3 Operatore OWA associato ad una misura di Choquet

Data una misura di Choquet  $\mu$  possiamo definire una misura simmetrica  $\mu_S$  associata alla misura  $\mu$ , uniformando il valore di quest'ultima sulle coalizioni di uguale cardinalità.

**Definizione 4.2** Sia  $\mu$  una misura di Choquet su  $N$ . La misura simmetrica associata a  $\mu$  è definita da

$$\mu_S(T) = \frac{1}{\binom{n}{t}} \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=t}} \mu(T) \quad T \subseteq N. \quad (4.9)$$

La misura simmetrica  $\mu_S$  associata a  $\mu$  è ancora una misura di Choquet. Si tratta infatti di una funzione

$$\mu_S : \mathcal{P}(N) \longrightarrow [0, 1]$$

per la quale sono soddisfatte le condizioni di frontiera e monotonia:

- (i)  $\mu_S(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0, \quad \mu_S(N) = \mu(N) = 1;$
- (ii)  $S \subseteq T \subseteq N \Rightarrow \mu_S(S) \leq \mu_S(T).$

Sia infatti  $T \subseteq N$  una coalizione di cardinalità  $|T| = t$ . Consideriamo tutte le  $\binom{t}{s}$  coalizioni  $S$  di fissata cardinalità  $|S| = s$  contenute in  $T$ .

Poichè  $\mu$  è una misura di Choquet

$$\mu(S) \leq \mu(T) \quad S \subseteq T \subseteq N$$

da cui segue che

$$\sum_{\substack{S \subseteq T \\ |S|=s}} \mu(S) \leq \binom{t}{s} \mu(T) \quad T \subseteq N$$

ossia

$$\frac{1}{\binom{t}{s}} \sum_{\substack{S \subseteq T \\ |S|=s}} \mu(S) \leq \mu(T) \quad T \subseteq N.$$

La relazione precedente vale per ogni coalizione  $T \subseteq N$  di cardinalità  $|T| = t$ . Si ha quindi

$$\sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=t}} \frac{1}{\binom{t}{s}} \sum_{\substack{S \subseteq T \\ |S|=s}} \mu(S) \leq \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=t}} \mu(T).$$

Poichè ogni coalizione  $S$  di cardinalità  $|S| = s$  è contenuta in  $\binom{n-s}{t-s}$  coalizioni  $T$  di cardinalità  $|T| = t$ , la sommatoria al primo membro della disuguaglianza precedente contiene  $\binom{n-s}{t-s}$  volte ciascuna coalizione  $S$ . Allora

$$\sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=t}} \frac{1}{\binom{t}{s}} \sum_{\substack{S \subseteq T \\ |S|=s}} \mu(S) = \binom{n-s}{t-s} \frac{1}{\binom{t}{s}} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S|=s}} \mu(S)$$

Ne segue che

$$\binom{n-s}{t-s} \frac{1}{\binom{t}{s}} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S|=s}} \mu(S) \leq \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=t}} \mu(T)$$

$$\frac{1}{\binom{t}{s}} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S|=s}} \mu(S) \leq \frac{1}{\binom{n-s}{t-s}} \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=t}} \mu(T)$$

$$\frac{1}{\binom{n}{s}} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S|=s}} \mu(S) \leq \frac{\binom{t}{s}}{\binom{n}{s}} \frac{1}{\binom{n-s}{t-s}} \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=t}} \mu(T)$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{\binom{t}{s}}{\binom{n}{s}} \frac{1}{\binom{n-s}{t-s}} &= \frac{t!}{s!(t-s)!} \frac{s!(n-s)!}{n!} \frac{(t-s)!(n-s-t+s)!}{(n-s)!} \\ &= \frac{t!(n-t)!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{t}} \end{aligned}$$

Allora la misura simmetrica  $\mu_S$  soddisfa le condizioni di monotonia

$$\mu_S(S) = \frac{1}{\binom{n}{s}} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S|=s}} \mu(S) \leq \frac{1}{\binom{n}{t}} \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=t}} \mu(T) = \mu_S(T) \quad S \subseteq T.$$

La misura simmetrica  $\mu_S$  associata a  $\mu$  è perciò una misura di Choquet ed ha quindi senso considerare l'integrale di Choquet rispetto a tale misura

$$C_{\mu_S}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_{(i)} [\mu_S(A_{(i)}) - \mu_S(A_{(i+1)})].$$

Per la proposizione 2.7 sappiamo che esiste una corrispondenza biunivoca tra gli integrali di Choquet rispetto ad una misura simmetrica e gli operatori *OWA*, in particolare l'integrale di Choquet rispetto alla misura simmetrica  $\mu_S$  è un operatore *OWA*. Definiamo quindi l'operatore *OWA* associato a  $\mu$  come l'integrale di Choquet rispetto alla misura simmetrica  $\mu_S$ .



**Definizione 4.3** Sia  $\mu$  una misura di Choquet su  $N$ . L'operatore OWA associato a  $\mu$  è definito come

$$\mathcal{O}_\mu(\mathbf{x}) = \mathcal{C}_{\mu_S}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in [0, 1]^n. \quad (4.10)$$

Possiamo scrivere  $\mathcal{O}_\mu$  nella forma

$$\mathcal{O}_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_{(i)} \omega_i,$$

con

$$\omega_i = \mu_S(A_{(i)}) - \mu_S(A_{(i+1)}) = \mu_S(n+1-i) - \mu_S(n-i)$$

dove  $\mu_S(t) = \mu_S(T)$  con  $t = |T|$  e  $t = 0, 1, \dots, n$ .

La seguente proposizione mostra un interessante risultato che riguarda la relazione tra il grado di orness di un operatore OWA associato ad una misura di Choquet e il grado di orness dell'integrale di Choquet rispetto alla stessa misura.

**Proposizione 4.3** Il grado di orness di un operatore OWA associato a  $\mu$  coincide con il grado di orness dell'integrale di Choquet rispetto a  $\mu$ ,

$$\text{orness}(\mathcal{O}_\mu) = \text{orness}(\mathcal{C}_\mu).$$

**Dimostrazione:** Per l'operatore OWA associato a  $\mu$  si ha

$$\begin{aligned} \text{orness}(\mathcal{O}_\mu) &= \text{orness}(\mathcal{C}_{\mu_S}) = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{t}} \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=t}} \mu_S(T) = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} \mu_S(t) \\ &= \text{orness}(\mathcal{C}_\mu). \end{aligned}$$

□

Yager [43] ha definito il grado di orness nel caso specifico di un operatore OWA come segue

**Definizione 4.4** Sia  $\mathcal{O}_\omega$  un operatore OWA relativo al vettore di pesi  $\omega$ . Il grado di orness di questo operatore è definito come

$$\text{orness}(\mathcal{O}_\omega) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (i-1) \omega_i. \quad (4.11)$$

Osserviamo come la definizione di grado di orness di un operatore di aggregazione nel caso di un operatore *OWA* coincida con la definizione data da Yager. Infatti si ha

$$\begin{aligned}
\text{orness}(\mathcal{O}_\mu) &= \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} \mu_S(t) \\
&= \frac{1}{n-1} [\mu_S(1) + \mu_S(2) + \dots + \mu_S(n-1)] \\
&= \frac{1}{n-1} \left\{ (\mu_S(1) - \mu_S(0)) + [(\mu_S(2) - \mu_S(1)) + (\mu_S(1) - \mu_S(0))] \right. \\
&\quad \left. + \dots + [(\mu_S(n-1) - \mu_S(n-2)) + \dots + (\mu_S(1) - \mu_S(0))] \right\} \\
&= \frac{1}{n-1} [\omega_n + (\omega_{n-1} + \omega_n) + \dots + (\omega_2 + \dots + \omega_n)] \\
&= \frac{1}{n-1} [(n-1)\omega_n + (n-2)\omega_{n-1} + \dots + \omega_2] \\
&= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (i-1)\omega_i
\end{aligned}$$

Notiamo che gli operatori *WA* non sono gli unici operatori con grado di orness 1/2: appartengono alla famiglia degli operatori *OWA* con orness 1/2 gli operatori *OWA* centrali.

**Definizione 4.5** *Un operatore OWA si dice centrale se il vettore  $\omega$  di pesi è tale che*

$$\omega_i = \omega_{n-i+1} \quad i = 1, \dots, n$$

Se  $\mathcal{O}$  è un operatore *OWA* centrale si ha

$$\begin{aligned}
\text{orness}(\mathcal{O}) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (i-1)\omega_i \\
&= \frac{1}{2(n-1)} \left[ \sum_{i=1}^n (i-1)\omega_i + \sum_{i=1}^n (i-1)\omega_i \right] \\
&= \frac{1}{2(n-1)} \left[ \sum_{i=1}^n (i-1)\omega_i + \sum_{i=1}^n (n-i+1-1)\omega_{n-i+1} \right] \\
&= \frac{1}{2(n-1)} \left[ \sum_{i=1}^n (i-1)\omega_i + \sum_{i=1}^n (n-i)\omega_i \right] \\
&= \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^n (n-1)\omega_i \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Gli operatori *OWA* centrali sono quindi operatori con grado di orness  $1/2$ .

Nei casi  $n = 2, 3$  tutti gli operatori *OWA* con orness  $1/2$  sono operatori *OWA* centrali.

Infatti per  $n = 2$ , se  $\mathcal{O}$  è un operatore *OWA* con orness  $1/2$

$$\begin{cases} \text{orness}(\mathcal{O}) = 0 \cdot \omega_1 + 1 \cdot \omega_2 = 1/2 \\ \omega_1 + \omega_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = 1/2$$

ed è quindi un operatore *OWA* centrale.

Analogamente per  $n = 3$ , se  $\mathcal{O}$  è un operatore *OWA* con orness  $1/2$

$$\begin{cases} \text{orness}(\mathcal{O}) = 0 \cdot \omega_1 + 1/2 \cdot \omega_2 + 1 \cdot \omega_3 = 1/2 \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \omega_1 = \omega_3 = 1/2 - \omega_2/2$$

ed è ancora un operatore *OWA* centrale.

Per  $n \geq 4$  questo non vale più.

**Esempio 4.1:** Consideriamo l'operatore *OWA* associato al vettore di pesi  $\omega = (0.25, 0.3, 0.15, 0.3)$ . Tale operatore ha grado di orness  $1/2$

$$\text{orness}(\mathcal{O}_\omega) = 0 \cdot 0.25 + 1/3 \cdot 0.3 + 2/3 \cdot 0.15 + 1 \cdot 0.3 = 1/2.$$

Tuttavia non è un operatore *OWA* centrale. Infatti

$$\omega_1 = 0.25 \neq \omega_4 = 0.3, \quad \omega_2 = 0.3 \neq \omega_3 = 0.15.$$

## Capitolo 5

# Dualità

### 5.1 La misura duale associata ad una misura di Choquet

Ad ogni misura di Choquet sull'insieme  $N$ ,  $\mu : \mathcal{P}(N) \rightarrow [0, 1]$  si può associare una misura duale nel modo seguente:

**Definizione 5.1** *Sia  $\mu$  una misura di Choquet su  $N$ . La misura duale associata a  $\mu$  è definita da*

$$\mu^*(T) = 1 - \mu(T^c) \quad T \subseteq N, \quad T^c \equiv N \setminus T. \quad (5.1)$$

La misura duale  $\mu^*$  è ancora una misura di Choquet sull'insieme  $N$ . Si tratta infatti di una funzione

$$\mu^* : \mathcal{P}(N) \rightarrow [0, 1]$$

per la quale sono soddisfatte le condizioni di frontiera e monotonia:

- (i)  $\mu^*(\emptyset) = 1 - \mu(N \setminus \emptyset) = 0$ ,  $\mu^*(N) = 1 - \mu(N \setminus N) = 1$ ;
- (ii)  $S \subseteq T \subseteq N \Rightarrow N \setminus T \subseteq N \setminus S \subseteq N$   
 $\Rightarrow \mu^*(S) = 1 - \mu(N \setminus S) \leq 1 - \mu(N \setminus T) = \mu^*(T)$ .

Naturalmente abbiamo  $(\mu^*)^* = \mu$ .

Anche per la misura duale  $\mu^*$  ha quindi senso parlare di trasformata di Möbius e indici di Shapley.

Per una qualsiasi coppia di misure duali  $\mu$  e  $\mu^*$  Grabisch [14] ha ricavato la seguente relazione tra le loro rappresentazioni di Möbius

$$m_{\mu^*}(\emptyset) = 0 \quad m_{\mu^*}(T) = (-1)^{t+1} \sum_{K \supseteq T} m_{\mu}(K) \quad T \neq \emptyset \quad (5.2)$$

e analogamente, per dualità, per  $m_{\mu}(T)$  in termini degli  $m_{\mu^*}(K)$ .

Inoltre

$$I_{\mu^*}(T) = (-1)^{t+1} I_{\mu}(T) \quad (5.3)$$

e analogamente, per dualità, per  $I_{\mu}(T)$  in termini degli  $I_{\mu^*}(T)$ .

In particolare

$$\phi_{\mu^*}(i) = I_{\mu^*}(i) = I_{\mu}(i) = \phi_{\mu}(i). \quad (5.4)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \phi_{\mu^*}(i) &= \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t}^{-1} \sum_{\substack{T \subseteq N \setminus i \\ |T|=t}} [\mu^*(T \cup i) - \mu^*(T)] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t}^{-1} \sum_{\substack{T \subseteq N \setminus i \\ |T|=t}} [1 - \mu(N \setminus (T \cup i)) - 1 + \mu(N \setminus T)] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t}^{-1} \sum_{\substack{T \subseteq N \setminus i \\ |T|=t}} [\mu(N \setminus T) - \mu(N \setminus (T \cup i))]. \end{aligned}$$

Se adesso indichiamo con  $S$  la coalizione  $S = N \setminus (T \cup i) \subseteq N \setminus i$  di cardinalità  $|S| = s = n - 1 - t$  e utilizziamo l'uguaglianza

$$\binom{n-1}{t} = \binom{n-1}{n-1-t} = \binom{n-1}{s}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \phi_{\mu^*}(i) &= \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s}^{-1} \sum_{\substack{S \subseteq N \setminus i \\ |S|=s}} [\mu(S \cup i) - \mu(S)] \\ &= \phi_{\mu}(i) \end{aligned}$$

Coincidono quindi gli integrali di Shapley associati alle misure  $\mu$  e  $\mu^*$ ,

$$\mathcal{S}_{\mu}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \phi_{\mu}(i) = \sum_{i=1}^n x_i \phi_{\mu^*}(i) = \mathcal{S}_{\mu^*}(\mathbf{x}).$$

Generalmente sono invece differenti tra loro i due integrali di Choquet  $\mathcal{C}_{\mu}$  e  $\mathcal{C}_{\mu^*}$

$$\mathcal{C}_{\mu}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_{(i)} [\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})],$$

$$\mathcal{C}_{\mu^*}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_{(i)} [\mu^*(A_{(i)}) - \mu^*(A_{(i+1)})].$$

Per le proposizioni 2.1 e 2.2 si ha infatti

$$\mathcal{C}_{\mu}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{T \subseteq N} \min_{i \in T} (x_i) m_{\mu}(T) = \sum_{T \subseteq N} \max_{i \in T} (x_i) m_{\mu^*}(T),$$

$$\mathcal{C}_{\mu^*}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{T \subseteq N} \min_{i \in T} (x_i) m_{\mu^*}(T) = \sum_{T \subseteq N} \max_{i \in T} (x_i) m_{\mu}(T).$$

Anche i due operatori *OWA*  $\mathcal{O}_{\mu}$  e  $\mathcal{O}_{\mu^*}$  sono tra loro differenti. Per gli operatori *OWA* associati a  $\mu$  e  $\mu^*$  si ha infatti

$$\omega_i = \mu_S(A_{(i)}) - \mu_S(A_{(i+1)}) = \mu_S(n+1-i) - \mu_S(n-i)$$

e corrispondentemente

$$\omega_i^* = \mu_S^*(A_{(i)}) - \mu_S^*(A_{(i+1)}) = 1 - \mu_S(N \setminus A_{(i)}) - 1 + \mu_S(N \setminus A_{(i+1)}) = \mu_S(i) - \mu_S(i-1)$$

da cui segue

$$\omega_i^* = \omega_{n-i+1}. \quad (5.5)$$

Inoltre se l'operatore  $\mathcal{O}_{\mu}$  tende nell'aggregazione a privilegiare i valori più piccoli, l'operatore  $\mathcal{O}_{\mu^*}$  tende a privilegiare i valori più grandi e viceversa, come si vede dal seguente risultato.

**Proposizione 5.1** *Sia  $\mu$  e  $\mu^*$  una qualunque coppia duale di misure. Allora*

$$\text{orness}(\mathcal{O}_{\mu}) + \text{orness}(\mathcal{O}_{\mu^*}) = 1.$$

**Dimostrazione:** Utilizzando la definizione di grado di orness come data da Yager e ricordando la relazione (5.5) tra i pesi di  $\mathcal{O}_{\mu}$  e  $\mathcal{O}_{\mu^*}$  si ottiene

$$\begin{aligned} \text{orness}(\mathcal{O}_{\mu}) + \text{orness}(\mathcal{O}_{\mu^*}) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (i-1) \omega_i + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (i-1) \omega_i^* \\ &= \frac{1}{n-1} \left[ \sum_{i=1}^n (i-1) \omega_i + \sum_{i=1}^n (i-1) \omega_{n-i+1} \right] \\ &= \frac{1}{n-1} \left[ \omega_2 + 2\omega_3 + \dots + (n-1) \omega_n \right. \\ &\quad \left. + \omega_{n-1} + 2\omega_{n-2} + \dots + (n-1) \omega_1 \right] \\ &= \frac{1}{n-1} \left[ (n-1) \omega_1 + (n-1) \omega_2 + \dots + (n-1) \omega_n \right] \\ &= \frac{n-1}{n-1} \sum_{i=1}^n \omega_i = 1. \end{aligned}$$

□

**Corollario 5.1** *Sia  $\mu$  e  $\mu^*$  una qualunque coppia duale di misure. Allora*

$$\text{orness}(\mathcal{C}_{\mu^*}) = 1 - \text{orness}(\mathcal{C}_{\mu}).$$

**Dimostrazione:** Per la proposizione 4.3 il grado di orness di un integrale di Choquet, rispetto ad una misura di Choquet, coincide con il grado di orness dell'operatore OWA associato alla stessa misura di Choquet.

Allora dalla proposizione precedente segue immediatamente che

$$\begin{aligned} \text{orness}(\mathcal{C}_{\mu^*}) &= \text{orness}(\mathcal{O}_{\mu^*}) \\ &= 1 - \text{orness}(\mathcal{O}_{\mu}) \\ &= 1 - \text{orness}(\mathcal{C}_{\mu}). \end{aligned}$$

□

## 5.2 Misure di Choquet self-dual

Una classe particolarmente interessante di misure di Choquet è la classe delle misure di Choquet self-dual.

**Definizione 5.2** *Sia  $\mu$  una misura di Choquet su  $N$  e  $\mu^*$  la sua misura di Choquet duale. La misura  $\mu$  è detta **misura self-dual** se vale*

$$\mu(T) = \mu^*(T) \quad T \subseteq N. \quad (5.6)$$

Notiamo che, poichè per definizione coincide con la propria misura duale, ogni misura di Choquet self-dual può essere scritta come

$$\mu = \frac{1}{2}(\mu + \mu^*).$$

La seguente proposizione mostra un interessante risultato che riguarda le misure di Choquet self-dual.

**Proposizione 5.2** *L'operatore OWA associato ad una misura di Choquet self-dual è un operatore OWA centrale, ossia*

$$\omega_i = \omega_{n-i+1} \quad i = 1, \dots, n.$$

**Dimostrazione:** Gli integrali di Choquet, e quindi in particolare gli operatori OWA, sono lineari rispetto a misture di misure. Allora, ricordando l'equazione (5.5), si ha

$$\mathcal{O}_{\mu}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}_{(\mu+\mu^*)/2}(\mathbf{x})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [\mathcal{O}_\mu(\mathbf{x}) + \mathcal{O}_{\mu^*}(\mathbf{x})] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n x_{(i)} \omega_i + \sum_{i=1}^n x_{(i)} \omega_i^* \right] \\
&= \sum_{i=1}^n x_{(i)} \frac{\omega_i + \omega_i^*}{2} \\
&= \sum_{i=1}^n x_{(i)} \frac{\omega_i + \omega_{n-i+1}}{2}
\end{aligned}$$

Ma  $\mathcal{O}_\mu$  è l'operatore *OWA* associato alla misura di Choquet  $\mu$  e quindi

$$\frac{\omega_i + \omega_{n-i+1}}{2} = \omega_i$$

da cui segue la tesi

$$\omega_i = \omega_{n-i+1}.$$

□

**Osservazione:** L'operatore *OWA* associato ad una misura di Choquet caratterizza il comportamento medio dell'integrale di Choquet nei vari domini di comonotonia.

Il fatto che un integrale di Choquet abbia come operatore *OWA* associato un *OWA* centrale significa che, in media nei vari domini di comonotonia, ha un comportamento neutrale rispetto ai valori grandi e piccoli delle variabili da aggregare. Questo è particolarmente rilevante nelle applicazioni in cui i valori da aggregare rappresentano confronti a coppie tra alternative (AHP di Saaty, SSB di Fishburn e matrici di preferenza fuzzy, ad esempio), poiché in questo caso i valori grandi e piccoli (rispetto ad un valore centrale neutro associato all'indifferenza) rappresentano sostanzialmente la stessa informazione (l'intensità della preferenza di un'alternativa rispetto ad un'altra).

**Esempio 5.1:** Consideriamo il problema di aggregare delle matrici di preferenza fuzzy.

Sia  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  un insieme di agenti e/o criteri e  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  un insieme di alternative. Ogni agente e/o criterio  $i \in N$  ha una propria matrice di preferenza fuzzy  $r_i : A \times A \rightarrow [0, 1]$  i cui elementi

$$r_{hl}^i = r_i(a_h, a_l) \in [0, 1] \quad a_h, a_l \in A$$

rappresentano confronti a coppie tra alternative:  $r_{hl}^i = 0$  se  $a_l$  è strettamente preferito a  $a_h$ ,  $r_{hl}^i = 1$  se  $a_h$  è strettamente preferito a  $a_l$ , mentre se  $a_h$  e  $a_l$  sono indifferenti  $r_{hl}^i = 1/2$ .



Assumiamo che le matrici di preferenza fuzzy siano reciproche, ossia

$$r_{ih}^i = 1 - r_{hl}^i.$$

L'esempio più semplice corrisponde al caso con due sole alternative. In tal caso la matrice di preferenza reciproca relativa all'agente e/o criterio  $i$  ha un solo grado di libertà ed è data da

$$\begin{pmatrix} 1/2 & r_i \\ 1 - r_i & 1/2 \end{pmatrix}$$

dove  $r_i = r_{12}^i$  è l'unico elemento indipendente.

Passiamo ora a considerare operatori di aggregazione  $\mathcal{F}$  di matrici di preferenza fuzzy. Vogliamo tuttavia considerare solo operatori di aggregazione  $\mathcal{F}$  reciproci, cioè quelli per cui il risultato dell'aggregazione di matrici di preferenza fuzzy reciproche è ancora una matrice di preferenza fuzzy reciproca. Facciamo inoltre l'ipotesi che l'operatore di aggregazione  $\mathcal{F}$  sia separabile, ossia l'aggregazione può venire fatta da un'unico operatore  $F$  che agisce componente per componente.

Supponiamo di voler aggregare tre matrici di preferenza reciproche con due sole alternative

$$\begin{pmatrix} 1/2 & r_1 \\ 1 - r_1 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 & r_2 \\ 1 - r_2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 & r_3 \\ 1 - r_3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

mediante un aggregatore separabile  $\mathcal{F}$ .

Supponiamo che l'operatore  $F$  sia un operatore *OWA* e che  $r_1 < r_2 < r_3$ .

La nuova matrice di preferenza sarà ancora reciproca se e solo se il valore aggregato  $F(r_1, r_2, r_3)$  delle componenti in alto a destra delle matrici di preferenza fuzzy coincide con il reciproco (complementare a uno) del valore aggregato  $F(1 - r_1, 1 - r_2, 1 - r_3)$  delle componenti in basso a sinistra,

$$\mathcal{F}(1 - r_1, 1 - r_2, 1 - r_3) = 1 - \mathcal{F}(r_1, r_2, r_3). \quad (5.7)$$

Ma se  $F$  è un operatore *OWA* abbiamo

$$\mathcal{F}(r_1, r_2, r_3) = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3$$

e visto che  $1 - r_3 < 1 - r_2 < 1 - r_1$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(1 - r_1, 1 - r_2, 1 - r_3) &= \omega_1(1 - r_3) + \omega_2(1 - r_2) + \omega_3(1 - r_1) \\ &= 1 - (\omega_3 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_1 r_3). \end{aligned}$$

Concludiamo che l'operatore *OWA*  $F$  è reciproco se e solo se vale (5.7) e quindi  $\omega_1 = \omega_3$ . In altre parole l'operatore  $F$  è un operatore *OWA* centrale.

Questo è estendibile per  $n \geq 3$  matrici di preferenza fuzzy reciproche nella misura in cui l'ordine dei valori di preferenza  $r_1, \dots, r_n$  viene capovolto quando si considerano i valori reciproci  $1 - r_1, \dots, 1 - r_n$ .

In questo caso l'operatore OWA  $F$  è reciproco se e solo se  $\omega_i = \omega_{n-i+1}$ , proprietà caratterizzante degli operatori OWA centrali.

Un altro aspetto importante delle misure self-dual è che l'integrale di Choquet di una loro sottoclasse, le misure di Choquet self-dual e 2-additive, coincide con un operatore di media pesata.

**Proposizione 5.3** *Sia  $\mu$  una misura di Choquet self-dual e 2-additiva. Allora l'integrale di Choquet rispetto a  $\mu$  coincide con l'integrale di Shapley rispetto a  $\mu$ ,*

$$C_\mu(\mathbf{x}) = S_\mu(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in [0, 1]^n.$$

**Dimostrazione:** Scriviamo la misura di Choquet self-dual  $\mu$  come

$$\mu = \frac{1}{2} (\mu + \mu^*).$$

Allora utilizzando le espressioni di  $C_\mu$ ,  $C_{\mu^*}$  e  $S_\mu$  in funzione della trasformata di Möbius

$$\begin{aligned} C_\mu(\mathbf{x}) &= \sum_{T \subseteq N} \min_{i \in T} (x_i) m_\mu(T) \\ C_{\mu^*}(\mathbf{x}) &= \sum_{T \subseteq N} \max_{i \in T} (x_i) m_\mu(T) \\ S_\mu(\mathbf{x}) &= \sum_{i \in N} x_i \sum_{T \subseteq N \setminus i} \frac{m_\mu(T \cup i)}{t+1} \end{aligned}$$

e sapendo che  $\mu$  è 2-additiva, cioè  $m_\mu(T) = 0$  per ogni coalizione  $T$  con più di due elementi, si ottiene

$$\begin{aligned} C_\mu(\mathbf{x}) &= C_{(\mu+\mu^*)/2}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} [C_\mu(\mathbf{x}) + C_{\mu^*}(\mathbf{x})] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{i \in N} x_i m_\mu(i) + \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \min(x_i, x_j) m_\mu(ij) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \in N} x_i m_\mu(i) + \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \max(x_i, x_j) m_\mu(ij) \right] \\ &= \sum_{i \in N} x_i m_\mu(i) + \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \left( \frac{x_i + x_j}{2} \right) m_\mu(ij) \\ &= \sum_{i \in N} x_i m_\mu(i) + \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \frac{x_i}{2} m_\mu(ij) + \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \frac{x_j}{2} m_\mu(ij) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \in N} x_i m_\mu(i) + 2 \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \frac{x_i}{2} m_\mu(ij) \\
&= \sum_{i \in N} x_i m_\mu(i) + \frac{1}{2} \sum_{i \in N} x_i \sum_{j \in N \setminus i} m_\mu(ij) \\
&= \sum_{i \in N} x_i \left[ m_\mu(i) + \sum_{j \in N \setminus i} \frac{m_\mu(ij)}{2} \right] \\
&= \mathcal{S}_\mu(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

□

La proposizione precedente è chiaramente valida se la misura  $\mu$  è additiva. In tal caso, infatti, il valore di Shapley di ogni elemento  $i$  coincide con la misura  $\mu(i)$  e quindi l'integrale di Shapley è

$$\mathcal{S}_\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \in N} x_i \phi_\mu(i) = \sum_{i \in N} x_i \mu(i).$$

Ma anche l'integrale di Choquet, se la misura  $\mu$  è additiva, coincide con una media pesata i cui pesi sono  $\mu(i)$

$$C_\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \mu(i).$$

La proposizione precedente non vale già più per le misure 3-additive ed in generale per le misure  $k$ -additive con  $k \geq 3$ .

### 5.3 La misura self-dual associata ad una misura di Choquet

Ad ogni misura di Choquet sull'insieme  $N$ ,  $\mu : \mathcal{P}(N) \longrightarrow [0, 1]$  si può associare una misura self-dual nel modo seguente:

**Definizione 5.3** Sia  $\mu$  e  $\mu^*$  una coppia duale di misure di Choquet su  $N$ . La misura self-dual associata a  $\mu$  è definita da

$$\tilde{\mu}(T) = \frac{1}{2} [\mu(T) + \mu^*(T)] \quad T \subseteq N. \quad (5.8)$$

La misura  $\tilde{\mu}$  è ancora una misura di Choquet sull'insieme  $N$ . Si tratta infatti di una funzione

$$\tilde{\mu} : \mathcal{P}(N) \longrightarrow [0, 1]$$

per la quale sono soddisfatte le condizioni di frontiera e monotonia:

$$\begin{aligned}
\text{(i) } \tilde{\mu}(\emptyset) &= \frac{1}{2} [\mu(\emptyset) + \mu^*(\emptyset)] = 0, & \tilde{\mu}(N) &= \frac{1}{2} [\mu(N) + \mu^*(N)] = 1; \\
\text{(ii) } S \subseteq T \subseteq N &\Rightarrow \tilde{\mu}(S) = \frac{1}{2} [\mu(S) + \mu^*(S)] \leq \frac{1}{2} [\mu(T) + \mu^*(T)] \\
&= \tilde{\mu}(T).
\end{aligned}$$

Le misure di Choquet costituiscono infatti uno spazio di mistura, ossia combinazioni lineari non negative a somma uno di misure di Choquet sono ancora misure di Choquet.

La misura  $\tilde{\mu}$  è una misura self-dual, ossia  $(\tilde{\mu})^*(T) = \tilde{\mu}(T)$  per  $T \subseteq N$ . Infatti

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}^*(T) &= 1 - \tilde{\mu}(N \setminus T) \\
&= 1 - \frac{1}{2} [\mu(N \setminus T) + \mu^*(N \setminus T)] \\
&= 1 - \frac{1}{2} [\mu(N \setminus T) + 1 - \mu(T)] \\
&= \frac{1}{2} [\mu(T) + 1 - \mu(N \setminus T)] \\
&= \frac{1}{2} [\mu(T) + \mu^*(T)] \\
&= \tilde{\mu}(T)
\end{aligned}$$

I valori di Shapley associati a  $\tilde{\mu}$  coincidono con quelli associati a  $\mu$  e  $\mu^*$ . Sappiamo infatti che

$$\phi_{\mu}(i) = \phi_{\mu^*}(i),$$

inoltre

$$\begin{aligned}
\phi_{\tilde{\mu}}(i) &= \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t}^{-1} \sum_{\substack{T \subseteq N \setminus i \\ |T|=t}} [\tilde{\mu}(T \cup i) - \tilde{\mu}(T)] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t}^{-1} \sum_{\substack{T \subseteq N \setminus i \\ |T|=t}} \left\{ \frac{1}{2} [\mu(T \cup i) + \mu^*(T \cup i)] - \frac{1}{2} [\mu(T) + \mu^*(T)] \right\} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t}^{-1} \sum_{\substack{T \subseteq N \setminus i \\ |T|=t}} \left\{ \frac{1}{2} [\mu(T \cup i) - \mu(T)] + \frac{1}{2} [\mu^*(T \cup i) - \mu^*(T)] \right\} \\
&= \frac{1}{2} [\phi_{\mu}(i) + \phi_{\mu^*}(i)] \\
&= \phi_{\mu}(i)
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Coincidono quindi i corrispondenti integrali di Shapley

$$\mathcal{S}_{\mu}(\mathbf{x}) = \mathcal{S}_{\mu^*}(\mathbf{x}) = \mathcal{S}_{\tilde{\mu}}(\mathbf{x}).$$

Generalmente sono invece differenti gli integrali di Choquet rispetto alle tre misure  $\mu$ ,  $\mu^*$  e  $\tilde{\mu}$ .

L'integrale di Choquet è lineare rispetto a misture di misure e quindi

$$C_{\tilde{\mu}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}[C_{\mu}(\mathbf{x}) + C_{\mu^*}(\mathbf{x})]. \quad (5.10)$$

L'operatore *OWA* associato alla misura di Choquet self-dual  $\tilde{\mu}$  è definito come

$$\mathcal{O}_{\tilde{\mu}}(\mathbf{x}) = C_{\tilde{\mu}_S}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_{(i)}[\tilde{\mu}_S(A_{(i)}) - \tilde{\mu}_S(A_{(i+1)})].$$

Per la proposizione 5.2,  $\mathcal{O}_{\tilde{\mu}}$  è un operatore *OWA* centrale. Infatti per i pesi associati a  $\mathcal{O}_{\tilde{\mu}}$  si ha

$$\begin{aligned} \omega_i &= \tilde{\mu}_S(A_{(i)}) - \tilde{\mu}_S(A_{(i+1)}) \\ &= \frac{1}{2}[\mu_S(A_{(i)}) + \mu_S^*(A_{(i)}) - \mu_S(A_{(i+1)}) - \mu_S^*(A_{(i+1)})] \\ &= \frac{1}{2}[\mu_S(n+1-i) + 1 - \mu_S(i-1) - \mu_S(n-i) - 1 + \mu_S(i)] \\ &= \frac{1}{2}[\mu_S(i) + 1 - \mu_S(n-i) - \mu_S(i-1) - 1 + \mu_S(n+1-i)] \\ &= \frac{1}{2}[\mu_S(A_{(n-i+1)}) + \mu_S^*(A_{(n-i+1)}) - \mu_S(A_{(n-i+2)}) - \mu_S^*(A_{(n-i+2)})] \\ &= \tilde{\mu}_S(A_{(n-i+1)}) - \tilde{\mu}_S(A_{(n-i+2)}) \\ &= \omega_{n-i+1} \end{aligned}$$

e quindi  $\mathcal{O}_{\tilde{\mu}}$  è un operatore *OWA* centrale. Essendo centrale,  $\mathcal{O}_{\tilde{\mu}}$  ha orness  $1/2$ . Di conseguenza,

$$\text{orness}(C_{\tilde{\mu}}) = \text{orness}(\mathcal{O}_{\tilde{\mu}}) = \frac{1}{2}. \quad (5.11)$$

Osserviamo che se la misura  $\mu$  è additiva, le tre misure coincidono

$$\mu(T) = \mu^*(T) = \tilde{\mu}(T) \quad T \subseteq N,$$

e quindi anche gli integrali

$$C_{\mu}(\mathbf{x}) = C_{\mu^*}(\mathbf{x}) = C_{\tilde{\mu}}(\mathbf{x}) = \mathcal{S}_{\mu}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} x_i \mu(i).$$

Inoltre, se la misura  $\mu$  è 2-additiva, per la proposizione 5.3 l'integrale di Choquet rispetto alla misura self-dual  $\tilde{\mu}$  coincide con l'integrale di Shapley rispetto alla misura  $\mu$ .

Notiamo che nel caso delle misure 2-additive  $\mathcal{O}_{\tilde{\mu}}$ , l'operatore *OWA* centrale associato a  $C_{\tilde{\mu}}$ , è banale, cioè coincide con la media aritmetica (visto che  $C_{\tilde{\mu}} = \mathcal{S}_{\mu}$ , una media pesata).

## 5.4 La misura consensuale

Una misura consensuale è una funzione  $\mu : \mathcal{P}(N) \rightarrow [0, 1]$  definita da

$$\mu(T) = \sum_{\{i,j\} \subseteq T} v_{ij}/\mathcal{N} \quad \text{dove} \quad \mathcal{N} = \sum_{\{i,j\} \subseteq N} v_{ij}$$

e  $v_{ij} = v_{ji} \in (0, 1)$  per  $i \neq j$  mentre  $v_{ii} = 0$ .

Per la misura consensuale  $\mu$  i valori della trasformata di Möbius sono dati da

$$m_\mu(T) = \begin{cases} 0 & T = \{i\} \\ v_{ij}/\mathcal{N} & T = \{i, j\} \\ 0 & |T| > 2 \end{cases}$$

ed è quindi di una misura di Choquet 2-additiva.

Espresso in termini della trasformata di Möbius l'integrale di Shapley associato alla misura consensuale  $\mu$  è

$$\mathcal{S}_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} x_i \sum_{T \subseteq N \setminus i} \frac{m_\mu(T \cup i)}{t+1} = \frac{1}{2} \sum_{i \in N} x_i \sum_{j \in N \setminus i} v_{ij}/\mathcal{N},$$

mentre l'integrale di Choquet associato alla misura consensuale  $\mu$  è

$$\mathcal{C}_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{T \subseteq N} \min_{i \in T} (x_i) m_\mu(T) = \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \min(x_i, x_j) v_{ij}/\mathcal{N}.$$

Poichè  $\mathcal{S}_\mu$  è un operatore WA, il suo grado di orness è pari a  $1/2$ .

Il grado di orness di  $\mathcal{C}_\mu$ , relativo alla misura consensuale  $\mu$ , risulta invece

$$\begin{aligned} \text{orness}(\mathcal{C}_\mu) &= \frac{1}{n-1} \sum_{T \subseteq N} \frac{n-t}{t+1} m_\mu(T) \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \frac{n-2}{2+1} v_{ij}/\mathcal{N} \\ &= \frac{n-2}{3(n-1)} \sum_{\{i,j\} \subseteq N} v_{ij}/\mathcal{N} \\ &= \frac{n-2}{3(n-1)}. \end{aligned}$$

Da notare come, per la misura consensuale  $\mu$ , il grado di orness di  $\mathcal{C}_\mu$  non dipenda dal valore dei coefficienti  $v_{ij}$ , ma solo da  $n$ .

Si può provare in modo analogo che l'integrale di Choquet rispetto ad una qualsiasi misura 2-additiva e con singletons nulli ha questo valore come grado di orness.

In particolare,

- se  $n = 2$  allora  $\text{orness}(\mathcal{C}_\mu) = 0$  e  $\mathcal{C}_\mu$  coincide con l'operatore  $\min$ ;
- se  $n = 3$  allora  $\text{orness}(\mathcal{C}_\mu) = 1/6$ ;
- al crescere di  $n$  il valore di  $\text{orness}(\mathcal{C}_\mu)$  tende a  $1/3$ .

L'integrale di Choquet rispetto ad una misura consensuale, e più in generale rispetto ad una qualunque misura 2-additiva con singletons nulli, è tale che

$$0 \leq \text{orness}(\mathcal{C}_\mu) < 1/3$$

e tende quindi nell'aggregazione a privilegiare i valori piccoli.

La misura consensuale duale associata alla misura consensuale  $\mu$  è una funzione  $\mu^* : \mathcal{P}(N) \rightarrow [0, 1]$  definita come

$$\mu^*(T) = 1 - \mu(N \setminus T) = 1 - \sum_{\{i,j\} \subseteq N \setminus T} v_{ij}/\mathcal{N}.$$

Per la relazione (5.2) tra le rappresentazioni di Möbius di una qualunque coppia di misure duali, abbiamo

$$\begin{aligned} m_{\mu^*}(i) &= (-1)^{1+1} \sum_{K \ni i} m_\mu(K) = m_\mu(i) + \sum_{j \in N \setminus i} m_\mu(ij) = \sum_{j \in N \setminus i} v_{ij}/\mathcal{N} \\ m_{\mu^*}(ij) &= (-1)^{2+1} \sum_{K \supseteq \{i,j\}} m_\mu(K) = -m_\mu(ij) = -v_{ij}/\mathcal{N} \\ m_{\mu^*}(T) &= (-1)^{|T|+1} \sum_{K \supseteq T} m_\mu(K) = 0 \quad |T| > 2 \end{aligned}$$

e quindi

$$m_{\mu^*}(T) = \begin{cases} \sum_{j \in N \setminus i} v_{ij}/\mathcal{N} & T = \{i\} \\ -v_{ij}/\mathcal{N} & T = \{i, j\} \\ 0 & |T| > 2 \end{cases}$$

Poichè per l'equazione (5.4) i valori di Shapley associati ad una coppia di misure duali coincidono, coincidono gli integrali di Shapley associati alla misura consensuale  $\mu$  ed alla sua duale  $\mu^*$

$$\mathcal{S}_{\mu^*}(\mathbf{x}) = \mathcal{S}_\mu(\mathbf{x})$$

e quindi

$$\text{orness}(\mathcal{S}_{\mu^*}) = \text{orness}(\mathcal{S}_\mu) = 1/2.$$

L'integrale di Choquet associato alla misura consensuale duale  $\mu^*$  risulta invece

$$\mathcal{C}_{\mu^*}(\mathbf{x}) = \sum_{T \subseteq N} \max_{i \in T} (x_i) m_\mu(T) = \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \max(x_i, x_j) v_{ij}/\mathcal{N}$$

e si ha

$$\begin{aligned}
\text{orness}(\mathcal{C}_{\mu^*}) &= \frac{1}{n-1} \sum_{T \subseteq N} \frac{n-t}{t+1} m_{\mu^*}(T) \\
&= \frac{n-1}{2(n-1)} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus i} v_{ij}/\mathcal{N} + \frac{n-2}{3(n-1)} \sum_{\{i,j\} \subseteq N} (-v_{ij}/\mathcal{N}) \\
&= \frac{n-1}{2(n-1)} 2 \sum_{\{i,j\} \subseteq N} v_{ij}/\mathcal{N} - \frac{n-2}{3(n-1)} \sum_{\{i,j\} \subseteq N} v_{ij}/\mathcal{N} \\
&= \frac{2(n-1)}{2(n-1)} - \frac{n-2}{3(n-1)} \\
&= 1 - \frac{n-2}{3(n-1)}
\end{aligned}$$

Allora

$$\text{orness}(\mathcal{C}_{\mu}) + \text{orness}(\mathcal{C}_{\mu^*}) = \frac{n-2}{3(n-1)} + 1 - \frac{n-2}{3(n-1)} = 1$$

come per qualunque coppia di misure duali.

Calcoliamo ora il valore atteso dell'integrale di Choquet  $\mathcal{C}_{\mu}$  associato alla misura consensuale  $\mu$ . Dato che

$$\mathcal{C}_{\mu}(\mathbf{x}) = \sum_{T \subseteq N} \min_{i \in T} (x_i) m_{\mu}(T) \quad \text{e} \quad E(\min) = \frac{1}{n+1},$$

il valore atteso di  $\mathcal{C}_{\mu}$  è

$$\begin{aligned}
E(\mathcal{C}_{\mu}) &= \sum_{T \subseteq N} \frac{1}{t+1} m_{\mu}(T) \\
&= \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \frac{1}{3} v_{ij}/\mathcal{N} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

e non dipende quindi né dal valore dei coefficienti  $v_{ij}$  né da  $n$ .

Analogamente dato che

$$\mathcal{C}_{\mu^*}(\mathbf{x}) = \sum_{T \subseteq N} \max_{i \in T} (x_i) m_{\mu}(T) \quad \text{e} \quad E(\max) = \frac{n}{n+1},$$

il valore atteso dell'integrale di Choquet  $\mathcal{C}_{\mu^*}$  associato alla misura consensuale duale  $\mu^*$  è

$$\begin{aligned}
E(\mathcal{C}_{\mu^*}) &= \sum_{T \subseteq N} \frac{t}{t+1} m_{\mu}(T) \\
&= \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \frac{2}{3} v_{ij}/\mathcal{N} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$



e nuovamente non dipende né dal valore dei coefficienti  $v_{ij}$  né da  $n$ .

La misura consensuale self-dual associata alla misura consensuale  $\mu$  è una funzione  $\tilde{\mu} : \mathcal{P}(N) \rightarrow [0, 1]$  definita come

$$\tilde{\mu}(T) = \frac{1}{2} [\mu(T) + \mu^*(T)] = \frac{1}{2} \left[ \sum_{\{i,j\} \subseteq T} v_{ij}/\mathcal{N} + 1 - \sum_{\{i,j\} \subseteq N \setminus T} v_{ij}/\mathcal{N} \right].$$

Poichè per l'equazione (5.9) il valore di Shapley associato ad una misura self-dual  $\tilde{\mu}$  coincide con quello associato a  $\mu$  e  $\mu^*$ , coincidono i corrispondenti integrali di Shapley

$$\mathcal{S}_{\tilde{\mu}}(\mathbf{x}) = \mathcal{S}_{\mu^*}(\mathbf{x}) = \mathcal{S}_{\mu}(\mathbf{x})$$

e quindi

$$\text{orness}(\mathcal{S}_{\tilde{\mu}}) = \text{orness}(\mathcal{S}_{\mu^*}) = \text{orness}(\mathcal{S}_{\mu}) = 1/2.$$

L'integrale di Choquet associato alla misura consensuale self-dual  $\tilde{\mu}$  risulta invece

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\tilde{\mu}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} [\mathcal{C}_{\mu}(\mathbf{x}) + \mathcal{C}_{\mu^*}(\mathbf{x})] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \min(x_i, x_j) v_{ij}/\mathcal{N} + \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \max(x_i, x_j) v_{ij}/\mathcal{N} \right] \\ &= \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \frac{x_i + x_j}{2} v_{ij}/\mathcal{N} \\ &= \sum_{\{i,j\} \subseteq N} x_i v_{ij}/\mathcal{N} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in N} x_i \sum_{j \in N \setminus i} v_{ij}/\mathcal{N} = \mathcal{S}_{\mu}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

e quindi, come per ogni misura di Choquet 2-additiva, l'integrale di Choquet rispetto alla misura consensuale self-dual  $\tilde{\mu}$  coincide con l'integrale di Shapley rispetto alla misura consensuale  $\mu$ .

Il grado di orness di  $\mathcal{C}_{\tilde{\mu}}$  risulta allora

$$\text{orness}(\mathcal{C}_{\tilde{\mu}}) = \text{orness}(\mathcal{S}_{\mu}) = 1/2.$$

Analizziamo ora l'operatore OWA associato alla misura consensuale  $\mu$ . Questo operatore è definito come l'integrale di Choquet associato alla misura consensuale simmetrica

$$\mu_S(T) = \frac{1}{\binom{n}{t}} \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=t}} \mu(T)$$

e quindi

$$\mathcal{O}_\mu(\mathbf{x}) = \mathcal{C}_{\mu_S}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_{(i)} [\mu_S(A_{(i)}) - \mu_S(A_{(i+1)})].$$

Consideriamo la somma di tutte le coalizioni  $T \subseteq N$  di fissata cardinalità  $|T| = t$

$$\sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=t}} \mu(T)$$

Nella sommatoria precedente tutti gli archi entrano in ugual misura. Allora questa sommatoria coincide con la somma di tutti gli archi  $v_{ij}$ , divisi per il fattore di normalizzazione  $\mathcal{N}$ , moltiplicati per un coefficiente che indica quante volte ciascun arco è presente nella sommatoria. Questo coefficiente è

$$\frac{\binom{n}{t} \binom{t}{2}}{\binom{n}{2}}$$

dove

- $\binom{n}{t}$  è il numero di sottoinsiemi di  $N$  con  $t$  elementi;
- $\binom{t}{2}$  è il numero di archi in un insieme di  $t$  elementi;
- $\binom{n}{2}$  è il numero di archi in  $N$ .

Allora il valore  $\mu_S(T)$  della misura consensuale simmetrica di una coalizione  $T$  è

$$\begin{aligned} \mu_S(T) &= \frac{1}{\binom{n}{t}} \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=t}} \mu(T) \\ &= \frac{1}{\binom{n}{t}} \frac{\binom{n}{t} \binom{t}{2}}{\binom{n}{2}} \sum_{\{i,j\} \subseteq N} v_{ij} / \mathcal{N} \\ &= \frac{t!}{2!(t-2)!} \frac{2!(n-2)!}{n!} = \frac{t(t-1)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \mu_S(A_{(i)}) - \mu_S(A_{(i+1)}) &= \frac{(n+1-i)(n-i)}{n(n-1)} - \frac{(n-i)(n-i-1)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2(n-i)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

e l'operatore *OWA* associato alla misura consensuale  $\mu$  risulta

$$\mathcal{O}_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_{(i)} \frac{2(n-i)}{n(n-1)}.$$

Il grado di orness di  $\mathcal{O}_\mu$ , calcolato mediante la definizione data da Yager [43], è

$$\begin{aligned} \text{orness}(\mathcal{O}_\mu) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (i-1) \frac{2(n-i)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n(n-1)^2} \sum_{i=1}^n [-n + (n+1)i - i^2] \\ &= \frac{2}{n(n-1)^2} \left[ -nn + (n+1) \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\ &= \frac{n-2}{3(n-1)} \end{aligned}$$

e quindi, come per ogni misura di Choquet, anche per la misura consensuale  $\mu$

$$\text{orness}(\mathcal{O}_\mu) = \text{orness}(\mathcal{C}_\mu).$$

Verifichiamo infine che per la misura consensuale  $\mu$ , come per tutte le misure di Choquet,  $\mathcal{O}_{\tilde{\mu}}$  è un operatore *OWA* centrale ed in particolare, essendo la misura consensuale  $\mu$  una misura 2-additiva,  $\mathcal{O}_{\tilde{\mu}}$  coincide con la media aritmetica.

Ricaviamo  $\tilde{\mu}_S$ , la misura consensuale self-dual simmetrica

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_S(T) &= \frac{1}{\binom{n}{t}} \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=t}} \tilde{\mu}(T) \\ &= \frac{1}{\binom{n}{t}} \frac{1}{2} \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=t}} [\mu(T) + 1 - \mu(N \setminus T)] \\ &= \frac{1}{\binom{n}{t}} \frac{1}{2} \left[ \frac{\binom{n}{t} \binom{t}{2}}{\binom{n}{2}} + \binom{n}{t} - \frac{\binom{n}{n-t} \binom{n-t}{2}}{\binom{n}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{t!}{2!(t-2)!} \frac{2!(n-2)!}{n!} + 1 - \frac{(n-t)!}{2!(n-t-2)!} \frac{2!(n-2)!}{n!} \right] \\ &= \frac{t(t-1) + n(n-1) - (n-t)(n-t-1)}{2n(n-1)} = \frac{t}{n} \end{aligned}$$

L'operatore *OWA* associato alla misura consensuale self-dual  $\tilde{\mu}$  è definito come

$$\mathcal{O}_{\tilde{\mu}}(\mathbf{x}) = \mathcal{C}_{\tilde{\mu}_S}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_{(i)} [\tilde{\mu}_S(A_{(i)}) - \tilde{\mu}_S(A_{(i+1)})]$$

dove

$$\tilde{\mu}_S(A_{(i)}) - \tilde{\mu}_S(A_{(i+1)}) = \frac{n+1-i}{n} - \frac{n-i}{n} = \frac{1}{n}.$$

Allora

$$\mathcal{O}_{\tilde{\mu}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

e quindi, anche per la misura consensuale  $\mu$ ,  $\mathcal{O}_{\tilde{\mu}}$  è un operatore OWA centrale banale, che coincide cioè con la media aritmetica.

## 5.5 La misura di Saaty

Una misura di Saaty è una funzione  $\mu : \mathcal{P}(N) \rightarrow [0, 1]$  definita da

$$\mu(T) = \sum_{i \in T} w_i / \mathcal{N} + \sum_{\{i,j\} \subseteq T} (-w_i(1-v_{ij})w_j) / \mathcal{N}$$

dove

$$\mathcal{N} = \sum_{i \in N} w_i + \sum_{\{i,j\} \subseteq N} (-w_i(1-v_{ij})w_j)$$

con  $v_{ij} = v_{ji} \in (0, 1]$ ,  $v_{ii} = 1$ ,  $w_i > 0$  e  $\sum_i w_i = 1$ .

Per la misura di Saaty  $\mu$  i valori della trasformata di Möbius sono dati da

$$m_{\mu}(T) = \begin{cases} w_i / \mathcal{N} & T = \{i\} \\ -w_i(1-v_{ij})w_j / \mathcal{N} & T = \{i, j\} \\ 0 & |T| > 2 \end{cases}$$

ed è quindi di una misura di Choquet 2-additiva.

Poichè per l'equazione (3.13) il valore di Shapley si può scrivere come

$$\phi_i = w_i \frac{1 + v_i}{1 + v}$$

dove si sono indicate con  $v_i = \sum_{j=1}^n v_{ij}w_j$  e  $v = \sum_{i=1}^n w_i v_i$  le medie pesate dei valori  $v_{ij}$ , l'integrale di Shapley associato alla misura di Saaty  $\mu$  è

$$\mathcal{S}_{\mu}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} x_i \phi_{\mu}(i) = \sum_{i \in N} x_i w_i \frac{1 + v_i}{1 + v}.$$

L'integrale di Choquet associato alla misura di Saaty  $\mu$  è invece

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mu}(\mathbf{x}) &= \sum_{i \in N} x_i m_{\mu}(i) + \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \min(x_i, x_j) m_{\mu}(ij) \\ &= \sum_{i \in N} x_i w_i / \mathcal{N} - \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \min(x_i, x_j) w_i(1-v_{ij})w_j / \mathcal{N} \end{aligned}$$

Dato che  $\mathcal{S}_\mu$  è un operatore WA, il suo grado di orness è pari a  $1/2$ .

Calcoliamo ora il valore atteso dell'integrale di Choquet  $\mathcal{C}_\mu$  associato alla misura di Saaty  $\mu$ . Poichè

$$\mathcal{C}_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{T \subseteq N} \min_{i \in T} (x_i) m_\mu(T) \quad \text{e} \quad E(\min) = \frac{1}{n+1},$$

e ricordando che  $\mathcal{N} = (1+v)/2$ , il valore atteso di  $\mathcal{C}_\mu$  è dato da

$$\begin{aligned} E(\mathcal{C}_\mu) &= \sum_{T \subseteq N} \frac{1}{t+1} m_\mu(T) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in N} w_i / \mathcal{N} + \frac{1}{3} \sum_{\{i,j\} \subseteq N} (-w_i(1-v_{ij})w_j / \mathcal{N}) \\ &= \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n w_i(1-v_{ij})w_j \right] \frac{1}{\mathcal{N}} \\ &= \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \left( \sum_{i,j=1}^n w_i w_j - \sum_{i,j=1}^n w_i v_{ij} w_j \right) \right] \frac{1}{\mathcal{N}} \\ &= \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \left( \sum_{i=1}^n w_i - \sum_{i=1}^n w_i v_i \right) \right] \frac{1}{\mathcal{N}} \\ &= \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{6} (1-v) \right] \frac{2}{1+v} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3(1+v)} \end{aligned}$$

che non dipende da  $n$ , ma dipende solo da  $v$ .

Il grado di orness di  $\mathcal{C}_\mu$  risulta allora

$$\begin{aligned} \text{orness}(\mathcal{C}_\mu) &= \frac{E(\mathcal{C}_\mu) - E(\min)}{E(\max) - E(\min)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3(1+v)} - \frac{1}{n+1}}{\frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1}} \\ &= \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3(1+v)} - \frac{1}{n+1} \right) \frac{n+1}{n-1} \\ &= \frac{n-2}{3(n-1)} + \frac{n+1}{3(1+v)(n-1)}. \end{aligned}$$

Sappiamo da (3.11) che  $\sum_{i=1}^n w_i^2 < v \leq 1$ , ma poichè per  $w_i$  positivi e a somma unitaria  $\sum_{i=1}^n w_i^2 \geq 1/n$ , si ha

$$\frac{1}{n} < v \leq 1.$$

Considerando  $v \leq 1$  otteniamo

$$\begin{aligned} \text{orness}(\mathcal{C}_\mu) &= \frac{n-2}{3(n-1)} + \frac{n+1}{3(1+v)(n-1)} \\ &\geq \frac{n-2}{3(n-1)} + \frac{n+1}{3 \cdot 2(n-1)} \\ &= \frac{3n-3}{3 \cdot 2(n-1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

mentre considerando  $v > 1/n$  otteniamo

$$\begin{aligned} \text{orness}(\mathcal{C}_\mu) &= \frac{n-2}{3(n-1)} + \frac{n+1}{3(1+v)(n-1)} \\ &< \frac{n-2}{3(n-1)} + \frac{n+1}{3(1-1/n)(n-1)} \\ &= \frac{n-2}{3(n-1)} + \frac{n}{3(n-1)} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

L'integrale di Choquet rispetto ad una misura di Saaty è allora tale che

$$\frac{1}{2} \leq \text{orness}(\mathcal{C}_\mu) < \frac{2}{3}$$

e tende quindi nell'aggregazione a privilegiare i valori grandi.

La misura di Saaty duale che è associata alla misura di Saaty  $\mu$  è una funzione  $\mu^* : \mathcal{P}(N) \rightarrow [0, 1]$  definita come

$$\mu^*(T) = 1 - \mu(N \setminus T) = 1 - \sum_{i \in N \setminus T} w_i / \mathcal{N} - \sum_{\{i,j\} \subseteq N \setminus T} (-w_i(1-v_{ij})w_j) / \mathcal{N}.$$

Per la relazione (5.2) tra le rappresentazioni di Möbius di una qualunque coppia di misure duali, abbiamo

$$\begin{aligned} m_{\mu^*}(i) &= (-1)^{1+1} \sum_{K \ni i} m_\mu(K) = m_\mu(i) + \sum_{j \in N \setminus i} m_\mu(ij) \\ &= w_i / \mathcal{N} + \sum_{j \in N \setminus i} (-w_i(1-v_{ij})w_j) / \mathcal{N} \\ m_{\mu^*}(ij) &= (-1)^{2+1} \sum_{K \supseteq \{i,j\}} m_\mu(K) = -m_\mu(ij) = w_i(1-v_{ij})w_j / \mathcal{N} \\ m_{\mu^*}(T) &= (-1)^{t+1} \sum_{K \supseteq T} m_\mu(K) = 0 \quad |T| > 2 \end{aligned}$$

e quindi

$$m_{\mu^*}(T) = \begin{cases} w_i / \mathcal{N} + \sum_{j \in N \setminus i} (-w_i(1-v_{ij})w_j) / \mathcal{N} & T = \{i\} \\ w_i(1-v_{ij})w_j / \mathcal{N} & T = \{i, j\} \\ 0 & |T| > 2 \end{cases}$$

Poichè per l'equazione (5.4) i valori di Shapley associati ad una coppia di misure duali coincidono, coincidono gli integrali di Shapley associati alla misura di Saaty  $\mu$  ed alla sua duale  $\mu^*$

$$\mathcal{S}_{\mu^*}(\mathbf{x}) = \mathcal{S}_{\mu}(\mathbf{x})$$

e quindi

$$\text{orness}(\mathcal{S}_{\mu^*}) = \text{orness}(\mathcal{S}_{\mu}) = 1/2.$$

L'integrale di Choquet associato alla misura di Saaty duale  $\mu^*$  risulta invece

$$\begin{aligned} C_{\mu^*}(\mathbf{x}) &= \sum_{i \in N} x_i m_{\mu}(i) + \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \max(x_i, x_j) m_{\mu}(ij) \\ &= \sum_{i \in N} x_i w_i / \mathcal{N} - \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \max(x_i, x_j) w_i (1 - v_{ij}) w_j / \mathcal{N} \end{aligned}$$

Calcoliamo ora il valore atteso dell'integrale di Choquet  $C_{\mu^*}$  associato alla misura di Saaty duale  $\mu^*$ . Dato che

$$C_{\mu^*}(\mathbf{x}) = \sum_{T \subseteq N} \max_{i \in T} (x_i) m_{\mu}(T) \quad \text{e} \quad E(\max) = \frac{n}{n+1},$$

e ricordando che  $\mathcal{N} = (1+v)/2$ , il valore atteso di  $C_{\mu^*}$  è

$$\begin{aligned} E(C_{\mu^*}) &= \sum_{T \subseteq N} \frac{t}{t+1} m_{\mu}(T) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in N} w_i / \mathcal{N} + \frac{2}{3} \sum_{\{i,j\} \subseteq N} (-w_i (1 - v_{ij}) w_j / \mathcal{N}) \\ &= \left[ \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n w_i (1 - v_{ij}) w_j \right] \frac{1}{\mathcal{N}} \\ &= \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left( \sum_{i,j=1}^n w_i w_j - \sum_{i,j=1}^n w_i v_{ij} w_j \right) \right] \frac{1}{\mathcal{N}} \\ &= \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left( \sum_{i=1}^n w_i - \sum_{i=1}^n w_i v_i \right) \right] \frac{1}{\mathcal{N}} \\ &= \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} (1 - v) \right] \frac{2}{1+v} = \frac{1}{3} + \frac{v}{3(1+v)} \end{aligned}$$

che non dipende da  $n$ , ma dipende solo da  $v$ .

Il grado di orness di  $C_{\mu^*}$  risulta quindi

$$\text{orness}(C_{\mu^*}) = \frac{E(C_{\mu^*}) - E(\min)}{E(\max) - E(\min)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{3} + \frac{v}{3(1+v)} - \frac{1}{n+1}}{\frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1}} \\
&= \left( \frac{1}{3} + \frac{v}{3(1+v)} - \frac{1}{n+1} \right) \frac{n+1}{n-1} \\
&= \frac{n-2}{3(n-1)} + \frac{v(n+1)}{3(1+v)(n-1)}.
\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}
\text{orness}(\mathcal{C}_\mu) + \text{orness}(\mathcal{C}_{\mu^*}) &= \frac{n-2}{3(n-1)} + \frac{n+1}{3(1+v)(n-1)} \\
&\quad + \frac{n-2}{3(n-1)} + \frac{v(n+1)}{3(1+v)(n-1)} \\
&= \frac{2n-4}{3(n-1)} + \frac{(1+v)(n+1)}{3(1+v)(n-1)} = 1
\end{aligned}$$

come per qualunque coppia di misure duali.

La misura di Saaty self-dual che è associata alla misura di Saaty  $\mu$  è una funzione  $\tilde{\mu} : \mathcal{P}(N) \rightarrow [0, 1]$  definita come

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(T) &= \frac{1}{2} [\mu(T) + \mu^*(T)] = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i \in T} w_i / \mathcal{N} + \sum_{\{i,j\} \subseteq T} (-w_i(1-v_{ij})w_j) / \mathcal{N} \right. \\
&\quad \left. + 1 - \sum_{i \in N \setminus T} w_i / \mathcal{N} - \sum_{\{i,j\} \subseteq N \setminus T} (-w_i(1-v_{ij})w_j) / \mathcal{N} \right].
\end{aligned}$$

Poichè per l'equazione (5.9) il valore di Shapley associato ad una misura self-dual  $\tilde{\mu}$  coincide con quello associato a  $\mu$  e  $\mu^*$ , coincidono i corrispondenti integrali di Shapley

$$\mathcal{S}_{\tilde{\mu}}(\mathbf{x}) = \mathcal{S}_{\mu^*}(\mathbf{x}) = \mathcal{S}_{\mu}(\mathbf{x})$$

e quindi

$$\text{orness}(\mathcal{S}_{\tilde{\mu}}) = \text{orness}(\mathcal{S}_{\mu^*}) = \text{orness}(\mathcal{S}_{\mu}) = 1/2.$$

L'integrale di Choquet associato alla misura di Saaty self-dual  $\tilde{\mu}$  risulta invece

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\tilde{\mu}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} [\mathcal{C}_{\mu}(\mathbf{x}) + \mathcal{C}_{\mu^*}(\mathbf{x})] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \sum_{i \in N} x_i w_i / \mathcal{N} - \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \min(x_i, x_j) w_i (1-v_{ij}) w_j / \mathcal{N} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i \in N} x_i w_i / \mathcal{N} - \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \max(x_i, x_j) w_i (1-v_{ij}) w_j / \mathcal{N} \right]
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \in N} x_i w_i / \mathcal{N} - \sum_{\{i,j\} \subseteq N} \frac{x_i + x_j}{2} w_i (1 - v_{ij}) w_j / \mathcal{N} \\
&= \sum_{i \in N} x_i w_i / \mathcal{N} - \sum_{\{i,j\} \subseteq N} x_i w_i (1 - v_{ij}) w_j / \mathcal{N} \\
&= \sum_{i \in N} x_i \left( w_i - \frac{1}{2} \sum_{i \in N} w_i (1 - v_{ij}) w_j \right) \frac{1}{\mathcal{N}} \\
&= \sum_{i \in N} x_i \left( w_i - \frac{1}{2} w_i + \frac{1}{2} w_i v_i \right) \frac{2}{1 + v} \\
&= \sum_{i \in N} x_i w_i \frac{1 + v_i}{1 + v} = \mathcal{S}_\mu(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

e quindi, come per ogni misura di Choquet 2-additiva, l'integrale di Choquet rispetto alla misura di Saaty self-dual  $\tilde{\mu}$  coincide con l'integrale di Shapley rispetto alla misura di Saaty  $\mu$ .

Il grado di orness di  $\mathcal{C}_{\tilde{\mu}}$  risulta allora

$$\text{orness}(\mathcal{C}_{\tilde{\mu}}) = \text{orness}(\mathcal{S}_\mu) = 1/2.$$

## Capitolo 6

# Estensione di un operatore di media pesata (WA) ad un integrale di Choquet

### 6.1 Introduzione

Sia  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  un insieme di criteri e  $A = \{a, b, \dots\}$  un insieme di alternative. Ad ogni alternativa  $a \in A$  è associato un vettore di valori  $\mathbf{x}^a = (x_1^a, \dots, x_n^a) \in [0, 1]^n$  le cui componenti  $x_i^a \in [0, 1]$  rappresentano le valutazioni relative ai vari criteri  $i \in N$ .

Le preferenze del decisore su  $A$  sono espresse da una relazione di preferenza  $\succeq$ , un preordine completo su  $A$  tale che

$$a \succeq b \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}(\mathbf{x}^a) \geq \mathcal{F}(\mathbf{x}^b)$$

dove  $\mathcal{F} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  è un operatore di aggregazione che rappresenta  $\succeq$ .

Diciamo che l'insieme  $N$  dei criteri soddisfa la proprietà di indipendenza preferenziale se per ogni  $S \subseteq N$ , per ogni  $x_S, y_S$  in  $[0, 1]^S$  e per ogni  $x_{N \setminus S}, z_{N \setminus S}$  in  $[0, 1]^{n-s}$

$$(x_S, x_{N \setminus S}) \succeq (y_S, x_{N \setminus S}) \quad \Leftrightarrow \quad (x_S, z_{N \setminus S}) \succeq (y_S, z_{N \setminus S})$$

Ciò significa che la preferenza di  $(x_S, z_{N \setminus S})$  su  $(y_S, z_{N \setminus S})$  non è influenzata dai valori comuni di  $z_{N \setminus S}$ .

È noto [9] che la proprietà di indipendenza preferenziale tra i criteri è condizione necessaria, ma non sufficiente, perché  $\mathcal{F}$  sia additivo, ossia perché esista un vettore di pesi  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in [0, 1]^n$  con  $\sum_i w_i = 1$  tale che

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}^a) = \sum_{i=1}^n x_i^a w_i.$$

Quindi  $\mathcal{F}$  è l'operatore WA associato a  $\mathbf{w} = [w_i]$ .

## 6.2 Il problema dell'estensione: metodologia classica

In questo capitolo trattiamo il problema fondamentale dell'estensione di un operatore  $WA$  ad un integrale di Choquet.

La media pesata è l'operatore di aggregazione più noto e più utilizzato nelle applicazioni, ma sappiamo che non è appropriato in presenza di interazioni tra criteri e/o agenti. Queste interazioni possono invece essere modellizzate attraverso il maggior numero di gradi di libertà delle misure di Choquet ( $2^n - 2$ ) rispetto a quelli ( $n - 1$ ) degli operatori di media pesata.

Sappiamo che l'integrale di Choquet consiste in una generalizzazione dell'operatore  $WA$ , in cui il vettore dei pesi è sostituito da una misura di Choquet che assegna un valore ad ogni coalizione di elementi. Esiste infatti (proposizione 2.6) una corrispondenza biunivoca tra gli operatori  $WA$  e gli integrali di Choquet rispetto ad una misura additiva.

Dato un operatore di media pesata, e quindi un vettore di pesi  $\mathbf{w} = [w_i]$ , si vuole costruire un'appropriata misura di Choquet  $\mu$  in modo tale che l'integrale di Choquet  $C_\mu$  risulti un'estensione dell'operatore  $WA$  originale.

Nella metodologia classica, la misura di Choquet  $\mu$  viene costruita a partire dall'identificazione dei suoi singletons con i pesi della media pesata originale, ossia

$$\mu(i) = w_i.$$

L'esempio più noto in letteratura di un problema di questo tipo è il seguente dovuto a Grabisch [12].

**Esempio di Grabisch:** Il preside di una scuola superiore ad indirizzo scientifico vuole valutare tre studenti in base al loro livello di preparazione, espresso con voti da 0 a 20, in matematica, fisica e letteratura.

Studente	Matematica	Fisica	Letteratura
A	18	16	10
B	10	12	18
C	14	15	15

In questo caso il decisore è il preside della scuola, l'insieme dei criteri è dato dall'insieme delle discipline, mentre le alternative sono rappresentate dagli studenti a ciascuno dei quali è associato un vettore costituito dalle valutazioni relative alle varie discipline.

Visto l'indirizzo scientifico della scuola, il preside attribuisce maggior importanza a

matematica e fisica rispetto a letteratura, ma considera le due materie scientifiche ugualmente importanti.

Il preside decide quindi di calcolare la valutazione media di ogni studente utilizzando un operatore  $WA$  associato al vettore dei pesi  $\mathbf{w} = (3/8, 3/8, 2/8)$ .

I valori ottenuti con questa aggregazione sono

Studente	$\mathcal{W}(x_M, x_F, x_L)$
A	15.25
B	12.75
C	14.62

Si ottiene quindi

$$A \succ C \succ B.$$

Se il preside vuole favorire gli studenti ben equilibrati e senza lacune, i risultati ottenuti mediante l'operatore  $WA$  non possono soddisfarlo: lo studente A, con buoni voti nelle materie scientifiche ma carenze in letteratura, viene infatti preferito allo studente C, che ha voti discreti in tutte tre le materie.

Il preside esprime quindi le preferenze

$$C \succ A \succ B.$$

Utilizzando un operatore  $WA$  che associ uno stesso peso a matematica e fisica e un peso inferiore a letteratura non riusciremo mai ad ottenere per lo studente C una valutazione media superiore a quella di A.

Se infatti  $\mathcal{W}$  è un operatore  $WA$  associato al vettore di pesi  $\mathbf{w} = (w_M, w_F, w_L)$  si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\mathbf{x}^C) - \mathcal{W}(\mathbf{x}^A) &= 14w_M + 15w_F + 15w_L - (18w_M + 16w_F + 10w_L) \\ &= (14 - 18)w_M + (15 - 16)w_F + (15 - 10)w_L \\ &= -4w_M - w_F + 5w_L \end{aligned}$$

Se ora i pesi sono tali che  $w_M = w_F > w_L$  si ha

$$\mathcal{W}(\mathbf{x}^C) - \mathcal{W}(\mathbf{x}^A) = -5w_M + 5w_L = -5(w_M - w_L) < 0$$

e quindi  $C \not\succeq A$ .

La ragione di ciò sta nel fatto che viene data troppa importanza a matematica e fisica. Se uno studente è bravo in matematica, generalmente lo è anche in fisica e viceversa. La valutazione media viene quindi sovrastimata per studenti bravi in matematica e/o fisica e analogamente viene sottostimata per studenti scarsi in in matematica e/o fisica.

Il preside cercherà allora di calcolare la valutazione media di ogni studente utilizzando un operatore di aggregazione differente. Definiamo sull'insieme delle discipline  $N = \{\text{Matematica} \equiv M, \text{Fisica} \equiv F, \text{Letteratura} \equiv L\}$  un'appropriata misura di Choquet

$$\mu : \mathcal{P}(N) \longrightarrow [0, 1] \quad \mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(N) = 1$$

che identifichi i suoi singletons con i pesi della media pesata originale nel modo seguente:

- Le materie scientifiche sono privilegiate rispetto a letteratura, considerando matematica e fisica ugualmente importanti

$$\mu(M) = 0.45, \quad \mu(F) = 0.45, \quad \mu(L) = 0.30.$$

Notiamo che la proporzione iniziale dei pesi  $(3/8, 3/8, 2/8)$  rimane invariata.

- Poichè generalmente studenti bravi in matematica lo sono anche in fisica, viene attribuito un peso inferiore all'insieme  $\{M, F\}$  rispetto alla somma dei pesi di matematica e fisica ( $\mu$  sub-additiva per le due discipline  $\{M, F\}$ )

$$\mu(MF) = 0.50 \quad (< \mu(M) + \mu(F)).$$

- Gli studenti bravi sia nelle materie scientifiche che in letteratura vengono favoriti attribuendo un peso superiore agli insiemi  $\{M, L\}$  e  $\{F, L\}$  rispetto alla somma dei pesi delle singole materie ( $\mu$  super-additiva per le coppie di discipline  $\{M, L\}$  e  $\{F, L\}$ )

$$\mu(ML) = 0.90 \quad (> \mu(M) + \mu(L)),$$

$$\mu(FL) = 0.90 \quad (> \mu(F) + \mu(L)).$$

Per tale misura i valori della misura e rappresentazioni equivalenti sono quindi

	$\{M\}$	$\{F\}$	$\{L\}$	$\{M, F\}$	$\{M, L\}$	$\{F, L\}$	$\{M, F, L\}$
$\mu(\cdot)$	0.45	0.45	0.30	0.50	0.90	0.90	1.00
$m_\mu(\cdot)$	0.45	0.45	0.30	-0.40	0.15	0.15	-0.10
$I_\mu(\cdot)$	0.292	0.292	0.417	-0.45	0.10	0.10	-0.10

Il preside della scuola può ora calcolare la valutazione media di ogni studente utilizzando come operatore di aggregazione l'integrale di Choquet.

Ricordiamo che come dominio di definizione dell'integrale di Choquet è possibile considerare anzichè l'intervallo  $[0, 1]^n$ , un qualunque intervallo  $[a, b]^n$ . In questo

caso, considerando come dominio di definizione dell'integrale di Choquet l'intervallo  $[0, 20]^n$ , si avrà

$$C_\mu : [0, 20]^n \rightarrow [0, 20]$$

I valori ottenuti con l'aggregazione sono

Studente	$C_\mu(x_M, x_F, x_L)$
A	13.90
B	13.60
C	14.90

Si ha quindi

$$C \succ A \succ B.$$

Ora gli studenti sono ordinati in accordo con le relazioni di preferenza espresse dal preside. Notiamo che lo studente B ha ancora la peggior valutazione media come richiesto dalla tendenza scientifica della scuola.

### 6.3 Critica alla metodologia classica

Osservando i risultati dell'esempio di Grabisch si può notare che i valori di Shapley associati alla misura trovata sono dati da

$$\phi_\mu(M) = \phi_\mu(F) = 0.292, \quad \phi_\mu(L) = 0.417.$$

Sappiamo che i valori di Shapley  $\phi_\mu(i)$  sono indici di importanza.

La misura  $\mu$  ottenuta da Grabisch è quindi tale che l'indice di importanza relativo a letteratura è più grande di quello relativo alle materie scientifiche.

Se per valutare gli studenti viene utilizzato come operatore di aggregazione l'integrale di Choquet  $C_\mu$  associato alla misura  $\mu$  trovata da Grabisch, si snaturano le ipotesi del problema: la valutazione di ogni studente viene infatti effettuata attribuendo a letteratura un'importanza maggiore che alle materie scientifiche, come se l'indirizzo della scuola fosse di tipo umanistico anzichè scientifico. La misura  $\mu$  non può quindi essere la misura cercata dal preside.

Si può inoltre provare che il valore di Shapley di una materia coincide in realtà con il peso medio che, al variare dei domini di comonotonia, viene associato a quella materia [18].

Per la misura  $\mu$  ottenuta da Grabisch i pesi  $[\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})]$  associati a ciascuna delle tre materie al variare dei domini di comonotonia sono i seguenti

domini di comonotonia	$M$	$F$	$L$
$x_M < x_F < x_L$	$1 - \mu(FL) = 0.1$	$\mu(FL) - \mu(L) = 0.6$	$\mu(L) = 0.3$
$x_M < x_L < x_F$	$1 - \mu(LF) = 0.1$	$\mu(F) = 0.45$	$\mu(LF) - \mu(F) = 0.45$
$x_F < x_M < x_L$	$\mu(ML) - \mu(L) = 0.6$	$1 - \mu(ML) = 0.1$	$\mu(L) = 0.3$
$x_F < x_L < x_M$	$\mu(M) = 0.45$	$1 - \mu(ML) = 0.1$	$\mu(LM) - \mu(M) = 0.45$
$x_L < x_F < x_M$	$\mu(M) = 0.45$	$\mu(FM) - \mu(M) = 0.05$	$1 - \mu(FM) = 0.5$
$x_L < x_M < x_F$	$\mu(MF) - \mu(F) = 0.05$	$\mu(F) = 0.45$	$1 - \mu(MF) = 0.5$

Indicando con  $\bar{x}_i$  il peso medio relativo alla materia  $i$  abbiamo

$$\bar{x}_M = \frac{1}{6} (0.1 + 0.1 + 0.6 + 0.45 + 0.45 + 0.05) = \frac{1.75}{6} = 0.292 = \phi_\mu(M),$$

$$\bar{x}_F = \frac{1}{6} (0.6 + 0.45 + 0.1 + 0.1 + 0.05 + 0.45) = \frac{1.75}{6} = 0.292 = \phi_\mu(F),$$

$$\bar{x}_L = \frac{1}{6} (0.3 + 0.45 + 0.3 + 0.45 + 0.5 + 0.5) = \frac{2.5}{6} = 0.417 = \phi_\mu(L).$$

Il peso medio associato a letteratura è quindi più grande di quello relativo alle materie scientifiche, pur se ritenute più importanti.

Riteniamo perciò che questa metodologia classica abbia dei problemi e che ad essere identificati con i pesi  $w_i$  della media pesata originale non debbano essere i valori  $\mu(i)$  dei singletons della misura.

## 6.4 Il problema dell'estensione: nuova metodologia

Dato un operatore  $WA$ , e quindi un vettore di pesi  $\mathbf{w} = [w_i]$ , si vuole costruire un'appropriata misura di Choquet  $\mu$  in modo tale che l'integrale di Choquet  $C_\mu$  risulti un'estensione dell'operatore  $WA$  originale in grado di rappresentare le preferenze del decisore.

Per le osservazioni fatte nel paragrafo precedente, la misura di Choquet  $\mu$  deve essere costruita partendo dall'identificazione dei suoi valori di Shapley con i pesi della media pesata originale, ossia

$$\phi_\mu(i) = w_i.$$

Il problema da risolvere è il seguente: noti i valori  $\phi(i) = w_i$  cerchiamo un'appropriata misura di Choquet  $\mu$  che abbia quei valori come indici di Shapley e il cui

integrale di Choquet  $C_\mu$  risulti un'estensione dell'operatore WA originale in grado di rappresentare le preferenze del decisore.

Abbiamo una serie di informazioni o vincoli sulla misura di Choquet  $\mu$  che stiamo cercando, informazioni che possono essere tradotte in equazioni o disequazioni lineari nelle variabili  $\{\mu(T) \mid T \subseteq N\}$ :

- vincoli sui valori di Shapley

$$\phi_\mu(i) = \sum_{T \subseteq N \setminus i} \frac{(n-1-t)!t!}{n!} [\mu(T \cup i) - \mu(T)] = w_i \quad i \in N,$$

- vincoli di frontiera e monotonia per  $\mu$

$$\begin{aligned} \mu(\emptyset) &= 0, \quad \mu(N) = 1 \\ S \subseteq T \subseteq N &\Rightarrow \mu(S) \leq \mu(T). \end{aligned}$$

A questi vincoli ne possono essere aggiunti altri quali:

- vincoli che riguardano le preferenze del decisore

$$\begin{aligned} a \succ b &\Leftrightarrow C_\mu(\mathbf{x}^a) - C_\mu(\mathbf{x}^b) > 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_{(i)}^a [\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})] - \sum_{j=1}^n x_{(j)}^b [\mu(A_{(j)}) - \mu(A_{(j+1)})] > 0 \end{aligned}$$

dove si sono utilizzati indici  $i$  e  $j$  per enfatizzare il fatto che i termini che coinvolgono la misura sono differenti, perché differenti sono gli ordinamenti,

- vincoli sul segno dell'interazione tra alcune coppie di criteri.

Un problema di questo tipo può essere formalizzato come problema di programmazione lineare grazie alla seguente proposizione [21].

**Proposizione 6.1** *Il vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  è soluzione del sistema lineare*

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, \dots, p, \\ \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j < d_i & i = 1, \dots, q, \end{cases}$$

se e solo se esiste  $\varepsilon > 0$  tale che

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, \dots, p, \\ \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \leq d_i - \varepsilon & i = 1, \dots, q. \end{cases}$$



In particolare, una soluzione esiste se e solo se il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max z &= \varepsilon \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, p, \\ \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j \leq d_i - \varepsilon \quad i = 1, \dots, q, \end{array} \right. \end{aligned}$$

ha soluzione ottima  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  con valore ottimo  $\varepsilon^* > 0$ . In questo caso,  $\mathbf{x}^*$  è una soluzione del primo problema.

Scriviamo il problema in termini della rappresentazione di Möbius. In tal caso i vincoli sui valori di Shapley assumono la forma

$$\sum_{T \subseteq N \setminus i} \frac{m_\mu(T \cup i)}{t+1} = w_i \quad i \in N.$$

Per quel che riguarda i vincoli di frontiera e monotonia per i coefficienti dell'insieme  $\{m_\mu(T) \mid T \subseteq N\}$ , sono i seguenti (si veda la proposizione 1.2)

$$\begin{aligned} m_\mu(\emptyset) &= 0, \quad \sum_{T \subseteq N} m_\mu(T) = 1, \\ \sum_{T \mid i \in T \subseteq S} m_\mu(T) &\geq 0 \quad \forall S \subseteq N, \forall i \in S. \end{aligned}$$

Inoltre, nei vincoli che riguardano le preferenze del decisore, anche gli integrali di Choquet dovranno essere espressi in termini della rappresentazione di Möbius

$$\sum_{T \subseteq N} m_\mu(T) \min_{i \in T}(x_i).$$

Chiaramente minore sarà il numero di condizioni sulla misura cercata e quindi di vincoli per il nostro problema di programmazione lineare, maggiore sarà l'insieme delle soluzioni. Al contrario, maggiore sarà il numero di condizioni sulla misura che stiamo cercando, maggiore sarà il numero di vincoli e, come vedremo, se queste condizioni sono in contrasto tra loro, l'insieme delle soluzioni può essere vuoto.

Una generica misura di Choquet ha  $2^n - 2$  gradi di libertà. Imponendo i vincoli sui valori di Shapley questi gradi di libertà si riducono: i vincoli sui valori di Shapley sono infatti rappresentati da  $n$  equazioni che sommano a uno e quindi il numero di gradi di libertà si riduce di  $n - 1$ . Per una misura di Choquet che soddisfa i vincoli sui valori di Shapley i gradi di libertà sono

$$2^n - 2 - (n - 1) = 2^n - n - 1.$$

### 6.4.1 Esempio n=3

Applichiamo questa nuova metodologia all'esempio di Grabisch [12].

Si vogliono valutare tre studenti di una scuola ad indirizzo scientifico in base al loro livello di preparazione, espresso in voti da 0 a 20, in matematica, fisica e letteratura,

Studente	Matematica	Fisica	Letteratura
A	18	16	10
B	10	12	18
C	14	15	15

attribuendo uguale importanza a matematica e fisica e un'importanza inferiore a letteratura.

Il preside esprime le preferenze

$$C \succ A, \quad A \succ B.$$

Sappiamo che nessun operatore  $WA$  che associ a matematica e fisica uno stesso peso e a letteratura un peso inferiore può rappresentare la preferenza  $C \succ A$ .

Dato il vettore di pesi  $\mathbf{w} = (3/8, 3/8, 2/8)$  vogliamo definire sull'insieme delle discipline  $N = \{1 = \text{Matematica}, 2 = \text{Fisica}, 3 = \text{Letteratura}\}$  un'appropriata misura di Choquet  $\mu$  in modo tale che l'integrale di Choquet  $C_\mu$  risulti un'estensione dell'operatore  $WA$  associato a  $\mathbf{w} = [w_i]$ , in grado di rappresentare le preferenze del preside. Costruiamo la misura  $\mu$  partendo dall'identificazione dei suoi valori di Shapley con i pesi della media pesata originale.

Il preside fissa il segno dell'interazione tra le coppie di discipline:

- $m_\mu(12) \leq 0$  (i.e.  $\mu$  sub-additiva per le due discipline  $\{1, 2\}$ )
- $m_\mu(13) = m_\mu(23) \geq 0$  (i.e.  $\mu$  super-additiva per le coppie di discipline  $\{1, 3\}$  e  $\{2, 3\}$ )

Scriviamo quindi il problema in termini della rappresentazione di Möbius di  $\mu$  e, per non appesantire troppo la notazione, scriveremo semplicemente con  $m(T)$  anziché  $m_\mu(T)$ .

Il problema da risolvere, formalizzato come problema di programmazione lineare è il seguente:

$$\boxed{\max \varepsilon}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{T \subseteq N} m(T) \left( \min_{i \in T} (x_i^C) - \min_{i \in T} (x_i^A) \right) \geq \varepsilon \\ \sum_{T \subseteq N} m(T) \left( \min_{i \in T} (x_i^A) - \min_{i \in T} (x_i^B) \right) \geq \varepsilon \\ m(i) + \frac{1}{2} \sum_{j \in N \setminus i} m(ij) + \frac{1}{3} m(N) = w_i \quad i \in N \\ \sum_{T \subseteq N} m(T) = 1 \\ m(i) \geq 0 \quad i \in N \\ m(i) + m(ij) \geq 0 \quad i \in N, j \in N \setminus i \\ m(i) + m(ij) + m(ik) + m(ijk) \geq 0 \quad i \in N, \{j, k\} \subseteq N \setminus i \\ m(12) \leq 0 \\ m(13) = m(23) \geq 0 \end{array} \right.$$

Stiamo quindi cercando una rappresentazione cardinale che massimizzi la discriminazione delle preferenze ordinali espresse dal preside.

I vincoli che riguardano le preferenze del preside ed i vincoli sui valori di Shapley possono essere scritti in modo esplicito come

$$\left\{ \begin{array}{l} (14 - 18)m(1) + (15 - 16)m(2) + (15 - 10)m(3) + (14 - 16)m(12) \\ \quad + (14 - 10)m(13) + (15 - 10)m(23) + (14 - 10)m(123) \geq \varepsilon \\ (18 - 10)m(1) + (16 - 12)m(2) + (10 - 18)m(3) + (16 - 10)m(12) \\ \quad + (10 - 10)m(13) + (10 - 12)m(23) + (10 - 10)m(123) \geq \varepsilon \\ m(1) + \frac{1}{2} (m(12) + m(13)) + \frac{1}{3} m(123) = \frac{3}{8} \\ m(2) + \frac{1}{2} (m(12) + m(23)) + \frac{1}{3} m(123) = \frac{3}{8} \\ m(3) + \frac{1}{2} (m(13) + m(23)) + \frac{1}{3} m(123) = \frac{2}{8} \end{array} \right.$$

Una soluzione possibile è la seguente (si veda allegato n=3.nb):

	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$m(\cdot)$	0.30	0.30	0.15	-0.04	0.01	0.01	0.27
$\mu(\cdot)$	0.30	0.30	0.15	0.56	0.46	0.46	1.00

Questa soluzione soddisfa effettivamente i vincoli sui valori di Shapley

$$\phi_\mu(1) = \phi_\mu(2) = 0.375 = \frac{3}{8}, \quad \phi_\mu(3) = 0.250 = \frac{2}{8},$$

e sul segno dell'interazione fissato dal preside

$$m(12) = -0.04 < 0, \quad m(13) = m(23) = 0.01 > 0.$$

Inoltre, se calcoliamo la valutazione media di ogni studente utilizzando come operatore di aggregazione l'integrale di Choquet  $\mathcal{C}_\mu$  associato alla misura  $\mu$  trovata, otteniamo

Studente	$\mathcal{C}_\mu(x_1, x_2, x_3)$
A	13.96
B	11.82
C	14.46

e quindi

$$C \succ A \succ B$$

in accordo con le relazioni di preferenza espresse dal preside.

#### 6.4.2 Esempio n=4

Applichiamo la nuova metodologia ad un esempio con quattro criteri.

Consideriamo la stessa scuola ad indirizzo scientifico dell'esempio precedente, ma introduciamo storia come nuova disciplina. Le valutazioni dei tre studenti in matematica, fisica, letteratura e storia sono le seguenti:

Studente	Matematica	Fisica	Letteratura	Storia
A	18	16	10	15
B	11	13	18	17
C	14	15	15	15

Abbiamo leggermente modificato, rispetto all'esempio illustrato nel paragrafo precedente, le valutazioni dello studente B e fatto sì che la somma dei voti per ciascuno studente sia costante.

Visto l'indirizzo scientifico della scuola, il preside attribuisce a storia la stessa importanza che a letteratura, e dunque un'importanza inferiore rispetto a quella di matematica e fisica.

Il preside esprime le preferenze

$$C \succ A, \quad A \succ B.$$

Anche in questo caso la preferenza  $C \succ A$  non può essere rappresentata da nessun operatore  $WA$  associato ad un vettore di pesi  $\mathbf{w} = (w_M, w_F, w_L, w_S)$  tale che  $w_M = w_F > w_L = w_S$ .

Infatti si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\mathbf{x}^C) - \mathcal{W}(\mathbf{x}^A) &= 14w_M + 15w_F + 15w_L + 15w_S - (18w_M + 16w_F + 10w_L + 15w_S) \\ &= (14 - 18)w_M + (15 - 16)w_F + (15 - 10)w_L + (15 - 15)w_S \\ &= -4w_M - w_F + 5w_L = -5w_M + 5w_L = -5(w_M - w_L) < 0 \end{aligned}$$

e quindi  $C \not\succeq A$ .

Dato il vettore di pesi  $\mathbf{w} = (3/10, 3/10, 2/10, 2/10)$  vogliamo definire sull'insieme delle discipline  $N = \{1 = \text{Matematica}, 2 = \text{Fisica}, 3 = \text{Letteratura}, 4 = \text{Storia}\}$  un'appropriata misura di Choquet  $\mu$  in modo tale che l'integrale di Choquet  $\mathcal{C}_\mu$  risulti un'estensione dell'operatore  $WA$  associato a  $\mathbf{w} = [w_i]$ , in grado di rappresentare le preferenze del preside. Costruiamo la misura  $\mu$  partendo dall'identificazione dei suoi valori di Shapley con i pesi della media pesata originale.

Il preside, analogamente al caso  $n=3$ , fissa il segno dell'interazione tra alcune coppie di discipline:

- $m(12) \leq 0$  (i.e.  $\mu$  sub-additiva per le due discipline  $\{1, 2\}$ )
- $m(13) = m(23) \geq 0$  (i.e.  $\mu$  super-additiva per le coppie di discipline  $\{1, 3\}$  e  $\{2, 3\}$ )

Il problema da risolvere, scritto in termini della rappresentazione di Möbius e formalizzato come problema di programmazione lineare è il seguente:

$$\boxed{\max \varepsilon}$$

$$\begin{cases} \sum_{T \subseteq N} m(T) \left( \min_{i \in T} (x_i^C) - \min_{i \in T} (x_i^A) \right) \geq \varepsilon \\ \sum_{T \subseteq N} m(T) \left( \min_{i \in T} (x_i^A) - \min_{i \in T} (x_i^B) \right) \geq \varepsilon \end{cases}$$

$$m(i) + \frac{1}{2} \sum_{j \in N \setminus i} m(ij) + \frac{1}{3} \sum_{\{j,k\} \subseteq N \setminus i} m(ijk) + \frac{1}{4} m(N) = w_i \quad i \in N$$

$$\begin{cases} \sum_{T \subseteq N} m(T) = 1 \\ m(i) \geq 0 & i \in N \\ m(i) + m(ij) \geq 0 & i \in N, j \in N \setminus i \\ m(i) + m(ij) + m(ik) + m(ijk) \geq 0 & i \in N, \{j,k\} \subseteq N \setminus i \\ m(i) + m(ij) + m(ik) + m(il) + m(ijk) + m(ijl) + m(ikl) \\ \quad + m(ijkl) \geq 0 & i \in N, \{j,k,l\} \subseteq N \setminus i \\ m(12) \leq 0 \\ m(13) = m(23) \geq 0 \end{cases}$$

Una soluzione possibile è la seguente (si veda allegato n=4.nb):

	{1}	{2}	{3}	{4}	{1, 2}	{1, 3}	{1, 4}	{2, 3}
$m(\cdot)$	0.300	0.300	0.150	0.150	-0.250	0.125	0.125	0.125
$\mu(\cdot)$	0.300	0.300	0.150	0.150	0.350	0.575	0.575	0.575

	{2, 4}	{3, 4}	{1, 2, 3}	{1, 2, 4}	{1, 3, 4}	{2, 3, 4}	{1, 2, 3, 4}
$m(\cdot)$	0.125	-0.150	-0.125	-0.125	-0.125	-0.125	0.500
$\mu(\cdot)$	0.575	0.150	0.625	0.625	0.700	0.700	1.000

Questa soluzione soddisfa effettivamente i vincoli sui valori di Shapley

$$\phi_\mu(1) = \phi_\mu(2) = 0.3 = \frac{3}{10}, \quad \phi_\mu(3) = \phi_\mu(4) = 0.2 = \frac{2}{10},$$

e sul segno dell'interazione fissato dal preside

$$m(12) = -0.250 < 0, \quad m(13) = m(23) = 0.125 > 0.$$

Osserviamo che la disciplina 4 (storia) ha interazione negativa con la disciplina 3 (letteratura), ma positiva con le discipline 1 (matematica) e 2 (fisica), come è lecito aspettarsi da una disciplina umanistica,

$$m(34) = -0.150 < 0, \quad m(14) = m(24) = 0.125 > 0.$$

Infine, se calcoliamo la valutazione media di ogni studente utilizzando come operatore di aggregazione l'integrale di Choquet  $C_\mu$  associato alla misura  $\mu$  trovata, otteniamo

Studente	$C_\mu(x_1, x_2, x_3)$
A	14.075
B	12.900
C	14.575

e quindi

$$C \succ A \succ B$$

in accordo con le relazioni di preferenza espresse dal preside.

### 6.4.3 Esempio n=5

Applichiamo la nuova metodologia ad un esempio con cinque criteri.

Consideriamo la stessa scuola ad indirizzo scientifico degli esempi precedenti, introducendo come nuova disciplina geografia. Le valutazioni dei tre studenti nelle varie discipline sono le seguenti:

Studente	Matematica	Fisica	Letteratura	Storia	Geografia
A	18	16	10	16	15
B	11	13	18	17	16
C	14	15	15	15	16

Rispetto all'esempio precedente abbiamo leggermente modificato le valutazioni dello studente A per far sì che la somma dei voti per ciascuno studente sia costante.

Visto l'indirizzo scientifico della scuola, il preside attribuisce a geografia la stessa importanza che a letteratura e storia, e dunque un'importanza inferiore rispetto a quella di matematica e fisica.

Il preside esprime le preferenze

$$C \succ A, \quad A \succ B.$$

Anche in questo caso la preferenza  $C \succ A$  non può essere rappresentata da nessun operatore  $WA$  associato ad un vettore di pesi  $\mathbf{w} = (w_M, w_F, w_L, w_S, w_G)$  tale che  $w_M = w_F > w_L = w_S = w_G$ .

Infatti si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\mathbf{x}^C) - \mathcal{W}(\mathbf{x}^A) &= 14w_M + 15w_F + 15w_L + 15w_S + 16w_G \\ &\quad - (18w_M + 16w_F + 10w_L + 16w_S + 15w_G) \\ &= -4w_M - w_F + 5w_L - w_S + w_G \\ &= -5w_M + 5w_L = -5(w_M - w_L) < 0 \end{aligned}$$

e quindi  $C \not\succeq A$ .

Dato il vettore di pesi  $\mathbf{w} = (3/12, 3/12, 2/12, 2/12, 2/12)$  vogliamo definire sull'insieme delle discipline  $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  con 1=Matematica, 2=Fisica, 3=Letteratura, 4=Storia e 5=Geografia un'appropriata misura di Choquet  $\mu$  in modo tale che l'integrale di Choquet  $\mathcal{C}_\mu$  risulti un'estensione dell'operatore  $WA$  associato a  $\mathbf{w} = [w_i]$ , in grado di rappresentare le preferenze del preside. Costruiamo la misura  $\mu$  partendo dall'identificazione dei suoi valori di Shapley con i pesi della media pesata originale. Il preside, analogamente ai casi  $n=3$  e  $n=4$ , fissa il segno dell'interazione tra alcune coppie di discipline:

- $m(12) \leq 0$  (i.e.  $\mu$  sub-additiva per le due discipline  $\{1, 2\}$ )
- $m(13) = m(23) \geq 0$  (i.e.  $\mu$  super-additiva per le coppie di discipline  $\{1, 3\}$  e  $\{2, 3\}$ )

Il problema da risolvere, scritto in termini della rappresentazione di Möbius e formalizzato come problema di programmazione lineare è il seguente:

$$\boxed{\max \varepsilon}$$

$$\begin{cases} \sum_{T \subseteq N} m(T) \left( \min_{i \in T} (x_i^C) - \min_{i \in T} (x_i^A) \right) \geq \varepsilon \\ \sum_{T \subseteq N} m(T) \left( \min_{i \in T} (x_i^A) - \min_{i \in T} (x_i^B) \right) \geq \varepsilon \end{cases}$$



$$m(i) + \frac{1}{2} \sum_{j \in N \setminus i} m(ij) + \frac{1}{3} \sum_{\{j,k\} \subseteq N \setminus i} m(ijk) + \frac{1}{4} \sum_{\{j,k,l\} \subseteq N \setminus i} m(ijkl) + \frac{1}{5} m(N) = w_i \quad i \in N$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{T \subseteq N} m(T) = 1 \\ m(i) \geq 0 \quad i \in N \\ m(i) + m(ij) \geq 0 \quad i \in N, j \in N \setminus i \\ m(i) + m(ij) + m(ik) + m(ijk) \geq 0 \quad i \in N, \{j,k\} \subseteq N \setminus i \\ m(i) + m(ij) + m(ik) + m(il) + m(ijk) + m(ijl) + m(ikl) \\ \quad + m(ijkl) \geq 0 \quad i \in N, \{j,k,l\} \subseteq N \setminus i \\ m(i) + m(ij) + m(ik) + m(il) + m(ip) + m(ijk) + m(ijl) \\ \quad + m(ijp) + m(ikl) + m(ikp) + m(ilp) + m(ijkl) + m(ijkp) \\ \quad + m(ijlp) + m(iklp) + m(ijklp) \geq 0 \quad i \in N, \{j,k,l,p\} \subseteq N \setminus i \\ m(12) \leq 0 \\ m(13) = m(23) \geq 0 \end{array} \right.$$

Una soluzione possibile è la seguente (si veda allegato n=5.nb):

	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,5}	{2,3}
$m(\cdot)$	0.250	0.250	0.150	0.150	0.150	-0.250	0.030	0.020	0.010	0.030
$\mu(\cdot)$	0.250	0.250	0.150	0.150	0.150	0.250	0.430	0.420	0.410	0.430

	{2,4}	{2,5}	{3,4}	{3,5}	{4,5}	{1,2,3}	{1,2,4}	{1,2,5}
$m(\cdot)$	0.020	0.010	-0.150	-0.150	-0.150	-0.030	-0.020	-0.010
$\mu(\cdot)$	0.420	0.410	0.150	0.150	0.150	0.430	0.420	0.410

	{1,3,4}	{1,3,5}	{1,4,5}	{2,3,4}	{2,3,5}	{2,4,5}	{3,4,5}
$m(\cdot)$	-0.020	-0.010	-0.010	0.030	0.040	-0.010	0.150
$\mu(\cdot)$	0.430	0.430	0.420	0.480	0.480	0.420	0.150

	{1, 2, 3, 4}	{1, 2, 3, 5}	{1, 2, 4, 5}	{1, 3, 4, 5}	{2, 3, 4, 5}	{1, 2, 3, 4, 5}
$m(\cdot)$	0.046	0.046	0.140	0.093	-0.040	0.233
$\mu(\cdot)$	0.506	0.516	0.550	0.513	0.480	1.000

Questa soluzione soddisfa effettivamente i vincoli sui valori di Shapley

$$\phi_\mu(1) = \phi_\mu(2) = \frac{3}{12}, \quad \phi_\mu(3) = \phi_\mu(4) = \phi_\mu(5) = \frac{2}{10},$$

e sul segno dell'interazione fissato dal preside

$$m(12) = -0.250 < 0, \quad m(13) = m(23) = 0.030 > 0.$$

Osserviamo che le discipline 4 (storia) e 5 (geografia) hanno interazione negativa con la disciplina 3 (letteratura) e tra loro, ma positiva con le discipline 1 (matematica) e 2 (fisica), come è lecito aspettarsi da discipline umanistiche,

$$m(34) = m(35) = m(45) = -0.075 < 0,$$

$$m(14) = m(24) = 0.020 > 0, \quad m(15) = m(25) = 0.010 > 0.$$

Infine, se calcoliamo la valutazione media di ogni studente utilizzando come operatore di aggregazione l'integrale di Choquet  $C_\mu$  associato alla misura  $\mu$  trovata, otteniamo

Studente	$C_\mu(x_1, x_2, x_3)$
A	13.67
B	12.71
C	14.63

e quindi

$$C \succ A \succ B$$

in accordo con le relazioni di preferenza espresse dal preside.

## 6.5 Ricerca di una misura self-dual

Una possibilità interessante consiste nel cercare una misura di Choquet  $\mu$  che sia self-dual: sappiamo infatti che l'integrale di Choquet associato ad una misura di Choquet self-dual ha grado di orness pari a  $1/2$ , esattamente come l'operatore  $WA$  originale.

Vanno quindi aggiunti ai vincoli sui valori di Shapley e a quelli di frontiera e monotonia, i vincoli di self-dualità

$$\mu(T) = 1 - \mu(N \setminus T) \quad T \subseteq N,$$

che riscritti in termini della rappresentazione di Möbius assumono la forma

$$\sum_{S \subseteq T} m_\mu(S) = 1 - \sum_{S \subseteq N \setminus T} m_\mu(S) \quad T \subseteq N.$$

Sappiamo che una generica misura di Choquet ha  $2^n - 2$  gradi di libertà. Imponendo i vincoli di self-dualità e sui valori di Shapley questi gradi di libertà si riducono. Una misura self-dual necessita infatti, per essere definita, di un numero di coefficienti che è la metà rispetto a quello dei coefficienti per una generica misura di Choquet. Inoltre i vincoli sui valori di Shapley sono rappresentati da  $n$  equazioni che sommano a uno e quindi il numero di gradi di libertà si riduce ulteriormente di  $(n - 1)$ .

Riassumendo, per una misura di Choquet self-dual che soddisfa i vincoli sui valori di Shapley, i gradi di libertà sono

$$\frac{2^n - 2}{2} - (n - 1) = 2^{n-1} - 1 - (n - 1) = 2^{n-1} - n.$$

**Proposizione 6.2** *Il numero di coalizioni in  $N$  di cardinalità dispari è dato da*

$$\sum_{\substack{t \text{ dispari} \\ 0 \leq t \leq n}} \binom{n}{t} = 2^{n-1}.$$

**Dimostrazione:** È noto che

$$\sum_{t=0}^n \binom{n}{t} = 2^n.$$

Scomponiamo la somma precedente nella somma dei termini con  $t$  pari, compreso  $t = 0$ , e la somma dei termini con  $t$  dispari

$$\sum_{t=0}^n \binom{n}{t} = \sum_{\substack{t \text{ pari} \\ 0 \leq t \leq n}} \binom{n}{t} + \sum_{\substack{t \text{ dispari} \\ 0 \leq t \leq n}} \binom{n}{t} = 2^n$$

Dimostriamo che il valore della somma dei termini con  $t$  pari coincide con il valore della somma dei termini con  $t$  dispari. Allora dall'uguaglianza precedente segue immediatamente la tesi.

Poichè vale

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{t} = \binom{n-1}{t-1} + \binom{n-1}{t} \quad 1 \leq t \leq n-1$$

per  $n$  pari si ha

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{t \text{ pari} \\ 0 \leq t \leq n}} \binom{n}{t} &= \binom{n}{0} + \sum_{\substack{t \text{ pari} \\ 1 \leq t \leq n-1}} \binom{n}{t} + \binom{n}{n} \\
 &= \binom{n}{0} + \sum_{\substack{t \text{ pari} \\ 1 \leq t \leq n-1}} \left[ \binom{n-1}{t-1} + \binom{n-1}{t} \right] + \binom{n}{n} \\
 &= \binom{n-1}{0} + \sum_{\substack{t \text{ dispari} \\ 0 \leq t \leq n-2}} \binom{n-1}{t} + \sum_{\substack{t \text{ pari} \\ 1 \leq t \leq n-1}} \binom{n-1}{t} + \binom{n-1}{n-1} \\
 &= \sum_{\substack{t \text{ dispari} \\ 0 \leq t \leq n-1}} \binom{n-1}{t} + \sum_{\substack{t \text{ pari} \\ 0 \leq t \leq n-1}} \binom{n-1}{t} = \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{t \text{ dispari} \\ 0 \leq t \leq n}} \binom{n}{t} &= \sum_{\substack{t \text{ dispari} \\ 1 \leq t \leq n-1}} \binom{n}{t} = \sum_{\substack{t \text{ dispari} \\ 1 \leq t \leq n-1}} \left[ \binom{n-1}{t-1} + \binom{n-1}{t} \right] \\
 &= \sum_{\substack{t \text{ pari} \\ 0 \leq t \leq n-2}} \binom{n-1}{t} + \sum_{\substack{t \text{ dispari} \\ 1 \leq t \leq n-1}} \binom{n-1}{t} \\
 &= \sum_{\substack{t \text{ pari} \\ 0 \leq t \leq n-1}} \binom{n-1}{t} + \sum_{\substack{t \text{ dispari} \\ 0 \leq t \leq n-1}} \binom{n-1}{t} = \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t}
 \end{aligned}$$

Analogamente se  $n$  è dispari si ha

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{t \text{ pari} \\ 0 \leq t \leq n}} \binom{n}{t} &= \sum_{\substack{t \text{ pari} \\ 0 \leq t \leq n-1}} \binom{n}{t} = \binom{n}{0} + \sum_{\substack{t \text{ pari} \\ 1 \leq t \leq n-1}} \binom{n}{t} \\
 &= \binom{n}{0} + \sum_{\substack{t \text{ pari} \\ 1 \leq t \leq n-1}} \left[ \binom{n-1}{t-1} + \binom{n-1}{t} \right] \\
 &= \binom{n-1}{0} + \sum_{\substack{t \text{ dispari} \\ 0 \leq t \leq n-2}} \binom{n-1}{t} + \sum_{\substack{t \text{ pari} \\ 1 \leq t \leq n-1}} \binom{n-1}{t}
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{t \text{ dispari} \\ 0 \leq t \leq n-1}} \binom{n-1}{t} + \sum_{\substack{t \text{ pari} \\ 0 \leq t \leq n-1}} \binom{n-1}{t} = \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{t \text{ dispari} \\ 0 \leq t \leq n}} \binom{n}{t} &= \sum_{\substack{t \text{ dispari} \\ 0 \leq t \leq n-1}} \binom{n}{t} + \binom{n}{n} = \sum_{\substack{t \text{ dispari} \\ 1 \leq t \leq n-1}} \binom{n}{t} + \binom{n}{n} \\ &= \sum_{\substack{t \text{ dispari} \\ 1 \leq t \leq n-1}} \left[ \binom{n-1}{t-1} + \binom{n-1}{t} \right] + \binom{n}{n} \\ &= \sum_{\substack{t \text{ pari} \\ 0 \leq t \leq n-2}} \binom{n-1}{t} + \sum_{\substack{t \text{ dispari} \\ 1 \leq t \leq n-1}} \binom{n-1}{t} + \binom{n-1}{n-1} \\ &= \sum_{\substack{t \text{ pari} \\ 0 \leq t \leq n-1}} \binom{n-1}{t} + \sum_{\substack{t \text{ dispari} \\ 0 \leq t \leq n-1}} \binom{n-1}{t} = \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t} \end{aligned}$$

E quindi, sia per  $n$  pari che per  $n$  dispari, vale

$$\sum_{\substack{t \text{ pari} \\ 0 \leq t \leq n}} \binom{n}{t} = \sum_{\substack{t \text{ dispari} \\ 0 \leq t \leq n}} \binom{n}{t} = \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t}$$

Osservando il triangolo di Pascal, l'uguaglianza precedente afferma che in ciascuna riga di tale triangolo la somma degli elementi al posto pari e la somma degli elementi al posto dispari coincidono entrambe con la somma degli elementi nella riga superiore. Allora

$$\sum_{\substack{t \text{ dispari} \\ 0 \leq t \leq n}} \binom{n}{t} = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} = \frac{1}{2} 2^n = 2^{n-1}$$

□

In particolare il numero di coalizioni in  $N$  di cardinalità dispari e maggiore o uguale a tre è dato da

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} \binom{n}{t} = 2^{n-1} - n \quad \mathcal{T} = \{t \mid t \text{ dispari}, 3 \leq t \leq n\}$$

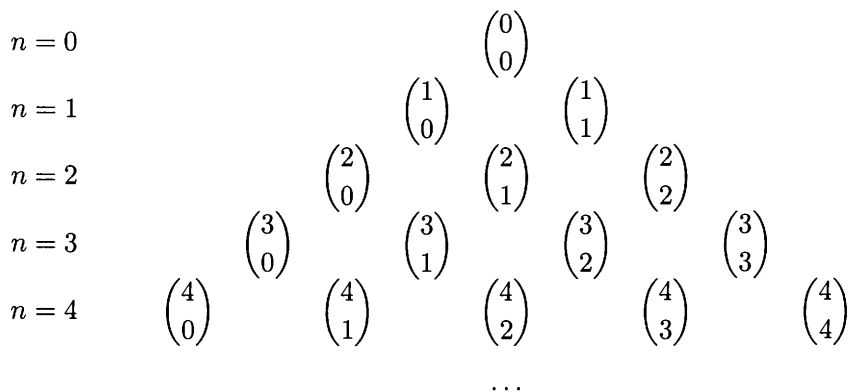


Figura 6.1: Il triangolo di Pascal.

ossia è dato dal numero di coalizioni di cardinalità dispari meno le  $n$  coalizioni di cardinalità 1.

Poichè tale numero verrà utilizzato in seguito, lo verifichiamo per alcuni valori di  $n$ :

$n = 3$	$2^{3-1} - 3 = 1$	$\binom{3}{3} = 1$
$n = 4$	$2^{4-1} - 4 = 4$	$\binom{4}{3} = 4$
$n = 5$	$2^{5-1} - 5 = 11$	$\binom{5}{3} + \binom{5}{5} = 10 + 1 = 11$
$n = 6$	$2^{6-1} - 6 = 26$	$\binom{6}{3} + \binom{6}{5} = 20 + 6 = 26$
$n = 7$	$2^{7-1} - 7 = 57$	$\binom{7}{3} + \binom{7}{5} + \binom{7}{7} = 35 + 21 + 1 = 57$

**Congettura 6.1** *Si possono scegliere come variabili libere i valori delle rappresentazioni di Möbius delle coalizioni di cardinalità dispari e maggiore o uguale a tre.*

Per quanto appena visto, il numero di coalizioni in  $N$  di cardinalità dispari e maggiore o uguale a tre coincide con il numero di gradi di libertà. Questo non significa necessariamente che prendendo come variabili libere i valori delle rappresentazioni di Möbius di tali coalizioni si riescano ad esprimere le altre variabili, ossia i valori delle rappresentazioni di Möbius delle altre coalizioni, in funzione delle variabili libere. Occorre infatti che la matrice del sistema ridotto per le altre variabili sia invertibile.

## 6.6 Caso n=3

Sia  $N = \{1, 2, 3\}$ . Dato un vettore di pesi  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$  cerchiamo una misura di Choquet  $\mu$  definita su  $N$  che sia self-dual, che abbia  $w_i$  come valori di Shapley ed il cui integrale di Choquet  $\mathcal{C}_\mu$  risulti un'estensione dell'operatore di media pesata associato a  $\mathbf{w} = [w_i]$ .

Scriviamo i vincoli del problema in termini della rappresentazione di Möbius di  $\mu$ .

- Vincoli che esprimono le condizioni di self-dualità:

$$\sum_{S \subseteq \{i,j\}} m(S) = 1 - \sum_{S \subseteq N \setminus \{i,j\}} m(S) \quad \{i, j\} \subseteq N$$

che possono essere scritti in modo esplicito come

$$\begin{cases} m(1) + m(2) + m(12) = 1 - m(3) \\ m(1) + m(3) + m(13) = 1 - m(2) \\ m(2) + m(3) + m(23) = 1 - m(1) \end{cases}$$

- Vincoli sui valori di Shapley:

$$m(i) + \frac{1}{2} \sum_{j \in N \setminus i} m(ij) + \frac{1}{3} m(N) = w_i \quad i \in N$$

- Vincoli che esprimono le condizioni di frontiera e monotonia:

$$\begin{cases} \sum_{T \subseteq N} m(T) = 1 \\ m(i) \geq 0 \\ m(i) + m(ij) \geq 0 \\ m(i) + m(ij) + m(ik) + m(ijk) \geq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} i \in N \\ i \in N, j \in N \setminus i \\ i \in N, \{j, k\} \subseteq N \setminus i \end{array}$$

Sappiamo che una misura di Choquet self-dual che soddisfa i vincoli sui valori di Shapley ha  $(2^{n-1} - n)$  gradi di libertà.

Per  $n = 3$  abbiamo

$$2^{3-1} - 3 = 4 - 3 = 1$$

e quindi un solo grado di libertà.

Se prendiamo come variabile libera il valore della rappresentazione di Möbius dell'unico insieme di cardinalità 3, ossia  $m(N)$  possiamo esprimere i valori di  $m(i)$  e  $m(ij)$  per  $i, j \in N$  in funzione di quest'unica variabile libera.

**Proposizione 6.3** Sia  $N = \{1, 2, 3\}$ ,  $\mu$  una misura di Choquet self-dual su  $N$  con valori di Shapley  $w_1, w_2, w_3$  e sia  $m$  la trasformata di Möbius di  $\mu$ . Allora gli unici valori liberi della trasformata di Möbius sono quelli associati alla terna  $\{1, 2, 3\} = N$ ,

$$m(i) = w_i + \frac{1}{6} m(N) \quad i \in N$$

$$m(ij) = -\frac{1}{2} m(N) \quad \{i, j\} \subseteq N$$

**Dimostrazione:** In questa dimostrazione, con l'obiettivo di alleggerire la notazione, usiamo le seguenti convenzioni : in ogni equazione del tipo  $m(ij) = \dots$  intendasi  $\forall \{i, j\} \subseteq N$ , così come in ogni equazione del tipo  $m(ij) + m(kl) = \dots$  intendasi  $\forall \{i, j\}, \{k, l\} \subseteq N, \{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$ .

Per i vincoli di self-dualità

$$m(ij) = 1 - \sum_{i \in N} m(i).$$

Sostituendo questi valori nel vincolo che esprime le condizioni di frontiera si ha

$$2m(ij) + m(N) = 0,$$

da cui

$$m(ij) = -\frac{1}{2} m(N).$$

Sostituendo ora questi valori nei vincoli sui valori di Shapley otteniamo

$$m(i) + \frac{1}{2} (-m(N)) + \frac{1}{3} m(N) = w_i,$$

da cui

$$m(i) = w_i + \frac{1}{6} m(N).$$

□

### 6.6.1 Esempio n=3

Riprendiamo l'esempio del paragrafo 6.4.1 introducendo i vincoli di self-dualità.

Studente	Matematica	Fisica	Letteratura
A	18	16	10
B	10	12	18
C	14	15	15



$$\mathbf{w} = \left( \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8} \right)$$

Il preside esprime le preferenze

$$C \succ A, \quad A \succ B,$$

e fissa il segno dell'interazione tra le coppie di discipline:

$$m(12) \leq 0, \quad m(13) = m(23) \geq 0.$$

Non riusciamo in questo caso a trovare una misura di Choquet  $\mu$  self-dual tale che l'integrale di Choquet  $C_\mu$  sia in grado di rappresentare le preferenze del preside.

Per la proposizione 6.3 si ha infatti

$$m(ij) = -\frac{1}{2} m(N) \quad \{i, j\} \subseteq N$$

e se consideriamo i vincoli di interazione imposti dal preside otteniamo

$$m(12) = -\frac{1}{2} m(N) \leq 0, \quad m(13) = m(23) = -\frac{1}{2} m(N) \geq 0,$$

da cui segue che

$$m(N) = 0, \quad m(ij) = 0 \quad \{i, j\} \subseteq N.$$

La misura  $\mu$  è quindi additiva con

$$\mu(i) = \phi_\mu(i) = w_i$$

e l'integrale di Choquet  $C_\mu$  associato a  $\mu$  coincide con l'operatore WA originale.

Imponendo anche i vincoli di self-dualità non riusciamo quindi a trovare una misura di Choquet  $\mu$  tale che l'integrale di Choquet  $C_\mu$  risulti un'estensione dell'operatore WA associato a  $\mathbf{w} = [w_i]$ , in grado di rappresentare le preferenze del preside.

### 6.6.2 Esempio n=3 (seconda parte)

Abbiamo visto che per l'esempio del paragrafo 6.4.1 in dimensione n=3 non è possibile estendere l'operatore di media pesata associato a  $\mathbf{w} = [w_i]$  ad un integrale di Choquet associato ad una misura self-dual.

È però lecito domandarsi quale sia la misura che più si avvicina all'essere self-dual con la quale è possibile effettuare una tale estensione.

Scriviamo questo problema come un problema di minimo nel modo seguente:

$$\boxed{\min \varepsilon}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{T \subseteq N} m(T) \left( \min_{i \in T} (x_i^C) - \min_{i \in T} (x_i^A) \right) \geq 0.5 \\ \sum_{T \subseteq N} m(T) \left( \min_{i \in T} (x_i^A) - \min_{i \in T} (x_i^B) \right) \geq 0.5 \end{array} \right.$$

$$\left| \sum_{i \in N} m(i) + m(ij) - 1 \right| \leq \varepsilon \quad \{i, j\} \subseteq N$$

$$m(i) + \frac{1}{2} \sum_{j \in N \setminus i} m(ij) + \frac{1}{3} m(N) = w_i \quad i \in N$$

$$\begin{cases} \sum_{T \subseteq N} m(T) = 1 \\ m(i) \geq 0 & i \in N \\ m(i) + m(ij) \geq 0 & i \in N, j \in N \setminus i \\ m(i) + m(ij) + m(ik) + m(ijk) \geq 0 & i \in N, \{j, k\} \subseteq N \setminus i \\ m(12) \leq 0 \\ m(13) = m(23) \geq 0 \end{cases}$$

Chiaramente se trovassimo  $\varepsilon = 0$  questo significherebbe che i vincoli di self-dualità sono soddisfatti e la misura trovata sarebbe quindi self-dual: più il valore di  $\varepsilon$  è vicino a 0, più la misura si avvicina all'essere self-dual; al contrario, più il valore di  $\varepsilon$  è lontano da 0, più la misura si discosta dall'essere una misura self-dual.

Per l'esempio del paragrafo 6.4.1 in dimensione  $n=3$  la misura più vicina all'essere self-dual trovata (si veda allegato self-dual.3.nb) corrisponde ad un valore di  $\varepsilon$  pari a  $\varepsilon \approx 0.28$ .

## 6.7 Caso $n=4$

Sia  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ . Dato un vettore di pesi  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$  cerchiamo una misura di Choquet  $\mu$  definita su  $N$  che sia self-dual, che abbia  $w_i$  come valori di Shapley ed il cui integrale di Choquet  $\mathcal{C}_\mu$  risulti un'estensione dell'operatore  $WA$  associato a  $\mathbf{w} = [w_i]$ .

Scriviamo i vincoli del problema in termini della rappresentazione di Möbius di  $\mu$ .

- Vincoli che esprimono le condizioni di self-dualità:

$$\sum_{S \subseteq \{i\}} m(S) = 1 - \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} m(S) \quad \{i\} \subseteq N$$

$$\sum_{S \subseteq \{i, j\}} m(S) = 1 - \sum_{S \subseteq N \setminus \{i, j\}} m(S) \quad \{i, j\} \subseteq N$$

Si noti che il secondo gruppo di equazioni ne contiene soltanto tre di indipendenti. Questo è dovuto al fatto che i complementari dei doublets sono ancora doublets.

I due gruppi di equazioni visti sopra possono essere scritti in modo esplicito come

$$\left\{ \begin{array}{l} m(1) = 1 - (m(2) + m(3) + m(4) + m(23) + m(24) + m(34) + m(234)) \\ m(2) = 1 - (m(1) + m(3) + m(4) + m(13) + m(14) + m(34) + m(134)) \\ m(3) = 1 - (m(1) + m(2) + m(4) + m(12) + m(14) + m(24) + m(124)) \\ m(4) = 1 - (m(1) + m(2) + m(3) + m(12) + m(13) + m(23) + m(123)) \\ m(2) + m(3) + m(23) = 1 - (m(1) + m(4) + m(14)) \\ m(2) + m(4) + m(24) = 1 - (m(1) + m(3) + m(13)) \\ m(3) + m(4) + m(34) = 1 - (m(1) + m(2) + m(12)) \end{array} \right.$$

- Vincoli sui valori di Shapley:

$$m(i) + \frac{1}{2} \sum_{j \in N \setminus i} m(ij) + \frac{1}{3} \sum_{\{j,k\} \subseteq N \setminus i} m(ijk) + \frac{1}{4} m(N) = w_i \quad i \in N$$

- Vincoli che esprimono le condizioni di frontiera e monotonia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{T \subseteq N} m(T) = 1 \\ m(i) \geq 0 \quad i \in N \\ m(i) + m(ij) \geq 0 \quad i \in N, j \in N \setminus i \\ m(i) + m(ij) + m(ik) + m(ijk) \geq 0 \quad i \in N, \{j, k\} \subseteq N \setminus i \\ m(i) + m(ij) + m(ik) + m(il) + m(ijk) + m(ijl) + m(ikl) \\ + m(ijkl) \geq 0 \quad i \in N, \{j, k, l\} \subseteq N \setminus i \end{array} \right.$$

Sappiamo che una misura di Choquet self-dual che soddisfa i vincoli sui valori di Shapley ha  $(2^{n-1} - n)$  gradi di libertà.

Per  $n = 4$  abbiamo quindi

$$2^{4-1} - 4 = 8 - 4 = 4$$

gradi di libertà.

Se prendiamo come variabili libere i valori delle rappresentazioni di Möbius dei quattro insiemi di cardinalità tre  $\{m(ijk) \mid \{i, j, k\} \subseteq N\}$ , possiamo esprimere i valori di  $m(i)$  e  $m(ij)$  per  $i, j \in N$  in funzione di queste quattro variabili libere.

**Proposizione 6.4** *Sia  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\mu$  una misura di Choquet self-dual su  $N$  con valori di Shapley  $w_1, \dots, w_4$  e sia  $m$  la trasformata di Möbius di  $\mu$ . Allora gli unici valori liberi della trasformata di Möbius sono quelli associati alle terne  $\{i, j, k\} \subseteq N$ ,*

$$m(i) = w_i + \frac{1}{6} \sum_{\{j,k\} \subseteq N \setminus i} m(ijk) \quad i \in N,$$

$$m(ij) = -\frac{1}{2} \sum_{k \in N \setminus \{i,j\}} m(ijk) \quad \{i,j\} \subseteq N,$$

$$m(N) = 0.$$

**Dimostrazione:** Utilizziamo in questa dimostrazione le stesse convenzioni per la notazione utilizzate nella dimostrazione della proposizione 6.3.

Sommando il secondo gruppo di vincoli di self-dualità otteniamo

$$\sum_{\{i,j\} \subseteq N} m(ij) = 3 \left( 1 - \sum_{i \in N} m(i) \right).$$

Analogamente sommando il primo gruppo di vincoli di self-dualità otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{\{i,j,k\} \subseteq N} m(ijk) &= 4 \left( 1 - \sum_{i \in N} m(i) \right) - 2 \sum_{\{i,j\} \subseteq N} m(ij) \\ &= 4 \left( 1 - \sum_{i \in N} m(i) \right) - 6 \left( 1 - \sum_{i \in N} m(i) \right) \\ &= -2 \left( 1 - \sum_{i \in N} m(i) \right). \end{aligned}$$

Sostituendo ora questi valori nel vincolo che esprime le condizioni di frontiera si ha

$$\begin{aligned} \sum_{\{i,j\} \subseteq N} m(ij) + \sum_{\{i,j,k\} \subseteq N} m(ijk) + m(N) &= 1 - \sum_{i \in N} m(i) \\ 3 \left( 1 - \sum_{i \in N} m(i) \right) - 2 \left( 1 - \sum_{i \in N} m(i) \right) + m(N) &= 1 - \sum_{i \in N} m(i) \end{aligned}$$

da cui

$$m(N) = 0.$$

Per i vincoli di self-dualità

$$\begin{aligned} m(ij) + m(kl) &= 1 - \sum_{i \in N} m(i), \\ m(ijk) &= 1 - \sum_{i \in N} m(i) - \left( m(ij) + m(ik) + m(jl) \right). \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in N \setminus \{i,j\}} m(ijk) &= m(ijk) + m(ijl) \\
&= 1 - \sum_{i \in N} m(i) - \left( m(ij) + m(ik) + m(jk) \right) \\
&\quad + 1 - \sum_{i \in N} m(i) - \left( m(ij) + m(il) + m(jl) \right) \\
&= 2 \left( 1 - \sum_{i \in N} m(i) \right) - 2m(ij) - \left( m(ik) + m(jl) + m(jk) + m(il) \right) \\
&= 2 \left( 1 - \sum_{i \in N} m(i) \right) - 2m(ij) - 2 \left( 1 - \sum_{i \in N} m(i) \right) \\
&= -2m(ij)
\end{aligned}$$

da cui ricaviamo i valori di  $m(ij)$  in funzione delle variabili libere

$$m(ij) = -\frac{1}{2} \sum_{k \in N \setminus \{i,j\}} m(ijk).$$

Sostituendo ora questi valori nei vincoli sui valori di Shapley otteniamo

$$\begin{aligned}
m(i) &= w_i - \frac{1}{2} \left( m(ij) + m(ik) + m(il) \right) - \frac{1}{3} \left( m(ijk) + m(ijl) + m(ikl) \right) \\
&\quad - \frac{1}{4} m(N) \\
&= w_i + \frac{1}{4} \left( m(ijk) + m(ijl) + m(ijk) + m(ikl) + m(ikl) + m(ijl) \right) \\
&\quad - \frac{1}{3} \left( m(ijk) + m(ijl) + m(ikl) \right) \\
&= w_i + \frac{1}{6} \left( m(ijk) + m(ijl) + m(ikl) \right)
\end{aligned}$$

e ricaviamo quindi anche i valori di  $m(i)$  in funzione delle variabili libere

$$m(i) = w_i + \frac{1}{6} \sum_{\{j,k\} \subseteq N \setminus i} m(ijk).$$

□

**Osservazione:** I valori di  $m(i)$  e  $m(ij)$ , ottenuti in funzione delle variabili libere, sono dello stesso tipo di quelli ottenuti con la proposizione 6.3 in dimensione  $n=3$ . In entrambi i casi infatti

- il valore di  $m(i)$  è dato dalla somma dei valori di Möbius di tutte le terne che contengono  $i$ , moltiplicata per il coefficiente  $1/6$  e a cui viene aggiunto il peso  $w_i$ ;

- il valore di  $m(ij)$  è dato dalla somma dei valori di Möbius di tutte le terne che contengono  $\{i, j\}$ , moltiplicata per il coefficiente  $-1/2$ .

Chiaramente mentre in dimensione  $n=4$  abbiamo quattro terne, in dimensione  $n=3$  vi è un'unica terna che coincide con  $N$  stesso.

### 6.7.1 Esempio $n=4$

Riprendiamo l'esempio del paragrafo 6.4.2 introducendo i vincoli di self-dualità.

Studente	Matematica	Fisica	Letteratura	Storia
A	18	16	10	15
B	11	13	18	17
C	14	15	15	15

$$\mathbf{w} = \left( \frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10} \right)$$

Il preside esprime le preferenze

$$C \succ A, \quad A \succ B,$$

e fissa il segno dell'interazione tra le coppie di discipline:

$$m(12) \leq 0, \quad m(13) = m(23) \geq 0.$$

Nonostante il maggior numero di gradi di libertà rispetto all'esempio in dimensione  $n=3$ , anche in questo caso non riusciamo a trovare una misura di Choquet  $\mu$  self-dual tale che l'integrale di Choquet  $C_\mu$  sia in grado di rappresentare le preferenze del preside.

Si ha infatti che

$$\begin{aligned} C_\mu(\mathbf{x}^C) - C_\mu(\mathbf{x}^A) &= \sum_{T \subseteq N} m(T) \left( \min_{i \in T} (x_i^C) - \min_{i \in T} (x_i^A) \right) \\ &= -4m(1) - m(2) + 5m(3) - 2m(12) + 4m(13) - m(14) \\ &\quad + 5m(23) + 5m(34) + 4m(123) - m(124) + 4m(134) \\ &\quad + 5m(234) + 4m(N) \end{aligned}$$

e sostituendo i valori di  $m(i)$ ,  $m(ij)$  e  $m(N)$  in funzione delle variabili libere, ottenuti con la proposizione 6.4, otteniamo

$$C_\mu(\mathbf{x}^C) - C_\mu(\mathbf{x}^A) = -4 \left[ \frac{3}{10} + \frac{1}{6} (m(123) + m(124) + m(134)) \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\left[\frac{3}{10} + \frac{1}{6}\left(m(123) + m(124) + m(234)\right)\right] \\
& + 5\left[\frac{2}{10} + \frac{1}{6}\left(m(123) + m(134) + m(234)\right)\right] \\
& - 2\left[-\frac{1}{2}\left(m(123) + m(124)\right)\right] + 4\left[-\frac{1}{2}\left(m(123) + m(134)\right)\right] \\
& - \left[-\frac{1}{2}\left(m(124) + m(134)\right)\right] + 5\left[-\frac{1}{2}\left(m(123) + m(234)\right)\right] \\
& + 5\left[-\frac{1}{2}\left(m(134) + m(234)\right)\right] + 4m(123) - m(124) + 4m(134) \\
& + 5m(234) \\
& = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}m(123) - \frac{1}{3}m(124) + \frac{1}{6}m(134) + \frac{2}{3}m(234).
\end{aligned}$$

Consideriamo ora i vincoli di interazione imposti dal preside

$$m(12) \leq 0, \quad m(13) = m(23) \geq 0,$$

e li esprimiamo in funzione delle quattro variabili libere

$$-\frac{1}{2}\left(m(123) + m(124)\right) \leq 0, \quad -\frac{1}{2}\left(m(123) + m(134)\right) = -\frac{1}{2}\left(m(123) + m(234)\right) \geq 0.$$

Segue che

$$m(134) = m(234) \leq -m(123) \leq m(124).$$

Ma allora

$$\begin{aligned}
C_\mu(\mathbf{x}^C) - C_\mu(\mathbf{x}^A) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}m(123) - \frac{1}{3}m(124) + \frac{5}{6}m(134) \\
&\leq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}m(123) - \frac{1}{3}m(124) + \frac{5}{6}\left(-m(123)\right) \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}m(123) - \frac{1}{3}m(124) \\
&\leq -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}m(124) - \frac{1}{3}m(124) \\
&= -\frac{1}{2} < 0
\end{aligned}$$

e quindi  $C \not\prec A$ .

Imponendo anche i vincoli di self-dualità non riusciamo quindi a trovare una misura di Choquet  $\mu$  tale che l'integrale di Choquet  $C_\mu$  risulti un'estensione dell'operatore WA associato a  $\mathbf{w} = [w_i]$ , in grado di rappresentare le preferenze del preside.

### 6.7.2 Esempio n=4 (seconda parte)

Abbiamo visto nell'esempio precedente che anche per l'esempio del paragrafo 6.4.2 in dimensione n=4 non è possibile estendere un operatore WA ad un integrale di Choquet associato ad una misura self-dual.

Ci chiediamo quindi quale sia la misura che più si avvicina all'essere self-dual con la quale è possibile effettuare una tale estensione.

Il problema, di minimo, da risolvere è il seguente:

$$\boxed{\min \varepsilon}$$

$$\begin{cases} \sum_{T \subseteq N} m(T) \left( \min_{i \in T} (x_i^C) - \min_{i \in T} (x_i^A) \right) \geq 0.5 \\ \sum_{T \subseteq N} m(T) \left( \min_{i \in T} (x_i^A) - \min_{i \in T} (x_i^B) \right) \geq 0.5 \end{cases}$$

$$\left| \sum_{S \subseteq \{i\}} m(S) + \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} m(S) - 1 \right| \leq \varepsilon \quad \{i\} \subseteq N$$

$$\left| \sum_{S \subseteq \{i,j\}} m(S) + \sum_{S \subseteq N \setminus \{i,j\}} m(S) - 1 \right| \leq \varepsilon \quad \{i,j\} \subseteq N$$

$$m(i) + \frac{1}{2} \sum_{j \in N \setminus i} m(ij) + \frac{1}{3} \sum_{\{j,k\} \subseteq N \setminus i} m(ijk) + \frac{1}{4} m(N) = w_i \quad i \in N$$

$$\begin{cases} \sum_{T \subseteq N} m(T) = 1 \\ m(i) \geq 0 & i \in N \\ m(i) + m(ij) \geq 0 & i \in N, j \in N \setminus i \\ m(i) + m(ij) + m(ik) + m(ijk) \geq 0 & i \in N, \{j,k\} \subseteq N \setminus i \\ m(i) + m(ij) + m(ik) + m(il) + m(ijk) + m(ijl) + m(ikl) \\ \quad + m(ijkl) \geq 0 & i \in N, \{j,k,l\} \subseteq N \setminus i \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(12) \leq 0 \\ m(13) = m(23) \geq 0 \end{cases}$$

Per l'esempio del paragrafo 6.4.2 in dimensione n=4 la misura più vicina all'essere self-dual trovata (si veda allegato self-dual.4.nb) corrisponde ad un valore di  $\varepsilon$  pari a  $\varepsilon \approx 0.19$ . Osserviamo che rispetto all'esempio in dimensione n=3 il valore di  $\varepsilon$  trovato è diminuito. Se consideriamo infatti esempi con vincoli dello stesso tipo, aumentando la dimensione del problema aumentano i gradi di libertà e questo fa sì che sia possibile trovare misure che si avvicinano sempre più all'essere self-dual.



## 6.8 Caso n=5

Sia  $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Dato un vettore di pesi  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$  cerchiamo una misura di Choquet  $\mu$  definita su  $N$  che sia self-dual, che abbia  $w_i$  come valori di Shapley ed il cui integrale di Choquet  $C_\mu$  risulti un'estensione dell'operatore  $WA$  associato a  $\mathbf{w} = [w_i]$ .

Scriviamo i vincoli del problema in termini della rappresentazione di Möbius di  $\mu$ .

- Vincoli che esprimono le condizioni di self-dualità:

$$\begin{aligned} \sum_{S \subseteq \{i\}} m(S) &= 1 - \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} m(S) & \{i\} \subseteq N \\ \sum_{S \subseteq \{i,j\}} m(S) &= 1 - \sum_{S \subseteq N \setminus \{i,j\}} m(S) & \{i,j\} \subseteq N \end{aligned}$$

- Vincoli sui valori di Shapley:

$$m(i) + \frac{1}{2} \sum_{j \in N \setminus i} m(ij) + \frac{1}{3} \sum_{\{j,k\} \subseteq N \setminus i} m(ijk) + \frac{1}{4} \sum_{\{j,k,l\} \subseteq N \setminus i} m(ijkl) + \frac{1}{5} m(N) = w_i \quad i \in N$$

- Vincoli che esprimono le condizioni di frontiera e monotonia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{T \subseteq N} m(T) = 1 \\ m(i) \geq 0 \quad i \in N \\ m(i) + m(ij) \geq 0 \quad i \in N, j \in N \setminus i \\ m(i) + m(ij) + m(ik) + m(ijk) \geq 0 \quad i \in N, \{j,k\} \subseteq N \setminus i \\ m(i) + m(ij) + m(ik) + m(il) + m(ijk) + m(ijl) + m(ikl) \\ \quad + m(ijkl) \geq 0 \quad i \in N, \{j,k,l\} \subseteq N \setminus i \\ m(i) + m(ij) + m(ik) + m(il) + m(ip) + m(ijk) + m(ijl) \\ \quad + m(ijp) + m(ikl) + m(ikp) + m(ilp) + m(ijkl) + m(ijkp) \\ \quad + m(ijlp) + m(iklp) + m(ijklp) \geq 0 \quad i \in N, \{j,k,l,p\} \subseteq N \setminus i \end{array} \right.$$

Sappiamo che una misura self-dual che soddisfa i vincoli sui valori di Shapley ha  $(2^{n-1} - n)$  gradi di libertà.

Per  $n = 5$  abbiamo quindi

$$2^{5-1} - 5 = 16 - 5 = 11$$

gradi di libertà.

Se prendiamo come variabili libere i valori delle rappresentazioni di Möbius dei dieci insiemi di cardinalità tre  $\{m(ijk) \mid \{i, j, k\} \subseteq N\}$  e dell'unico insieme di cardinalità cinque  $m(N)$ , possiamo esprimere i valori di  $m(i)$ ,  $m(ij)$  e  $m(ijkl)$  per  $i, j, k, l \in N$  in funzione di queste undici variabili libere.

**Proposizione 6.5** *Sia  $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $\mu$  una misura di Choquet self-dual su  $N$  con valori di Shapley  $w_1, \dots, w_5$  e sia  $m$  la trasformata di Möbius di  $\mu$ . Allora gli unici valori liberi della trasformata di Möbius sono quelli associati alle terne  $\{i, j, k\} \subseteq N$  e alla cinquina  $\{1, 2, 3, 4, 5\} = N$ ,*

$$\begin{aligned} m(i) &= w_i + \frac{1}{6} \sum_{\{j,k\} \subseteq N \setminus i} m(ijk) - \frac{1}{5} m(N) \quad i \in N, \\ m(ij) &= -\frac{1}{2} \sum_{k \in N \setminus \{i,j\}} m(ijk) + \frac{1}{4} m(N) \quad \{i, j\} \subseteq N, \\ m(ijkl) &= -\frac{1}{2} m(N) \quad \{i, j, k, l\} \subseteq N. \end{aligned}$$

**Dimostrazione:** Utilizziamo in questa dimostrazione le stesse convenzioni per la notazione utilizzate nella dimostrazione della proposizione 6.3.

I due gruppi di equazioni che esprimono le condizioni di self-dualità possono essere scritti nella forma

$$\begin{aligned} m(ijkl) &= 1 - \sum_{i \in N} m(i) - \sum_{\{r,s\} \subseteq \{i,j,k,l\}} m(rs) - \sum_{\{r,s,t\} \subseteq \{i,j,k,l\}} m(rst) \\ m(ijk) &= 1 - \sum_{i \in N} m(i) - \left( m(ij) + m(ik) + m(jk) + m(lp) \right) \end{aligned}$$

dove il primo gruppo contiene cinque equazioni, mentre il secondo ne contiene dieci. Sommando il secondo gruppo di vincoli di self-dualità otteniamo

$$\sum_{\{i,j,k\} \subseteq N} m(ijk) = 10 \left( 1 - \sum_{i \in N} m(i) \right) - 4 \sum_{\{i,j\} \subseteq N} m(ij)$$

da cui si ricava

$$\sum_{\{i,j\} \subseteq N} m(ij) = -\frac{1}{4} \left[ \sum_{\{i,j,k\} \subseteq N} m(ijk) - 10 \left( 1 - \sum_{i \in N} m(i) \right) \right].$$

Analogamente sommando il primo gruppo di vincoli di self-dualità otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{\{i,j,k,l\} \subseteq N} m(ijkl) &= 5 \left( 1 - \sum_{i \in N} m(i) \right) - 3 \sum_{\{i,j\} \subseteq N} m(ij) - 2 \sum_{\{i,j,k\} \subseteq N} m(ijk) \\ &= -\frac{5}{2} \left( 1 - \sum_{i \in N} m(i) \right) - \frac{5}{4} \sum_{\{i,j,k\} \subseteq N} m(ijk) \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto del valore di  $\sum_{\{i,j\} \subseteq N} m(ij)$  appena trovato.

Sostituendo ora questi valori nel vincolo che esprime le condizioni di frontiera

$$\sum_{\{i,j\} \subseteq N} m(ij) + \sum_{\{i,j,k\} \subseteq N} m(ijk) + \sum_{\{i,j,k,l\} \subseteq N} m(ijkl) + m(N) = 1 - \sum_{i \in N} m(i)$$

si ha

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{i \in N} m(i) &= -\frac{1}{4} \left[ \sum_{\{i,j,k\} \subseteq N} m(ijk) - 10 \left( 1 - \sum_{i \in N} m(i) \right) \right] + \sum_{\{i,j,k\} \subseteq N} m(ijk) \\ &\quad - \frac{5}{2} \left( 1 - \sum_{i \in N} m(i) \right) - \frac{5}{4} \sum_{\{i,j,k\} \subseteq N} m(ijk) + m(N) \end{aligned}$$

e quindi

$$1 - \sum_{i \in N} m(i) = -\frac{1}{2} \sum_{\{i,j,k\} \subseteq N} m(ijk) + m(N).$$

Ricordando il secondo gruppo di vincoli di self-dualità, si osservi che

$$\begin{aligned} \sum_{k \in N \setminus \{i,j\}} m(ijk) &= m(ijk) + m(ijl) + m(ijp) \\ &= 1 - \sum_{i \in N} m(i) - \left( m(ij) + m(ik) + m(jk) + m(lp) \right) \\ &\quad 1 - \sum_{i \in N} m(i) - \left( m(ij) + m(il) + m(jl) + m(kp) \right) \\ &\quad 1 - \sum_{i \in N} m(i) - \left( m(ij) + m(ip) + m(jp) + m(kl) \right) \\ &= 3 \left( 1 - \sum_{i \in N} m(i) \right) - 2m(ij) - \sum_{\{i,j\} \subseteq N} m(ij) \end{aligned}$$

da cui ricaviamo i valori di  $m(ij)$  in funzione delle variabili libere

$$\begin{aligned} m(ij) &= -\frac{1}{2} \left[ \sum_{k \in N \setminus \{i,j\}} m(ijk) - 3 \left( 1 - \sum_{i \in N} m(i) \right) + \sum_{\{i,j\} \subseteq N} m(ij) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k \in N \setminus \{i,j\}} m(ijk) + \frac{3}{2} \left( 1 - \sum_{i \in N} m(i) \right) \\ &\quad + \frac{1}{8} \left[ \sum_{\{i,j,k\} \subseteq N} m(ijk) - 10 \left( 1 - \sum_{i \in N} m(i) \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k \in N \setminus \{i,j\}} m(ijk) + \frac{1}{8} \sum_{\{i,j,k\} \subseteq N} m(ijk) + \frac{1}{4} \left( 1 - \sum_{i \in N} m(i) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k \in N \setminus \{i,j\}} m(ijk) + \frac{1}{4} m(N). \end{aligned}$$

I valori di  $m(ijkl)$  in funzione delle variabili libere si ottengono invece dal primo gruppo di vincoli di self-dualità

$$m(ijkl) = 1 - \sum_{i \in N} m(i) - \sum_{\{r,s\} \subseteq \{i,j,k,l\}} m(rs) - \sum_{\{r,s,t\} \subseteq \{i,j,k,l\}} m(rst)$$

in cui vengono sostituiti i valori di  $m(ij)$  e  $(1 - \sum_{i \in N} m(i))$  con i rispettivi valori in funzione delle variabili libere, ottenendo

$$m(ijkl) = -\frac{1}{2}m(N).$$

Sostituendo ora nei vincoli sui valori di Shapley i valori di  $m(ij)$  e  $m(ijkl)$  trovati, otteniamo

$$\begin{aligned} m(i) &= w_i - \frac{1}{2} \sum_{j \in N \setminus i} m(ij) - \frac{1}{3} \sum_{\{j,k\} \subseteq N \setminus i} m(ijk) - \frac{1}{4} \sum_{\{j,k,l\} \subseteq N \setminus i} m(ijkl) - \frac{1}{5} m(N) \\ &= w_i - \frac{1}{2} (m(ij) + m(ik) + m(il) + m(ip)) \\ &\quad - \frac{1}{3} (m(ijk) + m(ijl) + m(ijp) + m(ikp) + m(ilp)) \\ &\quad - \frac{1}{4} (m(ijkl) + m(ijkp) + m(ijpl) + m(iklp)) - \frac{1}{5} m(N) \\ &= w_i - \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} (m(ijk) + m(ijl) + m(ijp)) + \frac{1}{4} m(N) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} (m(ijk) + m(ikl) + m(ikp)) + \frac{1}{4} m(N) \\ &\quad - \frac{1}{2} (m(ijl) + m(ikl) + m(ilp)) + \frac{1}{4} m(N) \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (m(ijp) + m(ikp) + m(ilp)) + \frac{1}{4} m(N) \right] \\ &\quad - \frac{1}{3} (m(ijk) + m(ijl) + m(ijp) + m(ikp) + m(ilp)) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[ 4 \left( -\frac{1}{2} m(N) \right) \right] - \frac{1}{5} m(N) \\ &= w_i + \frac{1}{6} \sum_{\{j,k\} \subseteq N \setminus i} m(ijk) - \frac{1}{5} m(N) \end{aligned}$$

e ricaviamo quindi anche i valori di  $m(i)$  in funzione delle variabili libere.  $\square$

**Osservazione:** I valori di  $m(i)$  e  $m(ij)$ , ottenuti in funzione delle variabili libere, continuano ad essere dello stesso tipo di quelli ottenuti in dimensione  $n=3$  con la proposizione 6.3 e in dimensione  $n=4$  con la proposizione 6.4.

- Il valore di  $m(i)$  è dato, come nei casi visti in precedenza, dalla somma dei valori di Möbius di tutte le terne che contengono  $i$ , moltiplicata per il coefficiente

1/6 e a cui viene aggiunto il peso  $w_i$ , ma qui abbiamo un termine in più dato da  $-m(N)/5$ .

- Il valore di  $m(ij)$  è dato, come nei casi visti in precedenza, dalla somma dei valori di Möbius di tutte le terne che contengono  $\{i, j\}$ , moltiplicata per il coefficiente  $-1/2$ , anche in questo caso con un termine in più dato da  $m(N)/4$ .

### 6.8.1 Esempio n=5

Nonostante il maggior numero di gradi di libertà rispetto agli esempi in dimensione  $n=3$  e  $n=4$ , anche per l'esempio del paragrafo 6.4.3 in dimensione  $n=5$  non è possibile estendere l'operatore  $WA$  ad un integrale di Choquet associato ad una misura self-dual.

Ci chiediamo quindi quale sia la misura che più si avvicina all'essere self-dual con la quale è possibile effettuare una tale estensione.

Il problema, di minimo, da risolvere è il seguente:

min  $\varepsilon$

$$\begin{cases} \sum_{T \subseteq N} m(T) \left( \min_{i \in T} (x_i^C) - \min_{i \in T} (x_i^A) \right) \geq 0.5 \\ \sum_{T \subseteq N} m(T) \left( \min_{i \in T} (x_i^A) - \min_{i \in T} (x_i^B) \right) \geq 0.5 \end{cases}$$

$$\left| \sum_{S \subseteq \{i\}} m(S) + \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} m(S) - 1 \right| \leq \varepsilon \quad \{i\} \subseteq N$$

$$\left| \sum_{S \subseteq \{i,j\}} m(S) + \sum_{S \subseteq N \setminus \{i,j\}} m(S) - 1 \right| \leq \varepsilon \quad \{i, j\} \subseteq N$$

$$m(i) + \frac{1}{2} \sum_{j \in N \setminus i} m(ij) + \frac{1}{3} \sum_{\{j,k\} \subseteq N \setminus i} m(ijk) + \frac{1}{4} \sum_{\{j,k,l\} \subseteq N \setminus i} m(ijkl) + \frac{1}{5} m(N) = w_i \quad i \in N$$

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\sum_{T \subseteq N} m(T) = 1 & \\
m(i) \geq 0 & i \in N \\
m(i) + m(ij) \geq 0 & i \in N, j \in N \setminus i \\
m(i) + m(ij) + m(ik) + m(ijk) \geq 0 & i \in N, \{j, k\} \subseteq N \setminus i \\
m(i) + m(ij) + m(ik) + m(il) + m(ijk) + m(ijl) + m(ikl) \\
+ m(ijkl) \geq 0 & i \in N, \{j, k, l\} \subseteq N \setminus i \\
m(i) + m(ij) + m(ik) + m(il) + m(ip) + m(ijk) + m(ijl) \\
+ m(ijp) + m(ikl) + m(ikp) + m(ilp) + m(ijkl) + m(ijkp) \\
+ m(ijlp) + m(iklp) + m(ijklp) \geq 0 & i \in N, \{j, k, l, p\} \subseteq N \setminus i
\end{array} \right.$$

Per l'esempio del paragrafo 6.4.3 in dimensione  $n=5$  la misura più vicina all'essere self-dual trovata (si veda allegato self-dual.5.nb) corrisponde ad un valore di  $\varepsilon$  pari a  $\varepsilon \approx 0.08$ . Osserviamo che rispetto agli esempi in dimensione  $n=3$  e  $n=4$  con lo stesso tipo di vincoli, ma in dimensione inferiore, il valore di  $\varepsilon$  trovato è diminuito ulteriormente, ma non si è ancora azzerato. Con questo tipo di vincoli occorre considerare problemi in dimensione ancora maggiore e quindi con un maggior numero di gradi di libertà, per sperare di trovare un valore di  $\varepsilon$  nullo e quindi una misura self-dual.

## 6.9 Considerazioni sul caso generale $n \geq 3$

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto alcuni esempi in dimensione  $n=3$ ,  $n=4$  e  $n=5$  di estensione di un operatore  $WA$  ad un integrale di Choquet. L'introduzione dei vincoli di self-dualità per la misura di Choquet comporta una notevole diminuzione dei gradi di libertà che, negli esempi esaminati non ha permesso di trovare una soluzione.

Presentiamo allora una congettura che ci permetta di estendere i risultati trovati in dimensione  $n=3$ ,  $n=4$  e  $n=5$  anche in dimensione superiore. Per la congettura 6.1 si possono scegliere come variabili libere i valori delle rappresentazioni di Möbius delle coalizioni di cardinalità dispari e maggiore o uguale a tre. Generalizziamo ora le proposizioni 6.3, 6.4 e 6.5 con la seguente congettura

**Congettura 6.2** Sia  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\mu$  una misura di Choquet self-dual su  $N$  con valori di Shapley  $w_1, \dots, w_n$  e sia  $m$  la trasformata di Möbius di  $\mu$ . Allora

$$m(S) = w_S + \sum_{t=1}^n c_{st} \sum_{\substack{T \supseteq S \\ |T|=t}} \mu(T) \quad S \subseteq T$$

dove

$$C = [c_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/6 & 0 & -1/5 & 0 & \boxed{?} & 0 & \boxed{?} & \dots \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/4 & 0 & \boxed{?} & 0 & \boxed{?} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & \boxed{?} & 0 & \boxed{?} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{?} & 0 & \boxed{?} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

$$w_S = \begin{cases} w_i & S = \{i\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nella matrice  $C$  sia la prima colonna che tutte le colonne di posto pari sono nulle. Ciò significa che le uniche variabili libere sono i valori delle rappresentazioni di Möbius delle coalizioni di cardinalità dispari e maggiore o uguale a tre.

Solo alcuni valori degli elementi della matrice  $C$  sono noti. In particolare

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & j \text{ pari} \\ 0 & i \text{ dispari} \geq 3, i \neq j \\ 1 & i \text{ dispari} \geq 3, i = j \end{cases}$$

Osserviamo che nella congettura precedente è stata ripresa la stessa organizzazione a blocchi delle proposizioni 6.3, 6.4 e 6.5. Scrivendo infatti in modo esplicito i valori delle rappresentazioni di Möbius per alcune coalizioni  $S \subseteq N$  otteniamo

$$m(i) = w_i + \frac{1}{6} \sum_{\substack{T \ni i \\ |T|=3}} m(T) - \frac{1}{5} \sum_{\substack{T \ni i \\ |T|=5}} m(T) + \boxed{?} \sum_{\substack{T \ni i \\ |T|=7}} m(T) + \dots$$

$$m(ij) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{T \supseteq \{i,j\} \\ |T|=3}} m(T) + \frac{1}{4} \sum_{\substack{T \supseteq \{i,j\} \\ |T|=5}} m(T) + \boxed{?} \sum_{\substack{T \supseteq \{i,j\} \\ |T|=7}} m(T) + \dots$$

$$m(ijk) = \sum_{\substack{T \supseteq \{i,j,k\} \\ |T|=3}} m(T)$$

$$m(ijkl) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{T \supseteq \{i,j,k,l\} \\ |T|=5}} m(T) + \boxed{?} \sum_{\substack{T \supseteq \{i,j,k,l\} \\ |T|=7}} m(T) + \dots$$

$$m(ijklp) = \sum_{\substack{T \supseteq \{i,j,k,l,p\} \\ |T|=5}} m(T)$$

Osserviamo poi che, anche se una parte dei coefficienti delle colonne di posto dispari maggiore o uguale a tre non è nota, esiste una relazione che lega questi coefficienti: per ciascuna di queste colonne i coefficienti, moltiplicati per un fattore, sommano a zero.

Nello schema precedente sommiamo la prima riga su tutti i singoli, la seconda su tutte le coppie, la terza su tutte le terne, e così via per ogni riga.

$$\sum_i m(i) = \sum_i w_i + \frac{1}{6} \sum_i \sum_{\substack{T \ni i \\ |T|=3}} m(T) - \frac{1}{5} \sum_i \sum_{\substack{T \ni i \\ |T|=5}} m(T) + \dots$$

$$\sum_{\{i,j\}} m(ij) = -\frac{1}{2} \sum_{\{i,j\}} \sum_{\substack{T \supseteq \{i,j\} \\ |T|=3}} m(T) + \frac{1}{4} \sum_{\{i,j\}} \sum_{\substack{T \supseteq \{i,j\} \\ |T|=5}} m(T) + \dots$$

$$\sum_{\{i,j,k\}} m(ijk) = \sum_{\{i,j,k\}} \sum_{\substack{T \supseteq \{i,j,k\} \\ |T|=3}} m(T)$$



$$\sum_{\{i,j,k,l\}} m(ijkl) = -\frac{1}{2} \sum_{\{i,j,k,l\}} \sum_{\substack{T \supseteq \{i,j,k,l\} \\ |T|=5}} m(T) + \dots$$

$$\sum_{\{i,j,k,l,p\}} m(ijklp) = \sum_{\{i,j,k,l,p\}} \sum_{\substack{T \supseteq \{i,j,k,l,p\} \\ |T|=5}} m(T)$$

Se ora sommiamo tra loro tutte le righe otteniamo un'uguaglianza

$$\sum_{T \subseteq N} m(T) = \sum_{i \in N} w_i + \dots$$

in cui il termine a sinistra vale 1. Poichè tra i termini a destra  $\sum_{i \in N} w_i$  vale 1, la somma degli altri termini deve essere nulla. In particolare è nulla la somma di ciascuna colonna.

Verifichiamolo per la colonna che contiene le terne. Poichè ogni coalizione  $S$  di cardinalità  $|S| = s$  è contenuta in  $\binom{t}{s}$  coalizioni  $T$  di cardinalità  $|T| = t > s$ , allora

$$\sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S|=s}} \sum_{\substack{T \supseteq S \\ |T|=t}} m(T) = \binom{t}{s} \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=t}} m(T)$$

ossia la sommatoria al primo membro contiene  $\binom{t}{s}$  volte ciascuna coalizione di cardinalità  $t$ . Allora la somma degli elementi della colonna che contiene le terne è

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \sum_i \sum_{\substack{T \ni i \\ |T|=3}} m(T) - \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\}} \sum_{\substack{T \supseteq \{i,j\} \\ |T|=3}} m(T) + \sum_{\{i,j,k\}} \sum_{\substack{T \supseteq \{i,j,k\} \\ |T|=3}} m(T) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S|=1}} \sum_{\substack{T \supseteq S \\ |T|=3}} m(T) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S|=2}} \sum_{\substack{T \supseteq S \\ |T|=3}} m(T) + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S|=3}} \sum_{\substack{T \supseteq S \\ |T|=3}} m(T) \\ &= \frac{1}{6} \binom{3}{1} \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=3}} m(T) - \frac{1}{2} \binom{3}{2} \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=3}} m(T) + \binom{3}{3} \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=3}} m(T) \\ &= \left( \frac{1}{6} 3 - \frac{1}{2} 3 + 1 \right) \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=3}} m(T) = 0 \end{aligned}$$

Analogamente per la somma delle colonne che contiene le cinque

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{5} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S|=1}} \sum_{\substack{T \supseteq S \\ |T|=5}} m(T) + \frac{1}{4} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S|=2}} \sum_{\substack{T \supseteq S \\ |T|=5}} m(T) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S|=4}} \sum_{\substack{T \supseteq S \\ |T|=5}} m(T) + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ |S|=5}} \sum_{\substack{T \supseteq S \\ |T|=5}} m(T) \\
& = -\frac{1}{5} \binom{5}{1} \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=5}} m(T) + \frac{1}{4} \binom{5}{2} \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=5}} m(T) - \frac{1}{2} \binom{5}{4} \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=5}} m(T) + \binom{5}{5} \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=5}} m(T) \\
& = \left( -\frac{1}{5} 5 + \frac{1}{4} 10 - \frac{1}{2} 5 + 1 \right) \sum_{\substack{T \subseteq N \\ |T|=3}} m(T) = 0
\end{aligned}$$

Osserviamo infine che se la misura  $\mu$  è 2-additiva, sia per le proposizioni 6.3, 6.4 e 6.5 che per la congettura 6.2 che le generalizza si ha che

$$\begin{aligned}
m(i) &= w_i & i \in N, \\
m(ij) &= 0 & \{i, j\} \subseteq N,
\end{aligned}$$

ossia la misura  $\mu$  risulta additiva e l'integrale di Choquet  $C_\mu$  associato a  $\mu$  coincide con l'operatore WA originale, mentre se la misura  $\mu$  è 3-additiva si ottiene

$$\begin{aligned}
m(i) &= w_i + \frac{1}{6} \sum_{\{j,k\} \subseteq N \setminus i} m(ijk) & i \in N, \\
m(ij) &= -\frac{1}{2} \sum_{k \in N \setminus \{i,j\}} m(ijk) & \{i, j\} \subseteq N.
\end{aligned}$$

# Conclusioni

In questo lavoro di tesi viene proposto uno studio sulle misure di Choquet e gli operatori di aggregazione associati, in particolare gli integrali di Choquet e gli integrali di Shapley, nell'ambito della Teoria delle Decisioni multicriterio e multiagente.

Le misure di Choquet rappresentano una generalizzazione dell'usuale concetto di misura in cui la proprietà di additività è sostituita da una condizione più debole: la monotonia. Questo rende le misure di Choquet, e gli integrali di Choquet come operatori di aggregazione associati, particolarmente utili in presenza di elementi che interagiscono poichè, a differenza delle misure additive e degli operatori di media pesata, sono in grado di modellizzare queste interazioni.

Nella tesi vengono presentati due modelli originali costruiti sulla base di misure di Choquet 2-additive.

In un contesto multiagente viene considerato un insieme di agenti che interagiscono tra loro, ciascuno con una propria struttura di preferenza individuale. Su questo insieme viene costruita la misura consensuale, una misura di Choquet 2-additiva che è utilizzata per studiare l'interazione tra gli agenti e, attraverso l'integrale di Choquet associato, aggregare le strutture di preferenza individuali in una struttura di preferenza collettiva.

In un contesto multicriterio viene considerato un insieme di criteri e su questo insieme viene costruita la misura di Saaty, una misura di Choquet 2-additiva. La misura di Saaty permette, in una proposta di estensione del modello AHP di Saaty, di trattare l'inconsistenza tra le valutazioni di importanza relativa dei vari criteri.

Viene inoltre proposta, per le misure di Choquet 2-additive, una rappresentazione tramite grafo in cui ogni nodo rappresenta un elemento dell'insieme su cui è definita la misura, mentre ogni arco rappresenta l'interazione tra i due nodi che unisce.

Viene considerato il concetto di grado di orness di un operatore di aggregazione, come indice che permette di poter classificare gli operatori di aggregazione che assumono valori compresi tra il minimo e il massimo in base alla loro posizione all'interno di questo intervallo.

In particolare viene presentato il grado di orness di un integrale di Choquet da un punto di vista originale attraverso la misura simmetrica associata alla misura di Choquet: abbiamo mostrato che il grado di orness di un integrale di Choquet rispetto ad una misura  $\mu$  coincide con il grado di orness dell'operatore *OWA* associato a  $\mu$ ,

che è definito come l'integrale di Choquet rispetto alla misura simmetrica  $\mu_S$ .

Vengono considerate le misure di Choquet self-dual con le loro interessanti proprietà. Abbiamo mostrato che ogni integrale di Choquet associato ad una misura self-dual ha, in media nei vari domini di comonotonia, un comportamento neutrale rispetto ai valori grandi e piccoli delle variabili di aggregazione. Questo è particolarmente rilevante nelle applicazioni in cui i valori da aggregare rappresentano confronti a coppie tra alternative (AHP di Saaty, SSB di Fishburn e matrici di preferenza fuzzy, ad esempio), poiché in questo caso i valori grandi e piccoli, rispetto ad un valore centrale neutro associato all'indifferenza, rappresentano sostanzialmente la stessa informazione: l'intensità della preferenza di un'alternativa rispetto ad un'altra.

In particolare poi, se una misura di Choquet self-dual è anche 2-additiva, abbiamo dimostrato che l'integrale di Choquet associato coincide con l'integrale di Shapley, ossia un operatore di media pesata.

Infine, attraverso una proposta metodologica originale abbiamo trattato il problema dell'estensione di un operatore di aggregazione lineare, la media pesata, ad un operatore di aggregazione non lineare, l'integrale di Choquet.

Secondo la metodologia classica, in un problema di questo tipo la misura di Choquet viene costruita identificando i suoi singletons con i pesi della media pesata originale. Abbiamo illustrato sulla base di un classico esempio noto in letteratura, come questa metodologia classica abbia dei problemi.

Viene quindi proposta una nuova metodologia in cui ad essere identificati con i pesi della media pesata originale non sono i valori dei singletons, ma i valori di Shapley.

In particolare, viste le interessanti proprietà delle misure di Choquet self-dual, viene considerata la possibilità di estendere un operatore di media pesata ad un integrale di Choquet associato ad una misura di Choquet self-dual.

# Allegati

- calcoli-es.nb
- calcoli-es.3.2.nb
- calcoli-es.3.3.nb
- calcoli-es.3.4.nb
- calcoli-es.3.5.nb
- n=3.nb
- n=4.nb
- n=5.nb
- self-dual.3.nb
- self-dual.4.nb
- self-dual.5.nb

```

f[x_] := 2 * x / (1 + x^2) // N;

t = 1;
alpha1 = 1;
alpha2 = 1;
alpha3 = 2;
v12 = f[alpha1];
v13 = f[alpha2];
v23 = f[alpha3];
v14 = f[1.0 / (alpha1 * alpha2)];
v24 = f[alpha1 / alpha3];
v34 = f[alpha2 * alpha3];
vv12 = 1 - v12;
vv13 = 1 - v13;
vv23 = 1 - v23;
vv14 = 1 - v14;
vv24 = 1 - v24;
vv34 = 1 - v34;
w1 = 0.3;
w2 = 0.2;
w3 = 0.2;
w4 = 0.3;
varphi1 = w1 - 0.5 * (w1 * vv12 * w2 + w1 * vv13 * w3 + w1 * vv14 * w4);
varphi2 = w2 - 0.5 * (w1 * vv12 * w2 + w2 * vv23 * w3 + w2 * vv24 * w4);
varphi3 = w3 - 0.5 * (w1 * vv13 * w3 + w2 * vv23 * w3 + w3 * vv34 * w4);
varphi4 = w4 - 0.5 * (w1 * vv14 * w4 + w2 * vv24 * w4 + w3 * vv34 * w4);
norm = varphi1 + varphi2 + varphi3 + varphi4;
phi1 = varphi1 / norm;
phi2 = varphi2 / norm;
phi3 = varphi3 / norm;
phi4 = varphi4 / norm;
test = phi1 + phi2 + phi3 + phi4;
norm
vv12
vv13
vv23
vv14
vv24
vv34
phi1
phi2
phi3
phi4
test
"A=" MatrixForm[{{1, 1.5 * alpha1, 1.5 * alpha2, 1.0 / (alpha1 * alpha2)},
  {0, 1, alpha3, (2.0 / 3.0) * (alpha1 / alpha3)},
  {0, 0, 1, (2.0 / 3.0) * (alpha2 * alpha3)}, {0, 0, 0, 1}}]
"Edges=" MatrixForm[{{1, -w1 * vv12 * w2, -w1 * vv13 * w3, -w1 * vv14 * w4},
  {0, 1, -w2 * vv23 * w3, -w2 * vv24 * w4}, {0, 0, 1, -w3 * vv34 * w4}, {0, 0, 0, 1}}]

0.968

0.

0.

```

0.2

0.

0.2

0.2

0.309917

0.196281

0.196281

0.297521

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 1.5 & 1. \\ 0 & 1 & 2 & 0.333333 \\ 0 & 0 & 1 & 1.33333 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Edges} = \begin{pmatrix} 1 & 0. & 0. & 0. \\ 0 & 1 & -0.008 & -0.012 \\ 0 & 0 & 1 & -0.012 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```

f[x_] := 2 * x / (1 + x^2) // N;

t = 1;
alpha1 = 4;
alpha2 = 1;
alpha3 = 1;
v12 = f[alpha1];
v13 = f[alpha2];
v23 = f[alpha3];
v14 = f[1.0 / (alpha1 * alpha2)];
v24 = f[alpha1 / alpha3];
v34 = f[alpha2 * alpha3];
vv12 = 1 - v12;
vv13 = 1 - v13;
vv23 = 1 - v23;
vv14 = 1 - v14;
vv24 = 1 - v24;
vv34 = 1 - v34;
w1 = 0.3;
w2 = 0.2;
w3 = 0.2;
w4 = 0.3;
varphi1 = w1 - 0.5 * (w1 * vv12 * w2 + w1 * vv13 * w3 + w1 * vv14 * w4);
varphi2 = w2 - 0.5 * (w1 * vv12 * w2 + w2 * vv23 * w3 + w2 * vv24 * w4);
varphi3 = w3 - 0.5 * (w1 * vv13 * w3 + w2 * vv23 * w3 + w3 * vv34 * w4);
varphi4 = w4 - 0.5 * (w1 * vv14 * w4 + w2 * vv24 * w4 + w3 * vv34 * w4);
norm = varphi1 + varphi2 + varphi3 + varphi4;
phi1 = varphi1 / norm;
phi2 = varphi2 / norm;
phi3 = varphi3 / norm;
phi4 = varphi4 / norm;
test = phi1 + phi2 + phi3 + phi4;
norm
vv12
vv13
vv23
vv14
vv24
vv34
phi1
phi2
phi3
phi4
test
"A=" MatrixForm[{{1, 1.5 * alpha1, 1.5 * alpha2, 1.0 / (alpha1 * alpha2)},
  {0, 1, alpha3, (2.0 / 3.0) * (alpha1 / alpha3)},
  {0, 0, 1, (2.0 / 3.0) * (alpha2 * alpha3)}, {0, 0, 0, 1}}]
"Edges=" MatrixForm[{{1, -w1 * vv12 * w2, -w1 * vv13 * w3, -w1 * vv14 * w4},
  {0, 1, -w2 * vv23 * w3, -w2 * vv24 * w4}, {0, 0, 1, -w3 * vv34 * w4}, {0, 0, 0, 1}}]
0.888824
0.529412
0.

```



0.

0.529412

0.529412

0.

0.292852

0.189279

0.225017

0.292852

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6. & 1.5 & 0.25 \\ 0 & 1 & 1 & 2.66667 \\ 0 & 0 & 1 & 0.666667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Edges} = \begin{pmatrix} 1 & -0.0317647 & 0. & -0.0476471 \\ 0 & 1 & 0. & -0.0317647 \\ 0 & 0 & 1 & 0. \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```

f[x_] := 2 * x / (1 + x^2) // N;

t = 1;
alpha1 = 4;
alpha2 = 0.25;
alpha3 = 4;
v12 = f[alpha1];
v13 = f[alpha2];
v23 = f[alpha3];
v14 = f[1.0 / (alpha1 * alpha2)];
v24 = f[alpha1 / alpha3];
v34 = f[alpha2 * alpha3];
vv12 = 1 - v12;
vv13 = 1 - v13;
vv23 = 1 - v23;
vv14 = 1 - v14;
vv24 = 1 - v24;
vv34 = 1 - v34;
w1 = 0.3;
w2 = 0.2;
w3 = 0.2;
w4 = 0.3;
varphi1 = w1 - 0.5 * (w1 * vv12 * w2 + w1 * vv13 * w3 + w1 * vv14 * w4);
varphi2 = w2 - 0.5 * (w1 * vv12 * w2 + w2 * vv23 * w3 + w2 * vv24 * w4);
varphi3 = w3 - 0.5 * (w1 * vv13 * w3 + w2 * vv23 * w3 + w3 * vv34 * w4);
varphi4 = w4 - 0.5 * (w1 * vv14 * w4 + w2 * vv24 * w4 + w3 * vv34 * w4);
norm = varphi1 + varphi2 + varphi3 + varphi4;
phi1 = varphi1 / norm;
phi2 = varphi2 / norm;
phi3 = varphi3 / norm;
phi4 = varphi4 / norm;
test = phi1 + phi2 + phi3 + phi4;
norm
vv12
vv13
vv23
vv14
vv24
vv34
phi1
phi2
phi3
phi4
test
"A=" MatrixForm[{{1, 1.5 * alpha1, 1.5 * alpha2, 1.0 / (alpha1 * alpha2)},
  {0, 1, alpha3, (2.0 / 3.0) * (alpha1 / alpha3)},
  {0, 0, 1, (2.0 / 3.0) * (alpha2 * alpha3)}, {0, 0, 0, 1}}]
"Edges=" MatrixForm[{{1, -w1 * vv12 * w2, -w1 * vv13 * w3, -w1 * vv14 * w4},
  {0, 1, -w2 * vv23 * w3, -w2 * vv24 * w4}, {0, 0, 1, -w3 * vv34 * w4}, {0, 0, 0, 1}}]

0.915294

0.529412

0.529412

```

0.529412

0.

0.

0.

0.293059

0.189589

0.189589

0.327763

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6. & 0.375 & 1. \\ 0 & 1 & 4 & 0.666667 \\ 0 & 0 & 1 & 0.666667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Edges} = \begin{pmatrix} 1 & -0.0317647 & -0.0317647 & 0. \\ 0 & 1 & -0.0211765 & 0. \\ 0 & 0 & 1 & 0. \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```

f4[x_] := 2 * x^4 / (1 + x^8) // N;

t = 1;
alpha1 = 4;
alpha2 = 1;
alpha3 = 1;
v12 = f4[alpha1];
v13 = f4[alpha2];
v23 = f4[alpha3];
v14 = f4[1.0 / (alpha1 * alpha2)];
v24 = f4[alpha1 / alpha3];
v34 = f4[alpha2 * alpha3];
vv12 = 1 - v12;
vv13 = 1 - v13;
vv23 = 1 - v23;
vv14 = 1 - v14;
vv24 = 1 - v24;
vv34 = 1 - v34;
w1 = 0.3;
w2 = 0.2;
w3 = 0.2;
w4 = 0.3;
varphi1 = w1 - 0.5 * (w1 * vv12 * w2 + w1 * vv13 * w3 + w1 * vv14 * w4);
varphi2 = w2 - 0.5 * (w1 * vv12 * w2 + w2 * vv23 * w3 + w2 * vv24 * w4);
varphi3 = w3 - 0.5 * (w1 * vv13 * w3 + w2 * vv23 * w3 + w3 * vv34 * w4);
varphi4 = w4 - 0.5 * (w1 * vv14 * w4 + w2 * vv24 * w4 + w3 * vv34 * w4);
norm = varphi1 + varphi2 + varphi3 + varphi4;
phi1 = varphi1 / norm;
phi2 = varphi2 / norm;
phi3 = varphi3 / norm;
phi4 = varphi4 / norm;
test = phi1 + phi2 + phi3 + phi4;
norm
vv12
vv13
vv23
vv14
vv24
vv34
phi1
phi2
phi3
phi4
test
"A=" MatrixForm[{{1, 1.5 * alpha1, 1.5 * alpha2, 1.0 / (alpha1 * alpha2)},
  {0, 1, alpha3, (2.0 / 3.0) * (alpha1 / alpha3)},
  {0, 0, 1, (2.0 / 3.0) * (alpha2 * alpha3)}, {0, 0, 0, 1}}]
"Edges=" MatrixForm[{{1, -w1 * vv12 * w2, -w1 * vv13 * w3, -w1 * vv14 * w4},
  {0, 1, -w2 * vv23 * w3, -w2 * vv24 * w4}, {0, 0, 1, -w3 * vv34 * w4}, {0, 0, 0, 1}}]

0.791641

0.992188

0.

```

0.

0.992188

0.992188

0.

0.28496

0.17744

0.25264

0.28496

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6. & 1.5 & 0.25 \\ 0 & 1 & 1 & 2.66667 \\ 0 & 0 & 1 & 0.666667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Edges} = \begin{pmatrix} 1 & -0.0595313 & 0. & -0.0892969 \\ 0 & 1 & 0. & -0.0595313 \\ 0 & 0 & 1 & 0. \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```

f2[x_] := 2 * x^2 / (1 + x^4) // N;

t = 1;
alpha1 = 4;
alpha2 = 0.25;
alpha3 = 4;
v12 = f2[alpha1];
v13 = f2[alpha2];
v23 = f2[alpha3];
v14 = f2[1.0 / (alpha1 * alpha2)];
v24 = f2[alpha1 / alpha3];
v34 = f2[alpha2 * alpha3];
vv12 = 1 - v12;
vv13 = 1 - v13;
vv23 = 1 - v23;
vv14 = 1 - v14;
vv24 = 1 - v24;
vv34 = 1 - v34;
w1 = 0.3;
w2 = 0.2;
w3 = 0.2;
w4 = 0.3;
varphi1 = w1 - 0.5 * (w1 * vv12 * w2 + w1 * vv13 * w3 + w1 * vv14 * w4);
varphi2 = w2 - 0.5 * (w1 * vv12 * w2 + w2 * vv23 * w3 + w2 * vv24 * w4);
varphi3 = w3 - 0.5 * (w1 * vv13 * w3 + w2 * vv23 * w3 + w3 * vv34 * w4);
varphi4 = w4 - 0.5 * (w1 * vv14 * w4 + w2 * vv24 * w4 + w3 * vv34 * w4);
norm = varphi1 + varphi2 + varphi3 + varphi4;
phi1 = varphi1 / norm;
phi2 = varphi2 / norm;
phi3 = varphi3 / norm;
phi4 = varphi4 / norm;
test = phi1 + phi2 + phi3 + phi4;
norm
vv12
vv13
vv23
vv14
vv24
vv34
phi1
phi2
phi3
phi4
test
"A=" MatrixForm[{{1, 1.5 * alpha1, 1.5 * alpha2, 1.0 / (alpha1 * alpha2)},
  {0, 1, alpha3, (2.0 / 3.0) * (alpha1 / alpha3)},
  {0, 0, 1, (2.0 / 3.0) * (alpha2 * alpha3)}, {0, 0, 0, 1}}]
"Edges=" MatrixForm[{{1, -w1 * vv12 * w2, -w1 * vv13 * w3, -w1 * vv14 * w4},
  {0, 1, -w2 * vv23 * w3, -w2 * vv24 * w4}, {0, 0, 1, -w3 * vv34 * w4}, {0, 0, 0, 1}}]

0.859922

0.875486

0.875486

```

0.875486

0.

0.

0.

0.287783

0.181674

0.181674

0.348869

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6. & 0.375 & 1. \\ 0 & 1 & 4 & 0.666667 \\ 0 & 0 & 1 & 0.666667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Edges} = \begin{pmatrix} 1 & -0.0525292 & -0.0525292 & 0. \\ 0 & 1 & -0.0350195 & 0. \\ 0 & 0 & 1 & 0. \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```

sol = ConstrainedMax[ $\epsilon + 20 \delta + 20 \gamma$  ,
  {(* preference relations *)
    -4 a - 1 b + 5 c - 2 (d - e) + 4 (f - g) + 5 (h - i) + 4 (1 - m)  $\geq \epsilon$ ,
    8 a + 4 b - 8 c + 6 (d - e) - 2 (h - i)  $\geq \epsilon$ ,
    (* Shapley values *)
    a + 0.5 (d - e) + 0.5 (f - g) + (1/3) (1 - m)  $\geq 3/8$ ,
    a + 0.5 (d - e) + 0.5 (f - g) + (1/3) (1 - m)  $\leq 3/8$ ,
    b + 0.5 (d - e) + 0.5 (h - i) + (1/3) (1 - m)  $\geq 3/8$ ,
    b + 0.5 (d - e) + 0.5 (h - i) + (1/3) (1 - m)  $\leq 3/8$ ,
    c + 0.5 (f - g) + 0.5 (h - i) + (1/3) (1 - m)  $\geq 2/8$ ,
    c + 0.5 (f - g) + 0.5 (h - i) + (1/3) (1 - m)  $\leq 2/8$ ,
    (* monotonicity *)
    a + b + c + d - e + f - g + h - i + 1 - m  $\geq 1$ ,
    a + b + c + d - e + f - g + h - i + 1 - m  $\leq 1$ ,
    a  $\geq 0$ , b  $\geq 0$ ,
    a + d - e  $\geq 0$ , a + f - g  $\geq 0$ , b + d - e  $\geq 0$ , b + h - i  $\geq 0$ , c + f - g  $\geq 0$ , c + h - i  $\geq 0$ ,
    a + d - e + f - g + 1 - m  $\geq 0$ , b + d - e + h - i + 1 - m  $\geq 0$ , c + f - g + h - i + 1 - m  $\geq 0$ ,
    (* interaction values *)
    d - e  $\leq 0$ , f - g - h + i  $\geq 0$ , h - i - f + g  $\geq 0$ ,
    (* extra *)
    f - g  $\geq \gamma$ , d - e  $\leq -\gamma$ ,
    c  $\geq \delta$ , a  $\geq \alpha$ ,
     $\delta \geq 0.15$ ,  $\alpha \geq 0.3$ ,  $\epsilon \geq 0.5$ },
  { $\epsilon$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$ , a, b, c, d, e, f, g, h, i, 1, m}]

{3.7, { $\epsilon \rightarrow 0.5$ ,  $\delta \rightarrow 0.15$ ,  $\gamma \rightarrow 0.01$ ,  $\alpha \rightarrow 0.3$ , a  $\rightarrow 0.3$ , b  $\rightarrow 0.3$ ,
  c  $\rightarrow 0.15$ , d  $\rightarrow 0$ , e  $\rightarrow 0.04$ , f  $\rightarrow 0.01$ , g  $\rightarrow 0$ , h  $\rightarrow 0.01$ , i  $\rightarrow 0$ , 1  $\rightarrow 0.27$ , m  $\rightarrow 0$ }}

(* C (A) = *)
18 a + 16 b + 10 c + 16 (d - e) + 10 (f - g) + 10 (h - i) + 10 (1 - m) /. sol[[2]]

13.96

(* C (B) = *)
10 a + 12 b + 18 c + 10 (d - e) + 10 (f - g) + 12 (h - i) + 10 (1 - m) /. sol[[2]]

11.82

(* C (C) = *)
14 a + 15 b + 15 c + 14 (d - e) + 14 (f - g) + 15 (h - i) + 14 (1 - m) /. sol[[2]]

14.46

```



```

soluzione = ConstrainedMax[ε,
  {(* preference relations *)
    -4 a - 1 b + 5 c - 2 (e - f) + 4 (g - h) - 1 (i - j) + 5 (k - 1) +
      5 (o - p) + 4 (q - r) - 1 (s - t) + 4 (u - v) + 5 (w - x) + 4 (y - z) ≥ ε,
    7 a + 3 b - 8 c - 2 d + 5 (e - f) - 1 (g - h) + 4 (i - j) - 3 (k - 1) + 2 (m - n) -
      7 (o - p) - 1 (q - r) + 4 (s - t) - 1 (u - v) - 3 (w - x) - 1 (y - z) ≥ ε,
    (* Shapley values *)
    a + 0.5 (e - f + g - h + i - j) + (1/3) (q - r + s - t + u - v) + (1/4) (y - z) ≥ 3/10,
    a + 0.5 (e - f + g - h + i - j) + (1/3) (q - r + s - t + u - v) + (1/4) (y - z) ≤ 3/10,
    b + 0.5 (e - f + k - 1 + m - n) + (1/3) (q - r + s - t + w - x) + (1/4) (y - z) ≥ 3/10,
    b + 0.5 (e - f + k - 1 + m - n) + (1/3) (q - r + s - t + w - x) + (1/4) (y - z) ≤ 3/10,
    c + 0.5 (g - h + k - 1 + o - p) + (1/3) (q - r + u - v + w - x) + (1/4) (y - z) ≥ 2/10,
    c + 0.5 (g - h + k - 1 + o - p) + (1/3) (q - r + u - v + w - x) + (1/4) (y - z) ≤ 2/10,
    d + 0.5 (i - j + m - n + o - p) + (1/3) (s - t + u - v + w - x) + (1/4) (y - z) ≥ 2/10,
    d + 0.5 (i - j + m - n + o - p) + (1/3) (s - t + u - v + w - x) + (1/4) (y - z) ≤ 2/10,
    (* monotonicity *)
    a + b + c + d + e - f + g - h + i - j + k - 1 + m - n + o - p + q - r + s - t + u - v + w - x + y - z ≥ 1,
    a + b + c + d + e - f + g - h + i - j + k - 1 + m - n + o - p + q - r + s - t + u - v + w - x + y - z ≤ 1,
    a ≥ 0, b ≥ 0, c ≥ 0, d ≥ 0,
    a + e - f ≥ 0, a + g - h ≥ 0, a + i - j ≥ 0,
    b + e - f ≥ 0, b + k - 1 ≥ 0, b + m - n ≥ 0,
    c + g - h ≥ 0, c + k - 1 ≥ 0, c + o - p ≥ 0,
    d + i - j ≥ 0, d + m - n ≥ 0, d + o - p ≥ 0,
    a + e - f + g - h + q - r ≥ 0, a + e - f + i - j + s - t ≥ 0, a + g - h + i - j + u - v ≥ 0,
    b + e - f + k - 1 + q - r ≥ 0, b + e - f + m - n + s - t ≥ 0, b + k - 1 + m - n + w - x ≥ 0,
    c + g - h + k - 1 + q - r ≥ 0, c + k - 1 + o - p + w - x ≥ 0, c + g - h + o - p + u - v ≥ 0,
    d + i - j + m - n + s - t ≥ 0, d + i - j + o - p + u - v ≥ 0, d + m - n + o - p + w - x ≥ 0,
    a + e - f + g - h + i - j + q - r + s - t + u - v + y - z ≥ 0,
    b + e - f + k - 1 + m - n + q - r + s - t + w - x + y - z ≥ 0,
    c + g - h + k - 1 + o - p + q - r + u - v + w - x + y - z ≥ 0,
    d + i - j + m - n + o - p + s - t + u - v + w - x + y - z ≥ 0,
    (* interaction values *)
    e - f ≤ 0,
    g - h ≥ k - 1, k - 1 ≥ g - h, k - 1 ≥ 0,
    (* extra *)
    a ≥ 0.3, a ≤ 0.3, c ≥ 0.15, c ≤ 0.15, d ≥ 0.15, d ≤ 0.15,
    e - f ≤ -α, e - f ≥ -α, g - h ≥ β,
    ε ≥ 0.5, α ≥ 0.25, α ≤ 0.25, β ≥ 0.125, β ≤ 0.125},
  {ε, α, β, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z}]

{0.5, {ε → 0.5, α → 0.25, β → 0.125, a → 0.3, b → 0.3, c → 0.15, d → 0.15, e → 0, f → 0.25,
  g → 0.125, h → 0, i → 0.125, j → 0, k → 0.125, l → 0, m → 0.125, n → 0, o → 0, p → 0.15,
  q → 0, r → 0.125, s → 0, t → 0.125, u → 0, v → 0.125, w → 0, x → 0.125, y → 0.5, z → 0}}

(* C (A) = *)
11 a + 16 b + 10 c + 15 d + 16 (e - f) + 10 (g - h) + 15 (i - j) + 10 (k - 1) + 15 (m - n) + 10 (o - p) +
  10 (q - r) + 15 (s - t) + 10 (u - v) + 10 (w - x) + 10 (y - z) /. soluzione[[2]]

14.075

(* C (B) = *)
11 a + 13 b + 18 c + 17 d + 11 (e - f) + 11 (g - h) + 11 (i - j) + 13 (k - 1) + 13 (m - n) + 17 (o - p) +
  11 (q - r) + 11 (s - t) + 11 (u - v) + 13 (w - x) + 11 (y - z) /. soluzione[[2]]

12.9

```

(\* C (C) = \*)

14 a + 15 b + 15 c + 15 d + 14 (e - f) + 14 (g - h) + 14 (i - j) + 15 (k - l) + 15 (m - n) + 15 (o - p) +  
14 (q - r) + 14 (s - t) + 14 (u - v) + 15 (w - x) + 14 (y - z) /. soluzione[[2]]

14.575

```

soluzione = ConstrainedMax[ξ,
  {(* preference relations *)
    -4 α - 1 β + 5 γ - 1 δ + 1 ε - 2 (a - A) + 4 (b - B) - 2 (c - C) -
      1 (d - D) + 5 (e - E) - 1 (f - F) + 5 (h - H) + 5 (i - Y) + 4 (k - K) - 2 (l - L) -
      1 (m - M) + 4 (n - N) + 4 (o - O) - 1 (p - P) + 5 (q - Q) + 5 (r - R) + 5 (t - T) +
      4 (u - U) + 4 (v - V) - 1 (w - W) + 4 (x - X) + 5 (y - Y) + 4 (z - Z) ≥ ξ,
    7 α + 3 β - 8 γ - 1 δ - 1 ε + 5 (a - A) - 1 (b - B) + 5 (c - C) + 4 (d - D) - 3 (e - E) +
      3 (f - F) + 2 (g - G) - 7 (h - H) - 6 (i - Y) - 1 (j - J) - 1 (k - K) + 5 (l - L) +
      4 (m - M) - 1 (n - N) - 1 (o - O) + 4 (p - P) - 3 (q - Q) - 3 (r - R) + 2 (s - S) -
      6 (t - T) - 1 (u - U) - 1 (v - V) + 4 (w - W) - 1 (x - X) - 3 (y - Y) - 1 (z - Z) ≥ ξ,
    (* Shapley values *)
    α + 0.5 (a - A + b - B + c - C + d - D) + (1/3) (k - K + l - L + m - M + n - N + o - O + p - P) +
      (1/4) (u - U + v - V + w - W + x - X) + (1/5) (z - Z) ≥ 3/12,
    α + 0.5 (a - A + b - B + c - C + d - D) + (1/3) (k - K + l - L + m - M + n - N + o - O + p - P) +
      (1/4) (u - U + v - V + w - W + x - X) + (1/5) (z - Z) ≤ 3/12,
    β + 0.5 (a - A + e - E + f - F + g - G) + (1/3) (k - K + l - L + m - M + q - Q + r - R + s - S) +
      (1/4) (u - U + v - V + w - W + y - Y) + (1/5) (z - Z) ≥ 3/12,
    β + 0.5 (a - A + e - E + f - F + g - G) + (1/3) (k - K + l - L + m - M + q - Q + r - R + s - S) +
      (1/4) (u - U + v - V + w - W + y - Y) + (1/5) (z - Z) ≤ 3/12,
    γ + 0.5 (b - B + e - E + h - H + i - Y) + (1/3) (k - K + n - N + o - O + q - Q + r - R + t - T) +
      (1/4) (u - U + v - V + x - X + y - Y) + (1/5) (z - Z) ≥ 2/12,
    γ + 0.5 (b - B + e - E + h - H + i - Y) + (1/3) (k - K + n - N + o - O + q - Q + r - R + t - T) +
      (1/4) (u - U + v - V + x - X + y - Y) + (1/5) (z - Z) ≤ 2/12,
    δ + 0.5 (c - C + f - F + h - H + j - J) + (1/3) (l - L + n - N + p - P + q - Q + s - S + t - T) +
      (1/4) (u - U + w - W + x - X + y - Y) + (1/5) (z - Z) ≥ 2/12,
    δ + 0.5 (c - C + f - F + h - H + j - J) + (1/3) (l - L + n - N + p - P + q - Q + s - S + t - T) +
      (1/4) (u - U + w - W + x - X + y - Y) + (1/5) (z - Z) ≤ 2/12,
    ε + 0.5 (d - D + g - G + i - Y + j - J) + (1/3) (m - M + o - O + p - P + r - R + s - S + t - T) +
      (1/4) (v - V + w - W + x - X + y - Y) + (1/5) (z - Z) ≥ 2/12,
    ε + 0.5 (d - D + g - G + i - Y + j - J) + (1/3) (m - M + o - O + p - P + r - R + s - S + t - T) +
      (1/4) (v - V + w - W + x - X + y - Y) + (1/5) (z - Z) ≤ 2/12,
    (* monotonicity *)
    α + β + γ + δ + ε + (a - A) + (b - B) + (c - C) + (d - D) + (e - E) + (f - F) + (g - G) + (h - H) +
      (i - Y) + (j - J) + (k - K) + (l - L) + (m - M) + (n - N) + (o - O) + (p - P) + (q - Q) +
      (r - R) + (s - S) + (t - T) + (u - U) + (v - V) + (w - W) + (x - X) + (y - Y) + (z - Z) ≥ 1,
    α + β + γ + δ + ε + (a - A) + (b - B) + (c - C) + (d - D) + (e - E) + (f - F) + (g - G) + (h - H) +
      (i - Y) + (j - J) + (k - K) + (l - L) + (m - M) + (n - N) + (o - O) + (p - P) + (q - Q) +
      (r - R) + (s - S) + (t - T) + (u - U) + (v - V) + (w - W) + (x - X) + (y - Y) + (z - Z) ≤ 1,
    α ≥ 0, β ≥ 0, γ ≥ 0, δ ≥ 0, ε ≥ 0,
    α + a - A ≥ 0, α + b - B ≥ 0, α + c - C ≥ 0, α + d - D ≥ 0,
    β + a - A ≥ 0, β + e - E ≥ 0, β + f - F ≥ 0, β + g - G ≥ 0,
    γ + b - B ≥ 0, γ + e - E ≥ 0, γ + h - H ≥ 0, γ + i - Y ≥ 0,
    δ + c - C ≥ 0, δ + f - F ≥ 0, δ + h - H ≥ 0, δ + j - J ≥ 0,
    ε + d - D ≥ 0, ε + g - G ≥ 0, ε + i - Y ≥ 0, ε + j - J ≥ 0,
    α + a - A + b - B + k - K ≥ 0, α + a - A + c - C + l - L ≥ 0, α + a - A + d - D + m - M ≥ 0,
    α + b - B + c - C + n - N ≥ 0, α + b - B + d - D + o - O ≥ 0, α + c - C + d - D + p - P ≥ 0,
    β + a - A + e - E + k - K ≥ 0, β + a - A + f - F + l - L ≥ 0, β + a - A + d - D + m - M ≥ 0,
    β + e - E + f - F + q - Q ≥ 0, β + e - E + g - G + r - R ≥ 0, β + f - F + g - G + s - S ≥ 0,
    γ + b - B + e - E + k - K ≥ 0, γ + b - B + h - H + n - N ≥ 0, γ + b - B + i - Y + o - O ≥ 0,
    γ + e - E + h - H + q - Q ≥ 0, γ + e - E + i - Y + r - R ≥ 0, γ + h - H + i - Y + t - T ≥ 0,
    δ + c - C + f - F + l - L ≥ 0, δ + c - C + h - H + n - N ≥ 0, δ + c - C + j - J + p - P ≥ 0,
    δ + f - F + h - H + q - Q ≥ 0, δ + f - F + j - J + s - S ≥ 0, δ + h - H + j - J + t - T ≥ 0,
    ε + d - D + g - G + m - M ≥ 0, ε + d - D + i - Y + o - O ≥ 0, ε + d - D + j - J + p - P ≥ 0,
    ε + g - G + i - Y + r - R ≥ 0, ε + g - G + j - J + s - S ≥ 0, ε + i - Y + j - J + t - T ≥ 0,
  }

```

$\alpha + a - A + b - B + c - C + k - K + l - L + n - N + u - U \geq 0,$   
 $\alpha + a - A + b - B + d - D + k - K + m - M + o - O + v - V \geq 0,$   
 $\alpha + a - A + c - C + d - D + l - L + m - M + p - P + w - W \geq 0,$   
 $\alpha + b - B + c - C + d - D + n - N + o - O + p - P + x - X \geq 0,$   
 $\beta + a - A + e - E + f - F + k - K + l - L + q - Q + u - U \geq 0,$   
 $\beta + a - A + e - E + g - G + k - K + m - M + r - R + v - V \geq 0,$   
 $\beta + a - A + f - F + g - G + l - L + m - M + s - S + w - W \geq 0,$   
 $\beta + e - E + f - F + g - G + q - Q + r - R + s - S + y - Y \geq 0,$   
 $\gamma + b - B + e - E + h - H + k - K + n - N + q - Q + u - U \geq 0,$   
 $\gamma + b - B + e - E + i - I + k - K + o - O + r - R + v - V \geq 0,$   
 $\gamma + b - B + h - H + i - I + n - N + o - O + t - T + x - X \geq 0,$   
 $\gamma + e - E + h - H + i - I + q - Q + r - R + t - T + y - Y \geq 0,$   
 $\delta + c - C + f - F + h - H + l - L + n - N + q - Q + u - U \geq 0,$   
 $\delta + c - C + f - F + j - J + l - L + p - P + s - S + w - W \geq 0,$   
 $\delta + c - C + h - H + j - J + n - N + p - P + t - T + x - X \geq 0,$   
 $\delta + f - F + h - H + j - J + q - Q + s - S + t - T + y - Y \geq 0,$   
 $\epsilon + d - D + g - G + i - I + m - M + o - O + r - R + v - V \geq 0,$   
 $\epsilon + d - D + g - G + j - J + m - M + p - P + s - S + w - W \geq 0,$   
 $\epsilon + d - D + i - I + j - J + o - O + p - P + t - T + x - X \geq 0,$   
 $\epsilon + g - G + i - I + j - J + r - R + s - S + t - T + y - Y \geq 0,$   
 $\alpha + a - A + b - B + c - C + d - D + k - K + l - L + m - M + n - N +$   
 $o - O + p - P + u - U + v - V + w - W + x - X + z - Z \geq 0,$   
 $\beta + a - A + e - E + f - F + g - G + k - K + l - L + m - M + q - Q + r - R +$   
 $s - S + u - U + v - V + w - W + y - Y + z - Z \geq 0,$   
 $\gamma + b - B + e - E + h - H + i - I + k - K + n - N + o - O + q - Q + r - R +$   
 $t - T + u - U + v - V + x - X + y - Y + z - Z \geq 0,$   
 $\delta + c - C + f - F + h - H + j - J + l - L + n - N + p - P + q - Q + s - S +$   
 $t - T + u - U + w - W + x - X + y - Y + z - Z \geq 0,$   
 $\epsilon + d - D + g - G + i - I + j - J + m - M + o - O + p - P + r - R + s - S +$   
 $t - T + v - V + w - W + x - X + y - Y + z - Z \geq 0,$

(\* interaction values \*)

$a - A \leq 0,$

$b - B \geq e - E, e - E \geq b - B, e - E \geq 0,$

(\* extra \*)

$c - C \geq 0.02, f - F \geq c - C, f - F \leq c - C, d - D \geq 0.01, g - G \geq 0.01,$

$\zeta \geq 0.5, e - E \geq 0.03, e - E \leq 0.03,$

$\alpha \geq 0.25, \beta \geq \alpha, \beta \leq \alpha, \gamma \geq 0.15, \delta \geq 0.15, \epsilon \geq 0.15, a - A \leq -0.18, e - E \geq 0.03\},$

{ $\zeta, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, a, A, b, B, c, C, d, D, e, E, f, F, g, G, h, H, i, I, j, J, k, K, l, L, m, M, n, N, o, O, p, P, q, Q, r, R, s, S, t, T, u, U, v, V, w, W, x, X, y, Y, z, Z$ }

$\{0.96, \{\zeta \rightarrow 0.96, \alpha \rightarrow 0.25, \beta \rightarrow 0.25, \gamma \rightarrow 0.15, \delta \rightarrow 0.15, \epsilon \rightarrow 0.15,$   
 $a \rightarrow 0, A \rightarrow 0.25, b \rightarrow 0.03, B \rightarrow 0, c \rightarrow 0.02, C \rightarrow 0, d \rightarrow 0.01, D \rightarrow 0, e \rightarrow 0.03,$   
 $E \rightarrow 0, f \rightarrow 0.02, F \rightarrow 0, g \rightarrow 0.01, G \rightarrow 0, h \rightarrow 0, H \rightarrow 0.15, i \rightarrow 0, I \rightarrow 0.15,$   
 $j \rightarrow 0, J \rightarrow 0.15, k \rightarrow 0, K \rightarrow 0.03, l \rightarrow 0, L \rightarrow 0.02, m \rightarrow 0, M \rightarrow 0.01, n \rightarrow 0,$   
 $N \rightarrow 0.02, o \rightarrow 0, O \rightarrow 0.01, p \rightarrow 0, P \rightarrow 0.01, q \rightarrow 0.03, Q \rightarrow 0, r \rightarrow 0.04, R \rightarrow 0,$   
 $s \rightarrow 0, S \rightarrow 0.01, t \rightarrow 0.15, T \rightarrow 0, u \rightarrow 0.0466667, U \rightarrow 0, v \rightarrow 0.0466667, V \rightarrow 0,$   
 $w \rightarrow 0.14, W \rightarrow 0, x \rightarrow 0.0933333, X \rightarrow 0, y \rightarrow 0, Y \rightarrow 0.04, z \rightarrow 0.233333, Z \rightarrow 0\}\}$

(\* C(A) = \*)

$18\alpha + 16\beta + 10\gamma + 16\delta + 15\epsilon + 16(a - A) + 10(b - B) + 16(c - C) + 15(d - D) + 10(e - E) +$   
 $16(f - F) + 15(g - G) + 10(h - H) + 10(i - I) + 15(j - J) + 10(k - K) + 16(l - L) + 15(m - M) +$   
 $10(n - N) + 10(o - O) + 15(p - P) + 10(q - Q) + 10(r - R) + 15(s - S) + 10(t - T) +$   
 $10(u - U) + 10(v - V) + 15(w - W) + 10(x - X) + 10(y - Y) + 10(z - Z) /. soluzione[[2]]$

```
(* C (B) = *)  
11  $\alpha$  + 13  $\beta$  + 18  $\gamma$  + 17  $\delta$  + 16  $\epsilon$  + 11 (a - A) + 11 (b - B) + 11 (c - C) + 11 (d - D) + 13 (e - E) +  
  13 (f - F) + 13 (g - G) + 17 (h - H) + 16 (i - I) + 16 (j - J) + 11 (k - K) + 11 (l - L) + 11 (m - M) +  
  11 (n - N) + 11 (o - O) + 11 (p - P) + 13 (q - Q) + 13 (r - R) + 13 (s - S) + 16 (t - T) +  
  11 (u - U) + 11 (v - V) + 11 (w - W) + 11 (x - X) + 13 (y - Y) + 11 (z - Z) /. soluzione[[2]]
```

12.71

```
(* C (C) = *)  
14  $\alpha$  + 15  $\beta$  + 15  $\gamma$  + 15  $\delta$  + 16  $\epsilon$  + 14 (a - A) + 14 (b - B) + 14 (c - C) + 14 (d - D) + 15 (e - E) +  
  15 (f - F) + 15 (g - G) + 15 (h - H) + 15 (i - I) + 15 (j - J) + 14 (k - K) + 14 (l - L) + 14 (m - M) +  
  14 (n - N) + 14 (o - O) + 14 (p - P) + 15 (q - Q) + 15 (r - R) + 15 (s - S) + 15 (t - T) +  
  14 (u - U) + 14 (v - V) + 14 (w - W) + 14 (x - X) + 15 (y - Y) + 14 (z - Z) /. soluzione[[2]]
```

14.63

```

sol = ConstrainedMin[ε,
  {(* preference relations *)
    -4 a - 1 b + 5 c - 2 (d - e) + 4 (f - g) + 5 (h - i) + 4 (1 - m) ≥ 0.5,
    8 a + 4 b - 8 c + 6 (d - e) - 2 (h - i) ≥ 0.5,
    (* self-duality *)
    a + b + c + d - e - 1 ≥ -ε,
    a + b + c + d - e - 1 ≤ ε,
    a + b + c + f - g - 1 ≥ -ε,
    a + b + c + f - g - 1 ≤ ε,
    a + b + c + h - i - 1 ≥ -ε,
    a + b + c + h - i - 1 ≤ ε,
    (* Shapley values *)
    a + 0.5 (d - e) + 0.5 (f - g) + (1/3) (1 - m) ≥ 3/8,
    a + 0.5 (d - e) + 0.5 (f - g) + (1/3) (1 - m) ≤ 3/8,
    b + 0.5 (d - e) + 0.5 (h - i) + (1/3) (1 - m) ≥ 3/8,
    b + 0.5 (d - e) + 0.5 (h - i) + (1/3) (1 - m) ≤ 3/8,
    c + 0.5 (f - g) + 0.5 (h - i) + (1/3) (1 - m) ≥ 2/8,
    c + 0.5 (f - g) + 0.5 (h - i) + (1/3) (1 - m) ≤ 2/8,
    (* monotonicity *)
    a + b + c + d - e + f - g + h - i + 1 - m ≥ 1,
    a + b + c + d - e + f - g + h - i + 1 - m ≤ 1,
    a ≥ 0, b ≥ 0, c ≥ 0,
    a + d - e ≥ 0, a + f - g ≥ 0, b + d - e ≥ 0, b + h - i ≥ 0, c + f - g ≥ 0, c + h - i ≥ 0,
    a + d - e + f - g + 1 - m ≥ 0, b + d - e + h - i + 1 - m ≥ 0, c + f - g + h - i + 1 - m ≥ 0,
    (* interaction values *)
    d - e ≤ 0, f - g ≥ h - i, h - i ≥ f - g, h - i ≥ 0},
  {ε, a, b, c, d, e, f, g, h, i, 1, m}]

{0.28125, {ε → 0.28125, a → 0.28125, b → 0.28125, c → 0.15625, d → 0, e → 7.45931 × 10-17,
  f → 9.82224 × 10-33, g → 0, h → 9.82224 × 10-33, i → 0, 1 → 0.28125, m → 0}}

```

```

sol = ConstrainedMin[ε,
  {(* preference relations *)
    -4 a - 1 b + 5 c - 2 (e - f) + 4 (g - h) - 1 (i - j) + 5 (k - 1) +
      5 (o - p) + 4 (q - r) - 1 (s - t) + 4 (u - v) + 5 (w - x) + 4 (y - z) ≥ 0.5,
    7 a + 3 b - 8 c - 2 d + 5 (e - f) - 1 (g - h) + 4 (i - j) - 3 (k - 1) + 2 (m - n) -
      7 (o - p) - 1 (q - r) + 4 (s - t) - 1 (u - v) - 3 (w - x) - 1 (y - z) ≥ 0.5,
    (* self-duality *)
    a + b + c + d + (i - j) + (k - 1) - 1 ≥ -ε,
    a + b + c + d + (i - j) + (k - 1) - 1 ≤ ε,
    a + b + c + d + (g - h) + (m - n) - 1 ≥ -ε,
    a + b + c + d + (g - h) + (m - n) - 1 ≤ ε,
    a + b + c + d + (e - f) + (o - p) - 1 ≥ -ε,
    a + b + c + d + (e - f) + (o - p) - 1 ≤ ε,
    a + b + c + d + (e - f) + (g - h) + (k - 1) + (q - r) - 1 ≥ -ε,
    a + b + c + d + (e - f) + (g - h) + (k - 1) + (q - r) - 1 ≤ ε,
    a + b + c + d + (e - f) + (i - j) + (m - n) + (s - t) - 1 ≥ -ε,
    a + b + c + d + (e - f) + (i - j) + (m - n) + (s - t) - 1 ≤ ε,
    a + b + c + d + (g - h) + (i - j) + (o - p) + (u - v) - 1 ≥ -ε,
    a + b + c + d + (g - h) + (i - j) + (o - p) + (u - v) - 1 ≤ ε,
    a + b + c + d + (k - 1) + (m - n) + (o - p) + (w - x) - 1 ≥ -ε,
    a + b + c + d + (k - 1) + (m - n) + (o - p) + (w - x) - 1 ≤ ε,
    (* Shapley values *)
    a + 0.5 (e - f + g - h + i - j) + (1/3) (q - r + s - t + u - v) + (1/4) (y - z) ≥ 3/10,
    a + 0.5 (e - f + g - h + i - j) + (1/3) (q - r + s - t + u - v) + (1/4) (y - z) ≤ 3/10,
    b + 0.5 (e - f + k - 1 + m - n) + (1/3) (q - r + s - t + w - x) + (1/4) (y - z) ≥ 3/10,
    b + 0.5 (e - f + k - 1 + m - n) + (1/3) (q - r + s - t + w - x) + (1/4) (y - z) ≤ 3/10,
    c + 0.5 (g - h + k - 1 + o - p) + (1/3) (q - r + u - v + w - x) + (1/4) (y - z) ≥ 2/10,
    c + 0.5 (g - h + k - 1 + o - p) + (1/3) (q - r + u - v + w - x) + (1/4) (y - z) ≤ 2/10,
    d + 0.5 (i - j + m - n + o - p) + (1/3) (s - t + u - v + w - x) + (1/4) (y - z) ≥ 2/10,
    d + 0.5 (i - j + m - n + o - p) + (1/3) (s - t + u - v + w - x) + (1/4) (y - z) ≤ 2/10,
    (* monotonicity *)
    a + b + c + d + e - f + g - h + i - j + k - 1 + m - n + o - p + q - r + s - t + u - v + w - x + y - z ≥ 1,
    a + b + c + d + e - f + g - h + i - j + k - 1 + m - n + o - p + q - r + s - t + u - v + w - x + y - z ≤ 1,
    a ≥ 0, b ≥ 0, c ≥ 0, d ≥ 0,
    a + e - f ≥ 0, a + g - h ≥ 0, a + i - j ≥ 0,
    b + e - f ≥ 0, b + k - 1 ≥ 0, b + m - n ≥ 0,
    c + g - h ≥ 0, c + k - 1 ≥ 0, c + o - p ≥ 0,
    d + i - j ≥ 0, d + m - n ≥ 0, d + o - p ≥ 0,
    a + e - f + g - h + q - r ≥ 0, a + e - f + i - j + s - t ≥ 0, a + g - h + i - j + u - v ≥ 0,
    b + e - f + k - 1 + q - r ≥ 0, b + e - f + m - n + s - t ≥ 0, b + k - 1 + m - n + w - x ≥ 0,
    c + g - h + k - 1 + q - r ≥ 0, c + k - 1 + o - p + w - x ≥ 0, c + g - h + o - p + u - v ≥ 0,
    d + i - j + m - n + s - t ≥ 0, d + i - j + o - p + u - v ≥ 0, d + m - n + o - p + w - x ≥ 0,
    a + e - f + g - h + i - j + q - r + s - t + u - v + y - z ≥ 0,
    b + e - f + k - 1 + m - n + q - r + s - t + w - x + y - z ≥ 0,
    c + g - h + k - 1 + o - p + q - r + u - v + w - x + y - z ≥ 0,
    d + i - j + m - n + o - p + s - t + u - v + w - x + y - z ≥ 0,
    (* interaction values *)
    e - f ≤ 0,
    g - h ≥ k - 1, k - 1 ≥ g - h, k - 1 ≥ 0},
  {ε, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z}]

```

---

{0.196154, { $\epsilon \rightarrow 0.196154$ ,  $a \rightarrow 0.267949$ ,  $b \rightarrow 0.315385$ ,  $c \rightarrow 0.220513$ ,  $d \rightarrow 0.220513$ ,  
 $e \rightarrow 0$ ,  $f \rightarrow 0$ ,  $g \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$ ,  $i \rightarrow 0.0948718$ ,  $j \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 0$ ,  $l \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow 4.29215 \times 10^{-16}$ ,  
 $n \rightarrow 0$ ,  $o \rightarrow 0$ ,  $p \rightarrow 0.220513$ ,  $q \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow 0.173077$ ,  $s \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow 0.315385$ ,  $u \rightarrow 0$ ,  
 $v \rightarrow -1.97776 \times 10^{-16}$ ,  $w \rightarrow 4.75759 \times 10^{-16}$ ,  $x \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow 0.589744$ ,  $z \rightarrow 0$ }}



```

sol = ConstrainedMin[ξ,
  {(* preference relations *)
    -4 α - 1 β + 5 γ - 1 δ + 1 ε - 2 (a - A) + 4 (b - B) - 2 (c - C) -
      1 (d - D) + 5 (e - E) - 1 (f - F) + 5 (h - H) + 5 (i - Y) + 4 (k - K) - 2 (l - L) -
      1 (m - M) + 4 (n - N) + 4 (o - O) - 1 (p - P) + 5 (q - Q) + 5 (r - R) + 5 (t - T) +
      4 (u - U) + 4 (v - V) - 1 (w - W) + 4 (x - X) + 5 (y - Y) + 4 (z - Z) ≥ 0.5,
    7 α + 3 β - 8 γ - 1 δ - 1 ε + 5 (a - A) - 1 (b - B) + 5 (c - C) + 4 (d - D) - 3 (e - E) +
      3 (f - F) + 2 (g - G) - 7 (h - H) - 6 (i - Y) - 1 (j - J) - 1 (k - K) + 5 (l - L) +
      4 (m - M) - 1 (n - N) - 1 (o - O) + 4 (p - P) - 3 (q - Q) - 3 (r - R) + 2 (s - S) -
      6 (t - T) - 1 (u - U) - 1 (v - V) + 4 (w - W) - 1 (x - X) - 3 (y - Y) - 1 (z - Z) ≥ 0.5,
    (* self-duality *)
    α + β + γ + δ + ε + (a - A) + (b - B) + (e - E) + (j - J) + (k - K) - 1 >= -ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (a - A) + (b - B) + (e - E) + (j - J) + (k - K) - 1 ≤ ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (a - A) + (c - C) + (f - F) + (i - Y) + (l - L) - 1 >= -ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (a - A) + (c - C) + (f - F) + (i - Y) + (l - L) - 1 ≤ ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (a - A) + (d - D) + (g - G) + (h - H) + (m - M) - 1 >= -ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (a - A) + (d - D) + (g - G) + (h - H) + (m - M) - 1 ≤ ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (b - B) + (c - C) + (g - G) + (h - H) + (n - N) - 1 >= -ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (b - B) + (c - C) + (g - G) + (h - H) + (n - N) - 1 ≤ ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (b - B) + (d - D) + (f - F) + (i - Y) + (o - O) - 1 >= -ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (b - B) + (d - D) + (f - F) + (i - Y) + (o - O) - 1 ≤ ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (c - C) + (d - D) + (e - E) + (j - J) + (p - P) - 1 >= -ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (c - C) + (d - D) + (e - E) + (j - J) + (p - P) - 1 ≤ ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (d - D) + (e - E) + (f - F) + (h - H) + (q - Q) - 1 >= -ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (d - D) + (e - E) + (f - F) + (h - H) + (q - Q) - 1 ≤ ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (c - C) + (e - E) + (g - G) + (i - Y) + (r - R) - 1 >= -ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (c - C) + (e - E) + (g - G) + (i - Y) + (r - R) - 1 ≤ ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (b - B) + (f - F) - (g - G) + (j - J) + (s - S) - 1 >= -ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (b - B) + (f - F) - (g - G) + (j - J) + (s - S) - 1 ≤ ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (a - A) + (h - H) + (i - Y) + (j - J) + (t - T) - 1 >= -ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (a - A) + (h - H) + (i - Y) + (j - J) + (t - T) - 1 ≤ ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (a - A) + (b - B) + (c - C) + (e - E) +
      (f - F) + (h - H) + (k - K) + (l - L) + (n - N) + (q - Q) + (u - U) - 1 >= -ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (a - A) + (b - B) + (c - C) + (e - E) + (f - F) + (h - H) +
      (k - K) + (l - L) + (n - N) + (q - Q) + (u - U) - 1 ≤ ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (a - A) + (b - B) + (d - D) + (e - E) + (g - G) + (i - Y) +
      (k - K) + (m - M) + (o - O) + (r - R) + (v - V) - 1 >= -ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (a - A) + (b - B) + (d - D) + (e - E) + (g - G) + (i - Y) +
      (k - K) + (m - M) + (o - O) + (r - R) + (v - V) - 1 ≤ ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (a - A) + (c - C) + (d - D) + (f - F) + (g - G) + (j - J) +
      (l - L) + (m - M) + (p - P) + (s - S) + (w - W) - 1 >= -ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (a - A) + (c - C) + (d - D) + (f - F) + (g - G) + (j - J) +
      (l - L) + (m - M) + (p - P) + (s - S) + (w - W) - 1 ≤ ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (b - B) + (c - C) + (d - D) + (h - H) + (i - Y) + (j - J) +
      (n - N) + (o - O) + (p - P) + (t - T) + (x - X) - 1 >= -ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (b - B) + (c - C) + (d - D) + (h - H) + (i - Y) + (j - J) +
      (n - N) + (o - O) + (p - P) + (t - T) + (x - X) - 1 ≤ ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (e - E) + (f - F) + (g - G) + (h - H) + (i - Y) + (j - J) +
      (q - Q) + (r - R) + (s - S) + (t - T) + (y - Y) - 1 >= -ξ,
    α + β + γ + δ + ε + (e - E) + (f - F) + (g - G) + (h - H) + (i - Y) + (j - J) +
      (q - Q) + (r - R) + (s - S) + (t - T) + (y - Y) - 1 ≤ ξ,
    (* Shapley values *)
    α + 0.5 (a - A + b - B + c - C + d - D) + (1/3) (k - K + l - L + m - M + n - N + o - O + p - P) +
      (1/4) (u - U + v - V + w - W + x - X) + (1/5) (z - Z) >= 3/12,
  }

```

$$\begin{aligned}
&\alpha + 0.5(a - A + b - B + c - C + d - D) + (1/3)(k - K + l - L + m - M + n - N + o - O + p - P) + \\
&\quad (1/4)(u - U + v - V + w - W + x - X) + (1/5)(z - Z) \leq 3/12, \\
&\beta + 0.5(a - A + e - \Sigma + f - F + g - G) + (1/3)(k - K + l - L + m - M + q - Q + r - R + s - S) + \\
&\quad (1/4)(u - U + v - V + w - W + y - Y) + (1/5)(z - Z) \geq 3/12, \\
&\beta + 0.5(a - A + e - \Sigma + f - F + g - G) + (1/3)(k - K + l - L + m - M + q - Q + r - R + s - S) + \\
&\quad (1/4)(u - U + v - V + w - W + y - Y) + (1/5)(z - Z) \leq 3/12, \\
&\gamma + 0.5(b - B + e - \Sigma + h - H + i - Y) + (1/3)(k - K + n - N + o - O + q - Q + r - R + t - T) + \\
&\quad (1/4)(u - U + v - V + x - X + y - Y) + (1/5)(z - Z) \geq 2/12, \\
&\gamma + 0.5(b - B + e - \Sigma + h - H + i - Y) + (1/3)(k - K + n - N + o - O + q - Q + r - R + t - T) + \\
&\quad (1/4)(u - U + v - V + x - X + y - Y) + (1/5)(z - Z) \leq 2/12, \\
&\delta + 0.5(c - C + f - F + h - H + j - J) + (1/3)(l - L + n - N + p - P + q - Q + s - S + t - T) + \\
&\quad (1/4)(u - U + w - W + x - X + y - Y) + (1/5)(z - Z) \geq 2/12, \\
&\delta + 0.5(c - C + f - F + h - H + j - J) + (1/3)(l - L + n - N + p - P + q - Q + s - S + t - T) + \\
&\quad (1/4)(u - U + w - W + x - X + y - Y) + (1/5)(z - Z) \leq 2/12, \\
&\epsilon + 0.5(d - D + g - G + i - Y + j - J) + (1/3)(m - M + o - O + p - P + r - R + s - S + t - T) + \\
&\quad (1/4)(v - V + w - W + x - X + y - Y) + (1/5)(z - Z) \geq 2/12, \\
&\epsilon + 0.5(d - D + g - G + i - Y + j - J) + (1/3)(m - M + o - O + p - P + r - R + s - S + t - T) + \\
&\quad (1/4)(v - V + w - W + x - X + y - Y) + (1/5)(z - Z) \leq 2/12,
\end{aligned}$$

(\* monotonicity \*)

$$\begin{aligned}
&\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + (a - A) + (b - B) + (c - C) + (d - D) + (e - \Sigma) + (f - F) + (g - G) + (h - H) + \\
&\quad (i - Y) + (j - J) + (k - K) + (l - L) + (m - M) + (n - N) + (o - O) + (p - P) + (q - Q) + \\
&\quad (r - R) + (s - S) + (t - T) + (u - U) + (v - V) + (w - W) + (x - X) + (y - Y) + (z - Z) \geq 1, \\
&\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + (a - A) + (b - B) + (c - C) + (d - D) + (e - \Sigma) + (f - F) + (g - G) + (h - H) + \\
&\quad (i - Y) + (j - J) + (k - K) + (l - L) + (m - M) + (n - N) + (o - O) + (p - P) + (q - Q) + \\
&\quad (r - R) + (s - S) + (t - T) + (u - U) + (v - V) + (w - W) + (x - X) + (y - Y) + (z - Z) \leq 1,
\end{aligned}$$

$$\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0, \delta \geq 0, \epsilon \geq 0,$$

$$\alpha + a - A \geq 0, \alpha + b - B \geq 0, \alpha + c - C \geq 0, \alpha + d - D \geq 0,$$

$$\beta + a - A \geq 0, \beta + e - \Sigma \geq 0, \beta + f - F \geq 0, \beta + g - G \geq 0,$$

$$\gamma + b - B \geq 0, \gamma + e - \Sigma \geq 0, \gamma + h - H \geq 0, \gamma + i - Y \geq 0,$$

$$\delta + c - C \geq 0, \delta + f - F \geq 0, \delta + h - H \geq 0, \delta + j - J \geq 0,$$

$$\epsilon + d - D \geq 0, \epsilon + g - G \geq 0, \epsilon + i - Y \geq 0, \epsilon + j - J \geq 0,$$

$$\alpha + a - A + b - B + k - K \geq 0, \alpha + a - A + c - C + l - L \geq 0, \alpha + a - A + d - D + m - M \geq 0,$$

$$\alpha + b - B + c - C + n - N \geq 0, \alpha + b - B + d - D + o - O \geq 0, \alpha + c - C + d - D + p - P \geq 0,$$

$$\beta + a - A + e - \Sigma + k - K \geq 0, \beta + a - A + f - F + l - L \geq 0, \beta + a - A + d - D + m - M \geq 0,$$

$$\beta + e - \Sigma + f - F + q - Q \geq 0, \beta + e - \Sigma + g - G + r - R \geq 0, \beta + f - F + g - G + s - S \geq 0,$$

$$\gamma + b - B + e - \Sigma + k - K \geq 0, \gamma + b - B + h - H + n - N \geq 0, \gamma + b - B + i - Y + o - O \geq 0,$$

$$\gamma + e - \Sigma + h - H + q - Q \geq 0, \gamma + e - \Sigma + i - Y + r - R \geq 0, \gamma + h - H + i - Y + t - T \geq 0,$$

$$\delta + c - C + f - F + l - L \geq 0, \delta + c - C + h - H + n - N \geq 0, \delta + c - C + j - J + p - P \geq 0,$$

$$\delta + f - F + h - H + q - Q \geq 0, \delta + f - F + j - J + s - S \geq 0, \delta + h - H + j - J + t - T \geq 0,$$

$$\epsilon + d - D + g - G + m - M \geq 0, \epsilon + d - D + i - Y + o - O \geq 0, \epsilon + d - D + j - J + p - P \geq 0,$$

$$\epsilon + g - G + i - Y + r - R \geq 0, \epsilon + g - G + j - J + s - S \geq 0, \epsilon + i - Y + j - J + t - T \geq 0,$$

$$\alpha + a - A + b - B + c - C + k - K + l - L + n - N + u - U \geq 0,$$

$$\alpha + a - A + b - B + d - D + k - K + m - M + o - O + v - V \geq 0,$$

$$\alpha + a - A + c - C + d - D + l - L + m - M + p - P + w - W \geq 0,$$

$$\alpha + b - B + c - C + d - D + n - N + o - O + p - P + x - X \geq 0,$$

$$\beta + a - A + e - \Sigma + f - F + k - K + l - L + q - Q + u - U \geq 0,$$

$$\beta + a - A + e - \Sigma + g - G + k - K + m - M + r - R + v - V \geq 0,$$

$$\beta + a - A + f - F + g - G + l - L + m - M + s - S + w - W \geq 0,$$

$$\beta + e - \Sigma + f - F + g - G + q - Q + r - R + s - S + y - Y \geq 0,$$

$$\gamma + b - B + e - \Sigma + h - H + k - K + n - N + q - Q + u - U \geq 0,$$

$$\gamma + b - B + e - \Sigma + i - Y + k - K + o - O + r - R + v - V \geq 0,$$

$$\gamma + b - B + h - H + i - Y + n - N + o - O + t - T + x - X \geq 0,$$

$$\gamma + e - \Sigma + h - H + i - Y + q - Q + r - R + t - T + y - Y \geq 0,$$

$$\delta + c - C + f - F + h - H + l - L + n - N + q - Q + u - U \geq 0,$$

$$\delta + c - C + f - F + j - J + l - L + p - P + s - S + w - W \geq 0,$$

```

δ+c-C+h-H+j-J+n-N+p-P+t-T+x-X ≥ 0,
δ+f-F+h-H+j-J+q-Q+s-S+t-T+y-Y ≥ 0,
ε+d-D+g-G+i-Y+m-M+o-O+r-R+v-V ≥ 0,
ε+d-D+g-G+j-J+m-M+p-P+s-S+w-W ≥ 0,
ε+d-D+i-Y+j-J+o-O+p-P+t-T+x-X ≥ 0,
ε+g-G+i-Y+j-J+r-R+s-S+t-T+y-Y ≥ 0,
α+a-A+b-B+c-C+d-D+k-K+l-L+m-M+n-N+
  o-O+p-P+u-U+v-V+w-W+x-X+z-Z ≥ 0,
β+a-A+e-Σ+f-F+g-G+k-K+l-L+m-M+q-Q+r-R+
  s-S+u-U+v-V+w-W+y-Y+z-Z ≥ 0,
γ+b-B+e-Σ+h-H+i-Y+k-K+n-N+o-O+q-Q+r-R+
  t-T+u-U+v-V+x-X+y-Y+z-Z ≥ 0,
δ+c-C+f-F+h-H+j-J+l-L+n-N+p-P+q-Q+s-S+
  t-T+u-U+w-W+x-X+y-Y+z-Z ≥ 0,
ε+d-D+g-G+i-Y+j-J+m-M+o-O+p-P+r-R+s-S+
  t-T+v-V+w-W+x-X+y-Y+z-Z ≥ 0,
(* interaction values *)
a-A ≤ 0,
b-B ≥ e-Σ, e-Σ ≥ b-B, e-Σ ≥ 0},
{ξ, α, β, γ, δ, ε, a, A, b, B, c, C, d, D, e, Σ, f, F, g, G, h, H, i, Y, j, J, k, K, l, L,
  m, M, n, N, o, O, p, P, q, Q, r, R, s, S, t, T, u, U, v, V, w, W, x, X, y, Y, z, Z}]
{0.0856947, {ξ → 0.0856947, α → 0.253349, β → 0.280611, γ → 0.239009, δ → 0.239009,
  ε → 0.28001, a → 0, A → 0, b → 0, B → 0, c → 0.0654302, C → 0, d → 0.0327151,
  D → 0, e → 0, Σ → 0, f → 0, F → 2.9649 × 10-16, g → 0, G → 0.0327151, h → 0,
  H → 0.239009, i → 0, Y → 0.162502, j → 0, J → 0.195217, k → 0, K → 0.182466, l → 0,
  L → 0.280611, m → 0, M → 0.138674, n → 3.86584 × 10-17, N → 0, o → 0, O → 0.076507,
  p → 0, P → 0.109222, q → 3.86584 × 10-17, Q → 0, r → 0, R → 0.076507, s → 0,
  S → 0.0437919, t → 0.219045, T → 0, u → 0.430362, U → 0, v → 0.258973, V → 0,
  w → 0.324403, W → 0, x → 0.0875837, X → 0, y → 0.153014, Y → 0, z → 0, Z → 0.326292}}

```

# Bibliografia

- [1] J.F. Banzhaf, Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis, *Rutgers Law Review* **19** (1965) 317-343.
- [2] J. Barzilai, Consistency measures for pairwise comparison matrices, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* **7** (3) (1998) 123-132.
- [3] S. Bortot and R.A. Marques Pereira. Misure di Choquet, orness e indici di Shapley, *Atti del XXVII Convegno AMASES dell'Associazione per la Matematica Applicata alle Scienze Economiche e Sociali*, Cagliari (2003) 105-108.
- [4] A. Chateauneuf, J.Y. Jaffray, Some characterizations of lower probabilities and other monotone capacities through the use of Möbius inversion, *Mathematical Social Sciences* **17** (1989) 263-283.
- [5] G. Choquet, Theory of capacities, *Annales de l'Institut Fourier* **5** (1953) 131-295.
- [6] M.H. De Groot, Reaching a Consensus, *Journal of the American Statistical Association*, **69** (1974) 118-121.
- [7] J.J. Dujmovic, Weighted conjunctive and disjunctive means and their application in system evaluation, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, **461-497** (1974) 147-158.
- [8] M. Fedrizzi, M. Fedrizzi and R.A. Marques Pereira, Soft consensus and network dynamics in group decision making, *Intl. J. Intelligent Systems* **14** (1999) 63-77.
- [9] P.C. Fishburn *Utility theory for decision making* Wiley, New York, 1970.
- [10] J. Fodor, J.L. Marichal and M. Roubens, Characterization of the ordered weighted averaging operators, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems* **3** (2) (1995) 236-240.
- [11] M. Grabisch, On equivalence classes of fuzzy connectives - The case of fuzzy integrals, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems* **3** (1) (1995) 96-109.
- [12] M. Grabisch, Fuzzy integral in multicriteria decision making, *Fuzzy Sets and Systems* **69** (1995) 279-298.

- [13] M. Grabisch, The application of fuzzy integrals in multicriteria decision making, *European Journal of Operational Research* **89** (1996) 445-456.
- [14] M. Grabisch,  $k$ -order additive discrete fuzzy measures and their representation, *Fuzzy Sets and Systems* **92** (1997) 167-189.
- [15] M. Grabisch, Alternative representations of discrete fuzzy measures for decision making, *Intl. J. of Uncertainty, Fuzzyness and Knowledge-Based Systems* **5** (5) (1997) 587-607.
- [16] M. Grabisch, The Interaction and Möbius Representations of Fuzzy Measures on Finite Spaces,  $k$ -Additive Measures: A Survey, in: M. Grabisch, T. Murofushi and M. Sugeno (eds.) *Fuzzy Measures and Integrals: Theory and Applications*, Springer-Verlag (1999) 70-93.
- [17] M. Grabisch, H.T. Nguyen and E.A. Walker, *Foundamentals of Uncertainty Calculi with Applications to Fuzzy Inference*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [18] M. Grabisch and C. Labreuche, How to Improve Acts: An Alternative Representation of the Importance of Criteria in MCDM, *Intl. J. of Uncertainty, Fuzzyness and Knowledge-Based Systems* vol. 9, no. 2 (2001) 145-157
- [19] M. Grabisch and M. Roubens, Equivalent representations of a set function with applications to decision making, in: *6th IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, Barcellona, Spain, (1997) 1209-1213.
- [20] A. Kandel and W.J. Byatt, Fuzzy sets, fuzzy algebra, and fuzzy statistics, *Proc. IEEE* **66** (1978) 1619-1639.
- [21] J.L. Marichal, Aggregation operators for multicriteria decision aid, Ph.D. Thesis, University of Liège, Liège, Belgium, 1998.
- [22] J.L. Marichal, Behavioral analysis of aggregation in multicriteria decision aid, in: *Proc. 3rd Intl. Workshop on Preferences and Decisions*, Trento (2000) 71-80.
- [23] J.L. Marichal, Behavioral Analysis of Aggregation in Multicriteria Decision Aid, Preprint 0006, GEMME, Faculty of Economics, University of Liège, Liège, Belgium (2000).
- [24] R.A. Marques Pereira and S. Bortot. Consensual Dynamics, Stochastic Matrices, Choquet Measures, and Shapley Aggregation, *Proc. 22nd Linz Seminar on "Valued Relations and Capacities in Decision Theory"*, Linz, Austria (2001) 78-80.
- [25] R.A. Marques Pereira and S. Bortot. Choquet measures in multiagent decisions, *Atti del XXV Convegno AMASES dell'Associazione per la Matematica Applicata alle Scienze Economiche e Sociali*, Firenze (2001) 289-292.

- [26] R.A. Marques Pereira and S. Bortot. Choquet measures and inconsistent pairwise comparison matrices, an extension of Saaty's A.H.P., *Proc. 4th International Workshop on Preferences and Decisions TRENTO 2003*, Trento (2003), 75-80.
- [27] R.A. Marques Pereira and S. Bortot. Choquet measures, Shapley values, and inconsistent pairwise comparison matrices: an extension of Saaty's A.H.P., *Proc. 25th Linz Seminar on Fuzzy Set Theory: 'Mathematics of Fuzzy Systems*, Linz, Austria (2004) 130-135.
- [28] T. Murofushi, A technique for reading fuzzy measures (I): the Shapley value with respect to a fuzzy measure, in: *2nd Fuzzy Workshop*, Nagaoka, Japan (1992) 39-48 (in giapponese).
- [29] T. Murofushi and S. Soneda, Techniques for reading fuzzy measures (III): interaction index, in: *9th Fuzzy System Symposium*, Sapporo, Japan (1993) 693-696 (in giapponese).
- [30] T. Murofushi and M. Sugeno, An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral with respect to a fuzzy measure, *Fuzzy Sets and Systems* **29** (1989) 201-227.
- [31] T. Murofushi and M. Sugeno, Fuzzy measures and fuzzy integrals, in: M. Grabisch, T. Murofushi and M. Sugeno (eds.) *Fuzzy Measures and Integrals: Theory and Applications*, Springer-Verlag (1999) 3-41.
- [32] G.C. Rota, On the foundations of combinatorial theory I. Theory of Möbius functions, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* **2** (1964) 340-368.
- [33] M. Roubens, Interaction between criteria and definition of weights in MCDA problems, in: *44th Meeting of the European Working Group "Multicriteria Aid for Decisions"*, Brussels, Belgium, 1996.
- [34] T.L. Saaty, A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures, *Journal of Mathematical Psychology* **15** (1977) 234-281.
- [35] T.L. Saaty, Axiomatic foundation of the analytic hierarchy process, *Management Science* **32** (7) (1986) 841-855.
- [36] T.L. Saaty, *Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process*, RWS Publications, Pittsburgh PA, 1988. Original version published by McGraw-Hill, 1980.
- [37] T.L. Saaty and L.G. Vargas, *Prediction, Projection and Forecasting*, Kluwer Academic Publishers, Norwell MA, 1991.
- [38] D. Schmeidler, Integral representation without additivity, *Proceedings of the American Mathematical Society* **97** (2) (1986) 255-261.

- [39] D. Schmeidler, Subjective probability and expected utility without additivity, *Econometrica* **57** (3) (1989) 571-587.
- [40] L.S. Shapley, A value for  $n$ -person games, in: H.W. Kuhn and A.W. Tucker (eds.) *Contributions to the Theory of Games*, vol. II, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press (1953) 307-317.
- [41] M. Sugeno, Theory of fuzzy integrals and its applications, Ph.D. Thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, 1974.
- [42] M. Sugeno, Fuzzy measures and fuzzy integrals - a survey, in: M.M. Gupta, G.N. Saridis and B.R. Gaines (eds), *Fuzzy Automata and decision precesses*, North-Holland, New York (1977) 89-102.
- [43] R.R. Yager, On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics* **18** (1988) 183-190.