UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI TRIESTE

FACOLTA' DI ECONOMIA E COMMERCIO

DOTTORATO DI RICERCA IN

MATEMATICA APPLICATA AI PROBLEMI ECONOMICI

VII CICLO

CONCAVITA' GENERALIZZATA: CASO SCALARE E CASO VETTORIALE

DOTTORANDO

Dott. Riccardo CAMBINI '68

TUTORE E RELATORE

Prof.ssa Piera MAZZOLENI

COORDINATORE DEL DOTTORATO DI RICERCA

Prof. Marco ZECCHIN

ANNO ACCADEMICO 1993-1994

Indice

Introduzione 1

1. Concavità generalizzata: caso scalare 4

1.1. *Definizioni e principali proprietà* 6

1.1.1. Funzioni di tipo concavo 7

1.1.2. Funzioni di tipo quasi-concavo 10

1.1.3. Funzioni di tipo pseudo-concavo 12

1.1.4. Relazioni di inclusione tra le classi 13

1.1.5. Proprietà intercorrenti tra le classi 16

1.1.6. Differenziazioni tra le classi di tipo quasi-concavo 19

1.1.7. Quasi-concavità e comportamento del consumatore 23

1.2. *Funzioni concave generalizzate e continuità* 25

1.2.1. Funzioni concave generalizzate semicontinue superiormente 27

1.2.2. Funzioni concave generalizzate continue 29

1.3. *Funzioni concave generalizzate differenziabili* 31

1.3.1. Alcune caratterizzazioni 31

1.3.2. Funzioni fortemente pseudo-concave 36

1.3.3. Altre caratterizzazioni 37

1.4. *Trasformazioni monotone e teoremi di composizione* 40

1.4.1. Trasformazioni monotone di una funzione 40

1.4.2. Composizione di funzioni scalari concave generalizzate 43

1.4.3. Struttura algebrica delle funzioni 48

1.5. *Funzioni affini generalizzate* 51
1.5.1. Definizioni e principali proprietà 52
1.5.2. Relazioni di inclusione tra le classi 55
1.5.3. Funzioni affini generalizzate differenziabili 59
1.5.4. Funzioni affini generalizzate e monotonia 62
1.5.5. Trasformazioni di funzioni affini generalizzate 64
1.6. *Funzioni concavo-trasformabili* 68
1.6.1. Funzioni fortemente concave rispetto ad una funzione h 68
1.6.2. Funzioni G-concave 70
1.6.3. Funzioni log-concave 74
1.6.4. Funzioni r-concave 75
1.6.5. Funzioni (h,ϕ)-concave 77
1.6.6. Funzioni (α,λ)-concave 79
Bibliografia 83

2. Concavità generalizzata: caso vettoriale **93**
2.1. *Definizioni e relazioni di inclusione tra le classi* 94
2.1.1. Funzioni di tipo concavo 95
2.1.2. Funzioni di tipo quasi-concavo 97
2.1.3. Funzioni di tipo strettamente pseudo-concavo 102
2.1.4. Relazioni di inclusione tra le classi 103
2.1.5. Quasi-concavità vettoriale e modello del consumatore 105
2.2. *Funzioni vettoriali differenziabili concave generalizzate* 107
2.2.1. Altre classi di funzioni vettoriali concave generalizzate 107
2.2.2. Relazioni con le classi precedentemente definite 108
2.3. *Caratterizzazione del primo ordine di alcune sottoclassi* 112
2.4. *Crescenza, monotonia e teoremi di composizione* 117
2.4.1. Crescenza per funzioni vettoriali e teoremi di composizione 117
2.4.2. Cammini monotoni e loro proprietà 121
2.4.3. Mappe monotone generalizzate 125
Bibliografia 127

3. Condizioni di ottimalità per problemi scalari e vettoriali 130
3.1. *Definizioni e concetti preliminari* 131
3.1.1. Il cono tangente di Bouligand 131
3.1.2. Funzioni direzionalmente derivabili con regolarità 133
3.1.3. Polare positivo di un cono 136
3.2. *Problemi di ottimo scalare* 137
3.2.1. Problema in esame e concavità generalizzata nel punto 137
3.2.2. Convessità dell'insieme dei massimi globali 140
3.2.3. Condizioni di ottimalità lungo le direzioni 141
3.2.4. Ottimalità globale di un massimo locale 146
3.2.5. Ottimalità globale di un punto critico 148
3.2.6. Sufficienza delle condizioni di Karush-Kuhn-Tucker 149
3.2.7. Ottimalità locale e cono tangente 150
3.2.8. Condizioni di ottimalità per regioni ammissibili regolari 155
3.2.9. Concavità generalizzata e problemi di minimo 159
3.3. *Problemi di estremo vettoriale* 160
3.3.1. Il problema multiobiettivo 160
3.3.2. Condizioni di efficienza lungo le direzioni 162
3.3.3. Efficienza locale ed efficienza globale 168
3.3.4. Efficienza locale e cono tangente 169
3.3.5. Pseudoconcavità e punti critici 175
3.3.6. Condizioni di ottimalità vettoriali di tipo "Kuhn-Tucker" 177
Bibliografia 178

Notazioni

$x \in X$, $x \notin X$	x è un elemento di X, x non è un elemento di X
$A \subseteq B$, $A \subset B$	A è un sottoinsieme di B, A è un sottoinsieme proprio di B
$A \not\subset B$	A non è un sottoinsieme di B
$\emptyset$	insieme vuoto
$\cup$, $\cap$	unione, intersezione
$A \times B$	prodotto cartesiano tra gli insiemi A e B
$A \backslash B$	insieme degli elementi di A non presenti in B
$\Re$	insieme dei numeri reali
$\Re^n$	spazio euclideo n-dimensionale
$x \geqq 0$	vettore non-negativo ($x_i \geq 0$ $\forall i=1,\ldots,n$)
$x \geq 0$	vettore semipositivo ($x \geqq 0$, $x \neq 0$)
$x > 0$	vettore positivo ($x_i > 0$ $\forall i=1,\ldots,n$)
$\Re^+$	insieme dei numeri reali non-negativi
$\Re^{++}$	insieme dei numeri reali positivi
$\Re^-$	insieme dei numeri reali non-positivi
$\Re^=$	insieme dei numeri reali negativi
$\Re^n_+$	insieme dei vettori n-dimensionali non-negativi
$\Re^n_{++}$	insieme dei vettori n-dimensionali positivi
$\Re^n_-$	insieme dei vettori n-dimensionali non-positivi
$\Re^n_=$	insieme dei vettori n-dimensionali negativi
$x \geqq y$	x non-minore di y ($x_i \geq y_i$ $\forall i=1,\ldots,n$)
$x \geq y$	x semimaggiore di y ($x \geqq y$, $x \neq y$)
$x > y$	x maggiore di y ($x_i > y_i$ $\forall i=1,\ldots,n$)

Introduzione

La concavità generalizzata è uno dei settori di ricerca più studiati nell'ambito della programmazione matematica e della microeconomia, così come è testimoniato dal considerevole numero di articoli apparsi in questi ultimi anni nella letteratura nazionale ed internazionale.

L'esigenza di estendere le proprietà delle funzioni concave relative all'ottimizzazione, quali ad esempio l'ottimalità globale di un punto critico o di un punto che verifica le condizioni di Kuhn-Tucker, ha motivato l'introduzione di varie classi di funzioni, ciascuna delle quali con un ruolo specifico nell'ambito della ottimizzazione e nell'ambito di certe teorie economiche.

Difatti, a partire dal pionieristico lavoro di Arrow-Enthowen del 1961, è stato introdotto un notevole numero di classi di funzioni concave generalizzate; il proliferarsi di tali classi ha portato ad uno studio sistematico delle relazioni tra loro intercorrenti, studio che in parte può considerarsi consolidato dal momento che sono disponibili oggi testi di riferimento ad hoc.

Nonostante ciò, la ricerca non è da considerarsi conclusa, proseguendo infatti in varie direzioni quali ad esempio la caratterizzazione dei punti critici (invessità) e l'estensione di vari teoremi nell'ambito della teoria della dualità.

Di fronte al grande interesse che tutt'oggi la concavità generalizzata scalare suscita in molti ricercatori, non vi è particolare attenzione alla concavità generalizzata per funzioni vettoriali, così come si evince da un'analisi effettuata nella letteratura specializzata; non si va infatti, nel caso di problemi paretiani, al di là della concavità generalizzata componente per componente e, nel caso di problemi di estremo rispetto ad un cono, al di là di alcune definizioni e proprietà mirate al raggiungimento di specifici obiettivi.

Scopo di questa Tesi è quello di costruire, sul modello scalare, una teoria della concavità generalizzata per funzioni multiobiettivo: a partire da relazioni d'ordine indotte da coni in spazi di dimensione finita ([1]) si introducono varie classi di funzioni concave generalizzate, se ne studiano proprietà e caratterizzazioni (sia nel caso differenziabile e non) oltre che le interrelazioni esistenti tra le stesse. Le classi introdotte vengono successivamente "calate" nell'ambito dell'ottimizzazione vettoriale e viene evidenziato il loro ruolo nello stabilire condizioni necessarie e/o sufficienti di ottimalità.

Lo studio della concavità generalizzata vettoriale non poteva prescindere da un preliminare studio sistematico dei principali risultati relativi alla concavità generalizzata scalare; tale studio, svolto nel primo capitolo, ha portato ad introdurre nuove classi di funzioni ed a determinare vari risultati tendenti a caratterizzare funzioni appartenenti ad una certa classe ma non ad un'altra. Nel primo capitolo è stata inoltre affrontata l'estensione del concetto di funzione affine; tale studio ha portato alla definizione di alcune nuove classi di funzioni, dette affini generalizzate, per le quali è stata svolta una analisi organica delle proprietà, con particolare riguardo a quelle relative alla monotonia.

Nel secondo capitolo è stata affrontata l'estensione a livello vettoriale dei risultati propri del caso scalare; l'approccio scelto è stato quello di rimanere in spazi vettoriali n-dimensionali e considerare, nel codominio delle funzioni vettoriali, degli ordinamenti parziali indotti da un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto. Sono state definite con questo approccio tutta una serie di classi di funzioni che estendono quelle scalari; per tali classi è stato svolto uno studio analogo a quello seguito nel caso scalare, tentando di evidenziare le caratteristiche delle varie classi e verificare quali proprietà del caso scalare sono verificate anche a livello vettoriale. Tale studio ha portato ad esempio ad osservare che non esiste in generale una caratterizzazione al primo ordine per le classi di funzioni concave generalizzate vettoriali; sono stati inoltre determinati vari teoremi di composizione per funzioni concave generalizzate vettoriali che generalizzano, anche nel particolare caso delle funzioni scalari, i risultati già noti in letteratura.

Nel terzo capitolo infine è stato evidenziato il ruolo della concavità generalizzata nell'ottimizzazione conducendo uno studio basato su un approccio che

[1] Data la carenza di studi sulla concavità generalizzata per funzioni vettoriali, in questa Tesi ci siamo limitati a considerare ordinamenti indotti da coni contenuti in spazi di dimensione finita. Le possibili generalizzazioni ad ordinamenti in spazi di dimensione infinita saranno oggetto di successivi studi.

ha permesso di trattare, senza distinzione, sia il caso scalare sia quello vettoriale. Il problema delle condizioni di ottimalità è stato affrontato in un modo diverso da quello usualmente trattato in letteratura; ci si è infatti rivolti verso condizioni di ottimalità per vertici di insiemi stellati, analizzando l'apporto dato dalla concavità generalizzata nel confronto tra l'ottimalità locale e l'ottimalità lungo le direzioni ammissibili. Tale approccio ha permesso tra l'altro di riottenere come semplici corollari vari risultati della letteratura. Altre condizioni di ottimalità sono poi state determinate, abbandonando l'ipotesi dell'insieme stellato, studiando il comportamento della funzione obiettivo lungo le direzioni del cono tangente di Bouligand.

1. Concavità generalizzata: caso scalare

La concavità generalizzata è uno dei settori di ricerca più ampiamente studiati nell'ambito della microeconomia e della programmazione matematica, così come è testimoniato dal considerevole numero di articoli apparsi nella letteratura in questi ultimi quindici anni. Con essa si è cercato di estendere il più possibile le classi delle funzioni aventi alcune delle più interessanti proprietà delle funzioni concave, come ad esempio l'ottimalità globale di un massimo locale o di un punto stazionario.

Tale estensione può avvenire secondo diversi approcci; al riguardo generalizzazioni estremamente studiate sono quelle che legano la concavità e le medie [21, 28, 44, 47, 73]. Una funzione concava difatti è tale che il suo valore calcolato nella media aritmetica di più punti non è inferiore alla media aritmetica (con gli stessi pesi) della funzione nei vari punti; la generalizzazione è quindi immediata, dal momento che basta sostituire la media aritmetica con un qualsiasi altro tipo di media. Tale approccio permette di sfruttare le proprietà delle funzioni concave per classi di funzioni estremamente generali [5, 10].

L'approccio che verrà seguito in questo capitolo è invece quello dovuto a De Finetti [29] che nel 1949 introdusse per la prima volta una classe di funzioni, contenente propriamente quella delle funzioni concave, caratterizzata dall'avere gli insiemi di livello superiore convessi; in seguito Fenchel [39] nel 1951 ne studiò nuove importanti caratterizzazioni.

Tale classe, a tutti oggi nota come classe delle funzioni quasi-concave, ebbe subito una importanza rilevante nella teoria microeconomica del comportamento del consumatore [6, 63, 87], nella quale si cerca di assiomatizzare il comportamento di un consumatore che sceglie, in base al proprio reddito ed ai propri gusti, i beni da acquistare. Anche nell'ambito della ottimizzazione tali studi iniziali portarono ad importanti risultati, tra tutti il lavoro di Arrow-Enthoven [1].

In seguito, negli anni 1964-1976, furono introdotte e studiate diverse classi di funzioni concave generalizzate in rapporto sia alle proprietà dei problemi di ottimo sia alle applicazioni economiche [5, 41-43, 57, 64, 65, 70, 78, 91]. Numerosi sono stati in seguito i contributi di vari autori tesi alla determinazione di nuove proprietà e caratterizzazioni, il che ha incrementato sempre più l'interesse sull'argomento tanto che dal 1980 si svolgono periodici congressi internazionali sulla Concavità Generalizzata [13, 71, 87, 88].

In questo capitolo vengono introdotte e studiate le più note classi di funzioni concave generalizzate introdotte in letteratura, unitamente a cinque nuove classi che sono state recentemente introdotte [19]; tali classi sono dapprima considerate senza alcuna ipotesi di continuità o derivabilità, al fine di meglio evidenziarne le pecurialità e renderne possibile un diretto confronto; di esse vengono, nel paragrafo 1.1, sistematicamente studiate le principali proprietà, le relazioni di inclusione, le differenziazioni teoriche.

Nel paragrafo 1.2 vengono studiate, per ogni classe precedentemente introdotta, proprietà e caratterizzazioni sotto ipotesi di semicontinuità superiore e di continuità e, nel successivo paragrafo 1.3, sotto ipotesi di differenziabilità.

Nel paragrafo 1.4 si mostra in quali casi la trasformazione monotona di una funzione concava generalizzata è ancora concava generalizzata; viene inoltre studiata la concavità generalizzata della composizione di più funzioni scalari concave generalizzate; viene infine analizzata la struttura algebrica di alcune delle classi di funzioni concave generalizzate definite.

Nel paragrafo 1.5 si introducono nuove classi di funzioni che estendono il concetto di affinità di una funzione; esse vengono inizialmente studiate sotto ipotesi sia di non-continuità che di continuità, in seguito si dimostra come tali classi estendano anche il concetto di monotonia proprio delle funzioni ad una sola variabile.

Nel paragrafo 1.6 viene infine fornita una carrellata di altre classi di funzioni concave generalizzate che possono essere "trasformate" in funzioni concave; anche di tali classi sono forniti esempi, proprietà e relazioni di inclusione.

1.1. Definizioni e principali proprietà

In questo paragrafo saranno fornite le definizioni delle varie funzioni concave generalizzate e ne saranno evidenziate caratterizzazioni ottenibili senza alcuna assunzione riguardo alle proprietà di continuità o differenziabilità della funzione stessa.
Verranno considerate sia le classi di funzioni scalari concave generalizzate note in letteratura [5, 6, 29, 32, 34, 39, 41, 45, 47, 64, 65, 70, 72, 73, 75, 78, 91], che delle nuove classi di funzioni concave generalizzate [19] le quali, in assenza di ipotesi di continuità, risultano più ampie di quelle note in letteratura mantenendone le principali proprietà relative all'ottimizzazione ed alle trasformazioni monotone crescenti.
Le varie classi di funzioni concave generalizzate note in letteratura sono, per la maggior parte, individuate richiedendo un loro determinato comportamento su un generico segmento di estremi x ed y in corrispondenza del verificarsi o meno delle relazioni $f(y)\geq f(x)$ oppure $f(y)>f(x)$; partendo da questa semplice osservazione e dal fatto che anche le funzioni concave e strettamente concave possono essere definite nel modo sopra descritto, si introducono cinque nuove classi di funzioni concave generalizzate richiedendo loro un diverso e specifico comportamento in corrispondenza del verificarsi delle relazioni $f(y)=f(x)$ ed $f(y)>f(x)$.
Si inizierà lo studio con le funzioni di tipo concavo, per passare poi alle funzioni di tipo quasi-concavo ed a quelle di tipo pseudo-concavo; successivamente verranno studiate le varie interrelazioni e differenziazioni esistenti tra le nuove classi e quelle già note in letteratura ([2]).

---

[2] In questo lavoro considereremo principalmente la concavità generalizzata e non la convessità generalizzata, al riguardo si ricorda che una funzione f è detta convessa, strettamente convessa, quasi-convessa, etc. etc. (*.*cx) se la funzione -f risulta rispettivamente concava, strettamente concava, quasi-concava, etc. etc. (*.*cv); in seguito saranno esplicitamente messi in evidenza comunque tutti quei casi in cui la dualità tra convessità e concavità non segue questa semplice regola.

1.1.1. Funzioni di tipo concavo

Si inizia ricordando la definizione delle funzioni concave e strettamente concave; le origini dei concetti relativi a tali classi di funzioni risalgono all'inizio del secolo, nei lavori di Hölder [45], Jensen [47] e Minkowsky [72, 73].

Definizione 1.1.1 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C \to \Re$. f è detta:

concava [cv] se per ogni $x,y \in C$ vale la condizione:

$$f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(f(y)-f(x)) \quad \forall \lambda \in (0,1);$$

strettamente concava [s.cv] se per ogni $x,y \in C$, $x \neq y$, vale la condizione:

$$f(x+\lambda(y-x)) > f(x)+\lambda(f(y)-f(x)) \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Nel casi in cui l'insieme convesso C sia un intervallo dei reali abbiamo quindi che una funzione f è concava se e solo se il suo grafico giace non al disotto di ogni sua corda mentre risulta strettamente concava se e solo se il suo grafico giace al di sopra di ogni sua corda; ricordiamo inoltre che in questo caso specifico se la funzione f è concava allora ammette in ogni punto interno di C derivata destra e derivata sinistra [5, 39, 80] ed è ivi continua [80]. Quest'ultimo risultato può essere esteso anche a funzioni a più variabili; si dimostra infatti che una funzione concava definita su un insieme convesso $C \subseteq \Re^n$ è continua nell'interno relativo di C ([3]) ed in particolare se C è anche aperto allora è continua in tutto C [39, 81].
Una interessante caratterizzazione delle funzioni concave si può determinare [39] utilizzando il concetto di ipografo.

Definizione 1.1.2 Sia $f:C \to \Re$ una funzione definita su un convesso $C \subseteq \Re^n$.
L'insieme $H(f)=\{(x,\alpha) \in C \times \Re: f(x) \geq \alpha\}$ è detto *ipografo* di f ed è composto da tutti i punti di $C \times \Re$ giacenti sul grafico di f o al di sotto di esso.
L'insieme $P(f)=\{(x,\alpha) \in C \times \Re: f(x) \leq \alpha\}$ è detto *epigrafo* di f ed è composto da tutti i punti di $C \times \Re$ giacenti sul grafico di f o al di sopra di esso.

---

[3] Un insieme $A \subseteq \Re^n$ tale che $(x+\lambda(y-x)) \in A$ $\forall \lambda \in \Re$ $\forall x,y \in A$ è detto *insieme affine* (chiaramente un insieme affine è anche convesso). Per un insieme convesso $C \subseteq \Re^n$ l'intersezione di tutti gli insiemi affini contenenti C è detto *involucro convesso* di C. L'*interno relativo* di C è l'interno di C rispetto al suo involucro convesso.

Teorema 1.1.1 Sia $f:C\to\Re$ una funzione definita su un convesso $C\subseteq\Re^n$.
i) f è concava se e solo se il suo ipografo H(f) è un insieme convesso.
ii) f è convessa se e solo se il suo epigrafo P(f) è un insieme convesso.
Dim. Verifichiamo la proposizione solo per le funzioni concave.
Supponiamo che la funzione f sia concava e prendiamo due punti qualsiasi (x_1,α_1) e (x_2,α_2) di H(f) tali quindi che $f(x_1)\geq\alpha_1$ e $f(x_2)\geq\alpha_2$.
Poiché per ogni $\lambda\in(0,1)$ abbiamo $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\geq\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2$ il punto $(x,\alpha)=(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)=\lambda(x_1,\alpha_1)+(1-\lambda)(x_2,\alpha_2)$ appartiene a H(f) che risulta quindi un insieme convesso.
Supponiamo ora che H(f) sia un insieme convesso e quindi tale che per ogni sua coppia di punti (x_1,α_1) ed (x_2,α_2) e per ogni $\lambda\in(0,1)$ anche il punto $(x,\alpha)=(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)=\lambda(x_1,\alpha_1)+(1-\lambda)(x_2,\alpha_2)$ appartenga a H(f).
In particolare, presi due elementi qualsiasi x,y di C, considerando la coppia di punti di H(f) (x,f(x)) ed (y,f(y)) abbiamo $(\lambda y+(1-\lambda)x,\lambda f(y)+(1-\lambda)f(x))\in H(f)$ e quindi $f(\lambda y+(1-\lambda)x)\geq\lambda f(y)+(1-\lambda)f(x)\ \ \forall x,y\in C\ \ \forall\lambda\in(0,1)$. ◆

Recentemente è stata introdotta [77] una sottoclasse delle funzioni strettamente concave detta classe delle funzioni fortemente concave [7, 33, 34, 82, 87, 92, 93], avente molte applicazioni sia in economia (si vedano al riguardo i lavori [33, 41, 49, 60]) sia nell'ottimizzazione (relativamente alla convergenza di alcuni algoritmi iterativi per la ricerca del massimo di funzioni due volte differenziabili).

Definizione 1.1.3 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C\to\Re$. La funzione f è detta fortemente concava [f.cv] se esiste un reale $\alpha>0$ tale che per ogni $x,y\in C$ vale la condizione:

$$f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)+\lambda(f(y)-f(x))+\frac{1}{2}\alpha\lambda(1-\lambda)\|y-x\|^2\ \ \forall\lambda\in(0,1).$$

Una utile caratterizzazione di queste funzioni (4) è stata determinata in [82].

[4] Si osservi che nella definizione e nel teorema di caratterizzazione successivo il coefficiente reale 1/2 è superfluo; esso è presente per poter fornire una caratterizzazione priva di coefficienti per le funzioni fortemente concave di classe C^2.

Teorema 1.1.2 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f: C \rightarrow \Re$ una funzione a valori reali. La funzione f è fortemente concava se e solo se esiste un reale $\alpha > 0$ tale che la funzione $g(x) = f(x) + \frac{1}{2} \alpha x^T x$ è concava.

Dim. Vedasi il corollario 1.7.1. ♦

Come è stato accennato nell'introduzione, osservando che le funzioni concave e strettamente concave possono essere definite tramite il loro comportamento su un generico segmento di estremi x ed y, è possibile definire due nuove classi di funzioni di tipo concavo [19].
Si premette la seguente proprietà.

Proprietà 1.1.1 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f: C \rightarrow \Re$.

i) f è concava se e solo se per ogni $x, y \in C$ è verificata la condizione:
$$f(y) \geq f(x) \Rightarrow f(x + \lambda(y-x)) \geq f(x) + \lambda(f(y) - f(x)) \quad \forall \lambda \in (0,1);$$

ii) f è strettamente concava se e solo se per ogni $x, y \in C$, $x \neq y$, è verificata la condizione: $f(y) \geq f(x) \Rightarrow f(x + \lambda(y-x)) > f(x) + \lambda(f(y) - f(x)) \quad \forall \lambda \in (0,1)$.

Dim. La necessità dei punti i) e ii) è banale, verifichiamo quindi la sufficienza. Siano $x, y \in C$ qualsiasi, se $x = y$ si ha banalmente $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x) + \lambda(f(y)-f(x))$ $\forall \lambda \in (0,1)$; si assuma quindi $x \neq y$: se $f(y) \geq f(x)$ le due tesi sono verificate per ipotesi, se invece $f(x) > f(y)$ si ha per ipotesi $f(y+\alpha(x-y)) \geq f(y) + \alpha(f(x)-f(y))$ $\forall \alpha \in (0,1)$ $[f(y+\alpha(x-y)) > f(y) + \alpha(f(x)-f(y))$ per il punto ii)], ovvero posto $\lambda = 1-\alpha$ $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x) + \lambda(f(y)-f(x))$ $\forall \lambda \in (0,1)$ $[f(x+\lambda(y-x)) > f(x) + \lambda(f(y)-f(x))]$. ♦

Definizione 1.1.4 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f: C \rightarrow \Re$. f è detta:

semi concava [sm.cv] se per ogni $x, y \in C$ vale la condizione:
$$f(y) > f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x) + \lambda(f(y)-f(x)) \quad \forall \lambda \in (0,1);$$

semistrettamente concava [ss.cv] se per ogni $x, y \in C$ vale la condizione:
$$f(y) > f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x)) > f(x) + \lambda(f(y)-f(x)) \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Analogamente alle funzioni concave, f è detta semi convessa o semistrettamente convessa se -f è rispettivamente semi concava o semistrettamente concava; è interessante osservare che, direttamente dalle definizioni segue che una funzione è semistrettamente concava e semistrettamente convessa se e solo se è costante.

1.1.2. Funzioni di tipo quasi-concavo

Si introduce adesso la classe delle funzioni quasi-concave che è la classe più usata in economia e nell'ottimizzazione matematica dal momento che, come verrà mostrato, mantiene alcune importanti proprietà delle funzioni concave.

Definizione 1.1.5 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f: C \to \Re$. f è detta:

quasi-concava [qcv] se per ogni $x, y \in C$ vale la condizione:
$$f(y) \geq f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x) \quad \forall \lambda \in (0,1);$$

strettamente quasi-concava [s.qcv] se $\forall x, y \in C$, $x \neq y$, vale la condizione:
$$f(y) \geq f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x)) > f(x) \quad \forall \lambda \in (0,1);$$

semistrettamente quasi-concava [ss.qcv] se $\forall x, y \in C$ vale la condizione:
$$f(y) > f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x)) > f(x) \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Per ragioni di simmetria, si introducono ([5]) le seguenti tre ulteriori classi di funzioni di tipo quasi-concavo [19].

Definizione 1.1.6 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f: C \to \Re$. f è detta:

semi quasi-concava [sm.qcv] se per ogni $x, y \in C$ vale la condizione:
$$f(y) > f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x) \quad \forall \lambda \in (0,1);$$

quasi-concava in senso esteso [e.qcv] se $\forall x, y \in C$ vale la condizione:
$$f(y) = f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x) \quad \forall \lambda \in (0,1);$$

strettamente quasi-concava in senso esteso [es.qcv] se $\forall x, y \in C$, $x \neq y$, si ha:
$$f(y) = f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x)) > f(x) \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Vale la seguente proprietà di immediata verifica.

Proprietà 1.1.2 Sia f una funzione a valori reali definita su un convesso $C \subseteq \Re^n$.

i) la funzione f è qcv se e solo se è sia sm.qcv sia e.qcv;

ii) la funzione f è s.qcv se e solo se è sia ss.qcv sia es.qcv.

---

[5] Si osservi che le definizioni di funzione quasi-concava e strettamente quasi-concava possono rispettivamente essere espresse come $f(x+\lambda(y-x)) \geq \min\{f(x), f(y)\}$ $\forall \lambda \in (0,1)$ $\forall x, y \in C$ ed $f(x+\lambda(y-x)) > \min\{f(x), f(y)\}$ $\forall \lambda \in (0,1)$ $\forall x, y \in C$, $x \neq y$.

Storicamente una funzione quasi-concava è stata definita [29], generalizzando una proprietà delle funzioni concave, come funzione avente tutti gli insiemi di livello superiore convessi; per poter stabilire tale risultato [39] si premette la seguente definizione.

Definizione 1.1.7 Sia f una funzione a valori reali, definita su un insieme convesso $C \subseteq \Re^n$, ed α un qualsiasi valore reale.
L'insieme $U(f,\alpha)=\{x\in C: f(x)\geq\alpha\}$ è detto *insieme di livello superiore* di f ed è la proiezione su C rispetto ad α dell'ipografo di f.
L'insieme $L(f,\alpha)=\{x\in C: f(x)\leq\alpha\}$ è detto *insieme di livello inferiore* di f ed è la proiezione su C rispetto ad α dell'epigrafo di f.
L'insieme $Y(f,\alpha)=U(f,\alpha)\cap L(f,\alpha)=\{x\in C: f(x)=\alpha\}$ è detto *superficie di livello* di f.
Gli insiemi $U°(f,\alpha)=\{x\in C: f(x)>\alpha\}$ ed $L°(f,\alpha)=\{x\in C: f(x)<\alpha\}$ sono infine detti rispettivamente *insieme di livello superiore stretto* ed *insieme di livello inferiore stretto* di f.

Teorema 1.1.3 Sia f una funzione a valori reali definita su un convesso $C \subseteq \Re^n$. Le tre seguenti condizioni sono equivalenti:

i) la funzione f è quasi-concava;
ii) gli insiemi di livello superiore $U(f,\alpha)$ di f sono insiemi convessi per ogni valore reale α;
iii) gli insiemi di livello superiore stretto $U°(f,\alpha)$ di f sono insiemi convessi per ogni valore reale α.

Dim. i)⇒ii) Sia $U(f,\alpha)$ un qualsiasi insieme di livello superiore di f e siano x_1 ed x_2 due punti qualsiasi di $U(f,\alpha)$, tali quindi che $f(x_1)\geq\alpha$ ed $f(x_2)\geq\alpha$; per la quasi-concavità di f abbiamo che $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq\min\{f(x_1),f(x_2)\}=\alpha$, da cui $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in U(f,\alpha)$, $\forall\lambda\in(0,1)$.
ii)⇒iii) Sia $U°(f,\alpha)$ un qualsiasi insieme di livello superiore stretto di f e siano x_1 ed x_2 due punti qualsiasi di $U°(f,\alpha)$, tali quindi che $f(x_1)>\alpha$ ed $f(x_2)>\alpha$; posto $\bar{\alpha}=\min\{f(x_1),f(x_2)\}$ risulta per costruzione che i punti x_1 ed x_2 appartengono all'insieme di livello superiore $U(f,\bar{\alpha})$ che è, per ipotesi, convesso; si ha quindi per ogni $\lambda\in(0,1)$ $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq\bar{\alpha}>\alpha$ e perciò anche l'insieme $U°(f,\alpha)$ è convesso.
iii)⇒i) Si supponga per assurdo che la funzione f non sia quasi-concava, ovvero che esistano due punti x_1 ed x_2 di C ed un valore reale $\bar{\lambda}\in(0,1)$ tali che $f(x_1)\geq f(x_2)>f(\bar{\lambda}x_1+(1-\bar{\lambda})x_2)$; posto $\alpha=f(\bar{\lambda}x_1+(1-\bar{\lambda})x_2)$ risulta che i punti x_1 ed x_2 appartengono a $U°(f,\alpha)$ che è un insieme convesso, si ha quindi per ogni $\lambda\in(0,1)$ $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)>\alpha=f(\bar{\lambda}x_1+(1-\bar{\lambda})x_2)$ il che è assurdo dal momento che $\bar{\lambda}\in(0,1)$. ♦

Ovviamente, in modo analogo a quanto fatto nel teorema precedente, si dimostra che una funzione f è quasi-convessa se e solo se i suoi insiemi di livello inferiore ed i suoi insiemi di livello inferiore stretto $L(f,\alpha)$ ed $L^\circ(f,\alpha)$ sono insiemi convessi per ogni valore reale α.
La caratterizzazione espressa nel Teorema 1.1.3 per le funzioni quasi-concave viene largamente utilizzata in economia; nella teoria del comportamento del consumatore, ad esempio, si richiede, per ogni dato paniere, la convessità dell'insieme dei panieri ad esso preferiti, ipotesi che implica, nel caso in cui esista una funzione di utilità per il consumatore, la convessità degli insiemi di livello superiore ovvero la quasi-concavità della stessa funzione di utilità.

1.1.3. Funzioni di tipo pseudo-concavo

Un'altra nota classe di funzioni concave generalizzate è quella delle funzioni pseudo-concave, definita da Mangasarian [64] sotto ipotesi di differenziabilità e successivamente ripresa da altri autori [75, 91] che ne hanno fornito caratterizzazioni anche nel caso non differenziabile.

Definizione 1.1.8 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C\rightarrow\Re$. f è detta:
pseudo-concava [pcv] se per ogni $x,y\in C$ vale la condizione:

$$f(y)>f(x) \Rightarrow \begin{cases} \exists\xi(x,y)>0 \text{ tale che } \forall\lambda\in(0,1) \\ f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi(x,y) \end{cases};$$

strettamente pseudo-concava [s.pcv] se $\forall x,y\in C$, $x\neq y$, vale la condizione:

$$f(y)\geq f(x) \Rightarrow \begin{cases} \exists\xi(x,y)>0 \text{ tale che } \forall\lambda\in(0,1) \\ f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi(x,y) \end{cases};$$

dove $\xi(x,y)$ è una funzione dipendente solamente da x ed y.

Come è noto, e come sarà mostrato in seguito, la classe delle funzioni pseudo-concave garantisce la sufficienza delle condizioni di Kuhn-Tucker e l'ottimalità di un punto critico.

1.1.4. Relazioni di inclusione tra le classi

In questo sottoparagrafo vengono messe in evidenza le relazioni di inclusione esistenti tra le nuove classi di funzioni introdotte tramite le Definizioni 1.1.4 e 1.1.6 e quelle note in letteratura.

Molte delle relazioni di inclusione intercorrenti tra tali classi di funzioni concave generalizzate seguono direttamente dalle relative definizioni; verranno specificati pertanto solo i seguenti non ovvi risultati [19].

Teorema 1.1.4 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C\to\Re$.

i) Se f è semi concava allora f è anche pseudo-concava.

ii) Se f è semi concava ed inoltre $\forall x,y\in C$ con $f(y)=f(x)$, $x\neq y$, $\exists\lambda\in(0,1)$ tale che $f(x+\lambda(y-x))>f(x)=f(y)$, allora f è anche strettamente pseudo-concava.

Dim. i) Si supponga per assurdo che la funzione f sia semi concava ma non pseudo-concava; allora $\exists x,y\in C$ con $f(y)>f(x)$ ed inoltre $\forall\xi(x,y)>0$ $\exists\lambda\in(0,1)$ tale che $f(x+\lambda(y-x))<f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi(x,y)<f(x)+\lambda\xi(x,y)$. In particolare in corrispondenza di $\xi(x,y)=f(y)-f(x)>0$, $\exists\bar{\lambda}\in(0,1)$ tale che $f(x+\bar{\lambda}(y-x))<f(x)+\bar{\lambda}(f(y)-f(x))$, disuguaglianza che contraddice la semi concavità della funzione f.

ii) Per quanto dimostrato in i) la funzione f risulta pseudo-concava; per verificarne la stretta pseudo-concavità resta da dimostrare che $\forall x,y\in C$ con $f(y)=f(x)$, $x\neq y$, $\exists\xi(x,y)>0$ tale che $\forall\lambda\in(0,1)$ risulta $f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi(x,y)$.

Per ipotesi $\exists\bar{\lambda}\in(0,1)$ tale che $f(x+\bar{\lambda}(y-x))>f(x)=f(y)$; essendo f sm.cv nell'intervallo di estremi x e $z=x+\bar{\lambda}(y-x)$ si ha che $f(x+\alpha(x+\bar{\lambda}(y-x)-x))\geq f(x)+\alpha(f(z)-f(x))$ $\forall\alpha\in(0,1)$, ovvero, posto $\alpha=\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}$:

$$f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)+\frac{1}{\bar{\lambda}}\lambda(f(z)-f(x))>f(x)+\frac{1}{\bar{\lambda}}\lambda(1-\lambda)(f(z)-f(x))\ \forall\lambda\in(0,\bar{\lambda});$$

analogamente essendo f sm.cv nell'intervallo di estremi y e $z=x+\bar{\lambda}(y-x)$ si ha che $f(y+\alpha(x+\bar{\lambda}(y-x)-y))\geq f(y)+\alpha(f(z)-f(y))$ $\forall\alpha\in(0,1)$ ovvero, posto $\alpha=\frac{1-\lambda}{1-\bar{\lambda}}$:

$$f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)+\frac{1-\lambda}{1-\bar{\lambda}}(f(z)-f(x))>f(x)+\frac{1}{1-\bar{\lambda}}\lambda(1-\lambda)(f(z)-f(x))\ \forall\lambda\in(\bar{\lambda},1).$$

Posto quindi $k=\min\{\frac{1}{\bar{\lambda}},\frac{1}{1-\bar{\lambda}}\}>0$, per quanto sopra dimostrato risulta:

$$f(x+\lambda(y-x))>f(x)+k\lambda(1-\lambda)(f(z)-f(x))\quad\forall\lambda\in(0,1),\ \lambda\neq\bar{\lambda};$$

tale condizione però vale anche per $\lambda=\bar{\lambda}$, dal momento che per costruzione è $k\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})=\min\{\frac{\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})}{\bar{\lambda}},\frac{\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})}{1-\bar{\lambda}}\}\leq\frac{1}{2}$ da cui si ottiene $f(z)>f(x)+k\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})(f(z)-f(x))$.

Pertanto, posto $\xi(x,y)=k(f(x+\bar{\lambda}(y-x))-f(x))>0$, risulta:

$$f(x+\lambda(y-x))>f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi(x,y) \ \forall\lambda\in(0,1),$$

da cui segue la stretta pseudo-concavità di f. ♦

Si osservi che il precedente teorema implica che una qualsiasi funzione concava priva di tratti costanti è strettamente pseudo-concava; il teorema permette inoltre di determinare la relazione esistente tra le funzioni concave o strettamente concave e quelle pseudo-concave o strettamente pseudo-concave, risultato noto ed ovvio sotto ipotesi di differenziabilità della funzione, ma non immediato per funzioni qualsiasi.

Corollario 1.1.1 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C\rightarrow\Re$.

i) Se f è concava allora f è anche pseudo-concava.

ii) Se f è strettamente concava allora f è anche strettamente pseudo-concava.

Dim. i) Se f è cv allora è anche, per definizione, sm.cv e quindi pcv.

ii) Si verifica facilmente che se f è s.cv allora è anche sm.cv; inoltre $\forall x,y\in C$ con $f(y)=f(x)$, $x\neq y$, risulta $f(x+\lambda(y-x))>f(x)+\lambda(f(y)-f(x))=f(x)$ $\forall\lambda\in(0,1)$. Per la ii) del Teorema 1.1.4 la funzione f risulta s.pcv. ♦

Le relazioni intercorrenti tra le varie classi di funzioni concave generalizzate sono rappresentate graficamente nel seguente diagramma ([6]).

$$
\begin{array}{ccccccc}
\boxed{\text{e.qcv}} & \supset & \boxed{\text{qcv}} & \subset & \boxed{\text{sm.qcv}} & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & \\
\boxed{\text{es.qcv}} & \supset & \boxed{\text{s.qcv}} & \subset & \boxed{\text{ss.qcv}} & & \boxed{\text{qcv}} \\
 & & \cup & & \cup & & \cup \\
\boxed{\text{s.cv}} & \subset & \boxed{\text{s.pcv}} & \subset & \boxed{\text{pcv}} & & \boxed{\text{cv}} \\
 & & & & \cup & & \\
 & & \boxed{\text{cv}} & \subset & \boxed{\text{sm.cv}} & & \\
 & & \cup & & \cup & & \\
\boxed{\text{f.cv}} & \subset & \boxed{\text{s.cv}} & \subset & \boxed{\text{ss.cv}} & &
\end{array}
$$

diagramma 1

[6] Il simbolo $\boxed{A} \subset \boxed{B}$ indica che la classe A è contenuta nella classe B.

I seguenti esempi mostrano che le inclusioni tra le varie classi di funzioni quasi-concave e concave sono proprie; altre inclusioni saranno analizzate in seguito.

Esempi 1.1.1

i) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x\neq 0,1 \\ 1 & \text{per } x=0,1 \end{cases}$: questa funzione è semi quasi-concava ma non è né e.qcv (e quindi neanche qcv) né ss.qcv;

ii) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x\neq 0 \\ 1 & \text{per } x=0 \end{cases}$: questa funzione è qcv (e quindi sm.qcv e e.qcv) ma non è né ss.qcv né es.qcv (e quindi neanche s.qcv);

iii) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x\neq 0 \\ -1 & \text{per } x=0 \end{cases}$: questa funzione è ss.cv (e quindi sm.cv, ss.qcv, sm.qcv) ma non è e.qcv (e quindi neanche qcv né s.qcv né es.qcv né cv né s.cv);

iv) $f(x)=[x]$: la funzione "parte intera di x" risulta qcv (e quindi sm.qcv e e.qcv) ma non ss.qcv né es.qcv (e quindi neanche s.qcv);

v) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x=1 \\ 1 & \text{per } x\in[0,1[\\ 2 & \text{per } x\in]1,2] \end{cases}$: questa funzione è e.qcv ma non è né es.qcv (e quindi neanche s.qcv) né sm.qcv (e quindi neanche qcv né ss.qcv);

vi) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x=1 \\ x & \text{per } x\in\,]0,2[\,,\ x\neq 1 \end{cases}$: questa funzione è es.qcv ma non è sm.qcv (e quindi neanche qcv, s.qcv, ss.qcv);

vii) $f(x)=k$: la funzione costante è ss.cv ma non è s.pcv e quindi neanche s.cv;

viii) $f(x)=x$: la funzione identità è cv, e quindi anche sm.cv, ma non è ss.cv, e quindi neanche s.cv.

Si osservi che le classi di funzioni di tipo quasi-concavo sono le più ampie tra quelle introdotte; la loro maggiore generalità rispetto a quella delle funzioni concave fa perdere però alcune proprietà di quest'ultime, quale ad esempio la continuità nei punti interni (si considerino al riguardo gli esempi precedenti).
Per comprendere l'ampiezza di queste classi basta osservare che ogni funzione monotona, anche se convessa, è quasi-concava (tale proprietà è una conseguenza immediata della definizione).

1.1.5. Proprietà intercorrenti tra le classi

I seguenti risultati mostrano come sia possibile caratterizzare le funzioni quasi-concave, quelle strettamente quasi-concave e quelle strettamente pseudo-concave per mezzo delle nuove classi introdotte [19]; la seguente proprietà in particolare segue direttamente dalle definizioni di funzioni quasi-concave, semi quasi-concave e quasi-concave in senso esteso.

Proprietà 1.1.3 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C \to \Re$.
La funzione f è quasi-concava se e solo se è sia semi quasi-concava sia quasi-concava in senso esteso.

Per le funzioni strettamente quasi-concave vale invece il seguente teorema.

Teorema 1.1.5 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C \to \Re$.
La funzione f è strettamente quasi-concava se e solo se è sia semi quasi-concava sia strettamente quasi-concava in senso esteso.
Dim. La necessità segue direttamente dalle definizioni.
Per dimostrare la sufficienza si supponga per assurdo che f sia es.qcv ma non s.qcv e che quindi esistano due punti $x,y \in C$ ed un numero reale $\bar{\lambda} \in (0,1)$ tali che $f(y)>f(x)\geq f(x+\bar{\lambda}(y-x))$; per la definizione di funzione sm.qcv inoltre risulta che $f(y)>f(x)\leq f(x+\bar{\lambda}(y-x))$, da cui si ha $f(y)>f(x)=f(x+\bar{\lambda}(y-x))$.
Applicando la definizione di funzione es.qcv all'intervallo di estremi $x+\bar{\lambda}(y-x)$ ed x si ha che $f(x+\lambda(y-x))>f(x)=f(x+\bar{\lambda}(y-x))$ $\forall \lambda \in (0,\bar{\lambda})$; si scelga $\tilde{\lambda} \in (0,\bar{\lambda})$ tale che $f(x+\tilde{\lambda}(y-x))>f(x+\bar{\lambda}(y-x))$. Se $f(x+\tilde{\lambda}(y-x))\neq f(y)$, applicando la definizione di funzione sm.qcv all'intervallo di estremi $x+\tilde{\lambda}(y-x)$ ed y, risulta necessariamente che $f(x+\lambda(y-x))\geq \min\{f(y),f(x+\tilde{\lambda}(y-x))\}>f(x+\bar{\lambda}(y-x))$ $\forall \lambda \in (\tilde{\lambda},1)$, condizione assurda in quanto $\bar{\lambda} \in (\tilde{\lambda},1)$. Risulta pertanto $f(x+\tilde{\lambda}(y-x))=f(y)$, di conseguenza applicando la definizione di funzione es.qcv all'intervallo di estremi $x+\tilde{\lambda}(y-x)$ ed y si ha $f(x+\lambda(y-x))>f(y)=f(x+\tilde{\lambda}(y-x))$ $\forall \lambda \in (\tilde{\lambda},1)$. Si scelga ora $\lambda^* \in (\tilde{\lambda},1)$, $\lambda^* \neq \bar{\lambda}$, tale che $f(x+\lambda^*(y-x))>f(y)=f(x+\tilde{\lambda}(y-x))>f(x+\bar{\lambda}(y-x))$. Applicando la definizione di funzione sm.qcv all'intervallo di estremi $x+\lambda^*(y-x)$ ed $x+\tilde{\lambda}(y-x)$ ed a quello di estremi $x+\lambda^*(y-x)$ ed y, risulta che $f(x+\lambda(y-x))\geq f(y)=f(x+\tilde{\lambda}(y-x))>f(x+\bar{\lambda}(y-x))$ $\forall \lambda \in (\tilde{\lambda},1)$, $\lambda \neq \lambda^*$, condizione assurda poiché $\bar{\lambda} \in (\tilde{\lambda},1)$, $\bar{\lambda} \neq \lambda^*$. ♦

Per le funzioni strettamente pseudo-concave vale inoltre il seguente risultato.

Teorema 1.1.6 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f: C \rightarrow \Re$.
La funzione f è strettamente pseudo-concava se e solo se è sia pseudo-concava sia strettamente quasi-concava in senso esteso.

Dim. La necessità segue direttamente dalle definizioni.
Per la sufficienza si considerino due punti $x, y \in C$, $x \neq y$, tali che $f(y) \geq f(x)$.
Se $f(y) > f(x)$ la tesi segue dalla pseudo-concavità di f, dal momento che per definizione $\exists \xi(x,y) > 0$ tale che $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi(x,y)$ $\forall \lambda \in (0,1)$.
Sia ora $f(y)=f(x)$ e si definisca, per semplicità di notazione, la funzione $g(t)=f(x+t(y-x))$, $t \in [0,1]$; tale funzione è ovviamente sia pcv sia es.qcv in $[0,1]$ e per dimostrare la tesi si deve verificare che:

$$\exists \xi^* > 0 \text{ tale che } g(\lambda) \geq g(0)+\lambda(1-\lambda)\xi^* \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Per la definizione di funzione es.qcv risulta $g(\lambda) > g(0)$ $\forall \lambda \in (0,1)$, in particolare si ha $g(\frac{1}{2}) > g(0) = g(1)$. Applicando la definizione di funzione pseudo-concava all'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$ si ha che $\exists \xi_1 > 0$ tale che $g(\frac{\alpha}{2}) \geq g(0)+\alpha(1-\alpha)\xi_1$ $\forall \alpha \in (0,1)$, da cui si ottiene, posto $\lambda = \frac{1}{2}\alpha$:

$$\exists \xi_1 > 0 \text{ tale che } g(\lambda) \geq g(0)+2\lambda(1-2\lambda)\xi_1 \quad \forall \lambda \in (0, \tfrac{1}{2}),$$

ovvero, essendo $2\lambda(1-2\lambda) = \lambda(1-\lambda)+\lambda(1-3\lambda)$:

$$\exists \xi_1 > 0 \text{ tale che } g(\lambda) \geq g(0)+\lambda(1-\lambda)\xi_1+\lambda(1-3\lambda)\xi_1 \quad \forall \lambda \in (0, \tfrac{1}{2});$$

si osservi inoltre che, in particolare, risulta $g(\frac{1}{4}) \geq g(0)+\frac{1}{4}\xi_1 > g(0)$.
Analogamente, applicando la definizione di funzione pcv in $[\frac{1}{2}, 1]$ si ha che $\exists \xi_2 > 0$ tale che $g(1-\frac{\alpha}{2}) \geq g(0)+\alpha(1-\alpha)\xi_2$ $\forall \alpha \in (0,1)$, da cui si ha, posto $\lambda = 1-\frac{1}{2}\alpha$:

$$\exists \xi_2 > 0 \text{ tale che } g(\lambda) \geq g(0)+2(1-\lambda)(2\lambda-1)\xi_2 \quad \forall \lambda \in (\tfrac{1}{2}, 1),$$

ovvero, essendo $2(1-\lambda)(2\lambda-1) = \lambda(1-\lambda)+(1-\lambda)(3\lambda-2)$:

$$\exists \xi_2 > 0 \text{ tale che } g(\lambda) \geq g(0)+\lambda(1-\lambda)\xi_2+(1-\lambda)(3\lambda-2)\xi_2 \quad \forall \lambda \in (\tfrac{1}{2}, 1);$$

si osservi inoltre che, in particolare, risulta $g(\frac{3}{4}) \geq g(0)+\frac{1}{4}\xi_2 > g(0)$.
Sia ora $\xi^* = \min\{\xi_1, \xi_2\}$ e si verifichi che $g(\lambda) \geq g(0)+\lambda(1-\lambda)\xi^*$ con λ appartenente ai tre intervalli disgiunti $(0, \frac{1}{4})$, $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ e $(\frac{3}{4}, 1)$.
Poiché $\xi_1 \geq \xi^*$ risulta in $(0, \frac{1}{4})$ che:

$$g(\lambda) \geq g(0)+\lambda(1-\lambda)\xi_1+\lambda(1-3\lambda)\xi_1 \geq g(0)+\lambda(1-\lambda)\xi^*;$$

analogamente, essendo $\xi_2 \geq \xi^*$, si ha in $(\frac{3}{4}, 1)$ che:

$$g(\lambda) \geq g(0)+\lambda(1-\lambda)\xi_2+(1-\lambda)(3\lambda-2)\xi_2 \geq g(0)+\lambda(1-\lambda)\xi^*.$$

Si consideri adesso l'intervallo $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$; la funzione g essendo pcv risulta per definizione anche sm.qcv, inoltre essendo es.qcv risulta anche e.qcv, per la Proprietà 1.1.3 quindi la funzione g risulta quasi-concava; applicando quindi la definizione di funzione quasi-concava all'intervallo $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$ si ha quindi che:

$$g(\lambda)\geq\min\{g(\tfrac{1}{4}),g(\tfrac{3}{4})\}\geq g(0)+\tfrac{1}{4}\min\{\xi_1,\xi_2\}=g(0)+\tfrac{1}{4}\xi^* \quad \forall\lambda\in[\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}];$$

si osservi inoltre che $\lambda(1-\lambda)\leq\frac{1}{4}$ $\forall\lambda\in[0,1]$, di conseguenza si ottiene:

$$g(\lambda)\geq g(0)+\lambda(1-\lambda)\xi^* \quad \forall\lambda\in[\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}],$$

da cui segue la tesi. ♦

Si osservi che il precedente Teorema 1.1.6 estende il risultato proposto da Ponstein in [78] che lega, sotto ipotesi di differenziabilità, le funzioni strettamente pseudo-concave a quelle pseudo-concave e strettamente quasi-concave. Direttamente dalla Proprietà 1.1.3 e dai Teoremi 1.1.5 e 1.1.6 seguono i corollari successivi che mostrano come alcune delle classi considerate in questa tesi coincidano sotto determinate ipotesi di concavità generalizzata.

Corollario 1.1.2 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C\rightarrow\Re$ una funzione strettamente quasi-concava in senso esteso. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) f è semi quasi-concava;
ii) f è quasi-concava;
iii) f è semistrettamente quasi-concava;
iv) f è strettamente quasi-concava;

Dim. Direttamente dalla Proprietà 1.1.3 e dal Teorema 1.1.5 seguono rispettivamente le equivalenze i)⇔ii) e i)⇔iv); la tesi segue quindi direttamente dalle definizioni (vedi diagramma 1) per le quali valgono le implicazioni iv)⇒iii) e iii)⇒i). ♦

Corollario 1.1.3 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C\rightarrow\Re$ una funzione semi quasi-concava. Risulta che:

i) f è quasi-concava se e solo se è quasi-concava in senso esteso;
ii) f è strettamente quasi-concava se e solo se è strettamente quasi-concava in senso esteso.

Corollario 1.1.4 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C\rightarrow\Re$ una funzione strettamente quasi-concava in senso esteso. Risulta che f è pseudo-concava se e solo se è strettamente pseudo-concava.

1.1.6. Differenziazioni tra le classi di tipo quasi-concavo

In questo sottoparagrafo, prendendo spunto da un lavoro di Thompson e Parke [91], verrà condotto uno studio finalizzato ad un confronto il più possibile organico tra alcune classi di funzioni concave generalizzate. Più precisamente, date due classi di funzioni A e B con $A \subset B$, si caratterizzeranno gli elementi di B che non appartengono ad A; una tale caratterizzazione permetterà, da un lato, di comprendere pienamente la differenziazione tra le classi e, dall'altro, di evidenziare ipotesi sotto le quali si ha un'eventuale coincidenza delle stesse.

Per interpretare in modo corretto i risultati contenuti nei teoremi successivi, si consideri il caso di una funzione semi quasi-concava che non sia quasi-concava. Confrontando le definizioni è ovvia l'esistenza di una coppia di punti x,y e di un reale $\bar{\lambda} \in (0,1)$ tali che $f(y)=f(x)>f(x+\bar{\lambda}(y-x))$; non è invece altrettanto ovvio il fatto che, in tale situazione, la funzione ristretta a quel segmento non possa assumere valori diversi da f(x) o da $f(x+\bar{\lambda}(y-x))$. Un tale risultato implica che le funzioni semi quasi-concave che non sono quasi-concave sono tutte e sole quelle per le quali esiste un segmento di estremi x ed y rispetto al quale la funzione si comporta nel modo sopra descritto.

In tale ottica vanno interpretati i vari enunciati dei teoremi seguenti [19].

Teorema 1.1.7 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C \rightarrow \Re$ una funzione semi quasi-concava. Risulta che:

i) f non è quasi-concava in senso esteso (quasi-concava) se e solo se $\exists x,y \in C$, $x \neq y$, $\exists \bar{\lambda} \in (0,1)$ tali che valgono entrambe le seguenti condizioni:
   a) $f(y)=f(x)>f(x+\bar{\lambda}(y-x))$;
   b) $f(x+\lambda(y-x)) \in \{f(x), f(x+\bar{\lambda}(y-x))\}$ $\forall \lambda \in (0,1)$, $\lambda \neq \bar{\lambda}$;

ii) f non è semistrettamente quasi-concava se e solo se vale almeno una delle seguenti condizioni:
   a) $\exists x,y \in C$, $x \neq y$, $\exists \bar{\lambda} \in (0,1)$ tali che:
   $f(x+\lambda(y-x))=f(x)<f(y)$ $\forall \lambda \in (0,\bar{\lambda}]$ ed $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)$ $\forall \lambda \in (\bar{\lambda},1)$;
   b) $\exists x,y \in C$, $x \neq y$, $\exists \bar{\lambda} \in (0,1)$ tali che:
   $f(x+\bar{\lambda}(y-x))=f(x)<f(y)$ ed $f(x+\lambda(y-x)) \in \{f(x),f(y)\}$ $\forall \lambda \in (0,1)$, $\lambda \neq \bar{\lambda}$.

Dim. i) Per il Corollario 1.1.3, essendo f sm.qcv, le classi delle funzioni qcv e quella delle funzioni e.qcv coincidono; il risultato viene quindi dimostrato solamente per la classe più ampia delle funzioni e.qcv. La sufficienza segue banalmente dalla definizione di funzione e.qcv; per la necessità si osservi che se f non è e.qcv allora esistono due punti $x,y \in C$ ed un reale $\bar{\lambda} \in (0,1)$ tali che

$f(y)=f(x)>f(x+\bar{\lambda}(y-x))$, inoltre applicando la definizione di funzione sm.qcv all'intervallo di estremi x ed $x+\bar{\lambda}(y-x)$ ed a quello di estremi $x+\bar{\lambda}(y-x)$ ed y si ottiene che $f(x+\lambda(y-x))\geq f(x+\bar{\lambda}(y-x))$ $\forall\lambda\in(0,1)$, $\lambda\neq\bar{\lambda}$; si supponga adesso per assurdo che non valga la condizione b) e quindi esista un reale $\tilde{\lambda}\in(0,1)$, $\tilde{\lambda}\neq\bar{\lambda}$, tale che $f(x+\tilde{\lambda}(y-x))>f(x+\bar{\lambda}(y-x))$ ed $f(x+\tilde{\lambda}(y-x))\neq f(x)=f(y)$, applicando adesso la definizione di funzione sm.qcv all'intervallo di estremi x ed $x+\tilde{\lambda}(y-x)$ ed a quello di estremi $x+\tilde{\lambda}(y-x)$ ed y si ha che $f(x+\lambda(y-x))\geq\min\{f(x+\tilde{\lambda}(y-x)),f(x)\}>f(x+\bar{\lambda}(y-x))$ $\forall\lambda\in(0,1)$, $\lambda\neq\tilde{\lambda}$, condizione assurda dal momento che $\bar{\lambda}\in(0,1)$, $\bar{\lambda}\neq\tilde{\lambda}$.

ii) La sufficienza segue banalmente dalla definizione di funzione ss.qcv. Per la necessità si osservi inizialmente che se f è sm.qcv ma non ss.qcv allora esistono due punti $x,y\in C$ ed un reale $\bar{\lambda}\in(0,1)$ tali che $f(x+\bar{\lambda}(y-x))=f(x)<f(y)$ ed inoltre $f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)$ $\forall\lambda\in(0,1)$; si osservi inoltre che risulta $f(x+\lambda(y-x))\in\{f(x),f(y)\}$ $\forall\lambda\in(0,\bar{\lambda})$, se esistesse infatti un reale $\tilde{\lambda}\in(0,\bar{\lambda})$ tale che $f(x+\tilde{\lambda}(y-x))>f(x)$ ed $f(x+\tilde{\lambda}(y-x))\neq f(y)$ si avrebbe, applicando la definizione di funzione sm.qcv all'intervallo di estremi $x+\tilde{\lambda}(y-x)$ ed y, $f(x+\lambda(y-x))\geq\min\{f(x+\tilde{\lambda}(y-x)),f(y)\}>f(x+\bar{\lambda}(y-x))$ $\forall\lambda\in(\tilde{\lambda},1)$, condizione assurda poiché $\bar{\lambda}\in(\tilde{\lambda},1)$.

Si supponga adesso per assurdo che le condizioni a) e b) non siano verificate e che quindi esistano due reali $\tilde{\lambda}\in(0,\bar{\lambda})$ e $\lambda^*\in(\bar{\lambda},1)$ tali che $f(x+\tilde{\lambda}(y-x))=f(y)$ ed $f(x+\lambda^*(y-x))>f(x)$, $f(x+\lambda^*(y-x))\neq f(y)$; applicando la definizione di funzione sm.qcv all'intervallo di estremi $x+\tilde{\lambda}(y-x)$ ed $x+\lambda^*(y-x)$ risulta:

$$f(x+\lambda(y-x))\geq\min\{f(x+\tilde{\lambda}(y-x)),f(x+\lambda^*(y-x))\}>f(x+\bar{\lambda}(y-x))\ \forall\lambda\in(\tilde{\lambda},\lambda^*),$$

disuguaglianza assurda in quanto $\bar{\lambda}\in(\tilde{\lambda},\lambda^*)$. ♦

Teorema 1.1.8 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C\rightarrow\Re$ una funzione quasi-concava. Risulta che:

i) f non è strettamente quasi-concava in senso esteso (strettamente quasi-concava) se e solo se ha almeno un tratto costante;

ii) f non è semistrettamente quasi-concava se e solo se $\exists x,y\in C$, $x\neq y$, $\exists\bar{\lambda}\in(0,1)$ tali che $f(x+\lambda(y-x))=f(x)<f(y)$ $\forall\lambda\in(0,\bar{\lambda}]$ ed $f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)$ $\forall\lambda\in(\bar{\lambda},1)$.

Dim. i) Per il Corollario 1.1.3, essendo f una funzione qcv, le classi delle funzioni s.qcv e quella delle funzioni es.qcv coincidono; il risultato viene quindi dimostrato solamente per la classe più ampia delle funzioni es.qcv.

La sufficienza segue banalmente dalla definizione di funzione es.qcv; per la necessità si osservi che se f è qcv ma non es.qcv allora esistono due punti $x,y\in C$

ed un reale $\bar{\lambda}\in(0,1)$ tali che $f(y)=f(x)=f(x+\bar{\lambda}(y-x))$; si supponga adesso per assurdo che f non ammetta tratti costanti e che quindi, per la quasi-concavità di f, $\exists\lambda_1,\lambda_2\in(0,1)$, $\lambda_1<\bar{\lambda}<\lambda_2$, tali che $f(x+\bar{\lambda}(y-x))<\min\{f(x+\lambda_1(y-x)),f(x+\lambda_2(y-x))\}$; applicando allora la definizione di funzione qcv all'intervallo di estremi $x+\lambda_1(y-x)$ ed $x+\lambda_2(y-x)$ si ha che $f(x+\lambda(y-x))>f(x+\bar{\lambda}(y-x))$ $\forall\lambda\in(\lambda_1,\lambda_2)$, condizione assurda dal momento che $\bar{\lambda}\in(\lambda_1,\lambda_2)$.

ii) Se f è qcv allora è anche sm.qcv; per il punto ii) del Teorema 1.1.7 si deve solamente dimostrare quindi che se è verificata la condizione b) necessariamente risulta $f(x+\lambda(y-x))=f(x)$ $\forall\lambda\in(0,\bar{\lambda})$; si supponga per assurdo che ciò non accada e che quindi, essendo f qcv, esista un $\tilde{\lambda}\in(0,\bar{\lambda})$ tale che $f(x+\tilde{\lambda}(y-x))>f(x+\bar{\lambda}(y-x))$, applicando la definizione di funzione qcv all'intervallo di estremi $x+\tilde{\lambda}(y-x)$ ed y si ha che $f(x+\lambda(y-x))\geq\min\{f(x+\tilde{\lambda}(y-x)),f(y)\}>f(x+\bar{\lambda}(y-x))$ $\forall\lambda\in(\tilde{\lambda},1)$, condizione assurda dal momento che $\bar{\lambda}\in(\tilde{\lambda},1)$. ♦

Teorema 1.1.9 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C\rightarrow\Re$ una funzione semistrettamente quasi-concava. Risulta che:

i) f non è quasi-concava in senso esteso (quasi-concava) se e solo se $\exists x,y\in C$, $x\neq y$, $\exists\bar{\lambda}\in(0,1)$ tali che $f(x+\lambda(y-x))=f(y)=f(x)>f(x+\bar{\lambda}(y-x))$ $\forall\lambda\in(0,1)$, $\lambda\neq\bar{\lambda}$;

ii) f non è strettamente quasi-concava in senso esteso (strettamente quasi-concava) se e solo se ha almeno un tratto costante.

Dim. i) Per il Corollario 1.1.3, essendo f ss.qcv, le classi delle funzioni qcv ed e.qcv coincidono; il risultato viene quindi dimostrato solamente per la classe più ampia delle funzioni e.qcv. Per il punto i) del Teorema 1.1.7 la funzione f, essendo ss.qcv, non è e.qcv se e solo se $\exists x,y\in C$, $x\neq y$, $\exists\bar{\lambda}\in(0,1)$ tali che $f(y)=f(x)>f(x+\bar{\lambda}(y-x))$ ed $f(x+\lambda(y-x))\in\{f(x),f(x+\bar{\lambda}(y-x))\}$ $\forall\lambda\in(0,1)$, $\lambda\neq\bar{\lambda}$; la condizione $f(x+\lambda(y-x))\in\{f(x),f(x+\bar{\lambda}(y-x))\}$ $\forall\lambda\in(0,1)$, $\lambda\neq\bar{\lambda}$, è però equivalente, applicando la definizione di funzione ss.qcv all'intervallo di estremi $x+\bar{\lambda}(y-x)$ ed x ed a quello di estremi $x+\bar{\lambda}(y-x)$ ed y, alla $f(x+\lambda(y-x))=f(x)$ $\forall\lambda\in(0,1)$, $\lambda\neq\bar{\lambda}$.

ii) Per il Corollario 1.1.3, essendo f ss.qcv, le classi delle funzioni s.qcv e quella delle funzioni es.qcv coincidono; il risultato viene quindi dimostrato solamente per la classe delle funzioni es.qcv. La sufficienza segue dalla definizione di funzione es.qcv; per la necessità si osservi che se f risulta non qcv, oltre che non es.qcv, allora per il precedente punto i) ammette sicuramente tratti costanti; se invece f è qcv allora la tesi segue direttamente dal punto i) del Teorema 1.1.8. ♦

Il precedente Teorema 1.1.9 permette di ottenere il seguente corollario che indica le differenze tra le funzioni pseudo-concave e quelle strettamente pseudo-concave.

Corollario 1.1.5 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f: C \to \Re$ una funzione pseudo-concava. La funzione f non è strettamente pseudo-concava se e solo se ha almeno un tratto costante.

Dim. La sufficienza segue direttamente dalla definizione di funzione strettamente pseudo-concava; per la necessità si osservi che per il Teorema 1.1.6 una funzione pseudo-concava, e quindi anche semistrettamente quasi-concava, non è strettamente pseudo-concava solamente se non è strettamente quasi-concava in senso esteso, condizione che per il Teorema 1.1.9 è verificata solamente se la funzione ammette almeno un tratto costante. ♦

In seguito risulterà utile anche la caratterizzazione delle funzioni quasi-concave in senso esteso che non sono quasi-concave o strettamente quasi-concave generalizzate; tale caratterizzazione segue direttamente dalle definizioni e la sua poca incisività è data dall'ampiezza della classe delle funzioni quasi-concave generalizzate nel caso in cui non si assumano ipotesi di continuità della funzione. Valgono al riguardo i seguenti teoremi.

Teorema 1.1.10 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f: C \to \Re$ una funzione quasi-concava in senso esteso. Risulta che:

i) f non è quasi-concava se e solo se $\exists x,y \in C$, $x \neq y$, $\exists \bar{\lambda} \in (0,1)$ tali che valgono entrambe le seguenti condizioni:
   a) $f(y) > f(x) > f(x+\bar{\lambda}(y-x))$;
   b) $\nexists \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1)$, $\lambda_1 < \bar{\lambda} < \lambda_2$, tali che $f(x+\lambda_1(y-x)) = f(x+\lambda_2(y-x)) > f(x+\bar{\lambda}(y-x))$;

ii) f non è strettamente quasi-concava in senso esteso se e solo se $\exists x,y \in C$, $x \neq y$, $\exists \bar{\lambda} \in (0,1)$ tali che valgono entrambe le seguenti condizioni:
   a) $f(y) = f(x) = f(x+\bar{\lambda}(y-x))$;
   b) $\nexists \lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$, $\lambda_1 < \bar{\lambda} < \lambda_2$, tali che $f(x+\lambda_1(y-x)) = f(x+\lambda_2(y-x)) > f(x+\bar{\lambda}(y-x))$.

Teorema 1.1.11 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f: C \to \Re$ una funzione strettamente quasi-concava in senso esteso. f non è semi quasi-concava (quasi-concava, semistrettamente quasi-concava, strettamente quasi-concava) se e solo se $\exists x,y \in C$, $x \neq y$, $\exists \bar{\lambda} \in (0,1)$ tali che valgono entrambe le seguenti condizioni:

a) $f(y)>f(x)>f(x+\bar{\lambda}(y-x))$;

b) $\nexists \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1)$, $\lambda_1 < \bar{\lambda} < \lambda_2$, tali che $f(x+\lambda_1(y-x))=f(x+\lambda_2(y-x)) \geq f(x+\bar{\lambda}(y-x))$.

Dim. Per il Corollario 1.1.2, essendo f es.qcv, le classi delle funzioni sm.qcv, qcv, ss.qcv ed s.qcv coincidono; la tesi segue quindi dal punto i) del Teorema 1.1.10 ricordando che se f è es.qcv allora è anche e.qcv. ♦

1.1.7. Quasi-concavità e comportamento del consumatore

Svariate sono le applicazioni della concavità generalizzata scalare nelle scienze economico-sociali (per una "carrellata" di queste applicazioni si vedano i lavori [13, 25-27, 33, 35-38, 48, 53, 62, 74, 76, 87, 89, 94, 95]); la più nota di tali applicazioni è forse la teoria del comportamento del consumatore, nella quale si cerca di interpretare quel "processo di massimizzazione vincolata" che un consumatore attua inconsciamente quando sceglie i beni da acquistare in base al loro prezzo ed al proprio budget finanziario; la stessa "preferenza della diversità", assunzione basilare della teoria del consumatore, può essere infatti parafrasata con la richiesta della convessità degli insiemi di livello superiore della funzione di utilità, ovvero con la richiesta della quasi-concavità della funzione di utilità stessa [29].

Dando per scontata la conoscenza del modello economico del comportamento del consumatore [84], in questo sottoparagrafo verrà mostrato come particolari preferenze del consumatore possano essere associate a funzioni di utilità appartenenti ad ognuna delle classi di tipo quasi-concavo introdotte in precedenza.

Sia $P \subseteq X \times X$ la relazione di preferenza ([7]) che esprime le scelte del consumatore posto di fronte a due panieri, siano inoltre I ed R le due seguenti fondamentali relazioni indotte ([8]):

i) $I \subseteq X \times X$ tale che $(y,x) \in I$ se e solo se $(y,x) \notin P$ ed $(x,y) \notin P$,

ii) $R = P \cup I \subseteq X \times X$.

---

[7] Una relazione $P \subseteq X \times X$ è detta di preferenza se è irriflessiva e transitiva.

[8] Si osservi che la relazione I è simmetrica e che R è riflessiva e completa.

Sia inoltre $U:\Re^n_+ \rightarrow \Re$ una funzione di utilità ordinale associata a P [30], ovvero una funzione tale che $U(y)>U(x)$ se e solo se yPx ([9]); si osservi che direttamente dalla definizione risulta che:

i) $U(y)=U(x)$ se e solo se yIx ii) $U(y)\geq U(x)$ se e solo se yRx.

In letteratura sono state definite le seguenti proprietà di convessità di una relazione binaria, di cui si ricordano per completezza le definizioni [84].

Definizione 1.1.9 Sia P una relazione binaria su $X\subseteq\Re^n$.
P è detta convessa se P(x) è convesso $\forall x,y\in X$;
P è detta strettamente convessa se $y+\lambda(z-y)Px$ $\forall\lambda\in(0,1)$, $\forall y,z\in R(x)$, $y\neq z$;
P è stellata se $yPx \Rightarrow x+\lambda(y-x)Px$ $\forall\lambda\in(0,1)$, $\forall x,y\in X$;

Nel caso in cui la relazione indotta I è transitiva valgono inoltre le seguenti importanti proprietà, di cui si omette la dimostrazione.

Proprietà 1.1.4 Sia P una relazione di preferenza su $X\subseteq\Re^n$ tale che la relazione indotta I è transitiva. Allora la relazione P risulta:

i) convessa se e solo se vale la seguente condizione:

$$yRx \Rightarrow x+\lambda(y-x)Rx \quad \forall\lambda\in(0,1),\ \forall x,y\in X.$$

ii) strettamente convessa se e solo se vale la seguente condizione:

$$yRx \Rightarrow x+\lambda(y-x)Px \quad \forall\lambda\in(0,1),\ \forall x,y\in X,\ x\neq y.$$

Direttamente dalle definizioni e dalla precedente Proprietà 1.1.4 si hanno le seguenti corrispondenze tra convessità della relazione di preferenza e concavità generalizzata della funzione di utilità.

Proprietà 1.1.5 Sia $U:\Re^n_+ \rightarrow \Re$ una funzione di utilità per P; risulta:

i) P è convessa se e solo se U è quasi-concava;
ii) P è strettamente convessa se e solo se U è strettamente quasi-concava;
iii) P è stellata se e solo se U è semistrettamente quasi-concava;

Completando per simmetria il quadro della convessità della relazione di preferenza del consumatore è possibile definire le seguenti relazioni alle quali sono

[9] E' fondamentale osservare che se si ha una funzione di utilità U per la relazione di preferenza P allora la relazione indotta I è transitiva.

associate funzioni di utilità appartenenti alle nuove classi di funzioni di tipo quasi-concavo definite nel sottoparagrafo 1.1.2.

Definizione 1.1.10 Sia P una relazione binaria su $X \subseteq \mathfrak{R}^n$.
P è debolmente stellata se $yPx \Rightarrow x+\lambda(y-x)Rx$ $\forall\lambda\in(0,1)$, $\forall x,y\in X$;
P è quasi-convessa se $yIx \Rightarrow x+\lambda(y-x)Rx$ $\forall\lambda\in(0,1)$, $\forall x,y\in X$;
P è strettamente quasi-convessa se $yIx \Rightarrow x+\lambda(y-x)Px$ $\forall\lambda\in(0,1)$, $\forall x,y\in X$, $x\neq y$.

Proprietà 1.1.6 Sia $U:\mathfrak{R}^n_+\rightarrow\mathfrak{R}$ una funzione di utilità per P; risulta:
i) P è debolmente stellata se e solo se U è semi quasi-concava;
ii) P è quasi-convessa se e solo se U è quasi-concava in senso esteso;
iii) P è strettamente quasi-convessa se e solo se U è strettamente quasi-concava in senso esteso.

Si osservi che le relazioni di inclusione tra le varie preferenze di tipo convesso sono le stesse che intercorrono tra le corrispondenti funzioni di utilità di tipo quasi-concavo.

1.2. Funzioni concave generalizzate e continuità

In questo paragrafo si analizzeranno le proprietà delle funzioni concave generalizzate sotto ipotesi di semicontinuità superiore e di continuità della funzione; saranno inoltre forniti vari esempi di funzioni concave generalizzate per meglio evidenziare le relazioni tra le classi.
Per ragioni di completezza si ricordano dapprima le definizioni e le principali proprietà delle funzioni semicontinue.

Definizione 1.2.1 Una funzione $f:C\rightarrow\mathfrak{R}$, con $C\subseteq\mathfrak{R}^n$, è detta semicontinua superiormente in un punto $x_0\in C$ se per ogni $\varepsilon>0$ è possibile trovare un intorno U di x_0 tale che per ogni $x\in U\cap C$ risulti $f(x)<f(x_0)+\varepsilon$; è invece detta semicontinua inferiormente in un punto $x_0\in C$ se per ogni $\varepsilon>0$ è possibile trovare un intorno U di x_0 tale che per ogni $x\in U\cap C$ risulti $f(x)>f(x_0)-\varepsilon$.

Direttamente dalla definizione segue che una funzione è continua se e solo se è sia semicontinua superiormente sia semicontinua inferiormente.

Teorema 1.2.1 Sia $f:C\rightarrow\Re$, con $C\subseteq\Re^n$, una funzione a valori reali; le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) f è semicontinua superiormente in C;

ii) gli insiemi di livello superiore $U(f,\alpha)$ di f sono insiemi chiusi per ogni valore reale α;

iii) gli insiemi di livello inferiore stretto $L°(f,\alpha)$ di f sono insiemi aperti per ogni valore reale α.

Dim. i)$\Rightarrow$ii) Supponiamo per assurdo che esista una successione $\{x_n\}\subset U(f,\alpha)$ convergente ad un punto $x_0\notin U(f,\alpha)$, ovvero tale che $f(x_0)<\alpha$. Per la superiore semicontinuità di f allora esiste, scelto $\varepsilon\in(0,f(x_0)-\alpha)$, un intorno U di x_0 tale che $f(x)<f(x_0)+\varepsilon<\alpha\ \forall x\in U$; poiché $x_n\rightarrow x_0$ esiste un indice $\bar{n}$ tale che $x_n\in U\ \forall n>\bar{n}$, ovvero tale che $f(x_n)<\alpha\ \forall n>\bar{n}$ e ciò è assurdo poiché $\{x_n\}\subset U(f,\alpha)$.

ii)$\Rightarrow$iii) Segue dalla definizione di insiemi aperti e chiusi essendo $L°(f,\alpha)$ ed $U(f,\alpha)$ insiemi complementari.

iii)$\Rightarrow$i) $\forall x_0\in C$ e $\forall\varepsilon>0$, posto $\alpha=f(x_0)+\varepsilon$, risulta $x_0\in L°(f,\alpha)$ e quindi, essendo $L°(f,\alpha)$ aperto, esiste un intorno U di x_0 tale che per ogni $x\in U$ risulta $x\in L°(f,\alpha)$ ovvero $f(x)<f(x_0)+\varepsilon$. ♦

In modo del tutto analogo si può dimostrare che una funzione f è semicontinua inferiormente se e solo se i suoi insiemi di livello inferiore $L(f,\alpha)$ sono insiemi chiusi per ogni valore reale α, ovvero se e solo se i suoi insiemi di livello superiore stretto $U°(f,\alpha)$ sono insiemi aperti per ogni valore reale α. Da ciò segue che una funzione f è continua se e solo se i suoi insiemi di livello superiore $U(f,\alpha)$ ed inferiore $L(f,\alpha)$ sono insiemi chiusi per ogni valore reale α, ovvero se e solo se i suoi insiemi di livello superiore stretto $U°(f,\alpha)$ ed inferiore stretto $L°(f,\alpha)$ sono insiemi aperti per ogni valore reale α.

1.2.1. Funzioni concave generalizzate semicontinue superiormente

In questo paragrafo si analizzano le relazioni tra le varie classi di funzioni concave generalizzate in ipotesi di semicontinuità superiore.
Sotto tale ipotesi vale il seguente noto risultato, dovuto a Karamardian [55], del quale si propone una dimostrazione alternativa [91].

Teorema 1.2.2 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f: C \rightarrow \Re$ una funzione semicontinua superiormente.
Se f è semistrettamente quasi-concava allora è anche quasi-concava.
Dim. Per l'ipotesi di semicontinuità superiore di f non possono esistere due punti $x, y \in C$, $x \neq y$, ed un $\bar{\lambda} \in (0,1)$ tali che $f(x+\lambda(y-x))=f(y)=f(x)>f(x+\bar{\lambda}(y-x))$ $\forall \lambda \in (0,1)$, $\lambda \neq \bar{\lambda}$; la tesi segue quindi dal punto i) del Teorema 1.1.9. ♦

Relativamente alla classe delle funzioni semi concave vale il seguente teorema.

Teorema 1.2.3 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f: C \rightarrow \Re$ una funzione semicontinua superiormente. Allora f è semi concava se e solo se è concava.
Dim. Poiché la sufficienza è ovvia resta da dimostrare che, sotto ipotesi di semicontinuità superiore, una funzione sm.cv è anche cv; tenuto conto della Proprietà 1.1.1, è sufficiente dimostrare che $\forall x, y \in C$, $x \neq y$, tali che $f(y)=f(x)$ si ha $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(f(y)-f(x))=f(x)$ $\forall \lambda \in (0,1)$; in altre parole si deve verificare che f è e.qcv. Ogni funzione sm.cv è anche ss.qcv (vedasi diagramma 1), pertanto per il Teorema 1.2.2 f è anche qcv e quindi e.qcv, da cui la tesi. ♦

Il seguente teorema, in ipotesi di semicontinuità superiore, fornisce una semplice caratterizzazione delle funzioni che differenziano la classe delle funzioni semi-strettamente concave da quella delle strettamente concave.

Teorema 1.2.4 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f: C \rightarrow \Re$ una funzione semicontinua superiormente. Allora f è semistrettamente concava se e solo se è strettamente concava oppure costante.
Dim. Se f è strettamente concava oppure costante è banalmente semistrettamente concava. Si supponga adesso che la f sia ss.cv ma non s.cv ovvero che, per la Proprietà 1.1.1, esistano due punti $x, y \in C$, $x \neq y$, tali che $f(y)=f(x)$ ed esista un $\bar{\lambda} \in (0,1)$ tale che $f(x+\bar{\lambda}(y-x)) \leq f(x)+\bar{\lambda}(f(y)-f(x))=f(x)$; per l'ipotesi di superiore semicontinuità f, essendo ss.cv, è anche qcv e quindi poiché $f(y)=f(x)$ risulta che $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)$ $\forall \lambda \in (0,1)$, di conseguenza deve essere $f(x+\bar{\lambda}(y-x))=f(x)$.

Si supponga adesso per assurdo che f non sia costante ed esista un $\tilde{\lambda}\in(0,\bar{\lambda})$ $[\tilde{\lambda}\in(\bar{\lambda},1)]$ tale che $f(x+\tilde{\lambda}(y-x))>f(x)=f(y)=f(x+\bar{\lambda}(y-x))$; applicando la definizione di funzione ss.cv nel segmento di estremi $z=x+\tilde{\lambda}(y-x)$ ed y $[x+\tilde{\lambda}(y-x)$ ed x$]$ si ha:

$$f(y+\alpha(z-y))>f(y)+\alpha(f(z)-f(y))>f(y)=f(x+\bar{\lambda}(y-x)) \quad \forall\alpha\in(0,1)$$

$$[f(x+\alpha(z-x))>f(x)+\alpha(f(z)-f(x))>f(x)=f(x+\bar{\lambda}(y-x)) \quad \forall\alpha\in(0,1)],$$

da cui si ottiene, posto $\lambda=1-\alpha(1-\tilde{\lambda})$ $[\lambda=\alpha\tilde{\lambda}]$, $f(x+\lambda(y-x))>f(x+\bar{\lambda}(y-x))$ $\forall\lambda\in(\tilde{\lambda},1)$ $[\forall\lambda\in(0,\tilde{\lambda})]$, condizione assurda poiché $\bar{\lambda}\in(\tilde{\lambda},1)$ $[\bar{\lambda}\in(0,\tilde{\lambda})]$. ♦

Il diagramma 2 riassume le relazioni intercorrenti tra le funzioni concave generalizzate sotto ipotesi di semicontinuità superiore.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \boxed{\text{sm.qcv}} & & \\
 & & & & \cup & & \\
 & & \boxed{\text{e.qcv}} & \supset & \boxed{\text{qcv}} & & \\
 & & \cup & & \cup & & \cup \\
 & & \boxed{\text{es.qcv}} & \supset & \boxed{\text{s.qcv}} & \subset & \boxed{\text{ss.qcv}} \\
 & & & & \cup & & \cup \\
 & & & & \boxed{\text{s.pcv}} & \subset & \boxed{\text{pcv}} \\
 & & & & \cup & & \cup \\
\boxed{\text{f.cv}} & \subset & \boxed{\text{s.cv}} & \subset & \boxed{\text{ss.cv}} & \subset & \boxed{\text{cv}\equiv\text{sm.cv}}
\end{array}
$$

diagramma 2

I seguenti esempi evidenziano che le classi di funzioni di tipo quasi-concavo restano distinte anche in ipotesi di semicontinuità superiore.

Esempi 1.2.1

i) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x\in]-1,1[\\ 1 & \text{per } x\notin]-1,1[\end{cases}$: questa funzione è sm.qcv ma non è e.qcv (e quindi neanche qcv);

ii) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x\in]-1,1[\\ x+3 & \text{per } x\in[-2,2],\ x\notin]-1,1[\end{cases}$: questa funzione è e.qcv ma non è né es.qcv né sm.qcv (e quindi neanche qcv);

iii) $f(x)=\begin{cases} -|x| & \text{per } x\in]-1,1[\\ x+3 & \text{per } x\in[-2,2],\ x\notin]-1,1[\end{cases}$: questa funzione è es.qcv (e quindi anche e.qcv) ma non è sm.qcv (e quindi neanche qcv, s.qcv, ss.qcv).

1.2.2. Funzioni concave generalizzate continue

In questo paragrafo si analizzano le relazioni di inclusione tra le classi di funzioni di tipo quasi-concavo in ipotesi di continuità. In particolare i seguenti teoremi evidenziano che solamente la classe delle funzioni semistrettamente concave, tra le cinque nuove classi di funzioni concave generalizzate introdotte, rimane distinta dalle classi già note in letteratura [19].

Teorema 1.2.5 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C \to \Re$ una funzione continua. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) f è quasi-concava in senso esteso;

ii) f è quasi-concava;

iii) f è semi quasi-concava.

Dim. Per l'ipotesi di continuità, dal punto i) del Teorema 1.1.7 e dal punto i) del Teorema 1.1.10 si ha che una funzione sm.qcv o e.qcv è anche qcv; la tesi segue pertanto direttamente dalle definizioni. ♦

Teorema 1.2.6 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C \to \Re$ una funzione continua. Allora f è strettamente quasi-concava in senso esteso se e solo se è strettamente quasi-concava.

Dim. Per l'ipotesi di continuità, dal Teorema 1.1.11 si ha che una funzione es.qcv è anche s.qcv; la tesi segue quindi dalle rispettive definizioni. ♦

Sotto ipotesi di continuità, le relazioni intercorrenti tra le classi di funzioni concave generalizzate possono pertanto essere riassunte per mezzo del diagramma seguente; queste relazioni di inclusione altro non sono che quelle esistenti tra le classi di funzioni già note in letteratura.

$$\boxed{\text{e.qcv} \equiv \text{qcv} \equiv \text{sm.qcv}}$$

$$\cup \qquad\qquad\qquad \cup$$

$$\boxed{\text{es.qcv} \equiv \text{s.qcv}} \quad \subset \quad \boxed{\text{ss.qcv}}$$

$$\cup \qquad\qquad\qquad \cup$$

$$\boxed{\text{s.pcv}} \quad \subset \quad \boxed{\text{pcv}}$$

$$\cup \qquad\qquad\qquad \cup$$

$$\boxed{\text{f.cv}} \quad \subset \quad \boxed{\text{s.cv}} \quad \subset \quad \boxed{\text{ss.cv}} \quad \subset \quad \boxed{\text{cv} \equiv \text{sm.cv}}$$

diagramma 3

Da ora in poi, in ipotesi di continuità, si farà riferimento solamente alle funzioni quasi-concave e strettamente quasi-concave pur tenendo presente che esse risultano anche quasi-concave in senso esteso e semi quasi-concave nel primo caso e strettamente quasi-concave in senso esteso nel secondo. I seguenti esempi di funzioni continue a valori reali e definite su tutto l'insieme dei reali mostrano che le varie inclusioni, di cui al diagramma 3, sono proprie [7].

Esempi 1.2.2

i) $f(x)=k$, $k\in\Re$: la funzione costante è semistrettamente concava (e quindi cv, pcv, ss.qcv ed anche qcv) ma non strettamente quasi-concava (e quindi neanche s.pcv né s.cv);

ii) $f(x)=x$: la funzione identica è concava (e quindi pcv, ss.qcv ed anche qcv) e strettamente pseudo-concava ma non semistrettamente concava (e quindi neanche s.cv);

iii) $f(x)=e^x$: la funzione esponenziale risulta strettamente pseudo-concava (e quindi anche pcv) ma non è concava (e quindi neanche s.cv);

iv) $f(x)=e^{-x^2}$: è strettamente pseudo-concava ma non strettamente concava;

v) $f(x)=\begin{cases} e^{-x^2} & \text{per } x\leq 0 \\ 1 & \text{per } x>0 \end{cases}$: questa è una funzione pseudo-concava ma non strettamente pseudo-concava;

vi) $f(x)=x^3$: è strettamente quasi-concava (e quindi anche ss.qcv) ma non è pseudo-concava (e quindi neanche s.pcv);

vii) $f(x)=x+x^3$: è una funzione pseudo-concava ma non concava;

viii) $f(x)=x+|x|$: è quasi-concava che non è né semistrettamente quasi-concava né strettamente quasi-concava;

ix) $f(x)=-x^4$: è una funzione strettamente ma non fortemente concava ([10]);

x) $f(x)=-x^2$: questa è una funzione fortemente concava (si assuma $\alpha=2$);

xi) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{per } x\geq 0 \\ 0 & \text{per } x<0 \end{cases}$: è quasi-concava ma non semistrettamente quasi-concava;

xii) $f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{per } x<0 \\ 0 & \text{per } x\in[0,1] \\ -(x-1)^2 & \text{per } x>1 \end{cases}$: è una funzione semistrettamente quasi-concava ma non strettamente quasi-concava.

---

[10] Sia $g(x)=f(x)+(1/2)\alpha x^2=-x^4+(1/2)\alpha x^2$, con $\alpha>0$; risulta $g''(x)=-12x^2+\alpha$ e quindi $g''(0)=\alpha>0$, di conseguenza la funzione g non può essere concava per una nota proprietà delle funzioni concave due volte derivabili che sarà ricordata nel paragrafo successivo.

1.3. Funzioni concave generalizzate differenziabili

In questo paragrafo saranno dapprima esposte delle caratterizzazioni al primo ed al secondo ordine per alcune classi di funzioni concavo-generalizzate [1, 5, 34, 65, 91]. Successivamente sarà evidenziato, sotto ipotesi di differenziabilità, il legame esistente tra le funzioni di tipo pseudo-concavo; infine saranno mostrate caratterizzazioni di alcune classi di funzioni concave generalizzate che sfruttano particolari proprietà di minimo e massimo.

1.3.1. Alcune caratterizzazioni

In questo sottoparagrafo saranno determinate alcune condizioni necessarie e/o sufficienti affinché una funzione differenziabile $f:C\to\Re$, con $C\subseteq\Re^n$ aperto convesso ([11]), sia concava generalizzata.

Teorema 1.3.1 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme aperto convesso. La funzione differenziabile $f:C\to\Re$ risulta :

$$
\begin{array}{rcll}
\text{concava} & \Leftrightarrow & f(y)\le f(x)+(y-x)^T\nabla f(x) & \forall x,y\in C \\
\text{strettamente concava} & \Leftrightarrow & f(y)< f(x)+(y-x)^T\nabla f(x) & \forall x,y\in C,\ x\ne y \\
\text{fortemente concava} & \Leftrightarrow & \exists\alpha>0 \text{ t.c. } f(y)\le f(x)+(y-x)^T\nabla f(x)-\frac{1}{2}\alpha\|y-x\|^2 & \forall x,y\in C \\
\text{pseudo-concava} & \Leftrightarrow & f(y)>f(x)\Rightarrow(y-x)^T\nabla f(x)>0 & \forall x,y\in C \\
\text{strettamente pseudo-concava} & \Leftrightarrow & f(y)\ge f(x)\Rightarrow(y-x)^T\nabla f(x)>0 & \forall x,y\in C,\ x\ne y \\
\text{quasi-concava} & \Leftrightarrow & f(y)>f(x)\Rightarrow(y-x)^T\nabla f(x)\ge 0 & \forall x,y\in C \\
\text{quasi-concava} & \Leftrightarrow & f(y)\ge f(x)\Rightarrow(y-x)^T\nabla f(x)\ge 0 & \forall x,y\in C
\end{array}
$$

Dim. (*Concavità*) Supponiamo la funzione f concava; se x=y la tesi è banale, altrimenti per la concavità di f abbiamo $f(x+\lambda(y-x))\ge f(x)+\lambda(f(y)-f(x))\ \forall\lambda\in(0,1)$ e quindi $f(y)\le f(x)+\frac{f(x+\lambda(y-x))-f(x)}{\lambda}\ \forall\lambda\in(0,1)$ da cui otteniamo, passando al limite, $f(y)\le f(x)+\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(x+\lambda(y-x))-f(x)}{\lambda}=f(x)+(y-x)^T\nabla f(x)$.

Supponiamo adesso che sia $f(y)\le f(x)+(y-x)^T\nabla f(x)\ \forall x,y\in C$ e consideriamo due punti qualsiasi x ed y di C ed un reale $\lambda\in(0,1)$; per ipotesi abbiamo:

$$f(y)\le f(x+\lambda(y-x))+(y-(x+\lambda(y-x)))^T\nabla f(x+\lambda(y-x)),$$

---

[11] Si ricorda, per pura completezza, che per una funzione differenziabile a valori reali f definita su un insieme convesso aperto $C\subseteq\Re^n$ risulta $\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(x+\lambda(y-x))-f(x)}{\lambda}=(y-x)^T\nabla f(x)\ \ \forall x,y\in C$ ed inoltre, per il teorema del valor medio di Lagrange, si ha che $\forall x,y\in C\ \exists\xi\in(0,1)$ tale che $f(y)=f(x)+(y-x)^T\nabla f(x+\xi(y-x))$.

$$f(x)\leq f(x+\lambda(y-x))+(x-(x+\lambda(y-x)))^T\nabla f(x+\lambda(y-x)),$$

dalle quali, moltiplicando la prima per λ e la seconda per $(1-\lambda)$, otteniamo:

$$\lambda f(y)\leq \lambda f(x+\lambda(y-x))+\lambda(1-\lambda)(y-x)^T\nabla f(x+\lambda(y-x)),$$

$$(1-\lambda)f(x)\leq(1-\lambda)f(x+\lambda(y-x))-\lambda(1-\lambda)(y-x)^T\nabla f(x+\lambda(y-x));$$

sommando membro a membro le due diseguaglianze si ha quindi la tesi:

$$f(x)+\lambda(f(y)-f(x))\leq f(x+\lambda(y-x)).$$

(*Stretta concavità*) La sufficienza è del tutto analoga alla precedente, si dimostra quindi soltanto la necessità supponendo f strettamente concava; essendo f anche concava risulta $f(y)\leq f(x)+(y-x)^T\nabla f(x)$ $\forall x,y\in C$; si supponga allora per assurdo che esistano $\bar{x},\bar{y}\in C$, $\bar{x}\neq\bar{y}$, tali che:

$$f(\bar{y})=f(\bar{x})+(\bar{y}-\bar{x})^T\nabla f(\bar{x});$$

poiché f è strettamente concava abbiamo:

$$f(\bar{x}+\lambda(\bar{y}-\bar{x}))>f(\bar{x})+\lambda(f(\bar{y})-f(\bar{x}))=f(\bar{x})+\lambda(\bar{y}-\bar{x})^T\nabla f(\bar{x}),$$

d'altra parte f è anche concava e quindi:

$$f(\bar{x}+\lambda(\bar{y}-\bar{x}))\leq f(\bar{x})+((\bar{x}+\lambda(\bar{y}-\bar{x}))-\bar{x})^T\nabla f(\bar{x})=f(\bar{x})+\lambda(\bar{y}-\bar{x})^T\nabla f(\bar{x})$$

e ciò contraddice la disuguaglianza precedente.

(*Forte concavità*) Vedasi il corollario 1.7.1.

(*Quasi-concavità*) Sia f quasi-concava e verifichiamo che per ogni $x,y\in C$ la condizione $f(y)\geq f(x)$ implica $(y-x)^T\nabla f(x)\geq 0$; per definizione, essendo $f(y)\geq f(x)$, risulta $f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)$ $\forall\lambda\in(0,1)$ e quindi $\frac{f(x+\lambda(y-x))-f(x)}{\lambda}\geq 0$ $\forall\lambda\in(0,1)$ da cui $\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(x+\lambda(y-x))-f(x)}{\lambda}=(y-x)^T\nabla f(x)\geq 0.$

La condizione $f(y)\geq f(x)\Rightarrow(y-x)^T\nabla f(x)\geq 0$ $\forall x,y\in C$ implica necessariamente a sua volta che $f(y)>f(x)\Rightarrow(y-x)^T\nabla f(x)\geq 0$ $\forall x,y\in C$.

Resta da dimostrare che se $f(y)>f(x)\Rightarrow(y-x)^T\nabla f(x)\geq 0$ $\forall x,y\in C$ allora necessariamente la funzione è quasi-concava. Si supponga per assurdo che la funzione non sia quasi-concava, ovvero che esistano due punti $\bar{x},\bar{y}\in C$ e $\bar{\lambda}\in(0,1)$ tali che $f(\bar{y})\geq f(\bar{x})>f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))$; la funzione f, essendo differenziabile, è continua e quindi esiste necessariamente $\tilde{\lambda}\in(0,\bar{\lambda})$ tale che $f(\bar{x})>f(\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))>f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))$ ed $f(\bar{x})>f(\bar{x}+\lambda(\bar{y}-\bar{x}))$ $\forall\lambda\in[\tilde{\lambda},\bar{\lambda}]$. Per il teorema di Lagrange esiste quindi un valore $\xi\in(\tilde{\lambda},\bar{\lambda})$ tale che $f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))=f(\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))+((\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))-(\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x})))^T\nabla f(\bar{x}+\xi(\bar{y}-\bar{x}))$, da cui si ha $(\bar{\lambda}-\tilde{\lambda})(\bar{y}-\bar{x})^T\nabla f(\bar{x}+\xi(\bar{y}-\bar{x}))<0$ e quindi $(\bar{y}-\bar{x})^T\nabla f(\bar{x}+\xi(\bar{y}-\bar{x}))<0$; questa ultima disuguaglianza è assurda dal momento che, essendo $f(\bar{y})>f(\bar{x}+\xi(\bar{y}-\bar{x}))$, risulta per ipotesi $(\bar{y}-\bar{x}-\xi(\bar{y}-\bar{x}))^T\nabla f(\bar{x}+\xi(\bar{y}-\bar{x}))=(1-\xi)(\bar{y}-\bar{x})^T\nabla f(\bar{x}+\xi(\bar{y}-\bar{x}))\geq 0$ da cui otteniamo $(\bar{y}-\bar{x})^T\nabla f(\bar{x}+\xi(\bar{y}-\bar{x}))\geq 0$.

(*Pseudo-concavità*) Se f è pseudo-concava la condizione f(y)>f(x) implica che $f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi(x,y)$ $\forall\lambda\in(0,1)$ ovvero $\frac{f(x+\lambda(y-x))-f(x)}{\lambda}\geq(1-\lambda)\xi(x,y)$ $\forall\lambda\in(0,1)$ da cui otteniamo $(y-x)^T\nabla f(x)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(x+\lambda(y-x))-f(x)}{\lambda}\geq\xi(x,y)>0$.

Supponiamo adesso per assurdo che esistano due punti $\bar{x},\bar{y}\in C$ tali che $f(\bar{y})>f(\bar{x})$, $(\bar{y}-\bar{x})^T\nabla f(\bar{x})>0$ e tali che per ogni valore positivo $\xi>0$ esista un $\lambda\in(0,1)$ per cui $\frac{f(\bar{x}+\lambda(\bar{y}-\bar{x}))-f(\bar{x})}{\lambda}<(1-\lambda)\xi<\xi$; presa quindi la successione $\{\xi_i\}\subset(0,1]$ con $\xi_i=\frac{1}{i}$, $i=1,2,3,\ldots,+\infty$, siamo in grado di determinare una corrispondente successione $\{\lambda_i\}\subset(0,1)$ tale che $\frac{f(\bar{x}+\lambda_i(\bar{y}-\bar{x}))-f(\bar{x})}{\lambda_i}<\frac{1}{i}$; la successione $\{\lambda_i\}\subset(0,1)\subset[0,1]$ ammette quindi una sottosuccessione convergente ad un valore $\bar{\lambda}\in[0,1]$. Se $\bar{\lambda}\neq 0$ allora risulta per $i\to+\infty$ che $0\geq\frac{f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))-f(\bar{x})}{\bar{\lambda}}$, ovvero $f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))\leq f(\bar{x})$, il che è assurdo poiché l'ipotesi garantisce la semistretta quasi-concavità di f [12]. Se $\bar{\lambda}=0$ allora risulta, al tendere di i a $+\infty$, che $(\bar{y}-\bar{x})^T\nabla f(\bar{x})=\lim_{i\to+\infty}\frac{f(\bar{x}+\lambda_i(\bar{y}-\bar{x}))-f(\bar{x})}{\lambda_i}\leq 0$ il che è assurdo poiché nega l'ipotesi.

(*Stretta pseudo-concavità*) La dimostrazione è analoga alla precedente. ♦

Relativamente alle funzioni concave il precedente teorema fornisce la seguente interpretazione geometrica: una funzione differenziabile è concava se e solo se il suo grafico giace non al disopra di ogni suo iperpiano tangente, mentre è strettamente concava se e solo se il suo grafico giace al disotto di ogni suo iperpiano tangente.

E' noto che una funzione derivabile è concava (strettamente concava) se e solo se la sua derivata è una funzione non crescente (decrescente); il seguente teorema [39, 65] estende tale proprietà alle funzioni a più variabili.

---

[12] La condizione $f(y)>f(x)\Rightarrow(y-x)^T\nabla f(x)>0$ $\forall x,y\in C$ implica la quasi-concavità della funzione f. Si supponga adesso per assurdo che f non sia semistrettamente quasi-concava ovvero che esistano due punti $\bar{x},\bar{y}\in C$ ed un valore reale $\bar{\lambda}\in(0,1)$ tali che $f(\bar{y})>f(\bar{x})$ e $f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))=f(\bar{x})$; per la quasi-concavità della funzione abbiamo che il punto $(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))$ è di minimo locale per f sul segmento di estremi $\bar{x}$ ed $\bar{y}$, poiché però risulta $f(\bar{y})>f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))$ si ha per ipotesi $(\bar{y}-(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x})))^T\nabla f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))>0$ da cui si ottiene necessariamente $(\bar{y}-\bar{x})^T\nabla f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))>0$, disuguaglianza assurda poiché nega la minimalità locale di $(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))$.

Teorema 1.3.2 Una funzione reale f differenziabile su un aperto convesso $C \subseteq \Re^n$ risulta:

concava se e solo se $(y-x)^T[\nabla f(y)-\nabla f(x)] \le 0 \quad \forall x,y \in C$

strettamente concava se e solo se $(y-x)^T[\nabla f(y)-\nabla f(x)] < 0 \quad \forall x,y \in C,\ x \ne y$

fortemente concava se e solo se $\exists \alpha > 0$ t.c. $(y-x)^T[\nabla f(y)-\nabla f(x)] \le -\alpha \|y-x\|^2 \quad \forall x,y \in C$

Dim. (*Concavità*) Supponiamo f concava e consideriamo due qualsiasi punti x ed y di C, per il teorema precedente si ha:

$$f(y) \le f(x)+(y-x)^T\nabla f(x) \quad \text{ed} \quad f(x) \le f(y)+(x-y)^T\nabla f(y)$$

da cui la tesi sommando membro a membro le due disuguaglianze.
Supponiamo ora che sia $(y-x)^T[\nabla f(y)-\nabla f(x)] \le 0 \quad \forall x,y \in C$ e consideriamo due punti qualsiasi x ed y di C; per il teorema del valor medio si ha che:

$$\exists \xi \in (0,1) \text{ tale che } f(y)=f(x)+(y-x)^T\nabla f(x+\xi(y-x))$$

e dall'ipotesi segue che:

$$\xi(y-x)^T[\nabla f(x+\xi(y-x))-\nabla f(x)]=((x+\xi(y-x))-x)^T[\nabla f(x+\xi(y-x))-\nabla f(x)] \le 0.$$

Di conseguenza $(y-x)^T\nabla f(x+\xi(y-x)) \le (y-x)^T\nabla f(x)$ e quindi:

$$f(y)=f(x)+(y-x)^T\nabla f(x+\xi(y-x)) \le f(x)+(y-x)^T\nabla f(x),$$

da cui la tesi.
(*Stretta concavità*) La dimostrazione è analoga alla precedente relativa alle funzioni concave.
(*Forte concavità*) Vedasi il corollario 1.7.1. ♦

Il seguente teorema [34, 39, 87] fornisce una ulteriore caratterizzazione delle funzioni concave nel caso in cui siano di classe $\mathcal{C}^2$.

Teorema 1.3.3 Una funzione reale f di classe $\mathcal{C}^2$ su un insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$ risulta:

concava se e solo se $v^T\nabla^2 f(x)v \le 0 \quad \forall x \in C \quad \forall v \in \Re^n$

strettamente concava se $v^T\nabla^2 f(x)v < 0 \quad \forall x \in C \quad \forall v \in \Re^n \setminus \{0\}$

fortemente concava se e solo se $\exists \alpha > 0$ t.c. $v^T\nabla^2 f(x)v \le -\alpha v^T v \quad \forall x \in C \quad \forall v \in \Re^n$

Dim. (*Concavità*) Supponiamo f concava e prendiamo un qualsiasi punto $x \in C$, un vettore $v \in \Re^n$ ed un reale $t \ne 0$ tale che $x+tv \in C$; per il teorema precedente abbiamo $f(x+tv) \le f(x)+((x+tv)-x)^T\nabla f(x)=f(x)+tv^T\nabla f(x)$, poiché f è di classe $\mathcal{C}^2$, dallo sviluppo di Taylor con resto di Peano si ha:

$$f(x+tv)=f(x)+tv^T\nabla f(x)+\frac{1}{2}t^2v^T\nabla^2 f(x)v+\sigma(t,0)t^2\|v\|^2,$$

con $\lim_{t\to 0}\sigma(t,0)=0$. Poiché $f(x+tv)\le f(x)+tv^T\nabla f(x)$ e $t\ne 0$ si ottiene che $\frac{1}{2}t^2v^T\nabla^2 f(x)v+\sigma(x+tv,x)t^2\|v\|^2\le 0$, da cui si ha $v^T\nabla^2 f(x)v+2\sigma(x+tv,x)\|v\|^2\le 0$; passando al limite per $t\to 0$ si ha la tesi.

Si supponga ora che $v^T\nabla^2 f(x)v\le 0$ $\forall x\in C$ $\forall v\in\Re^n$; dallo sviluppo di Taylor con resto di Lagrange si ha che:

$\forall x,y\in C$ $\exists\xi\in(0,1)$ tale che $f(y)=f(x)+(y-x)^T\nabla f(x)+\frac{1}{2}(y-x)^T\nabla^2 f(x+\xi(y-x))(y-x)$;

la tesi segue essendo per ipotesi $(y-x)^T\nabla^2 f(x+\xi(y-x))(y-x)\le 0$.

(*Stretta concavità*) La dimostrazione è analoga alla precedente relativa alle funzioni concave.

(*Forte concavità*) Vedasi il corollario 1.7.1. ♦

Si osservi che esistono funzioni strettamente concave la cui matrice Hessiana è semidefinita negativa ma non è definita negativa (ad esempio la funzione a valori reali $f(x)=-x^4$ definita su tutto $\Re$).

Terminiamo questo sottoparagrafo mostrando che, sotto opportune ipotesi, il Teorema 1.3.1 permette di dimostrare che per le funzioni omogenee di grado 1 ([13]) la quasi-concavità coincide con la concavità.

Proprietà 1.3.1 Sia $f:\Re^n_{++}\to\Re_{++}$ una funzione differenziabile omogenea di grado 1. Allora f è concava se e solo se è quasi-concava.

Dim. La necessità è ovvia; resta quindi da dimostrare che se f è quasi-concava allora è anche concava. Siano x ed y due punti qualsiasi di $\Re^n_{++}$ e poniamo $t=f(y)/f(x)>0$; poiché f è omogenea di grado 1 si ha $f(y)=tf(x)=f(tx)$, di conseguenza per la quasi-concavità risulta $(y-tx)^T\nabla f(tx)\ge 0$. Essendo f omogenea di grado 1 ogni sua derivata parziale è omogenea di grado 0, da cui $\nabla f(tx)=\nabla f(x)$; per il teorema di Eulero si ha inoltre $x^T\nabla f(x)=f(x)$. Dalla disuguaglianza precedente si ha quindi $y^T\nabla f(x)=y^T\nabla f(tx)\ge tx^T\nabla f(tx)=tx^T\nabla f(x)=tf(x)=f(y)$; essendo $f(x)-x^T\nabla f(x)=0$ si ha allora $f(y)\le f(x)+(y-x)^T\nabla f(x)$, che implica la concavità di f. ♦

---

[13] Si ricorda che una funzione $f:C\to\Re$, con C cono di $\Re^n$ ovvero sottoinsieme di $\Re^n$ tale che $\lambda x\in C$ $\forall x\in C$ $\forall\lambda>0$, è detta omogenea di grado α se risulta $f(\lambda x)=\lambda^\alpha f(x)$ $\forall x\in C$ $\forall\lambda>0$.

Se inoltre C è un un insieme aperto ed f è differenziabile risulta:

i) se f è omogenea di grado α allora ogni derivata parziale $\partial f/\partial x_i$ è omogenea di grado α-1;

ii) (Th. di Eulero) f è omogenea di grado α se e solo se $x^T\nabla f(x)=\alpha f(x)$ $\forall x\in C$.

Queste funzioni sono molto usate in economia, basti pensare alle funzioni di produzione Cobb-Douglas.

1.3.2. Funzioni fortemente pseudo-concave

Sotto ipotesi di differenziabilità è stata introdotta [7, 34] la seguente una sottoclasse delle funzioni strettamente pseudo-concave.

Definizione 1.3.1 Sia f una funzione differenziabile a valori reali definita su un insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$. La funzione f è detta fortemente pseudo-concava (f.pcv) se è strettamente pseudo-concava e se per ogni punto $x \in C$ ed ogni vettore $v \in \Re^n$ tale che $v^T v=1$ e $v^T \nabla f(x)=0$ esistono due reali positivi $\varepsilon>0$ ed $\alpha>0$ tali che $x \pm \varepsilon v \in C$ e $g(t)=f(x+tv) \leq f(x)- \frac{1}{2}\alpha t^2$ per $|t| \leq \varepsilon$.

La classe delle funzioni fortemente pseudo-concave ha delle interessanti applicazioni nella teoria della domanda del consumatore; sotto opportune ipotesi infatti una funzione di utilità U fortemente pseudo-concava implica la differenziabilità della funzione di domanda $\beta(p)$ del consumatore.

Il seguente teorema [56] fornisce una condizione sufficiente per la forte pseudo-concavità di una funzione.

Teorema 1.3.4 Sia f una funzione differenziabile a valori reali definita su un insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$. Se esiste un reale $\alpha>0$ tale che:

$$f(y)>f(x)- \frac{1}{2}\alpha \|y-x\|^2 \Rightarrow (y-x)^T \nabla f(x)>0 \quad \forall x,y \in C,\ x \neq y,$$

allora la funzione f è fortemente pseudo-concava.

Dim. Una funzione di questo tipo è ovviamente strettamente pseudo-concava. Siano $x \in C$ e $v \in \Re^n$ tali che $v^T v=1$ e $v^T \nabla f(x)=0$. Poiché C è un insieme aperto, esiste per il punto x un intorno circolare di raggio $\varepsilon>0$ interamente contenuto in C da cui, in particolare, $x+tv \in C$ per ogni $|t| \leq \varepsilon$. Per ipotesi $\exists \alpha>0$ per cui la condizione $(x+tv-x)^T \nabla f(x)=tv^T \nabla f(x)=0$ implica necessariamente che:

$f(x+tv) \leq f(x)- \frac{1}{2}\alpha \|x+tv-x\|^2=f(x)- \frac{1}{2}\alpha t^2 v^T v=f(x)- \frac{1}{2}\alpha t^2$, da cui la tesi ♦

Tramite la caratterizzazione delle funzioni differenziabili fortemente concave e la precedente condizione sufficiente per la forte pseudo-concavità è possibile verificare che la classe delle funzioni fortemente concave è contenuta in quella delle funzioni fortemente pseudo-concave; la classe delle funzioni fortemente pseudo-concave è però distinta sia da quella delle strettamente pseudo-concave sia da quella delle fortemente concave, come mostrano i seguenti esempi.

Esempi 1.3.1

Si considerino le seguenti funzioni $f:\Re\rightarrow\Re$.

i) $f(x)=e^{-x^4}$: questa è una funzione strettamente pseudo-concava ma non fortemente pseudo-concava;

ii) $f(x)=\begin{cases} 3+4x & \text{per } x<-1 \\ -x^4 & \text{per } x\in[-1,1] \\ 3-4x & \text{per } x>1 \end{cases}$: questa è una funzione fortemente pseudo-concava ma non fortemente concava.

I risultati precedenti, relativi alle funzioni differenziabili concave generalizzate, si possono riassumere nel seguente diagramma.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \multicolumn{3}{c}{\boxed{\text{qcv}}} \\
 & & \cup & & \cup \\
 & & \boxed{\text{s.qcv}} & \subset & \boxed{\text{ss.qcv}} \\
 & & \cup & & \cup \\
\boxed{\text{f.pcv}} & \subset & \boxed{\text{s.pcv}} & \subset & \boxed{\text{pcv}} \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\boxed{\text{f.cv}} & \subset & \boxed{\text{s.cv}} & \subset & \boxed{\text{cv}}
\end{array}$$

diagramma 4

1.3.3. Altre caratterizzazioni

Altre interessanti caratterizzazioni per le funzioni differenziabili concave generalizzate sono state studiate da Diewert, Avriel e Zang in [34]; tali caratterizzazioni sono basate sulle proprietà di massimo e di minimo delle restrizioni delle funzioni concave generalizzate su una retta.

Relativamente alle funzioni differenziabili quasi-concave una caratterizzazione può essere fornita in termini di minimi locali semistretti ([14]) (vedi anche [8]).

---

[14] Sia f una funzione a valori reali definita su un intervallo aperto $C\subseteq\Re$ e sia $x_0\in C$. x_0 è un *minimo locale semistretto* per f se esistono due punti $x,y\in C$, $x<x_0<y$, tali che $f(x_0)\leq f(x+\lambda(y-x))$ $\forall\lambda\in(0,1)$ ed $f(x_0)<\min\{f(x),f(y)\}$; x_0 è invece un *minimo locale semistretto "one-sided"* per f se esistono due punti $x,y\in C$, $x<x_0<y$, tali che $f(x_0)\leq f(x+\lambda(y-x))$ $\forall\lambda\in(0,1)$ ed $f(x_0)<f(x)$ oppure $f(x_0)<f(y)$. Si osservi che un

Teorema 1.3.5 Sia f una funzione differenziabile definita sull'insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$. La funzione f è quasi-concava se e solo se per ogni punto $x \in C$ ed ogni vettore $v \in \Re^n$ tale che $v^T v=1$ e $v^T \nabla f(x)=0$ la funzione $g(t)=f(x+tv)$ non ammette un minimo locale semistretto per $t=0$. Se inoltre f è di classe C^2 allora risulta quasi-concava se e solo se per ogni punto $x \in C$ ed ogni vettore $v \in \Re^n$ tale che $v^T v=1$ e $v^T \nabla f(x)=0$ risulta $v^T \nabla^2 f(x) v<0$ oppure $v^T \nabla^2 f(x) v=0$ e la funzione $g(t)=f(x+tv)$ non ammette un minimo locale semistretto per $t=0$.

Il precedente teorema indica che la funzione f, ristretta su una retta passante per il punto x ed avente una direzione v ortogonale al gradiente di f in x, non ammette un minimo locale semistretto in x. In particolare, se $\nabla f(x)=0$ per un qualche punto x di C allora x non è un minimo locale semistretto per f rispetto ad una qualsiasi retta passante per x.
Simili risultati, aventi quindi una analoga interpretazione, sono ottenibili anche per le funzioni strettamente quasi-concave, semistrettamente quasi-concave, pseudo-concave e strettamente pseudo-concave [34].

Teorema 1.3.6 Sia f una funzione differenziabile definita sull'insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$. La funzione f è strettamente quasi-concava se e solo se per ogni punto $x \in C$ ed ogni vettore $v \in \Re^n$ tale che $v^T v=1$ e $v^T \nabla f(x)=0$ la funzione $g(t)=f(x+tv)$ non ammette un minimo locale per $t=0$.
Se inoltre la funzione f è di classe C^2 allora risulta strettamente quasi-concava se e solo se per ogni punto $x \in C$ ed ogni vettore $v \in \Re^n$ tale che $v^T v=1$ e $v^T \nabla f(x)=0$ risulta $v^T \nabla^2 f(x) v<0$ oppure $v^T \nabla^2 f(x) v=0$ e la funzione $g(t)=f(x+tv)$ non ammette un minimo locale per $t=0$.

Teorema 1.3.7 Sia f una funzione differenziabile definita sull'insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$. La funzione f è semistrettamente quasi-concava se e solo se per ogni punto $x \in C$ ed ogni vettore $v \in \Re^n$ tale che $v^T v=1$ e $v^T \nabla f(x)=0$ la funzione $g(t)=f(x+tv)$ non ammette un minimo locale semistretto "one-sided" per $t=0$. Se inoltre la funzione f è di classe C^2 allora risulta semistrettamente

---

punto di minimo locale stretto è anche un punto di minimo locale semistretto, che a sua volta è anche un punto di minimo locale semistretto "one-sided", che a sua volta è anche un punto di minimo locale.
Si osservi inoltre che mentre in generale un punto di minimo locale può anche essere un punto di massimo globale ciò non può accadere per un punto di minimo locale semistretto "one-sided".

quasi-concava se e solo se per ogni punto $x \in C$ ed ogni vettore $v \in \Re^n$ tale che $v^T v=1$ e $v^T \nabla f(x)=0$ risulta $v^T \nabla^2 f(x) v<0$ oppure $v^T \nabla^2 f(x) v=0$ e la funzione $g(t)=f(x+tv)$ non ammette un minimo locale semistretto "one-sided" per $t=0$.

Teorema 1.3.8 Sia f una funzione di classe C^1 definita sull'insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$. La funzione f è [strettamente] pseudo-concava se e solo se per ogni punto $x \in C$ ed ogni vettore $v \in \Re^n$ tale che $v^T v=1$ e $v^T \nabla f(x)=0$ la funzione $g(t)=f(x+tv)$ ammette un massimo locale [stretto] per $t=0$. Se inoltre la funzione f è di classe C^2 allora risulta [strettamente] pseudo-concava se e solo se per ogni punto $x \in C$ ed ogni vettore $v \in \Re^n$ tale che $v^T v=1$ e $v^T \nabla f(x)=0$ risulta $v^T \nabla^2 f(x) v<0$ oppure $v^T \nabla^2 f(x) v=0$ e la funzione $g(t)=f(x+tv)$ ammette un massimo locale [stretto] per $t=0$.

Un analogo teorema è stato fornito [34] per le funzioni fortemente pseudo-concave utilizzando il concetto di massimo locale forte ([15]).

Teorema 1.3.9 Sia f una funzione di classe C^1 definita sull'insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$. La funzione f è fortemente pseudo-concava se e solo se per ogni punto $x \in C$ ed ogni vettore $v \in \Re^n$ tale che $v^T v=1$ e $v^T \nabla f(x)=0$ la funzione $g(t)=f(x+tv)$ ammette un massimo locale forte per $t=0$.
Se inoltre la funzione f è di classe C^2 allora risulta fortemente pseudo-concava se e solo se per ogni punto $x \in C$ ed ogni vettore $v \in \Re^n$ tale che $v^T v=1$ e $v^T \nabla f(x)=0$ risulta $v^T \nabla^2 f(x) v<0$.

Si osservi che in [34] i precedenti teoremi sono stati dimostrati anche in ipotesi di sottodifferenziabilità, assumendo soltanto che la funzione f sia in ogni punto x_0 dell'insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$ direzionalmente derivabile rispetto ad ogni direzione unitaria $v \in \Re^n$ e tale che $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)=\frac{\partial f}{\partial(-v)}(x_0)$.

[15] Sia f una funzione a valori reali definita su un intervallo aperto $C \subseteq \Re$ e sia $x_0 \in C$. x_0 è un *massimo locale forte* per f se esistono due valori $\varepsilon>0$ ed $\alpha>0$ tali che $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \subset C$ ed $f(x) \leq f(x_0)-(1/2)\alpha(x-x_0)^2$ per ogni $x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$. Si osservi che un punto di massimo locale forte è anche un punto di massimo locale stretto, che a sua volta è anche un punto di massimo locale.

1.4. Trasformazioni monotone e teoremi di composizione

In questo paragrafo si studieranno condizioni sotto le quali la trasformazione di una funzione concava generalizzata è ancora una funzione concava generalizzata, e condizioni per le quali la somma od il prodotto di due funzioni è una funzione concava generalizzata.
Al riguardo, alcuni dei risultati si possono trovare in [6, 65, 66].
Verranno inoltre mostrati alcuni teoremi di composizione, che generalizzano i risultati proposti in [6], che permetteranno di studiare la concavità generalizzata di una funzione complessa mediante la sua scomposizione in più funzioni scalari semplici da studiare.

1.4.1. Trasformazioni monotone di una funzione

Si inizia l'analisi delle trasformazioni monotone per le classi di funzioni di tipo concavo, per poi passare a quelle di tipo quasi-concavo e pseudo-concavo.

Teorema 1.4.1 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso, $f:C\to\Re$ una funzione a valori reali, $g:C'\to\Re$, con $C'\subseteq\Re$ insieme convesso tale che $f(C)\subseteq C'$, una funzione concava ed $F=g\circ f:C\to\Re$ la corrispondente funzione composta. Risulta:

i) se f è concava oppure semi concava e g è monotona nondecrescente allora F è rispettivamente concava oppure semi concava;
ii) se f è strettamente concava oppure semistrettamente concava e g è monotona crescente allora F è rispettivamente strettamente concava oppure semistrettamente concava.

Dim. i) Sia f concava e siano $x,y\in C$; per la nondecrescenza di g si ha che $g(f(x+\lambda(y-x)))\geq g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))$ $\forall\lambda\in(0,1)$, da cui la tesi poiché la concavità di g implica che $g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))\geq g(f(x))+\lambda(g(f(y))-g(f(x)))$ $\forall\lambda\in(0,1)$.
Sia ora f semi concava e siano $x,y\in C$ tali che $F(y)>F(x)$, ovvero tali che $g(f(y))>g(f(x))$; la nondecrescenza di g implica che $f(y)>f(x)$ e tale condizione a sua volta implica, per la semi concavità di f, $f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)+\lambda(f(y)-f(x))$ $\forall\lambda\in(0,1)$ da cui si ottiene, per la nondecrescenza e la concavità di g:

$$g(f(x+\lambda(y-x)))\geq g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))\geq g(f(x))+\lambda(g(f(y))-g(f(x)))\ \forall\lambda\in(0,1),$$

ovvero $F(x+\lambda(y-x))\geq F(x)+\lambda(F(y)-F(x))$ $\forall\lambda\in(0,1)$, da cui la tesi.

ii) Analoga alla dimostrazione del punto i). ♦

In modo analogo si dimostra che sotto ipotesi di convessità della funzione g risulta che F è convessa se f è concava e g è monotona noncrescente, strettamente convessa se f è strettamente concava e g è monotona decrescente.
Il seguente esempio mostra come nel precedente Teorema 1.4.1 non possa essere rilasciata l'ipotesi di convessità della funzione g, oltre che della sua monotonia, al fine di ottenere una funzione composta di tipo concavo.

Esempio 1.4.1
Si considerino le funzioni $g(y)=y^3$ ed $f(x)=x$; la funzione f è concava mentre la funzione g è crescente ma non concava, il Teorema 1.4.1 non è applicabile per la non concavità della funzione g ed in particolare la funzione composta $g(f(x))=x^3$ non è concava.

Si stabiliscono adesso alcuni risultati relativi alle funzioni di tipo quasi-concavo, per i quali non è più necessario assumere la concavità della funzione g.

Teorema 1.4.2 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso, $f:C \to \Re$ una funzione a valori reali, $g:f(C) \to \Re$ una funzione monotona nondecrescente ed $F=g \circ f:C \to \Re$ la corrispondente funzione composta. Se f è quasi-concava oppure semi quasi-concava allora F è rispettivamente quasi-concava oppure semi quasi-concava.
Dim. Sia f qcv, ovvero $f(x+\lambda(y-x)) \geq \min\{f(x),f(y)\}$ $\forall x,y \in C$, $\forall \lambda \in (0,1)$; ne consegue, per la nondecrescenza di g, che:

$$g(f(x+\lambda(y-x))) \geq g(\min\{f(x),f(y)\}) = \min\{g(f(x)),g(f(y))\}$$

ovvero F è quasi-concava. Siano adesso $x,y \in C$ tali che $g(f(y))>g(f(x))$, per la nondecrescenza di g risulta $f(y)>f(x)$; poiché f è semi quasi-concava segue che $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)$ $\forall \lambda \in (0,1)$ da cui, sempre per la nondecrescenza di g, si ha $g(f(x+\lambda(y-x))) \geq g(f(x))$ $\forall \lambda \in (0,1)$; la funzione F è quindi sm.qcv. ♦

Si osservi che in modo del tutto analogo si può dimostrare che se la g è monotona noncrescente allora la funzione F è rispettivamente quasi-convessa o semi quasi-convessa.
Dal Teorema precedente segue, essendo ogni funzione concava anche quasi-concava, che ogni trasformazione nondecrescente di una funzione concava è una funzione quasi-concava; si osservi che non vale il viceversa, ovvero che esistono delle funzioni quasi-concave che non sono ottenibili per composizione da alcuna funzione concava; tale problematica è nota come concavificabilità di una funzione [3, 51, 53, 61, 86, 96].

Teorema 1.4.3 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso, $f:C \to \Re$ una funzione a valori reali, $g:f(C) \to \Re$ una funzione monotona crescente ed $F=g \circ f:C \to \Re$ la corrispondente funzione composta.
Se f è semistrettamente quasi-concava, strettamente quasi-concava, quasi-concava in senso esteso oppure strettamente quasi-concava in senso esteso allora F verifica la stessa proprietà.
Dim. Sia $g(f(y))>g(f(x))$, ciò implica per la crescenza di g che $f(y)>f(x)$; se f è ss.qcv si ha $f(x+\lambda(y-x))>f(x)$ $\forall \lambda \in (0,1)$ e perciò, per la crescenza di g, risulta $g(f(x+\lambda(y-x)))>g(f(x))$ $\forall \lambda \in (0,1)$ ovvero F è ss.qcv.
Sia adesso $g(f(y)) \geq g(f(x))$, ciò implica per la crescenza di g che $f(y) \geq f(x)$; se f è s.qcv si ha $f(x+\lambda(y-x))>f(x)$ $\forall \lambda \in (0,1)$ e, per la crescenza di g, si ottiene $g(f(x+\lambda(y-x)))>g(f(x))$ $\forall \lambda \in (0,1)$ ovvero F è s.qcv.
Sia ora $g(f(y))=g(f(x))$, ciò implica per la crescenza di g che $f(y)=f(x)$; se f è e.qcv si ha $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)$ $\forall \lambda \in (0,1)$ e perciò, per la crescenza di g, risulta $g(f(x+\lambda(y-x))) \geq g(f(x))$ $\forall \lambda \in (0,1)$ ovvero F è e.qcv.
Se infine f è es.qcv risulta $f(x+\lambda(y-x))>f(x)$ $\forall \lambda \in (0,1)$ da cui, per la crescenza di g, si ha $g(f(x+\lambda(y-x)))>g(f(x))$ $\forall \lambda \in (0,1)$ ovvero F è es.qcv. ♦

In modo analogo si dimostra che se nel Teorema 1.4.3 la funzione g è monotona decrescente allora F è rispettivamente semistrettamente quasi-convessa, strettamente quasi-convessa, quasi-convessa in senso esteso oppure strettamente quasi-convessa in senso esteso.
I precedenti teoremi di trasformazione permettono di estendere la Proprietà 1.3.1 relativa alle funzioni omogenee.

Corollario 1.4.1 Sia $f:\Re^n_{++} \to \Re_{++}$ una funzione differenziabile omogenea di grado $\alpha \in (0,1]$. Allora f è concava se e solo se è quasi-concava.
Dim. La necessità è ovvia, resta quindi verificare che se f è quasi-concava allora è anche concava. Siano $g:\Re_{++} \to \Re_{++}$ $h:\Re^n_{++} \to \Re_{++}$ tali che $g(y)=y^\alpha$ ed $h(x)=[f(x)]^{1/\alpha}$; per costruzione risulta $f=g \circ h$.
Per il Teorema 1.4.2, la funzione h è quasi-concava in quanto trasformazione nondecrescente della funzione f quasi-concava ed è inoltre anche omogenea di grado 1, poiché $h(tx)=[f(tx)]^{1/\alpha}=[t^\alpha f(x)]^{1/\alpha}=t[f(x)]^{1/\alpha}=th(x)$, risultando così concava per la Proprietà 1.3.1.
D'altra parte g verifica le condizioni $g'(x)=\alpha y^{\alpha-1}>0$ e $g''(x)=\alpha(\alpha-1)y^{\alpha-2} \leq 0$ essendo $y>0$ ed $\alpha \in (0,1]$ ed è di conseguenza crescente e concava.
Per il Teorema 1.4.1 quindi la funzione $f=g \circ h$ è concava. ♦

Risultati analoghi a quelli stabiliti per le funzioni quasi-concave valgono anche per le funzioni differenziabili pseudo-concave.

Teorema 1.4.4 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso, $f:C \to \Re$ una funzione differenziabile a valori reali, $g:f(C) \to \Re$ una funzione derivabile monotona crescente tale che $g'(y)>0 \ \forall y \in f(C)$ ed $F=g°f:C \to \Re$ la corrispondente funzione composta.
Se f è pseudo-concava oppure strettamente pseudo-concava allora F è rispettivamente pseudo-concava oppure strettamente pseudo-concava.
Dim. Siano $x,y \in C$ tali che $(y-x)^T \nabla F(x) \leq 0$; poiché $\nabla F(x)=g'(x) \nabla f(x)$ e $g'(x)>0$ si ha $(y-x)^T \nabla f(x) \leq 0$. Se f è pcv allora $f(y) \leq f(x)$ da cui $g(f(y)) \leq g(f(x))$ per la crescenza di g, se invece f è s.pcv allora $f(y)<f(x)$ da cui, sempre per la crescenza di g, $g(f(y))<g(f(x))$. ♦

In modo analogo si dimostra che se nel Teorema 1.4.4 la funzione g è monotona decrescente e $g'(y)<0 \ \forall y \in f(C)$ allora F è rispettivamente pseudo-convessa e strettamente pseudo-convessa.

1.4.2. Composizione di funzioni scalari concave generalizzate

L'importanza dello studio della composizione di funzioni scalari concave generalizzate stà nel fatto che esso può essere utilizzato per verificare la concavità generalizzata di una funzione complicata da studiarsi direttamente.
I risultati che vengono proposti in questo sottoparagrafo generalizzano quelli proposti in [6].
Dei seguenti risultati non sarà fornita la dimostrazione in quanto conseguenza immediata dei Teoremi 2.4.2, 2.4.3 e 2.4.4 del prossimo capitolo.

Corollario 1.4.2 Si considerino le funzioni $f:S \to \Re^m$ e $g:D \to \Re$, con $S \subseteq \Re^n$ e $D \subseteq \Re^m$ insiemi convessi tali che $f(S) \subseteq D$.
Siano inoltre le funzioni f e g tali che:

$$g(f(x+\lambda(y-x))) \geq g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x))) \quad \forall \lambda \in (0,1) \ \forall x,y \in S, \ x \neq y. \qquad (1.4.1)$$

Se g è cv, qcv, sm.qcv, ss.qcv, e.qcv, pcv allora la funzione composta $(g \circ f):S \to \Re$ è rispettivamente cv, qcv, sm.qcv, ss.qcv, e.qcv, pcv.
Nel caso inoltre in cui risulti $f(x) \neq f(y) \ \forall x,y \in S, \ x \neq y$, si ha che se g è s.cv, s.qcv, es.qcv, s.pcv allora la funzione composta $(g \circ f):S \to \Re$ è rispettivamente s.cv, s.qcv, es.qcv, s.pcv.

Corollario 1.4.3 Si considerino le funzioni $f:S\rightarrow\Re^m$ e $g:D\rightarrow\Re$, con $S\subseteq\Re^n$ e $D\subseteq\Re^m$ insiemi convessi tali che $f(S)\subseteq D$.
Siano inoltre le funzioni f e g tali che:

$$g(f(x+\lambda(y-x)))>g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x))) \quad \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x,y\in S,\ x\neq y. \tag{1.4.2}$$

Se g è cv, qcv, sm.qcv, e.qcv, allora la funzione composta $(g\circ f):S\rightarrow\Re$ è rispettivamente s.cv, s.qcv, ss.qcv, es.qcv.

Il seguente teorema, analogo al Corollario 1.4.3, è invece relativo alle funzioni strettamente pseudo-concave.

Teorema 1.4.5 Si considerino le funzioni $f:S\rightarrow\Re^m$ e $g:D\rightarrow\Re$, con $S\subseteq\Re^n$ e $D\subseteq\Re^m$ insiemi convessi tali che $f(S)\subseteq D$; siano inoltre le funzioni f e g tali che vale la (1.4.2), ovvero:

$$g(f(x+\lambda(y-x)))>g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x))) \quad \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x,y\in S,\ x\neq y.$$

Se g è semicontinua superiormente e pseudo-concava allora la funzione composta $(g\circ f):S\rightarrow\Re$ è strettamente pseudo-concava.

Dim. Essendo la funzione g pseudo-concava allora anche la funzione composta $g\circ f$, per il Corollario 1.4.2, è a sua volta pseudo-concava; la funzione g inoltre, essendo semicontinua superiormente, risulta anche quasi-concava e quindi, per il Corollario 1.4.3, la funzione composta $g\circ f$ è anche strettamente quasi-concava. La tesi segue quindi direttamente dal Teorema 1.1.6. ♦

Si osservi che il precedente Teorema 1.4.5 estende un risultato analogo proposto in [6], nel quale si richiedeva però una funzione g differenziabile e strettamente pseudo-concava.
Si osservi inoltre che il Corollario 1.4.3 ed il Teorema 1.4.5 permettono di ottenere funzioni strettamente concave, strettamente quasi-concave, strettamente quasi-concave in senso esteso e strettamente pseudo-concave anche nel caso in cui la funzione f sia tale che per punti distinti $x,y\in S$, $x\neq y$, risulti $f(x)=f(y)$.
Il seguente teorema specifica alcune classi di funzioni che verificano le proprietà (1.4.1) ed (1.4.2).

Teorema 1.4.6 Si considerino le funzioni $f:S\to\Re^m$ e $g:D\to\Re$, con $S\subseteq\Re^n$ e $D\subseteq\Re^m$ insiemi convessi tali che $f(S)\subseteq D$.
Posto $g(y)=g(y_1,\dots,y_m)$, siano $I^*=\{i$: g non è monotona in $y_i\}$, $I^+=\{i$: g è nondecrescente in $y_i\}$, ed $I^-=\{i$: g è noncrescente in $y_i\}$.
Si supponga inoltre che la componente f_i della funzione f sia affine se $i\in I^*$, concava se $i\in I^+$ e convessa se $i\in I^-$.
Allora risulta: $g(f(x+\lambda(y-x)))\geq g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))\ \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x,y\in S,\ x\neq y$.
Se inoltre esiste almeno una componente f_i, $i\in I^+\cup I^-$, strettamente concava o strettamente convessa tale che g sia strettamente monotona rispetto ad y_i allora si ha: $g(f(x+\lambda(y-x)))>g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))\ \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x,y\in S,\ x\neq y$.

Dim. Siano $x,y\in S$, $x\neq y$, e sia $\lambda\in(0,1)$; per ipotesi si ha che:

$f_i(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq\lambda f_i(x)+(1-\lambda)f_i(y)$ per $i\in I^+$;

$f_i(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f_i(x)+(1-\lambda)f_i(y)$ per $i\in I^-$;

$f_i(\lambda x+(1-\lambda)y)=\lambda f_i(x)+(1-\lambda)f_i(y)$ per $i\in I^*$;

per la definizione di I^+, I^- e I^* si ha quindi $g(f(\lambda x+(1-\lambda)y))\geq g(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y))$.
Nel caso in cui per almeno un indice $i\in I^+\cup I^-$ una delle precedenti relazioni valga in senso stretto e la funzione g sia strettamente monotona in y_i allora si ha, sempre per la definizione di I^+, I^- e I^*, $g(f(\lambda x+(1-\lambda)y))>g(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y))$. ♦

I risultati precedenti, che estendono in parte quelli noti in letteratura, possono essere utilizzati per studiare la concavità generalizzata della funzione obiettivo del seguente problema di programmazione matematica:

$$P:\begin{cases}\max\ h(x)=[f(x)]^\beta[d_0+d^Tx]^\alpha\\ x\in S=\{x\in\Re^n:\ x\geq 0,\ Ax=b\}\end{cases}$$

dove A è una matrice reale con m righe ed n colonne, $b\in\Re^m$, $d\in\Re^n$, $d_0\in\Re$, α e β sono parametri reali non nulli ed inoltre $f(x)>0$ e $(d_0+d^Tx)>0\ \forall x\in S$.
Questa classe di funzioni appare non solo nella programmazione matematica ma anche in economia; basta ricordare la funzione di produzione di Wicksell-Cobb-Douglas $P(L,K)=cL^\alpha K^\beta$ dove c è un parametro che dipende dal grado di efficienza dell'attività produttiva, α e β sono costanti positive ed L e K denotano le quantità impiegate rispettivamente di lavoro e capitale (si ricordi che questa funzione di produzione è omogenea di grado $\alpha+\beta$).
La concavità generalizzata di h si può efficientemente studiare, tramite i precedenti teoremi di composizione, come funzione composta $h(x)=g(f(x),d_0+d^Tx)$, dove $g:\Re^2_{++}\to\Re$ è tale che $g(y_1,y_2)=y_1{}^\beta y_2{}^\alpha$.
Il seguente lemma mostra le caratteristiche peculiari della funzione g.

Lemma 1.4.1 Sia $g:\Re^2_{++}\to\Re$, la funzione $g(y_1,y_2)=y_1{}^{\beta}y_2{}^{\alpha}$, con $\alpha,\beta\in\Re$, $\alpha,\beta\neq 0$.
La funzione g verifica le seguenti proprietà:

i) rispetto ad y_1 è strettamente monotona crescente per $\beta>0$ e strettamente monotona decrescente per $\beta<0$;

ii) rispetto ad y_2 è strettamente monotona crescente per $\alpha>0$ e strettamente monotona decrescente per $\alpha<0$;

iii) se $\alpha<0$ e $\beta<0$ allora g è strettamente convessa;

iv) se $\alpha>0$ e $\beta>0$ allora $\begin{cases} \text{se } \alpha+\beta<1 \text{ h è strettamente concava} \\ \text{se } \alpha+\beta=1 \text{ h è concava} \\ \text{se } \alpha+\beta>1 \text{ h è strettamente pseudo-concava} \end{cases}$;

v) se $\alpha\beta<0$ allora $\begin{cases} \text{se } \alpha+\beta<0 \text{ h è strettamente pseudo-concava} \\ \text{se } \alpha+\beta=0 \text{ h è pseudo-affine} \\ \text{se } \alpha+\beta>0 \text{ h è strettamente pseudo-convessa} \end{cases}$.

I risultati ottenibili per la funzione h, che estendono quelli proposti in [6, 85], sono riassunti nella tabella seguente.

Valori dei parametri α e β		Proprietà componente f(x) nell'insieme $\Re^2_{++}$				
		cv	s.cv	cx	s.cx	lineare
$\alpha>0$	$\beta+\alpha\leq 1$	cv	s.cv			cv
$\beta>0$	$\beta+\alpha>1$	pcv	s.pcv			pcv
$\alpha<0$	$\beta+\alpha<0$	pcv	s.pcv			pcv
$\beta>0$	$\beta+\alpha=0$	pcv	s.pcv	pcx	s.pcx	pcv & pcx
	$\beta+\alpha>0$			pcx	s.pcx	pcx
$\alpha>0$	$\beta+\alpha<0$			pcv	s.pcv	pcv
$\beta<0$	$\beta+\alpha=0$	pcx	s.pcx	pcv	s.pcv	pcv & pcx
	$\beta+\alpha>0$	pcx	s.pcx			pcx
$\alpha<0$, $\beta<0$		cx	s.cx			cx

Casi particolari del precedente problema sono il caso $\beta=1$, affrontato in [12, 15-18, 67] ed approfonditamente studiato in [18], ed il noto caso $\beta=1$ ed $\alpha=-1$ della programmazione frazionaria, ampiamente studiato sia dal punto di vista teorico sia dal punto di vista della risoluzione algoritmica [11, 14, 68].

Funzioni del tipo $h(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, con l'ipotesi che sia $f_2(x)>0$ $\forall x\in S$, sono molto utilizzate in economia ed in finanza [20], basti pensare a tutti i problemi in cui si devono studiare rapporti del tipo:

$$\frac{\text{profitto}}{\text{capitale}},\ \frac{\text{profitto}}{\text{ricavo}},\ \frac{\text{rendimento}}{\text{rischio}},\ \frac{\text{costo}}{\text{tempo}},\ \frac{\text{produzione}}{\text{lavoro}}.$$

Per completezza si ricorda che, tramite i precedenti teoremi di composizione, per tali funzioni si ottengono i seguenti risultati:

Insieme di Riferimento	Proprietà compon. f_2	Proprietà componente f_1 nell'insieme D			
		s.cv	cv	cx	s.cx
D	fn	s.pcv	pcv	pcx	s.pcx
$\{y\in D: y_1<0\}$	s.cv		s.pcv		
$\{y\in D: y_1<0\}$	s.cx			s.pcx	
$\{y\in D: y_1>0\}$	s.cv			s.pcx	
$\{y\in D: y_1>0\}$	s.cx		s.pcv		
$\{y\in D: y_1\leq 0\}$	cv	s.pcv	pcv		
$\{y\in D: y_1\leq 0\}$	cx			pcx	s.pcx
$\{y\in D: y_1\geq 0\}$	cv			pcx	s.pcx
$\{y\in D: y_1\geq 0\}$	cx	s.pcv	pcv		

Si osservi che si ritrova il ben noto risultato secondo cui se entrambe le funzioni f_1 ed f_2 sono affini allora la funzione composta h è pseudo-affine.

Direttamente dal Corollario 1.4.2 si ottiene infine il seguente risultato relativo alla composizione di una funzione affine vettoriale.

Corollario 1.4.4 Si considerino la funzione affine $f:S\rightarrow\Re^m$, $f(x)=Ax+b$, dove $A\in\Re^{m\times n}$ e $b\in\Re^m$, e la funzione $g:D\rightarrow\Re$, con $S\subseteq\Re^n$ e $D\subseteq\Re^m$ insiemi convessi tali che $f(S)\subseteq D$.

Se g è cv, qcv, sm.qcv, ss.qcv, e.qcv, pcv allora la funzione composta $(g\circ f):S\rightarrow\Re$ è rispettivamente cv, qcv, sm.qcv, ss.qcv, e.qcv, pcv.

Inoltre se la matrice A è quadrata ed invertibile si ha che se g è s.cv, s.qcv, es.qcv, s.pcv allora la funzione composta $(g\circ f):S\rightarrow\Re$ è rispettivamente s.cv, s.qcv, es.qcv, s.pcv.

Quest'ultimo corollario permette, ad esempio, di determinare la concavità generalizzata della funzione $h(x)=(g \circ f)(x)=(c_0+c^Tx)(d_0+d^Tx)^\alpha$, dove $g(y,z)=yz^\alpha$ ed $f(x)=Ax+b$ con $A=\begin{bmatrix} c^T \\ d^T \end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix}$, che appare come funzione obiettivo in alcuni problemi di programmazione frazionaria [18].
Risulta infatti, per il Corollario 1.4.4, che tale funzione è affine per $\alpha=0$, pseudo-affine per $\alpha=-1$, mentre per $\alpha\neq0,-1$ risulta:

	$\{x\in R: h(x)\leq0\}$	$\{x\in R: h(x)\geq0\}$
$-1<\alpha<0$	pcv	pcx
$\alpha<-1$, $\alpha>0$	pcx	pcv

1.4.3. Struttura algebrica delle funzioni

In questo sottoparagrafo si studiano le proprietà di concavità-generalizzata che vengono implicate dalla somma o prodotto di funzioni concave generalizzate. Iniziamo dalla seguente ben nota proprietà delle funzioni concave [65].

Proprietà 1.4.1 Siano $f_1,\dots,f_m$ funzioni concave a valori reali definite sull'insieme convesso $C\subseteq\Re^n$ e siano inoltre $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ numeri reali non-negativi.
Allora la funzione $g=\alpha_1f_1+\dots+\alpha_mf_m=\sum_{i=1}^{m}\alpha_if_i$ è concava su C e se inoltre esiste un indice $j\in 1,\dots,m$ per cui f_j è strettamente concava ed $\alpha_j>0$ allora g è strettamente concava.
Dim. Per la convessità delle f_i, $i=1,\dots,m$, si ha $f_i(x+\lambda(y-x))\geq f_i(x)+\lambda(f_i(y)-f_i(x))$ $\forall\lambda\in(0,1)$ $\forall x,y\in C$; essendo $\alpha_i\geq0$, $i=1,\dots,m$, risulta, sommando membro a membro:
$$g(x+\lambda(y-x))=\sum_{i=1}^{m}\alpha_if_i(x+\lambda(y-x))\geq\sum_{i=1}^{m}\alpha_if_i(x)+\lambda(\alpha_if_i(y)-\alpha_if_i(x))=g(x)+\lambda(g(y)-g(x)).$$
Se infine per $j\in\{1,\dots,m\}$ si ha $f_j(x+\lambda(y-x))>f_j(x)+\lambda(f_j(y)-f_j(x))$ e $\alpha_j>0$ allora la disuguaglianza precedente è verificata in senso stretto e quindi g è s.cv. ♦

Dalla proprietà precedente segue che la somma di due funzioni concave è ancora una funzione concava, mentre la somma di una funzione concava con una strettamente concava è strettamente concava; tale proprietà non vale per le altre classi di funzioni concave generalizzate, come evidenzia il seguente esempio 1.4.2 i). Anche il prodotto di due funzioni concave generalizzate non è, in generale, concavo-generalizzato, come mostra l'esempio 1.4.2 ii).

Esempi 1.4.2

Si considerino le seguenti funzioni derivabili, definite su tutta la retta dei reali.

i) $f_1(x)=x^3+x$ ed $f_2(x)=-x^3+x^2-x$: risulta $f_1'(x)=3x^2+1>0$ e $f_2'(x)=-3x^2+2x-1<0$ $\forall x\in \Re$, di conseguenza, per il Teorema 1.5.13 che sarà dimostrato nel prossimo paragrafo, entrambe le funzioni sono sia strettamente pseudo-concave sia strettamente pseudo-convesse; la loro somma però, data dalla funzione $g(x)=x^2$, è strettamente convessa e non è quindi neanche quasi-concava.

ii) $f_1(x)=f_2(x)=x$: le due funzioni identità sono affini (e quindi concave), ma il loro prodotto è ancora dato dalla funzione $g(x)=x^2$.

Valgono tuttavia alcune proprietà, relative al prodotto ed al rapporto di funzioni positive concave e/o convesse.

Proprietà 1.4.2 Se f_1 ed f_2 sono due funzioni concave positive definite sull'insieme convesso $C\subseteq\Re^n$, allora la funzione $h=f_1f_2$ è pseudo-concava; se inoltre almeno una di esse è strettamente concava allora anche g è strettamente pseudo-concava.

Dim. Segue dal precedente Lemma 1.4.1 e dai teoremi di composizione di cui al Corollario 1.4.2 ed al Teorema 1.4.5, osservando che la funzione $g(y_1,y_2)=y_1y_2$, definita per $y_1,y_2>0$, è strettamente pseudo-concava, continua e crescente nelle due componenti. ♦

Proprietà 1.4.3 Se f_1 ed f_2 sono due funzioni positive definite sull'insieme convesso $C\subseteq\Re^n$, f_1 è concava ed f_2 è convessa allora la funzione $h=f_1/f_2$ è pseudo-concava.

Dim. Segue dal Lemma 1.4.1 e dal teorema di composizione di cui al Corollario 1.4.2, osservando che la funzione $g(y_1,y_2)=y_1/y_2$, definita per $y_1,y_2>0$, è pseudo-concava, crescente rispetto alla y_1 e decrescente rispetto a y_2. ♦

Si osservi che il Lemma 1.4.1 ed i teoremi di composizione del paragrafo precedente permettono di ottenere, in modo analogo a quanto fatto nelle Proprietà 1.4.2 e 1.4.3, molti altri risultati che non sono citati per non appesantire eccessivamente l'esposizione.

Dai teoremi del sottoparagrafo 1.4.1 otteniamo infine il seguente corollario.

Corollario 1.4.5 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso, $f:C \to \Re$ una funzione a valori negativi od a valori positivi ed $1/f:C \to \Re$ la funzione reciproca di f.
Se f è qcv, sm.qcv, ss.qcv, s.qcv, e.qcv, es.qcv, pcv oppure s.pcv allora 1/f è rispettivamente qcx, sm.qcx, ss.qcx, s.qcx, e.qcx, es.qcx, pcx oppure s.pcx.
Dim. Segue dai Teoremi 1.4.2, 1.4.3 ed 1.4.4 osservando che la funzione $g(y)=1/y$, tale che $1/f=g°f$, è decrescente e tale che $g'(y)<0$ per ogni $y \neq 0$. ♦

Corollario 1.4.6 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso, $f:C \to \Re_{++}$ una funzione a valori positivi ed $1/f:C \to \Re$ la funzione reciproca di f.
Se f è concava oppure strettamente concava allora 1/f è rispettivamente convessa oppure strettamente convessa.
Dim. Segue dal Teorema 1.4.1 osservando che la funzione $g(y)=1/y$, tale che $1/f=g°f$, è decrescente e convessa per $y>0$. ♦

I seguenti esempi evidenziano l'importanza dell'ipotesi di positività delle funzioni concave nel Corollario 1.4.3; l'esempio 1.4.3 i) mostra infatti una funzione concava negativa con funzione reciproca ancora concava, mentre l'esempio 1.4.3 ii) mostra una funzione concava negativa avente funzione reciproca né concava né convessa.

Esempi 1.4.3
Si considerino le seguenti funzioni negative, definite su tutta la retta dei reali.
i) la funzione $f(x)=-e^x$ è concava e la sua funzione reciproca $1/f(x)=-e^{-x}$ è ancora concava.
ii) la funzione $f(x)=-x^2-1$ è concava ma la reciproca $1/f(x)=-1/(x^2+1)$ non è né concava né convessa.

1.5. Funzioni affini generalizzate

Come è noto, una funzione affine può essere concepita come una funzione sia concava sia convessa; estendendo tale concezione ad altre classi di funzioni concave (convesse) generalizzate sono state definite in letteratura [6, 70, 90, 91] le funzioni pseudo-monotone (sia pseudo-concave sia pseudo-convesse), quasi-monotone (sia quasi-concave sia quasi-convesse) ed "explicitly quasi-monotone" (sia semistrettamente quasi-concave sia semistrettamente quasi-convesse), denominazioni che ben evidenziano come esse siano state definite allo scopo di estendere alle funzioni a più variabili il concetto di monotonia ([16]), proprio delle funzioni ad una sola variabile.
Non è mai stato compiuto però uno studio organico di tutte le possibili classi che si possono ottenere estendendo, nel modo esposto, il concetto di affinità; scopo di questo paragrafo è pertanto quello di ottenere, a partire dalle varie classi di funzioni concave generalizzate introdotte nei paragrafi precedenti, tutte le possibili funzioni che estendono il concetto di affinità di una funzione, di studiarne le proprietà, le relazioni di inclusione, il comportamento sotto ipotesi di differenziabilità, il modo in cui viene da esse esteso il concetto di monotonia e le proprietà relative alle trasformazioni di funzione.
Visto lo scopo con cui queste classi vengono definite, esse saranno dette classi di funzioni affini generalizzate, non verranno pertanto usati per le classi già definite in letteratura i termini pseudo-monotona e quasi-monotona, preferendo ad essi i nomi pseudo-affine e quasi-affine; tale scelta ha anche l'ulteriore scopo di evitare confusione con le mappe monotone generalizzate [56] che verranno studiate nel prossimo capitolo.

---

[16] Si ricordi che una funzione $f:A\to\Re$, con $A\subseteq\Re$ sottoinsieme dei reali, è detta *crescente* se $y>x$ implica $f(y)>f(x)$ $\forall x,y\in A$, *decrescente* se $y>x$ implica $f(y)<f(x)$ $\forall x,y\in A$, *noncrescente* se $y>x$ implica $f(y)\le f(x)$ $\forall x,y\in A$, *nondecrescente* se $y>x$ implica $f(y)\ge f(x)$ $\forall x,y\in A$, *costante* se $f(y)=f(x)$ $\forall x,y\in A$; f è inoltre detta *monotona* se è noncrescente o nondecrescente, è detta *strettamente monotona* se è crescente o decrescente.

1.5.1. Definizioni e principali proprietà

Di seguito vengono introdotte possibili definizioni di funzioni affini generalizzate derivanti dalle funzioni di tipo concavo, di tipo quasi-concavo e di tipo pseudo-concavo; per completezza verranno ricordate anche le definizioni delle classi più note in letteratura.

Definizione 1.5.1 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C \rightarrow \Re$.
La funzione f è detta *affine* [fn] se è sia concava sia convessa, ovvero se $\forall x,y \in C$ vale la seguente condizione [17]:

$$f(x+\lambda(y-x))=f(x)+\lambda(f(y)-f(x)) \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Prima di introdurre nuove classi di funzioni affini generalizzate, si osservi preliminarmente che non esistono funzioni che siano contemporaneamente sia strettamente concave sia strettamente convesse, inoltre non verranno definite funzioni che siano contemporaneamente semi concave e semi convesse oppure semistrettamente concave e semistrettamente convesse, in quanto esse si riducono rispettivamente alle funzioni affini ed alle funzioni costanti, così come è dimostrato nel seguente teorema.

Teorema 1.5.1 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C \rightarrow \Re$.

i) f è sia semi concava sia semi convessa se e solo se è affine;

ii) f è sia semistrettamente concava sia semistrettamente convessa se e solo se è costante.

Dim. i) Si osservi inizialmente che f è sia semi concava sia semi convessa se e solo se per ogni $x,y \in C$ vale la condizione:

$$f(y)>f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x))=f(x)+\lambda(f(y)-f(x)) \quad \forall \lambda \in (0,1) \qquad (1.5.1)$$

La sufficienza segue dalla (1.5.1); per la necessità si deve solamente dimostrare, ricordando la nota [13], che per ogni $x,y \in C$ vale la condizione:

$$f(y)=f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x))=f(x)+\lambda(f(y)-f(x))=f(x) \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Si supponga per assurdo che esistano due punti $x,y \in C$ ed un reale $\bar{\lambda} \in (0,1)$ tali che $f(y)=f(x)$ ed $f(x+\bar{\lambda}(y-x)) \neq f(x)$ e si supponga, senza perdita di generalità, che sia $f(x+\bar{\lambda}(y-x))=f(x)+\varepsilon$ con $\varepsilon>0$. Per la (1.5.1) la funzione è affine nel segmento

[17] Si osservi che una funzione affine $f:C \rightarrow \Re$, con $C \subseteq \Re^n$ convesso, è alternativamente caratterizzabile per la Proprietà 1.1.1 come funzione tale che per ogni $x,y \in C$ vale la condizione:

$$f(y) \geq f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x))=f(x)+\lambda(f(y)-f(x)) \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

di estremi $x+\bar{\lambda}(y-x)$ ed y, di conseguenza per continuità esiste un reale $\tilde{\lambda}\in(\bar{\lambda},1)$ tale che $f(x+\bar{\lambda}(y-x))>f(x+\tilde{\lambda}(y-x))>f(x)$; per la (1.5.1) f è affine nell'intervallo di estremi x ed $x+\tilde{\lambda}(y-x)$ cosicché $f(x+\lambda(y-x))<f(x+\tilde{\lambda}(y-x))$ $\forall\lambda\in(0,\tilde{\lambda})$, condizione che contraddice la disuguaglianza $f(x+\bar{\lambda}(y-x))>f(x+\tilde{\lambda}(y-x))$, $\bar{\lambda}\in(0,\tilde{\lambda})$.

ii) Segue direttamente dalle definizioni di funzioni semistrettamente concave e semistrettamente convesse. ♦

Si definiscono adesso le funzioni affini generalizzate di tipo quasi-affine.

Definizione 1.5.2 Sia $C\subseteq\Re^n$ convesso e sia $f:C\to\Re$. La funzione f è detta:

quasi-affine [qfn] se è sia quasi-concava sia quasi-convessa, ovvero se per ogni $x,y\in C$ vale la condizione:

$$f(y)\geq f(x) \Rightarrow f(y)\geq f(x+\lambda(y-x))\geq f(x) \quad \forall\lambda\in(0,1);$$

semistrettamente quasi-affine [ss.qfn] se è sia ss.qcv sia ss.qcx, ovvero se per ogni $x,y\in C$ vale la condizione:

$$f(y)>f(x) \Rightarrow f(y)>f(x+\lambda(y-x))>f(x) \quad \forall\lambda\in(0,1);$$

strettamente quasi-affine [s.qfn] se è sia s.qcv sia s.qcx, ovvero se valgono le condizioni:

i) $\nexists x,y\in C$, $x\neq y$, tali che $f(y)=f(x)$,

ii) $\forall x,y\in C$ si ha che: $f(y)>f(x) \Rightarrow f(y)>f(x+\lambda(y-x))>f(x) \quad \forall\lambda\in(0,1)$;

semi quasi-affine [sm.qfn] se è sia sm.qcv sia sm.qcx, ovvero se per ogni $x,y\in C$ vale la condizione:

$$f(y)>f(x) \Rightarrow f(y)\geq f(x+\lambda(y-x))\geq f(x) \quad \forall\lambda\in(0,1);$$

quasi-affine in senso esteso [e.qfn] se è sia e.qcv sia e.qcx, ovvero se per ogni $x,y\in C$ vale la condizione:

$$f(y)=f(x) \Rightarrow f(y)=f(x+\lambda(y-x))=f(x) \quad \forall\lambda\in(0,1);$$

strettamente quasi-affine in senso esteso [es.qfn] se è sia es.qcv sia es.qcx, ovvero se vale la condizione:

$$\nexists x,y\in C,\ x\neq y, \text{ tali che } f(y)=f(x).$$

La seguente proprietà, analoga alla Proprietà 1.1.2, segue direttamente dalle definizioni date.

Proprietà 1.5.1 Sia f una funzione a valori reali definita su un convesso $C \subseteq \Re^n$.

i) la funzione f è quasi-affine se e solo se è sia semi quasi-affine sia quasi-affine in senso esteso;

ii) la funzione f è strettamente quasi-affine se e solo se è sia semistrettamente quasi-affine sia strettamente quasi-affine in senso esteso.

I risultati del Paragrafo 1.1, permettono di caratterizzare le funzioni quasi-affini in termini di insiemi di livello superiore ed inferiore.

Teorema 1.5.2 Una funzione a valori reali f definita su un insieme convesso $C \subseteq \Re^n$ è quasi-affine ([18]) se e solo se i suoi insiemi di livello superiore $U(f,\alpha)$ ed i suoi insiemi di livello inferiore $L(f,\alpha)$ sono convessi per ogni valore reale α.

Direttamente dalla definizione segue invece la caratterizzazione delle funzioni quasi-affini generalizzate in termini di superfici di livello.

Teorema 1.5.3 Una funzione a valori reali f definita su un insieme convesso $C \subseteq \Re^n$ è quasi-affine in senso esteso se e solo se le sue superfici di livello $Y(f,\alpha)$ sono insiemi convessi per ogni valore reale α.

Si definiscono adesso le funzioni affini generalizzate di tipo pseudo-concavo.

Definizione 1.5.3 Sia $C \subseteq \Re^n$ convesso e sia $f:C \rightarrow \Re$. La funzione f è detta:

pseudo-affine [pfn] se è sia pseudo-concava sia pseudo-convessa, ovvero se per ogni $x,y \in C$ vale la condizione ([19]):

$$f(y)>f(x) \Rightarrow \begin{cases} \exists \xi(x,y)>0 \text{ tale che } \forall \lambda \in (0,1) \\ f(y)-\lambda(1-\lambda)\xi(x,y) \geq f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi(x,y) \end{cases};$$

[18] Si osservi che una funzione $f:C \rightarrow \Re$, con $C \subseteq \Re^n$ convesso, quasi-affine è alternativamente caratterizzabile come funzione tale che $\max\{f(x),f(y)\} \geq f(x+\lambda(y-x)) \geq \min\{f(x),f(y)\}$ $\forall \lambda \in (0,1)$ $\forall x,y \in C$.

[19] Si osservi che una funzione che verifica tale condizione è sia pseudo-concava che pseudo-convessa; viceversa, direttamente dalle definizioni, si ha che una funzione sia pseudo-concava sia pseudo-convessa verifica per ogni $x,y \in C$ la condizione:

$$f(y)>f(x) \Rightarrow \begin{cases} \exists \xi_1(x,y)>0 \text{ ed } \exists \xi_2(x,y)>0 \text{ tale che } \forall \lambda \in (0,1) \\ f(y)-\lambda(1-\lambda)\xi_1(x,y) \geq f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi_2(x,y) \end{cases},$$

da cui si ottiene quella data nella definizione assumendo $\xi=\min\{\xi_1,\xi_2\}$.

strettamente pseudo-affine [s.pfn] se è sia s.pcv sia s.pcx, ovvero se valgono le condizioni:

i) $\nexists x,y\in C$, $x\neq y$, tali che $f(y)=f(x)$,

ii) $\forall x,y\in C$ si ha che:

$$f(y)>f(x) \Rightarrow \begin{cases} \exists\xi(x,y)>0 \text{ tale che } \forall\lambda\in(0,1) \\ f(y)-\lambda(1-\lambda)\xi(x,y)\geq f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi(x,y) \end{cases};$$

dove $\xi(x,y)$ dipende solo da x ed y.

1.5.2. Relazioni di inclusione tra le classi

In questo sottoparagrafo verranno studiate le relazioni di inclusione intercorrenti tra le varie classi di funzioni affini generalizzate precedentemente definite.
Un primo risultato è il seguente.

Teorema 1.5.4 Se una funzione a valori reali f definita su un insieme convesso $C\subseteq\Re^n$ è semistrettamente quasi-affine allora è anche quasi-affine.

Dim. Si dimostra preliminarmente che se f è semistrettamente quasi-affine allora è anche quasi-affine in senso esteso; a tal fine si supponga per assurdo che ciò non sia vero e che quindi esistano, senza perdita di generalità, due punti $x,y\in C$ ed un valore reale $\bar\lambda\in(0,1)$ tali che $f(y)=f(x)>f(x+\bar\lambda(y-x))$; essendo f ss.qfn risulta $f(y)=f(x)>f(x+\lambda(y-x))>f(x+\bar\lambda(y-x))$ $\forall\lambda\in(0,1)$, $\lambda\neq\bar\lambda$. Di conseguenza preso un qualsiasi $\tilde\lambda\in(\bar\lambda,1)$ risulta $f(x)>f(x+\tilde\lambda(y-x))$ da cui si ha, sempre per la semistretta quasi-affinità di f, $f(x)>f(x+\lambda(y-x))>f(x+\tilde\lambda(y-x))$ $\forall\lambda\in(0,\tilde\lambda)$, condizione assurda essendo $\bar\lambda\in(0,\tilde\lambda)$.

La tesi segue pertanto direttamente dalle definizioni di funzione quasi-affine in senso esteso e semistrettamente quasi-affine. ♦

Si osservi che è stato ottenuto nel paragrafo 1.2, Teorema 1.2.2, un risultato analogo per le funzioni concave (convesse) generalizzate, ovvero che una funzione semistrettamente quasi-concava (o ss.qcx) è anche quasi-concava (qcx), con l'ipotesi aggiuntiva della superiore (inferiore) semicontinuità della funzione.

Il teorema precedente permette di evidenziare le differenze esistenti tra le funzioni semistrettamente quasi-affini e quelle strettamente quasi-lineari; si osservi infatti che dalle definizioni precedenti, una sola condizione distingue le due classi di funzioni. Vale al riguardo il seguente teorema.

Teorema 1.5.5 Sia f una funzione a valori reali definita sull'insieme convesso $C \subseteq \Re^n$. La funzione f risulta semistrettamente quasi-affine se e solo se la sua restrizione su ogni segmento contenuto in C è costante oppure strettamente quasi-affine.

Dim. La sufficienza è banale, dobbiamo quindi dimostrare che se la funzione f è ss.qfn ma in un segmento $[v,w] \subseteq C$ non è s.qfn allora deve essere costante in $[v,w]$. Per le ipotesi assunte e per la Definizione 1.5.2 esistono due punti $x,y \in [v,w]$, $x \neq y$, tali che $f(x)=f(y)$; si assuma inoltre, senza ledere la generalità, che sia $x=v+\lambda_1(w-v)$ ed $y=v+\lambda_2(w-v)$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$, $\lambda_1<\lambda_2$. Se fosse $f(v) \neq f(y)$ allora per la semistretta quasi-affinità di f si avrebbe $f(v+\lambda(w-v)) \neq f(y)$ $\forall \lambda \in (0,\lambda_2)$, condizione assurda poiché $f(x)=f(v+\lambda_1(w-v))=f(y)$ con $\lambda_1 \in (0,\lambda_2)$; analogamente si dimostra che deve necessariamente essere $f(w)=f(x)=f(y)=f(v)$. Essendo f ss.qfn allora è anche, per il Teorema 1.5.4, qfn e quindi e.qfn; poiché $f(v)=f(w)$ la funzione risulta quindi costante sul segmento $[v,w]$. ♦

Analogamente a quanto è stato osservato in precedenza per le funzioni semistrettamente quasi-affini e quelle strettamente quasi-affini, una sola condizione distingue le funzioni strettamente pseudo-affini da quelle pseudo-affini; il teorema seguente puntualizza la differenza tra queste due classi di funzioni.

Teorema 1.5.6 Sia f una funzione a valori reali definita sull'insieme convesso $C \subseteq \Re^n$ e sia $[x,y]=\{z \in C: z=x+\lambda(y-x), \lambda \in (0,1)\}$ $\forall x,y \in C$.
La funzione f risulta pseudo-affine se e solo se in ogni segmento $[x,y] \subseteq C$ è costante oppure strettamente pseudo-affine.

Dim. La sufficienza è ovvia, dobbiamo quindi dimostrare che se la funzione f è pseudo-affine ma in un segmento $[v,w] \subseteq C$ non è strettamente pseudo-affine allora deve essere costante in $[v,w]$. Direttamente dalle definizioni, si ha che una funzione pseudo-affine è anche semistrettamente quasi-affine; per la Definizione 1.5.3 inoltre, non essendo f s.pfn in $[v,w]$, esistono due punti $x,y \in [v,w]$, $x \neq y$, tali che $f(x)=f(y)$, pertanto la funzione f non può essere neanche strettamente quasi-affine in $[v,w]$. Essendo quindi la funzione f ss.qfn ma non s.qfn nel segmento $[v,w]$ allora deve essere, per il Teorema 1.5.5, costante in $[v,w]$. ♦

Le relazioni intercorrenti tra le altre classi di funzioni affini generalizzate seguono direttamente dalle relative definizioni; le relazioni di inclusione si possono pertanto riassumere nel seguente diagramma.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & \boxed{\text{sm.qfn}} & \\
 & & & \cup & \\
\boxed{\text{e.qfn}} & \supset & & \boxed{\text{qfn}} & \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\boxed{\text{es.qfn}} & \supset & \boxed{\text{s.qfn}} & \subset & \boxed{\text{ss.qfn}} \\
 & & \cup & & \cup \\
 & & \boxed{\text{s.pfn}} & \subset & \boxed{\text{pfn}} \\
 & & & & \cup \\
 & & & & \boxed{\text{fn}}
\end{array}
$$

diagramma 5

Per verificare che le classi di funzioni semi quasi-affini, quasi-affini in senso esteso e strettamente quasi-affini in senso esteso sono distinte tra loro e dalle altre classi analizzate si considerino i seguenti esempi di funzioni.

Esempi 1.5.1

Si considerino le seguenti funzioni superiormente semicontinue.

i) $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{per } x\in[0,1] \\ 0 & \text{per } x\notin[0,1] \end{cases}$: questa funzione è sm.qfn, non è però e.qfn e quindi neanche qfn;

ii) $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{per } x=0 \\ 0 & \text{per } x\in\,]0,1[\\ 2 & \text{per } x=1 \end{cases}$: questa funzione è e.qfn, non è però né sm.qfn (e quindi neanche qfn) né es.qfn;

iii) $f(x)=\begin{cases} -x & \text{per } x\in[0,1[\\ x & \text{per } x\in[1,2] \end{cases}$: questa funzione è es.qfn (e quindi anche e.qfn), non è però sm.qfn e quindi neanche qfn né s.qfn.

Come è stato dimostrato nei paragrafi precedenti, sotto ipotesi di continuità della funzione le classi di funzioni semi quasi-concave e quasi-concave in senso esteso (sm.qcx e e.qcx) si riducono alla classe delle funzioni quasi-concave (qcx), ciò avviene anche per la classe delle funzioni strettamente quasi-concave in senso esteso (es.qcx) che si riduce alla classe delle funzioni strettamente quasi-concave (s.qcx). Da tali risultati si ottiene la seguente proprietà.

Proprietà 1.5.2 Sia f una funzione continua a valori reali definita su un insieme convesso $C \subseteq \Re^n$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) f è quasi-affine in senso esteso;

ii) f è quasi-affine;

iii) f è semi quasi-affine.

Risulta inoltre che f è strettamente quasi-affine in senso esteso se e solo se è strettamente quasi-affine.

Direttamente dalla Proprietà 1.5.2 e dal Teorema 1.5.3 si ottiene il seguente risultato che è stato dimostrato in [6] in modo più complesso.

Proprietà 1.5.3 Una funzione continua a valori reali f definita su un insieme convesso $C \subseteq \Re^n$ è quasi-affine se e solo se le sue superfici di livello $Y(f,\alpha)$ sono insiemi convessi per ogni valore reale α.

Le relazioni di inclusione tra le classi, sotto ipotesi di continuità, possono così essere riassunte dal diagramma 6.

$$\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{c}{\boxed{\text{e.qfn} \equiv \text{qfn} \equiv \text{sm.qfn}}} \\
\cup & & \cup \\
\boxed{\text{es.qfn} \equiv \text{s.qfn}} & \subset & \boxed{\text{ss.qfn}} \\
\cup & & \cup \\
\boxed{\text{s.pfn}} & \subset & \boxed{\text{pfn}} \\
 & & \cup \\
 & & \boxed{\text{fn}}
\end{array}$$

diagramma 6

I seguenti esempi di funzioni continue mostrano che le classi di funzioni affini generalizzate considerate sono distinte l'una dall'altra.

Esempi 1.5.2

i) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x<0 \\ x & \text{per } x\in[0,1] \\ 1 & \text{per } x>1 \end{cases}$: questa funzione è qfn, non è però ss.qfn (e quindi neanche s.qfn);

ii) $f(x)=x^3$: questa funzione è s.qfn (e quindi ss.qfn), non è però pfn (e quindi neanche s.pfn);
iii) $f(x)=x^3+x$: questa funzione è s.pfn (e quindi anche pfn), non è però fn;
iv) $f(x)=k$: la funzione costante è fn (e quindi anche pfn, ss.qfn e qfn), non è però s.qfn (e quindi neanche s.pfn).

1.5.3. Funzioni affini generalizzate differenziabili

Il teorema seguente stabilisce delle caratterizzazioni per le classi di funzioni differenziabili affini, quasi-affini e pseudo-affini [1, 5, 34, 65, 75, 91].

Teorema 1.5.7 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme aperto convesso. La funzione differenziabile $f: C \rightarrow \Re$ risulta:

$$\begin{array}{rcll} \text{affine} & \Leftrightarrow & f(y)=f(x)+(y-x)^T\nabla f(x) & \forall x,y \in C \\ \text{pseudo-affine} & \Leftrightarrow & f(y)>f(x) \Rightarrow (y-x)^T\nabla f(x)>0 \text{ e } (y-x)^T\nabla f(y)>0 & \forall x,y \in C \\ \text{quasi-affine} & \Leftrightarrow & f(y)\geq f(x) \Rightarrow (y-x)^T\nabla f(x)\geq 0 \text{ e } (y-x)^T\nabla f(y)\geq 0 & \forall x,y \in C \\ & \Leftrightarrow & f(y)>f(x) \Rightarrow (y-x)^T\nabla f(x)\geq 0 \text{ e } (y-x)^T\nabla f(y)\geq 0 & \forall x,y \in C \end{array}$$

Dal Teorema 1.5.7 si può dedurre il seguente risultato [69] relativo alle funzioni quasi-affini.

Teorema 1.5.8 Sia f una funzione differenziabile definita sull'insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$. La funzione f è quasi-affine se e solo se è verificata la seguente condizione:

$$f(y)\geq f(x) \Rightarrow (y-x)^T\nabla f(x+\lambda(y-x))\geq 0 \quad \forall \lambda \in (0,1) \ \forall x,y \in C.$$

E' possibile inltre ottenere la seguente ulteriore caratterizzazione relativa alle funzioni pseudo-affini [59].

Teorema 1.5.9 Sia f una funzione differenziabile definita sull'insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$. La funzione f è pseudo-affine se e solo se per ogni $x,y \in C$ è verificata la seguente condizione:

$$f(y)=f(x) \Leftrightarrow (y-x)^T\nabla f(x)=0.$$

Un'altra utile caratterizzazione delle funzioni pseudo-affini, analoga a quella relativa alle funzioni pseudo-concave, è la seguente [6, 34].

Teorema 1.5.10 Sia f una funzione differenziabile definita sull'insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$. La funzione f è pseudo-affine se e solo se per ogni punto $x \in C$ ed ogni vettore $v \in \Re^n$ tale che $v^Tv=1$ e $v^T\nabla f(x)=0$ la funzione $g(t)=f(x+tv)$ è costante per ogni $t \in \Re$ tale che $x+tv \in C$.

Dim. Per il Teorema 1.5.7 la funzione f è pseudo-affine se e solo se per ogni $x,y \in C$, vale la condizione:

$$(y-x)^T\nabla f(x) \leq 0 \text{ oppure } (y-x)^T\nabla f(y) \leq 0 \implies f(y) \leq f(x);$$

si osservi preliminarmente che, per semplice ridenominazione dei punti x ed y, la precedente condizione è equivalente alla successiva:

$$(y-x)^T\nabla f(x) \geq 0 \text{ oppure } (y-x)^T\nabla f(y) \geq 0 \implies f(y) \geq f(x).$$

Sia quindi f pseudo-affine, sia $x \in C$ e sia $v \in \Re^n$ tale che $v^Tv=1$ e $v^T\nabla f(x)=0$; per ogni $y=x+tv \in C$, $t \in \Re$, si ha quindi $(y-x)^T\nabla f(x)=0$ che per le condizioni precedenti implica $f(y) \leq f(x)$ ed $f(y) \geq f(x)$, di conseguenza la funzione $g(t)=f(x+tv)$ risulta costante.

Si dimostra adesso la sufficienza supponendo per assurdo che la funzione f non sia pseudo-affine e che quindi, per il Teorema 1.5.7, esistano due punti $x,y \in C$ tali che $f(y)>f(x)$ ed inoltre $(y-x)^T\nabla f(x) \leq 0$ oppure $(y-x)^T\nabla f(y) \leq 0$. Si osservi inizialmente che se fosse $(y-x)^T\nabla f(x)=0$ oppure $(y-x)^T\nabla f(y)=0$ allora per ipotesi la funzione $g(t)=f(x+tv)$, con $v=\frac{y-x}{\|y-x\|}$, dovrebbe essere costante per ogni $t \in \Re$ tale che $x+tv \in C$, condizione assurda poiché $f(y) \neq f(x)$; risulta pertanto $(y-x)^T\nabla f(x)<0$ oppure $(y-x)^T\nabla f(y)<0$. Si consideri adesso il segmento, contenuto in C, $S=\{x+\lambda(y-x),\ \lambda \in [0,1]\}$ e la restrizione di f su esso. Se $(y-x)^T\nabla f(x)<0$ $\exists \lambda_1 \in (0,1)$ tale che $f(x+\lambda_1(y-x))<f(x)<f(y)$; di conseguenza, essendo la funzione f differenziabile, $\exists \lambda_2 \in (0,1)$ tale che il punto $x+\lambda_2(y-x)$ è di minimo assoluto per f ristretta ad S con derivata direzionale $(y-x)^T\nabla f(x+\lambda_2(y-x))=0$. Per ipotesi la restrizione di f su S è costante, condizione assurda in quanto $f(y) \neq f(x)$. Una analoga contraddizione si ottiene se $(y-x)^T\nabla f(y)<0$, poiché in tal caso $\exists \lambda_3 \in (0,1)$ tale che il punto $x+\lambda_3(y-x)$ è di massimo assoluto per f ristretta ad S con derivata direzionale $(y-x)^T\nabla f(x+\lambda_3(y-x))=0$. Il teorema è così dimostrato. ♦

Il teorema precedente permette di ottenere i due seguenti corollari.

Corollario 1.5.1 Sia f una funzione differenziabile pseudo-affine definita sull'insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$.

Allora la funzione f è costante se e solo se esistono punti critici.

Dim. La necessità è ovvia; per la sufficienza si osservi che se $x \in C$ è un punto critico per f allora risulta $(y-x)^T\nabla f(x)=(x-y)^T\nabla f(x)=0$ $\forall y \in C$, condizione che, per la pseudo-affinità di f, implica $f(y)=f(x)$ $\forall y \in C$. ♦

Teorema 1.5.10 Sia f una funzione differenziabile definita sull'insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$. La funzione f è pseudo-affine se e solo se per ogni punto $x \in C$ ed ogni vettore $v \in \Re^n$ tale che $v^T v=1$ e $v^T \nabla f(x)=0$ la funzione $g(t)=f(x+tv)$ è costante per ogni $t \in \Re$ tale che $x+tv \in C$.

Dim. Per il Teorema 1.5.7 la funzione f è pseudo-affine se e solo se per ogni $x,y \in C$, vale la condizione:

$$(y-x)^T \nabla f(x) \leq 0 \text{ oppure } (y-x)^T \nabla f(y) \leq 0 \Rightarrow f(y) \leq f(x);$$

si osservi preliminarmente che, per semplice ridenominazione dei punti x ed y, la precedente condizione è equivalente alla successiva:

$$(y-x)^T \nabla f(x) \geq 0 \text{ oppure } (y-x)^T \nabla f(y) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x).$$

Sia quindi f pseudo-affine, sia $x \in C$ e sia $v \in \Re^n$ tale che $v^T v=1$ e $v^T \nabla f(x)=0$; per ogni $y=x+tv \in C$, $t \in \Re$, si ha quindi $(y-x)^T \nabla f(x)=0$ che per le condizioni precedenti implica $f(y) \leq f(x)$ ed $f(y) \geq f(x)$, di conseguenza la funzione $g(t)=f(x+tv)$ risulta costante.

Si dimostra adesso la sufficienza supponendo per assurdo che la funzione f non sia pseudo-affine e che quindi, per il Teorema 1.5.7, esistano due punti $x,y \in C$ tali che $f(y)>f(x)$ ed inoltre $(y-x)^T \nabla f(x) \leq 0$ oppure $(y-x)^T \nabla f(y) \leq 0$. Si osservi inizialmente che se fosse $(y-x)^T \nabla f(x)=0$ oppure $(y-x)^T \nabla f(y)=0$ allora per ipotesi la funzione $g(t)=f(x+tv)$, con $v=\frac{y-x}{\|y-x\|}$, dovrebbe essere costante per ogni $t \in \Re$ tale che $x+tv \in C$, condizione assurda poiché $f(y) \neq f(x)$; risulta pertanto $(y-x)^T \nabla f(x)<0$ oppure $(y-x)^T \nabla f(y)<0$. Si consideri adesso il segmento, contenuto in C, $S=\{x+\lambda(y-x),\ \lambda \in [0,1]\}$ e la restrizione di f su esso. Se $(y-x)^T \nabla f(x)<0$ $\exists \lambda_1 \in (0,1)$ tale che $f(x+\lambda_1(y-x))<f(x)<f(y)$; di conseguenza, essendo la funzione f differenziabile, $\exists \lambda_2 \in (0,1)$ tale che il punto $x+\lambda_2(y-x)$ è di minimo assoluto per f ristretta ad S con derivata direzionale $(y-x)^T \nabla f(x+\lambda_2(y-x))=0$. Per ipotesi la restrizione di f su S è costante, condizione assurda in quanto $f(y) \neq f(x)$. Una analoga contraddizione si ottiene se $(y-x)^T \nabla f(y)<0$, poiché in tal caso $\exists \lambda_3 \in (0,1)$ tale che il punto $x+\lambda_3(y-x)$ è di massimo assoluto per f ristretta ad S con derivata direzionale $(y-x)^T \nabla f(x+\lambda_3(y-x))=0$. Il teorema è così dimostrato. ♦

Il teorema precedente permette di ottenere i due seguenti corollari.

Corollario 1.5.1 Sia f una funzione differenziabile pseudo-affine definita sull'insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$.

Allora la funzione f è costante se e solo se esistono punti critici.

Dim. La necessità è ovvia; per la sufficienza si osservi che se $x \in C$ è un punto critico per f allora risulta $(y-x)^T \nabla f(x)=(x-y)^T \nabla f(x)=0$ $\forall y \in C$, condizione che, per la pseudo-affinità di f, implica $f(y)=f(x)$ $\forall y \in C$. ♦

Corollario 1.5.2 Sia f una funzione differenziabile pseudo-affine definita sull'insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$ e sia $S \subseteq C$. Se esiste almeno un punto di massimo o minimo assoluto interno alla regione S allora la funzione f è costante.
Dim. Poiché un punto di massimo o minimo interno ad S è un punto critico, la tesi segue dal Corollario 1.5.1. ♦

Altre caratterizzazioni per le classi di funzioni quasi-affini si possono ottenere direttamente dalla definizione e dai teoremi dimostrati da Diewert, Avriel e Zang in [34].
Si osservi infine che, per noti risultati della letteratura, vale la seguente proprietà.

Proprietà 1.5.4 Sia $f:\Re^n_{++} \to \Re_{++}$ una funzione differenziabile omogenea di grado $\alpha \in (0,1]$. La funzione f è affine se e solo se è quasi-affine.

Si termina questo paragrafo osservando che è possibile ottenere, direttamente dai risultati dei paragrafi precedenti, una caratterizzazione al primo ordine anche per la classe delle funzioni strettamente pseudo-affini, classe che però è composta solamente da funzioni ad una sola variabile, così come è dimostrato nel seguente teorema.

Teorema 1.5.11 Non esiste alcuna funzione differenziabile strettamente pseudo-affine definita su un insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$ con $n \geq 2$.
Dim. Si supponga per assurdo che $f:C \to \Re$, con $C \subseteq \Re^n$ aperto convesso tale che $n \geq 2$, sia strettamente pseudo-affine. La caratterizzazione delle funzioni strettamente pseudo-concave e strettamente pseudo-convesse implica che la funzione f è strettamente pseudo-affine se e solo se per ogni $x,y \in C$, $x \neq y$, vale la seguente condizione:

$$(y-x)^T \nabla f(x) \leq 0 \text{ oppure } (y-x)^T \nabla f(y) \leq 0 \;\Rightarrow\; f(y) < f(x);$$

si osservi inoltre che, per semplice ridenominazione dei punti x ed y, la precedente condizione è equivalente alla successiva:

$$(y-x)^T \nabla f(x) \geq 0 \text{ oppure } (y-x)^T \nabla f(y) \geq 0 \;\Rightarrow\; f(y) > f(x).$$

Sia $x \in C$; essendo C un aperto esiste un punto $y \in C$, $y \neq x$, tale che $(y-x)^T \nabla f(x) = 0$, per le condizioni precedenti si ha quindi $f(y) < f(x)$ ed $f(y) > f(x)$ e ciò è assurdo. ♦

Per le funzioni strettamente pseudo-affini ad una variabile vale la caratterizzazione espressa dal seguente teorema.

Teorema 1.5.12 Sia $I \subseteq \Re$ un intervallo aperto dei numeri reali ed $f: I \to \Re$ una funzione derivabile in I. La funzione f risulta strettamente pseudo-affine se e solo se per ogni $x,y \in I$, $x \neq y$, vale la seguente condizione:

$$f(y) \geq f(x) \Rightarrow (y-x)f'(x) > 0 \text{ e } (y-x)f'(y) > 0.$$

1.5.4. Funzioni affini generalizzate e monotonia

E' stato già osservato che in letteratura le funzioni pseudo-affini e quasi-affini sono talvolta chiamate pseudo-monotone e quasi-monotone; tali denominazioni hanno origine dalle proprietà di monotonia che hanno le restrizioni di tali funzioni su un segmento di $\Re^n$. In quanto segue verranno stabilite dette proprietà per le varie classi di funzioni affini generalizzate introdotte nel sottoparagrafo 1.5.1.

Teorema 1.5.13 Sia f una funzione a valori reali definita sull'insieme convesso $C \subseteq \Re^n$. Allora:

i) f è quasi-affine se e solo se la sua restrizione su ogni segmento contenuto in C è monotona;

ii) f è strettamente quasi-affine se e solo se la sua restrizione su ogni segmento contenuto in C è strettamente monotona;

iii) f è semistrettamente quasi-affine se e solo se la sua restrizione su ogni segmento contenuto in C è costante o strettamente monotona.

Dim. i) Per la sufficienza si considerino due punti qualsiasi $x,y \in I$; se $f(y)=f(x)$ allora, essendo f monotona nel segmento $[x,y]$, risulta $f(x+\lambda(y-x))=f(x)=f(y)$ $\forall \lambda \in (0,1)$ e quindi la funzione f verifica in $[x,y]$ la definizione di quasi-affinità. Sia adesso $f(y) \neq f(x)$ e si consideri la restrizione $g(\lambda)=f(x+\lambda(y-x))$, $\lambda \in [0,1]$, della funzione f sul segmento di estremi x ed y; se g è nondecrescente allora risulta $g(1) \geq g(\lambda) \geq g(0)$ $\forall \lambda \in (0,1)$, ovvero $f(y) \geq f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)$ $\forall \lambda \in (0,1)$; se g è noncrescente allora risulta $g(1) \leq g(\lambda) \leq g(0)$ $\forall \lambda \in (0,1)$, ovvero $f(y) \leq f(x+\lambda(y-x)) \leq f(x)$ $\forall \lambda \in (0,1)$; in ogni caso quindi se f è monotona è anche quasi-affine.

Per dimostrare la necessità si considerino due punti $x,y \in C$ e la restrizione di f sul segmento $[x,y]$ $g(\lambda)=f(x+\lambda(y-x))$, $\lambda \in [0,1]$. Se $f(y)=f(x)$ la restrizione di f sul segmento $[x,y]$ risulta, per la definizione di quasi-affinità, costante e quindi monotona; si supponga quindi in seguito, senza perdita di generalità, che sia $f(y)>f(x)$ ovvero $g(1)>g(0)$. Per la quasi-affinità di f risulta $g(1) \geq g(\lambda) \geq g(0)$ $\forall \lambda \in (0,1)$; si supponga adesso per assurdo che g non sia monotona e che quindi esistano $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$, $\lambda_1 < \lambda_2$, tali che $g(1) \geq g(\lambda_1) > g(\lambda_2) \geq g(0)$; per la quasi-affinità di f risulta $g(1) \geq g(\lambda) \geq g(\lambda_1)$ $\forall \lambda \in (\lambda_1, 1)$ e $g(\lambda_2) \geq g(\lambda) \geq g(0)$ $\forall \lambda \in (0, \lambda_2)$, condizioni entrambe assurde poiché $\lambda_2 \in (\lambda_1, 1)$ e $\lambda_1 \in (0, \lambda_2)$,

ii) La necessità si verifica considerando che la stretta quasi-affinità di f ne implica la quasi-affinità e quindi, per il punto i), la monotonia di ogni restrizione su un segmento di C; la tesi segue quindi osservando che per la definizione di funzione strettamente quasi-affine si ha $f(y) \neq f(x)$ $\forall x,y \in C$, $x \neq y$.

Per la sufficienza si osservi che per il punto i) la stretta monotonia di ogni restrizione di f su un segmento di C ne implica la quasi-affinità; la tesi segue quindi dal fatto che la stretta monotonia implica anche che $f(y) \neq f(x)$ $\forall x,y \in C$, $x \neq y$.

iii) Segue direttamente dal Teorema 1.5.5 e dal punto ii). ♦

Di seguito verranno analizzate le due classi di funzioni di tipo pseudo-affine sotto ipotesi di differenziabilità; a tal fine si ricordi che la classe delle funzioni strettamente pseudo-affini contiene solamente funzioni ad una variabile.

Teorema 1.5.14 Sia $f: I \to \Re$ una funzione derivabile nell'intervallo aperto $I \subseteq \Re$. La funzione f è strettamente pseudo-affine se e solo se è strettamente monotona ed $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in I$.

Dim. Se f è s.pfn allora è anche s.qfn e quindi, per il punto ii) del Teorema 1.5.13, è strettamente monotona; se inoltre per assurdo esiste un punto $x \in I$ tale che $f'(x)=0$ esso risulta sia punto di massimo globale (per la stretta pseudo-concavità di f) sia punto di minimo globale (per la stretta pseudo-convessità di f), il che implica che la funzione è costante si I, condizione banalmente assurda.

Per la sufficienza si considerino due punti $x,y \in I$, $x \neq y$; per la stretta monotonia di f si ha $f(y) \neq f(x)$; si supponga adesso, senza perdita di generalità, che sia $f(y) > f(x)$: se f è crescente con $f'(z) > 0$ $\forall z \in I$ allora $y > x$ e quindi $(y-x)f'(x) > 0$ e $(y-x)f'(y) > 0$; se f è decrescente con $f'(z) < 0$ $\forall z \in I$ allora $y < x$ e quindi $(y-x)f'(x) > 0$ e $(y-x)f'(y) > 0$; in ogni caso f è, per il Teorema 1.5.12, strettamente pseudo-affine. ♦

Teorema 1.5.15 Sia f una funzione differenziabile a valori reali definita sullo insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$. Allora la funzione f è pseudo-affine se e solo se la sua restrizione su ogni segmento $[x,y] \subseteq C$ è costante o strettamente monotona con $(y-x)^T \nabla f(x+\lambda(y-x)) \neq 0$ $\forall \lambda \in (0,1)$.

Dim. Segue direttamente dal Teorema 1.5.6 e dal Teorema 1.5.14. ♦

1.5.5. Trasformazioni di funzioni affini generalizzate

In questo sottoparagrafo verrà studiato il prodotto di composizione tra i vari tipi di funzioni affini generalizzate introdotte precedentemente, ritrovando come casi particolari alcuni risultati noti in letteratura.
I risultati del sottoparagrafo 1.5.4 permettono di ottenere i seguenti risultati relativi alla trasformazione delle funzioni affini-generalizzate.

Teorema 1.5.16 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso, $f:C \to \Re$ una funzione a valori reali, $g:f(C) \to \Re$ una funzione quasi-affine ed $F = g \circ f: C \to \Re$ la corrispondente funzione composta. Se f è quasi-affine oppure semi quasi-affine allora F è rispettivamente quasi-affine oppure semi quasi-affine.
Dim. Se f è quasi-affine allora $\max\{f(x),f(y)\} \geq f(x+\lambda(y-x)) \geq \min\{f(x),f(y)\}$ $\forall \lambda \in (0,1)$, $\forall x,y \in C$; poiché per il Teorema 1.5.13 g è monotona, se g è nondecrescente [noncrescente] risulta:

$$g(\max\{f(x),f(y)\}) \geq g(f(x+\lambda(y-x))) \geq g(\min\{f(x),f(y)\})$$

$$[g(\max\{f(x),f(y)\}) \leq g(f(x+\lambda(y-x))) \leq g(\min\{f(x),f(y)\})]$$

da cui $\max\{g(f(x)),g(f(y))\} \geq g(f(x+\lambda(y-x))) \geq \min\{g(f(x)),g(f(y))\}$, ovvero F è qfn.
Si supponga adesso f semi quasi-affine e siano $x,y \in C$ tali che $g(f(y))>g(f(x))$; per la nondecrescenza [noncrescenza] di g risulta $f(y)>f(x)$ $[f(y)<f(x)]$; poiché f è sm.qfn segue che $f(y) \geq f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)$ $[f(y) \leq f(x+\lambda(y-x)) \leq f(x)]$ da cui, sempre per la nondecrescenza [noncrescenza] di g, si ha $g(f(y)) \geq g(f(x+\lambda(y-x))) \geq g(f(x))$; la F è pertanto sm.qfn. ♦

Teorema 1.5.17 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso, $f:C \to \Re$ una funzione a valori reali, $g:f(C) \to \Re$ una funzione semistrettamente quasi-affine ed $F = g \circ f: C \to \Re$ la corrispondente funzione composta. Se f è semistrettamente quasi-affine oppure quasi-affine in senso esteso allora F è rispettivamente semistrettamente quasi-affine oppure quasi-affine in senso esteso.
Dim. Per il Teorema 1.5.13, g è costante o strettamente monotona; se g è costante tale rimane anche la funzione F e quindi le tesi sono ovvie; si supponga quindi che g sia strettamente monotona. Sia $g(f(y))>g(f(x))$, ciò implica per la crescenza [decrescenza] di g che $f(y)>f(x)$ $[f(y)<f(x)]$; se f è ss.qfn si ha $f(y)>f(x+\lambda(y-x))>f(x)$ $\forall \lambda \in (0,1)$ $[f(y)<f(x+\lambda(y-x))<f(x)]$ e perciò, per la crescenza [decrescenza] di g, $g(f(y))>g(f(x+\lambda(y-x)))>g(f(x))$ $\forall \lambda \in (0,1)$ ovvero F è ss.qfn.
Sia adesso f e.qfn; se $g(f(y))=g(f(x))$, ciò implica per la stretta monotonicità di g che $f(y)=f(x)$; poiché f è e.qfn si ha $f(y)=f(x+\lambda(y-x))=f(x)$ $\forall \lambda \in (0,1)$ e quindi $g(f(y))=g(f(x+\lambda(y-x)))=g(f(x))$ $\forall \lambda \in (0,1)$, da cui la tesi. ♦

Teorema 1.5.18 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso, $f:C\rightarrow\Re$ una funzione a valori reali, $g:f(C)\rightarrow\Re$ una funzione strettamente quasi-affine ed $F=g\circ f:C\rightarrow\Re$ la corrispondente funzione composta. Se f è strettamente quasi-affine oppure strettamente quasi-lineare in senso esteso allora F è rispettivamente strettamente quasi-affine oppure strettamente quasi-affine in senso esteso.

Dim. Per il Teorema 1.5.13, g è strettamente monotona.

Se f è es.qfn, per la stretta monotonia di g, risulta $g(f(y))\neq g(f(x))$ $\forall x,y\in C$, $x\neq y$, e quindi F è es.qfn. Se f è s.qfn, allora è sia ss.qfn sia es.qfn e quindi, per il caso precedente ed il Teorema 1.5.17, F è sia ss.qfn sia es.qfn ovvero, per la Proprietà 1.5.1, F è s.qfn.. ♦

Si osservi che risultati analoghi ai precedenti non valgono per le funzioni affini le quali necessitano di una trasformazione affine per ottenerne un'altra affine; ad esempio la funzione $g(y)=y^3$ è strettamente monotona e la funzione $f(x)=x$ è affine ma la funzione $g(f(x))=x^3$ non è affine. I risultati precedenti possono però essere estesi alle funzioni differenziabili pseudo-affini.

Teorema 1.5.19 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme aperto convesso, $f:C\rightarrow\Re$ una funzione a valori reali differenziabile in C, $g:f(C)\rightarrow\Re$ una funzione derivabile pseudo-affine ed $F=g\circ f:C\rightarrow\Re$ la corrispondente funzione composta.

i) Se f e g sono pseudo-affini allora F è pseudo-affine;
ii) se f e g sono strettamente pseudo-affini ad una variabile allora F è strettamente pseudo-affine.

Dim. Per il Teorema 1.5.14 la funzione g è s.pfn se e solo se è strettamente monotona ed $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in I$, mentre per il Teorema 1.5.5 la funzione ad una variabile g è pfn se e solo se in ogni segmento $[x,y]\subseteq C$ è costante oppure s.pfn.

Se g è costante tale risulta anche la F che è quindi pfn, si supponga quindi che g sia strettamente monotona con $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in I$.

Siano $x,y\in C$ tali che $(y-x)^T\nabla F(x)\leq 0$ oppure $(y-x)^T\nabla F(y)\leq 0$; poiché $\nabla F(x)=g'(x)\nabla f(x)$ ed essendo $g'(x)>0$ $[g'(x)<0]$ segue che $(y-x)^T\nabla f(x)\leq 0$ oppure $(y-x)^T\nabla f(y)\leq 0$ $[(y-x)^T\nabla f(x)\geq 0$ oppure $(y-x)^T\nabla f(y)\geq 0]$. Se f è pfn allora risulta $f(y)\leq f(x)$ $[f(y)\geq f(x)]$ da cui si ottiene per la crescenza [decrescenza] di g $g(f(y))\leq g(f(x))$; se invece f è s.pfn allora risulta $f(y)<f(x)$ $[f(y)>f(x)]$ da cui si ottiene, sempre per la crescenza [decrescenza] di g, $g(f(y))<g(f(x))$. ♦

I teoremi precedenti permettono di ottenere il seguente corollario.

Corollario 1.5.3 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso, $f:C \to \Re$ una funzione a valori negativi od a valori positivi ed $1/f:C \to \Re$ la funzione reciproca di f.
Se f verifica una delle definizioni date nelle Definizioni 1.5.2 ed 1.5.3 allora 1/f verifica la stessa definizione.
Dim. Si osservi che la funzione $g(y)=1/y$ è strettamente pseudo-affine in quanto, per il Teorema 1.5.14, è decrescente e tale che $g'(y)<0$ per ogni $y \neq 0$.
La tesi segue dai Teoremi 1.5.16, 1.5.17, 1.5.18 ed 1.5.19 in quanto $1/f = g \circ f$. ♦

Si dimostra infine il seguente teorema di composizione per funzioni affini.

Teorema 1.5.20 Si consideri una funzione a valori reali $f:D \to \Re$, con $D \subseteq \Re^m$ insieme convesso, e la funzione affine vettoriale $\Phi:C \to D$, con $C \subseteq \Re^n$ insieme convesso, tale che $\Phi(x)=Ax+b$ dove $A \in \Re^{m \times n}$ e $b \in \Re^m$; si consideri inoltre la funzione composta $F(x)=f(Ax+b)$, $F:C \to \Re$.
Se f è fn, ss.fn, qfn, ss.qfn, e.qfn, sm.qfn oppure pfn allora F gode della stessa proprietà, ovvero è rispettivamente fn, ss.fn, qfn, ss.qfn, e.qfn, sm.qfn oppure pfn.
Se inoltre la matrice A è quadrata di ordine n ed invertibile allora se f è s.qfn, es.qfn, oppure s.pfn allora F gode della stessa proprietà, ovvero è rispettivamente s.qfn, es.qfn, oppure s.pfn.
Dim. Le tesi seguono direttamente dalle definizioni osservando che essendo Φ affine risulta $f(\Phi(\lambda x+(1-\lambda)y))=f(\lambda\Phi(x)+(1-\lambda)\Phi(y))$ $\forall x,y \in C$ $\forall \lambda \in (0,1)$ e che, nel caso in cui la matrice A sia quadrata ed invertibile, si ha necessariamente $\Phi(x)=Ax+b \neq Ay+b=\Phi(y)$ $\forall x,y \in C$ $x \neq y$. ♦

Si osservi che il precedente teorema può essere utilizzato per dimostrare che la funzione lineare frazionaria $f(x)=\dfrac{c_0+c^Tx}{d_0+d^Tx}$ è pseudo-affine.

Teorema 1.5.21 La funzione $h:\Re^2_{++} \to \Re$, $h(z_1,z_2)=\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{\alpha}$, è pseudo affine per ogni valore del parametro reale α.
Dim. Se $\alpha=0$ la tesi è ovvia essendo h costante; per $\alpha \neq 0$ si dimostra la pseudo-affinità di h per mezzo del Teorema 1.5.11.
Si osservi inizialmente che risulta $\nabla h(z_1,z_2)=\alpha\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{z_2}\right)^2\begin{bmatrix} z_2 \\ -z_1 \end{bmatrix}$. Sia adesso $(z_1,z_2) \in \Re^2_{++}$ e sia $v \in \Re^n$ tale che $v^Tv=1$ e $v^T\nabla h(z_1,z_2)=0$, ovvero tale che

$v_1z_2=v_2z_1$ dal momento che $\alpha\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{z_2}\right)^2\neq 0$; la funzione $g(t)=\left(\frac{z_1+tv_1}{z_2+tv_2}\right)^\alpha$ risulta tale che $g'(t)=\alpha\left(\frac{z_1+tv_1}{z_2+tv_2}\right)^{\alpha-1}(v_1z_2+tv_1v_2-v_2z_1-tv_1v_2)=0$ per ogni reale t ed è quindi costante, implicando così la pseudo-affinità di h. ♦

Corollario 1.5.4 Siano f_1 ed f_2 due funzioni affini positive definite sull'insieme convesso $C\subseteq\Re^n$. Allora la funzione $g=(f_1/f_2)^\alpha$, $\alpha\in\Re$, è pseudo-affine.
Dim. Segue dal Teorema 1.5.21 e dal Teorema di composizione 1.5.20. ♦

Si conclude questo sottoparagrafo osservando che la proprietà per la quale una qualsiasi combinazione affine di funzioni affini (o costanti) è ancora affine (o costante) non vale per le altre classi di funzioni affini generalizzate, come è mostrato nel seguente esempio 1.5.3 i); così pure il prodotto di due funzioni affini generalizzate non è, in generale, affine generalizzato, come è evidenziato nell'esempio 1.5.3 ii).

Esempi 1.5.3
Si considerino le seguenti funzioni derivabili, definite su tutta la retta dei reali.
i) $f_1(x)=x^3+x$ ed $f_2(x)=-x^3+x^2-x$: risulta $f_1'(x)=3x^2+1>0$ e $f_2'(x)=-3x^2+2x-1<0$ $\forall x\in\Re$, di conseguenza per il Teorema 1.5.14 entrambe le funzioni sono strettamente pseudo-affini; la loro somma però, data dalla funzione $g(x)=x^2$, è strettamente convessa e non è quindi neanche quasi-concava.
ii) $f_1(x)=f_2(x)=x$: le due funzioni identità sono affini, ma il loro prodotto è ancora dato dalla funzione $g(x)=x^2$.

1.6. Funzioni concavo-trasformabili

La possibilità di poter trasformare una funzione in una funzione concava può essere in alcuni casi estremamente utile; ad esempio può essere molto vantaggioso trasformare un problema di ottimo non affine con funzione obiettivo quasi-concava e/o vincoli espressi tramite funzioni quasi-concave, in un problema equivalente di programmazione concava che è più facilmente studiabile e risolubile [2, 3, 5, 8, 9, 29, 39, 40, 46, 51, 53, 54, 61, 86].
In questo paragrafo verranno analizzate classi di funzioni che permettono di essere trasformate in funzioni concave; verranno inoltre mostrate classi di funzioni che, al variare di un parametro, permettono di caratterizzare le varie classi di funzioni concave generalizzate studiate nei paragrafi precedenti.

1.6.1. Funzioni fortemente concave rispetto ad h

Nel sottoparagrafo 1.1.1 è stata definita la classe delle funzioni fortemente concave, composta da funzioni f per le quali esiste un reale $\alpha>0$ tale che la funzione $g(x)=f(x)+\frac{1}{2}\alpha x^T x$ è concava.
Tale concetto viene esteso dalle funzioni fortemente concave rispetto ad h.

Definizione 1.6.1 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso e siano $f:C\rightarrow\Re$ ed $h:C\rightarrow\Re$ funzioni a valori reali. La funzione f è fortemente concava rispetto ad h (hf.cv) se esiste un reale $\alpha>0$ tale che la funzione $g(x)=f(x)+\alpha h(x)$ è concava ([20]).

Ovviamente una funzione fortemente concava altro non è una funzione fortemente concava rispetto ad $h(x)=\frac{1}{2}x^T x$ mentre una funzione concava è una funzione fortemente concava rispetto ad $h(x)=0$.
Vale il seguente teorema che caratterizza in vari modi le funzioni fortemente concave rispetto ad h.

---

[20] In modo analogo, f è detta fortemente convessa rispetto ad h se esiste un reale $\alpha>0$ tale che la funzione $g(x)=f(x)-\alpha h(x)$ è convessa, ovvero se la funzione -f è fortemente concava rispetto ad h.

Teorema 1.6.1 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e siano $f:C \rightarrow \Re$ ed $h:C \rightarrow \Re$ funzioni a valori reali. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) f è fortemente concava rispetto ad h;

ii) $\exists \alpha > 0$ tale che $\forall \lambda \in (0,1)$ e $\forall x,y \in C$ risulta:

$$f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(f(y)-f(x))+\alpha(h(x)+\lambda(h(y)-h(x))-h(x+\lambda(y-x))).$$

Sse inoltre le funzioni f ed h sono differenziabili le condizioni i) ed ii) sono equivalenti alle successive:

iii) $\exists \alpha > 0$ t.c. $f(y) \leq f(x)+(y-x)^T \nabla f(x)-\alpha(h(y)-h(x)-(y-x)^T \nabla h(x))$ $\forall x,y \in C$;

iv) $\exists \alpha > 0$ t.c. $(y-x)^T[\nabla f(y)-\nabla f(x)] \leq -\alpha(y-x)^T[\nabla h(y)-\nabla h(x)]$ $\forall x,y \in C$.

Se infine le funzioni f ed h sono di classe C^2 allora le precedenti condizioni sono equivalenti alla successiva:

v) $\exists \alpha > 0$ t.c. $v^T \nabla^2 f(x) v \leq -\alpha v^T \nabla^2 h(x) v$ $\forall x \in C$ $\forall v \in \Re^n$.

Dim. i)⇔ii) La funzione $g(x)=f(x)+\alpha h(x)$ è concava se e solo se $\forall \lambda \in (0,1)$ e $\forall x,y \in C$ risulta $g(x+\lambda(y-x)) \geq g(x)+\lambda(g(y)-g(x))$, ovvero:

$f(x+\lambda(y-x))+\alpha h(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\alpha h(x)+\lambda[f(y)+\alpha h(y)-f(x)-\alpha h(x)]$,

da cui si ha $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(f(y)-f(x))+\alpha(h(x)+\lambda(h(y)-h(x))-h(x+\lambda(y-x)))$.

i)⇔iii) Per il Teorema 1.3.1 la funzione $g(x)=f(x)+\alpha h(x)$ è concava se e solo se $\forall x,y \in C$ risulta $g(y) \leq g(x)+(y-x)^T \nabla g(x)$, ovvero:

$$f(y)+\alpha h(y) \leq f(x)+\alpha h(x)+(y-x)^T[\nabla f(x)+\alpha \nabla h(x)],$$

da cui si ha $f(y) \leq f(x)+(y-x)^T \nabla f(x)-\alpha(h(y)-h(x)-(y-x)^T \nabla h(x))$.

i)⇔iv) Per il Teorema 1.3.2 la funzione $g(x)=f(x)+\alpha h(x)$ è concava se e solo se $\forall x,y \in C$ risulta $(y-x)^T[\nabla g(y)-\nabla g(x)] \leq 0$, ovvero:

$$(y-x)^T[\nabla f(y)+\alpha \nabla h(y)-\nabla f(x)-\alpha \nabla h(x)] \leq 0,$$

da cui si ha $(y-x)^T[\nabla f(y)-\nabla f(x)] \leq -\alpha(y-x)^T[\nabla h(y)-\nabla h(x)]$.

i)⇔v) Per il Teorema 1.3.3 la funzione $g(x)=f(x)+\alpha h(x)$ è concava se e solo se $\forall x \in C$ e $\forall v \in \Re^n$ risulta $v^T \nabla^2 g(x) v \leq 0$, ovvero $v^T[\nabla^2 f(x)+\alpha \nabla^2 h(x)]v \leq 0$,

da cui si ha $v^T \nabla^2 f(x) v \leq -\alpha v^T \nabla^2 h(x) v$. ♦

Corollario 1.6.1 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C \rightarrow \Re$ una funzione a valori reali. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) f è fortemente concava (rispetto ad $h(x)=\frac{1}{2} x^T x$);

ii) $\exists \alpha > 0$ t.c. $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(f(y)-f(x))+\frac{1}{2}\alpha\lambda(1-\lambda)\|y-x\|^2$ $\forall \lambda \in (0,1)$ $\forall x,y \in C$.

Se inoltre la funzione f è differenziabile le condizioni i) ed ii) sono equivalenti alle successive:

iii) $\exists \alpha > 0$ t.c. $f(y) \leq f(x)+(y-x)^T \nabla f(x)-\frac{1}{2}\alpha\|y-x\|^2$ $\forall x,y \in C$;

iv) $\exists\alpha>0$ t.c. $(y-x)^T[\nabla f(y)-\nabla f(x)]\leq-\alpha\|y-x\|^2 \quad \forall x,y\in C$.

Se infine le funzioni f ed h sono di classe C^2 allora le precedenti condizioni sono equivalenti alla successiva:

v) $\exists\alpha>0$ t.c. $v^T\nabla^2 f(x)v\leq-\alpha v^Tv \quad \forall x\in C \quad \forall v\in\Re^n$.

Dim. Segue dal precedente Teorema 1.6.1 osservando che risulta $h(x+\lambda(y-x))=$ $=\frac{1}{2}(x^Tx+2\lambda x^T(y-x)+\lambda^2\|y-x\|^2)$, $\nabla h(x)=x$, $\nabla^2 h(x)=I$ con I matrice identica, da cui:

a) $h(x)+\lambda(h(y)-h(x))-h(x+\lambda(y-x))=\frac{1}{2}(x^Tx+\lambda(y^Ty-x^Tx)-x^Tx-2\lambda x^T(y-x)-\lambda^2\|y-x\|^2)=$
$=\frac{1}{2}\lambda[(y^Ty-x^Tx-x^T(y-x))-x^T(y-x)-\lambda\|y-x\|^2]=\frac{1}{2}\lambda[y^T(y-x)-x^T(y-x)-\lambda\|y-x\|^2]=$
$=\frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)\|y-x\|^2$,

b) $h(y)-h(x)-(y-x)^T\nabla h(x)=\frac{1}{2}(y^Ty-x^Tx-2(y-x)^Tx)=\frac{1}{2}(y^Ty-x^Tx-y^Tx+x^Tx-x^T(y-x))=$
$=\frac{1}{2}\|y-x\|^2$,

c) $(y-x)^T[\nabla h(y)-\nabla h(x)]=(y-x)^T(y-x)=\|y-x\|^2$,

d) $v^T\nabla^2 h(x)v=v^TIv=v^Tv$. ♦

1.6.2.- Funzioni G-concave

Il Teorema 1.5.3 indica che alcune funzioni semistrettamente quasi-concave sono trasformazioni crescenti di funzioni concave; per mezzo quindi della corrispondente trasformazione inversa, che risulta a sua volta crescente, è possibile ottenere una funzione concava a partire da una funzione semistrettamente quasi-concava. In questo sottoparagrafo studieremo la classe delle funzioni che sono trasformazioni crescenti continue di funzioni concave.

Premettiamo alla definizione la seguente proprietà, utile ai fini del nostro studio.

Proprietà 1.6.1 Sia A un intervallo dei reali e $G:A\to\Re$ una funzione continua strettamente monotona. Risulta:

i) G è crescente se e solo se G^{-1} è crescente

ii) G è convessa se e solo se G^{-1} è concava

Dim. Il punto i) segue dal fatto che la condizione $x>y \Leftrightarrow G(x)>G(y)$ è equivalente alla $G(x)>G(y) \Leftrightarrow G^{-1}(G(x))>G^{-1}(G(y))$; il punto ii) segue invece dal fatto che per ogni $x,y\in A$ e per ogni $\lambda\in(0,1)$ la condizione

$$G(x+\lambda(y-x))\leq G(x)+\lambda(G(y)-G(x))$$

è equivalente alla condizione

$$G^{-1}(G(x))+\lambda(G^{-1}(G(y))-G^{-1}(G(x)))\leq G^{-1}(G(x)+\lambda(G(y)-G(x))).$$ ♦

Definizione 1.6.2 Una funzione $f:C \to \mathfrak{R}$, con $C \subseteq \mathfrak{R}^n$ convesso, è detta G-concava (G.cv) se esiste una funzione continua crescente $G:f(C) \to \mathfrak{R}$ tale che la funzione $G°f:C \to \mathfrak{R}$, è concava ([21]).

Un esempio di funzione G-concava è dato dalla funzione $f(x)=xe^{-x}$ definita sull'insieme $C=\{x \in \mathfrak{R}: x>0\}$; questa funzione è strettamente pseudo-concava e G-concava con $G(t)=\log(t)$ dal momento che $G(f(x))=\log(x)-x$ è una funzione concava su C. Si osservi che, contrariamente a quanto accade per le classi di funzioni analizzate sino ad ora, non è vero che se la funzione f è G-concava allora la funzione -f è G-convessa (nell'esempio appena visto la funzione $G(t)=\log(t)$ non è definita nel codominio di $-f(x)=-xe^{-x}$, $x>0$); -f risulta comunque $\overline{G}$-convessa con $\overline{G}(t)=-G(-t)$, in quanto $\overline{G}°(-f)=-G°f$ risultando quindi convessa se e solo se $G°f$ è concava.

Proprietà 1.6.2 Una funzione $f:C \to \mathfrak{R}$, con $C \subseteq \mathfrak{R}^n$ convesso, è G-concava se e solo se esiste una funzione continua crescente $G:f(C) \to \mathfrak{R}$ tale che, denotata con G^{-1} la funzione inversa di G, risulta:

$$f(x+\lambda(y-x)) \geq G^{-1}(G(f(x))+\lambda(G(f(y))-G(f(x)))) \quad \forall x,y \in C,\ \forall \lambda \in (0,1).$$

Dim. Segue dal fatto che G^{-1} è crescente se e solo se G lo è. ♦

Una condizione necessaria per la G-concavità di una funzione è la seguente.

Teorema 1.6.2 Se $f:C \to \mathfrak{R}$, con $C \subseteq \mathfrak{R}^n$ convesso, è una funzione G-concava allora è anche semistrettamente quasi-concava.

Dim. Supponiamo per assurdo che f non sia semistrettamente quasi-concava e che quindi esistano $x,y \in C$ ed un $\lambda \in (0,1)$ tali che $f(x+\lambda(y-x)) \leq f(x) < f(y)$; poiché risulta, per la crescenza di G, $G(f(x))<G(f(y))$ abbiamo necessariamente che $G(f(x))<G(f(x))+\lambda(G(f(y))-G(f(x)))$. Da questa relazione otteniamo, per la crescenza di G^{-1}, che $f(x)<G^{-1}(G(f(x))+\lambda(G(f(y))-G(f(x))))$ e quindi la funzione non può essere G-concava risultando $f(x+\lambda(y-x))<G^{-1}(G(f(x))+\lambda(G(f(y))-G(f(x))))$. ♦

---

[21] In modo analogo, f è detta G-convessa se $G°f$ è convessa.

Si osservi che non tutte le funzioni semistrettamente quasi-concave sono trasformazioni crescenti di funzioni concave; ad esempio in [6] si dimostra che la funzione f così definita su $C=\{x\in\Re: 0\leq x\leq 5\}$:

$$f(x)=\begin{cases} 4x & \text{se } 0\leq x<1 \\ 5-x & \text{se } 1\leq x\leq 2 \\ 2+\sqrt{1-(x-2)^2} & \text{se } 2<x<3 \\ 5-x & \text{se } 3\leq x\leq 5 \end{cases},$$

è semistrettamente quasi-concava ma non è G-concava per nessuna funzione crescente continua G.

Importante da un punto di vista applicativo è la ricerca di condizioni sufficienti a garantire la G-concavità di una funzione semistrettamente quasi-concava; tale problematica può essere ad esempio parafrasata, da un punto di vista microeconomico (vedasi il paragrafo 1.9), come la ricerca di condizioni sotto le quali una relazione di preferenza regolare e stellata ammette una funzione di utilità non soltanto semistrettamente quasi-concava ma anche concava [31, 50-53].

Una condizione sufficiente per la concavità di una funzione G-concava è data dal seguente teorema.

Teorema 1.6.3 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso ed $f:C\rightarrow\Re$ una funzione G-concava con G funzione convessa; allora f è una funzione concava.

Dim. Se f è G-concava con G convessa allora G^{-1} è concava e quindi si ha per ogni $x,y\in C$ e per ogni $\lambda\in(0,1)$:

$$f(x+\lambda(y-x))\geq G^{-1}(G(f(x))+\lambda(G(f(y))-G(f(x))))\geq f(x)+\lambda(f(y)-f(x)). \quad \blacklozenge$$

Non tutte le proprietà algebriche delle funzioni concave e delle loro generalizzazioni hanno un corrispondente per le funzioni G-concave.

Ad esempio se una funzione f è G-concava allora $\alpha f+\beta$ non è necessariamente G-concava per $\alpha>0$; è comunque $\overline{G}$-concava con $\overline{G}(t)=G\left(\frac{t-\beta}{\alpha}\right)$.

La somma di due funzioni G-concave non è necessariamente G-concava, come pure la somma di una funzione G_1-concava e di una funzione G_2-concava non è in generale G_3-concava (ad esempio siano $f_1(x,y)=-x^3$, $f_2(x,y)=-y^2$ definite su $C=\{x\in\Re^2: x<0, y<0\}$, f_1 è G_1-concava con $G_1(t)=t^{1/3}$ mentre f_2 è G_2-concava con $G_2(t)=t$, la funzione $f_3(x,y)=f_1+f_2=-x^3-y^2$ non è G-concava in C [6]).

Una proprietà delle funzioni concave e delle loro generalizzazioni che vale anche per le funzioni G-concave è la seguente [9].

Proprietà 1.6.3 Sia $\{f_1, f_2, f_3, \ldots\}$ una collezione finita od infinita di funzioni G-concave definite su un insieme convesso $C \subseteq \Re^n$.
Allora la funzione $f(x)=\inf\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots\}$ è G-concava su C.

Il seguente teorema fornisce una caratterizzazione per le funzioni G-concave differenziabili.

Teorema 1.6.4 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso, $f:C \to \Re$ una funzione differenziabile e $G:f(C) \to \Re$ una funzione derivabile crescente.
Allora f è G-concava se e solo se:

$$G(f(y)) \leq G(f(x)) + G'(f(x))(y-x)^T \nabla f(x) \quad \forall x,y \in C.$$

Se inoltre f e G sono di classe C^2 allora f è G-concava se e solo se

$$v^T \nabla^2 G(f(x)) v = G'(f(x)) v^T \nabla^2 f(x) v + G''(f(x))(v^T \nabla f(x))^2 \leq 0 \quad \forall x \in C, \forall v \in \Re^n.$$

Dim. Il teorema segue dai Teoremi 1.3.1 ed 1.3.3, tenuto conto della Definizione 1.6.2. ♦

E' già stato rilevato che una funzione G-concava è semistrettamente quasi-concava; il seguente teorema evidenzia che, sotto ipotesi di differenziabilità, essa è pseudo-concava.

Proprietà 1.6.4 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso ed $f:C \to \Re$ una funzione differenziabile G-concava con G funzione derivabile in f(C); allora f è pseudo-concava.
Dim. Siano $x,y \in C$ due punti tali che $(y-x)^T \nabla f(x) \leq 0$; poiché $G'(f(x)) \geq 0$ segue dal precedente Teorema 1.6.4 che $G(f(y)) \leq G(f(x))$; per la crescenza di G si ha quindi che $f(y) \leq f(x)$ ovvero che la funzione f è pseudo-concava. ♦

Tra le varie applicazioni delle funzioni G-concave si ricordano i problemi di ottimizzazione stocastica aventi come funzione obiettivo la funzione:

$$f(x)=\mathrm{Prob}\{g_1(x) \geq b_1, \ldots, g_m(x) \geq b_m\};$$

sotto ipotesi di quasi-convessità delle funzioni g_i e sotto opportune condizioni relative alla distribuzione congiunta di probabilità [79], la funzione f verifica la condizione $f(\lambda y+(1-\lambda)x) \geq [f(y)]^{\lambda}[f(x)]^{(1-\lambda)}$ $\forall \lambda \in (0,1)$, condizione che equivale alla concavità della funzione $h(x)=\log[f(x)]$, ovvero alla concavità della funzione $G \circ f$ con $G(y)=\log(y)$.

1.6.3. Funzioni log-concave

Le funzioni log-concave sono delle particolari funzioni concave negative che possono essere viste come funzioni G-concave con $G(t)=-\log(-t)$, $t<0$ [58], più precisamente:

Definizione 1.6.3 Una funzione $f:C\rightarrow\Re_{=}$, con $C\subseteq\Re^n$ convesso, è detta log-concava (log.cv) se $f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)\left[\frac{f(y)}{f(x)}\right]^{\lambda}$ $\forall x,y\in C$, $\forall\lambda\in(0,1)$.

Proprietà 1.6.5 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso; una funzione $f:C\rightarrow\Re_{=}$ è log-concava se e solo se è G-concava con $G(t)=-\log(-t)$ (22).

Dim. Segue dal fatto che, essendo $G^{-1}(y)=-e^{-y}$, risulta:

$$G^{-1}(G(f(x))+\lambda(G(f(y))-G(f(x))))=G^{-1}(-\log(-f(x))-\lambda(\log(-f(y))-\log(-f(x))))=$$
$$=G^{-1}\left(-\log(-f(x))-\log\left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)^{\lambda}\right)=G^{-1}\left(-\log\left(-f(x)\left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)^{\lambda}\right)\right)=f(x)\left[\frac{f(y)}{f(x)}\right]^{\lambda}.$$ ♦

Dallo studio delle funzioni G-concave otteniamo i seguenti risultati.

Proprietà 1.6.6 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso ed $f:C\rightarrow\Re_{=}$; se f è log-concava allora è anche concava.

Dim. Segue dal Teorema 1.6.3 e dalla precedente Proprietà 1.6.5 osservando che la funzione $G(t)=-\log(-t)$ è continua, crescente e convessa. ♦

Proprietà 1.6.7 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso ed $f:C\rightarrow\Re_{=}$ una funzione differenziabile; f è log-concava se e solo se $f(y)\leq f(x)\exp[\frac{1}{f(x)}(y-x)^T\nabla f(x)]$ $\forall x,y\in C$.

Dim. Dal Teorema 1.6.4 e dalla Proprietà 1.6.5 segue, essendo $G'(t)=\frac{-1}{t}$, che:

$$-\log(-f(y))\leq-\log(-f(x))-\frac{1}{f(x)}(y-x)^T\nabla f(x)\ \forall x,y\in C,$$

da cui, dopo aver cambiato i segni nella disuguaglianza, abbiamo:

$$-f(y)\geq-f(x)\exp[\frac{1}{f(x)}(y-x)^T\nabla f(x)]\ \forall x,y\in C,$$

da cui la tesi. ♦

---

22 In modo analogo una funzione f è detta log-convessa se è G-convessa con $G(t)=\log(t)$.

1.6.4. Funzioni r-concave

Un'altra sottoclasse delle funzioni G-concave è la seguente [2-5, 46, 70].

Definizione 1.6.4 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso; una funzione $f: C \rightarrow \Re$ è detta r-concava (r.cv) ([23]) se esiste un numero positivo r tale che:

$$f(x+\lambda(y-x)) \geq -\frac{1}{r}\log\{e^{-rf(x)}+\lambda(e^{-rf(y)}-e^{-rf(x)})\} \quad \forall x,y \in C,\ \forall \lambda \in (0,1).$$

Un esempio di funzione r-concava è dato dalla funzione $f(x)=x^3+x$ definita sull'insieme $C=\{x \in \Re: -1 \leq x \leq 1\}$; si può infatti verificare che questa è una funzione r-concava con $r=(9/8)$.

Proprietà 1.6.8 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso ed $f: C \rightarrow \Re$; f è r-concava se e solo se è G-concava con $G(t)=-e^{-rt}$.

Dim. Segue dal fatto che, essendo $G^{-1}(y)=-\frac{1}{r}\log(-y)$, risulta:

$$G^{-1}(G(f(x))+\lambda(G(f(y))-G(f(x))))=G^{-1}(-e^{-rf(x)}-\lambda(e^{-rf(y)}-e^{-rf(x)}))=$$
$$=-\frac{1}{r}\log\{e^{-rf(x)}+\lambda(e^{-rf(y)}-e^{-rf(x)})\}.$$ ♦

Proprietà 1.6.9 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso ed $f: C \rightarrow \Re$; se f è concava allora risulta r-concava con r=1.

Dim. Per la concavità di f risulta per ogni $x,y \in C$ e per ogni $\lambda \in (0,1)$ che $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(f(y)-f(x))=-\log(e^{-f(x)})-\lambda(\log(e^{-f(y)})-\log(e^{-f(x)}))$; la tesi segue quindi dalla convessità della funzione $-\log(t)$ per la quale risulta:

$$-\log(e^{-f(x)})-\lambda(\log(e^{-f(y)})-\log(e^{-f(x)})) \geq -\log\{e^{-f(x)}+\lambda(e^{-f(y)}-e^{-f(x)})\}.$$ ♦

L'importanza della classe delle funzioni r-concave è data dal fatto che in certi casi è possibile determinare un valore di r che permetta di trasformare la funzione data in una funzione concava.

Si osservi inoltre che valgono i seguenti limiti [44]:

$$\lim_{r\to 0}[-\frac{1}{r}\log\{e^{-rf(x)}+\lambda(e^{-rf(y)}-e^{-rf(x)})\}]=f(x)+\lambda(f(y)-f(x)),$$
$$\lim_{r\to +\infty}[-\frac{1}{r}\log\{e^{-rf(x)}+\lambda(e^{-rf(y)}-e^{-rf(x)})\}]=-\max\{-f(x),-f(y)\}=\min\{f(x),f(y)\}.$$

---

[23] Analogamente, f è detta r-convessa se $f(x+\lambda(y-x)) \leq \frac{1}{r}\log\{e^{rf(x)}+\lambda(e^{rf(y)}-e^{rf(x)})\}$ $\forall x,y \in C$, $\forall \lambda \in (0,1)$.

quindi anche semistrettamente quasi-concava, risulta che la r-concavità induce, al crescere di r, una graduale transizione tra la concavità, la semistretta quasi-concavità e la quasi-concavità.
Nonostante le funzioni r-concave siano G-concave, valgono per esse proprietà che non sono verificate dalle funzioni G-concave.

Proprietà 1.6.10 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso, $f:C \rightarrow \Re$ una funzione r-concava, $h,k \in \Re$ con $k>0$. Risulta:
i) $-f$ è r-convessa;
ii) $f+h$ è r-concava;
iii) kf è $\bar{r}$-concava con $\bar{r}=r/k$.
Dim. Direttamente dalla definizione di funzione r-concava abbiamo che:

i) $-f(x+\lambda(y-x)) \leq \frac{1}{r} \log\{e^{r(-f(x))}+\lambda(e^{r(-f(y))}-e^{r(-f(x))})\}$ $\forall x,y \in C$, $\forall \lambda \in (0,1)$;

ii) $f(x+\lambda(y-x))+h \geq -\frac{1}{r} \log\{e^{-rf(x)}+\lambda(e^{-rf(y)}-e^{-rf(x)})\} - \frac{1}{r} \log\{e^{-rh}\} =$

$$= -\frac{1}{r} \log\{e^{-r(f(x)+h)}+\lambda(e^{-r(f(y)+h)}-e^{-r(f(x)+h)})\};$$

iii) $kf(x+\lambda(y-x)) \geq -\frac{1}{\bar{r}} \log\{e^{-\bar{r}kf(x)}+\lambda(e^{-\bar{r}kf(y)}-e^{-\bar{r}kf(x)})\}$;

da cui seguono direttamente le tesi. ♦

Una caratterizzazione delle funzioni r-concave differenziabili [3] è data nel seguente teorema.

Teorema 1.6.5 Sia $C \subseteq \Re^n$ convesso ed $f:C \rightarrow \Re$ una funzione differenziabile.
Allora f è r-concava se e solo se $e^{-rf(y)} \geq e^{-rf(x)} - re^{-rf(x)}(y-x)^T \nabla f(x)$ $\forall x,y \in C$.
Se inoltre f è di classe $\mathcal{C}^2$ allora è r-concava se e solo se $v^T \nabla^2 f(x) v - r(v^T \nabla f(x))^2 \leq 0$ $\forall x \in C$, $\forall v \in \Re^n$.
Dim. Segue direttamente dal Teorema 1.6.4 osservando che $G'(t)=re^{-rt}$ e che $G''(t)=-rG'(t)=-r^2e^{-rt}$. ♦

Terminiamo questo sottoparagrafo mostrando come, sotto certe ipotesi, una particolare sottofamiglia delle funzioni G-concave è contenuta nella classe delle funzioni r-concave.

Teorema 1.6.6 Sia $C \subset \Re^n$ un insieme convesso compatto, ed $f:C \rightarrow \Re$ una funzione G-concava di classe $\mathcal{C}^2$ tale che $G:f(C) \rightarrow \Re$ è di classe $\mathcal{C}^2$ con $G'(t)>0$ su $f(C)$; allora f è r-concava su C.

Dim. Per le ipotesi e per il precedente Teorema 1.6.4 risulta:

$$v^T\nabla^2 f(x)v+\frac{G''(f(x))}{G'(f(x))}(v^T\nabla f(x))^2\leq 0\ \forall x\in C,\ \forall v\in\Re;$$

per ogni $r(x)\leq\frac{G''(f(x))}{G'(f(x))}$ si ha quindi:

$$v^T\nabla^2 f(x)v+r(x)(v^T\nabla f(x))^2\leq 0\ \forall x\in C,\ \forall v\in\Re.$$

Posto $-r^*=\min\{0,\bar{r}\}$, con $\bar{r}=\min\limits_{x\in C}\frac{G''(f(x))}{G'(f(x))}$, risulta:

$$v^T\nabla^2 f(x)v-r^*(v^T\nabla f(x))^2\leq 0\ \forall x\in C,\ \forall v\in\Re$$

e di conseguenza, per il teorema precedente, la funzione è r^*-concava su C. ♦

1.6.5. Funzioni (h,ϕ)-concave

La classe delle funzioni G-concave può essere estesa permettendo di ottenere una funzione concava da una funzione data non soltanto tramite una sua trasformazione crescente ma anche tramite una trasformazione del suo dominio di definizione in un opportuno insieme convesso [10].

Definizione 1.6.5 Sia C un sottoinsieme di $\Re^n$ ed $f:C\rightarrow\Re$ una funzione a valori reali; f è detta (h,ϕ)-concava ((h,ϕ).cv) se esistono una funzione continua crescente $\phi:f(C)\rightarrow\Re$ ed una funzione continua biunivoca $h:C\rightarrow\Re^n$, con h(C) insieme convesso, tali che la funzione composta $\phi\circ f\circ h^{-1}:h(C)\rightarrow\Re$, è concava ([24]).

E' possibile osservare facilmente che:

i) una funzione concava è (h,ϕ)-concava con $h(x)=x$ e $\phi(t)=t$;
ii) una funzione G-concava è (h,ϕ)-concava con $h(x)=x$ e $\phi(t)=G(t)$;
iii) una funzione log-concava è (h,ϕ)-concava con $h(x)=x$ e $\phi(t)=-\log(-t)$;
iv) una funzione r-concava è (h,ϕ)-concava con $h(x)=x$ e $\phi(t)=-e^{-rt}$.

Una caratterizzazione equivalente di tali funzioni è stata data in [10] da Ben-Tal.

Teorema 1.6.7 Sia C un sottoinsieme di $\Re^n$ ed $f:C\rightarrow\Re$ una funzione a valori reali; f è (h,ϕ)-concava se e solo se esistono una funzione continua crescente $\phi:f(C)\rightarrow\Re$ ed una funzione continua biunivoca $h:C\rightarrow\Re^n$, con h(C) insieme convesso, tali che per ogni $x,y\in C$ ed ogni $\lambda\in(0,1)$ si ha:

$$f(h^{-1}[h(x)+\lambda(h(y)-h(x))])\geq\phi^{-1}[\phi(f(x))+\lambda(\phi(f(y))-\phi(f(x)))].$$

---

24 In modo analogo, f è detta (h,ϕ)-convessa se $\phi\circ f\circ h^{-1}$ è convessa.

Dim. Per definizione una funzione f è (h,ϕ)-concava se e solo se:

$$\phi \circ f \circ h^{-1}(\bar{x}+\lambda(\bar{y}-\bar{x})) \geq \phi \circ f \circ h^{-1}(\bar{x})+\lambda(\phi \circ f \circ h^{-1}(\bar{y})-\phi \circ f \circ h^{-1}(\bar{x}))\ \forall \bar{x},\bar{y} \in h(C),\ \forall \lambda \in (0,1);$$

per la biunivocità della funzione h otteniamo, sostituendo $x=h^{-1}(\bar{x})$ ed $y=h^{-1}(\bar{y})$:

$$\phi \circ f \circ h^{-1}(h(x)+\lambda(h(y)-h(x))) \geq \phi \circ f(x)+\lambda(\phi \circ f(y)-\phi \circ f(x))\ \forall x,y \in C,\ \forall \lambda \in (0,1);$$

per l'invertibilità e la crescenza della funzione ϕ si ha quindi la tesi. ♦

Un esempio di funzione (h,ϕ)-concava che non sia quasi-concava è data dalla funzione di Rosenbrock definita da $f(x_1,x_2)=-100[x_2-(x_1)^2]^2-(1-x_1)^2$ [83]; questa funzione non è quasi-concava, dal momento che i suoi insiemi di livello superiore sono insiemi non convessi, ma è (h,ϕ)-concava con:

$$h(x_1,x_2)=[10(x_2-(x_1)^2),1-x_1], \text{ e quindi } h^{-1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=[1-\bar{x}_2,\tfrac{1}{10}\bar{x}_1+(1-\bar{x}_2)^2], \text{ e } \phi(t)=t;$$

risulta infatti $\phi \circ f \circ h^{-1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=-(\bar{x}_1)^2-(\bar{x}_2)^2$ che è una funzione quadratica concava. Una caratterizzazione nel caso differenziabile di queste funzioni è data nel seguente teorema.

Teorema 1.6.8 Sia C un sottoinsieme di $\Re^n$ ed $f:C \rightarrow \Re$ una funzione a valori reali differenziabile; f è (h,ϕ)-concava se e solo se per ogni $x,y \in C$ risulta:

$$\phi(f(y)) \leq \phi(f(x))+\phi'(f(x))\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\frac{\partial h_j^{-1}}{\partial x_i}(h(x))\,[h_i(y)-h_i(x)].$$

Dalla precedente relazione si ottiene direttamente la proprietà espressa dal seguente teorema [10].

Teorema 1.6.9 Sia C un sottoinsieme di $\Re^n$ ed $f:C \rightarrow \Re$ una funzione a valori reali differenziabile ed (h,ϕ)-concava con h e ϕ differenziabili; allora ogni punto $x^* \in C$ tale che $\nabla f(x^*)=0$ è punto di massimo globale per f su C.

Dim. La tesi segue direttamente dal Teorema 1.6.8 sostituendo x con x^* e tenendo conto della crescenza di ϕ. ♦

1.6.6. Funzioni (α,λ)-concave

Un'altra classe di funzioni che estende quella delle funzioni G-concave è la classe delle funzioni (α,λ)-concave introdotte in [22-24].

Definizione 1.6.6 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso, $f:C \rightarrow \Re$ una funzione a valori reali, $x,y \in C$ e $\lambda \in (0,1)$. La funzione f è detta ([25]):

i) (α,λ)-concava ((α,λ)-cv) se $\exists \alpha(\lambda,x,y) \in [0,1]$ tale che:
$$f(y) \geq f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)-f(x)) \ \forall \lambda \in (0,1),\ \forall x,y \in C;$$
ii) strettamente (α,λ)-concava (s.(α,λ)-cv) se $\exists \alpha(\lambda,x,y) \in [0,1]$ tale che:
$$f(y) \geq f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x)) > f(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)-f(x)) \ \forall \lambda \in (0,1),\ \forall x,y \in C,\ x \neq y;$$
iii) semi (α,λ)-concava (sm.(α,λ)-cv) se $\exists \alpha(\lambda,x,y) \in [0,1]$ tale che:
$$f(y) > f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)-f(x)) \ \forall \lambda \in (0,1),\ \forall x,y \in C;$$
iv) semistrettamente (α,λ)-concava (ss.(α,λ)-cv) se $\exists \alpha(\lambda,x,y) \in [0,1]$ tale che:
$$f(y) > f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x)) > f(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)-f(x)) \ \forall \lambda \in (0,1),\ \forall x,y \in C;$$

Si può supporre, senza perdita di generalità, che la funzione $\alpha(\lambda,x,y)$ verifichi la seguente proprietà:
$$\alpha(\lambda,x,y)+\alpha(1-\lambda,y,x)=1 \quad \forall \lambda \in (0,1),\ \forall x,y \in C. \tag{1.7}$$
Tale proprietà è a priori sicuramente verificata se f è (α,λ)-concava oppure strettamente (α,λ)-concava ed $f(y)=f(x)$ ([26]); nel caso in cui essa non sia vera in generale possiamo però sostituire la funzione $\alpha(\lambda,x,y)$ con la seguente:
$$\alpha^*(\lambda,x,y)=\begin{cases} \alpha(\lambda,x,y) & \text{se } f(y)>f(x) \\ \dfrac{1+\alpha(\lambda,x,y)-\alpha(1-\lambda,y,x)}{2} & \text{se } f(x)=f(y) \\ 1-\alpha(1-\lambda,y,x) & \text{se } f(y)<f(x) \end{cases} \ ;$$
questa funzione verifica la (1.7) ([27]) ed è tale che se f è (α,λ)-concava è anche (α^*,λ)-concava e così via per le altre (a tal fine si osservi che se f è (α,λ)-concava oppure strettamente (α,λ)-concava risulta $\alpha^*(\lambda,x,y)=\alpha(\lambda,x,y)$ per $f(y)=f(x)$).
Vale il seguente teorema che permette di definire alternativamente le classi di funzioni adesso introdotte.

---

[25] f è detta (α,λ)-convessa se -f è (α,λ)-concava, analogamente per gli altri casi.

[26] Per ipotesi, essendo $f(y)=f(x)$ risulta $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)-f(x))$, si ha anche però, essendo $f(x)=f(y)$, $f(y+(1-\lambda)(x-y)) \geq f(y)+\alpha(1-\lambda,y,x)(f(x)-f(y))$ ovvero $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+(1-\alpha(1-\lambda,y,x))(f(y)-f(x))$, di conseguenza deve essere $\alpha(\lambda,x,y)=1-\alpha(1-\lambda,y,x)$.

[27] Per verificare ciò basta osservare che si ha $\alpha^*(1-\lambda,y,x)=\begin{cases} 1-\alpha(\lambda,x,y) & \text{se } f(y)>f(x) \\ \dfrac{1-\alpha(\lambda,x,y)+\alpha(1-\lambda,y,x)}{2} & \text{se } f(x)=f(y) \\ \alpha(1-\lambda,y,x) & \text{se } f(y)<f(x) \end{cases}$.

Teorema 1.6.10 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso ed $f: C \rightarrow \Re$.

i) f è (α,λ)-concava se e solo se:

$$\exists \alpha(\lambda,x,y) \in [0,1] \text{ tale che } \alpha(\lambda,x,y)+\alpha(1-\lambda,y,x)=1 \text{ per cui}$$
$$f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)-f(x)) \ \forall \lambda \in (0,1),\ \forall x,y \in C;$$

ii) f è strettamente (α,λ)-concava se e solo se:

$$\exists \alpha(\lambda,x,y) \in [0,1] \text{ tale che } \alpha(\lambda,x,y)+\alpha(1-\lambda,y,x)=1 \text{ per cui}$$
$$f(x+\lambda(y-x)) > f(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)-f(x)) \ \forall \lambda \in (0,1),\ \forall x,y \in C,\ x \neq y;$$

iii) f è semi (α,λ)-concava se e solo se:

$$\exists \alpha(\lambda,x,y) \in [0,1] \text{ tale che } \alpha(\lambda,x,y)+\alpha(1-\lambda,y,x)=1 \text{ per cui}$$
$$f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)-f(x)) \ \forall \lambda \in (0,1),\ \forall x,y \in C,\ f(x) \neq f(y);$$

iv) f è semistrettamente (α,λ)-concava se e solo se:

$$\exists \alpha(\lambda,x,y) \in [0,1] \text{ tale che } \alpha(\lambda,x,y)+\alpha(1-\lambda,y,x)=1 \text{ per cui}$$
$$f(x+\lambda(y-x)) > f(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)-f(x)) \ \forall \lambda \in (0,1),\ \forall x,y \in C,\ f(x) \neq f(y).$$

Dim. Si dimostra soltanto il punto i) essendo gli altri casi analoghi.
La sufficienza è ovvia; per la necessità si osservi che $\forall x,y \in C$ e $\forall \lambda \in (0,1)$, se $f(y) \geq f(x)$ allora per la (α,λ)-concavità di f è $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)-f(x))$; se invece $f(y)<f(x)$ risulta $f(y+(1-\lambda)(x-y)) \geq f(y)+\alpha(1-\lambda,y,x)(f(x)-f(y))$ ovvero:
$f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+(1-\alpha(1-\lambda,y,x))(f(y)-f(x))=f(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)-f(x))$. ♦

Si osservi che, posto $\alpha^*(\lambda,x,y)=\begin{cases} 0 & \text{se } f(y)>f(x) \\ 1/2 & \text{se } f(x)=f(y) \\ 1 & \text{se } f(y)<f(x) \end{cases}$, risulta:

se f è quasi-concava allora è (α,λ)-concava con $\alpha(\lambda,x,y)=\alpha^*(\lambda,x,y)$;
se f è s.qcv allora è strettamente (α,λ)-concava con $\alpha(\lambda,x,y)=\alpha^*(\lambda,x,y)$;
se f è semi quasi-concava allora è semi (α,λ)-concava con $\alpha(\lambda,x,y)=\alpha^*(\lambda,x,y)$;
se f è ss.qcv allora è semistrettamente (α,λ)-concava con $\alpha(\lambda,x,y)=\alpha^*(\lambda,x,y)$;
se f è costante allora è (α,λ)-concava per qualsiasi $\alpha(\lambda,x,y)$ corretta;
se f è concava allora è (α,λ)-concava con $\alpha(\lambda,x,y)=\lambda$;
se f è strettamente concava allora è strettamente (α,λ)-concava con $\alpha(\lambda,x,y)=\lambda$;
se f è G-concava allora è (α,λ)-concava con

$$\alpha(\lambda,x,y)=\begin{cases} \dfrac{G^{-1}(G(f(x))+\lambda(G(f(y))-G(f(x))))-f(x)}{f(y)-f(x)} & \text{se } f(y) \neq f(x) \\ 1/2 & \text{se } f(y)=f(x) \end{cases}.$$

Valgono per le funzioni (α,λ)-concave le seguenti proprietà.

Proprietà 1.6.11 Sia $C\subseteq\Re^n$ convesso ed $f:C\to\Re$ una funzione (α_1,λ)-concava; allora f è anche (α_2,λ)-concava se $\alpha_2(\lambda,x,y)\in[0,1]$, $\alpha_2(\lambda,x,y)+\alpha_2(1-\lambda,y,x)=1$ ed inoltre: $\dfrac{\alpha_1(\lambda,x,y)-\alpha_2(\lambda,x,y)}{f(y)-f(x)}\geq 0$ $\forall\lambda\in(0,1)$, $\forall x,y\in C$, $f(x)\neq f(y)$.

Dim. Dalle ipotesi segue che $\alpha_1(\lambda,x,y)(f(y)-f(x))\geq\alpha_2(\lambda,x,y)(f(y)-f(x))$ $\forall\lambda\in(0,1)$, $\forall x,y\in C$, $f(x)\neq f(y)$; questa relazione inoltre è ovviamente valida anche per $f(x)=f(y)$. Risulta quindi $\forall\lambda\in(0,1)$ e $\forall x,y\in C$:

$$f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)+\alpha_1(\lambda,x,y)(f(y)-f(x))\geq f(x)+\alpha_2(\lambda,x,y)(f(y)-f(x)),$$

da cui la tesi per il teorema 1.6.10. ♦

Proprietà 1.6.12 Sia f una funzione a valori reali definita su un insieme convesso C di $\Re^n$; se f è semi (α,λ)-concava, allora ogni punto di massimo locale stretto è di massimo globale; se inoltre risulta $\alpha(\lambda,x,y)>0$ $\forall\lambda\in(0,1)$ e $\forall x,y\in C$ allora ogni punto di massimo locale è anche di massimo globale.

Dim. Supponiamo per assurdo che $x\in C$ sia un punto di massimo locale ma non globale e che quindi esista un altro punto $y\in C$ tale che $f(y)>f(x)$; per la semi (α,λ)-concavità di f risulta $f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)-f(x))\geq f(x)$ $\forall\lambda\in(0,1)$, di conseguenza x non può essere di massimo locale stretto; se inoltre fosse $\alpha(\lambda,x,y)>0$ $\forall\lambda\in(0,1)$ avremmo $f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)-f(x))>f(x)$ $\forall\lambda\in(0,1)$ e quindi x non può essere un punto di massimo locale. ♦

Proprietà 1.6.13 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso, $g:C\to\Re$ una funzione (α,λ)-concava tale che $g(x)>0$ $\forall x\in C$, $f:C\to\Re$ una funzione (α,λ)-convessa tale che $f(x)>0$ $\forall x\in C$; sia inoltre $\gamma(\lambda,x,y)=\dfrac{\alpha(\lambda,x,y)f(y)}{f(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)-f(x))}$ [28].

Allora la funzione g/f risulta allora (γ,λ)-concava.

Dim. Si osservi che risulta $\forall\lambda\in(0,1)$ e $\forall x,y\in C$:

$$\frac{g(x)}{f(x)}+\gamma(\lambda,x,y)\left[\frac{g(y)}{f(y)}-\frac{g(x)}{f(x)}\right]=\frac{g(x)}{f(x)}-\frac{\alpha(\lambda,x,y)f(y)}{f(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)-f(x))}\,\frac{f(y)g(x)-f(x)g(y)}{f(y)f(x)}=$$

$$=\frac{f(x)g(x)+\alpha(\lambda,x,y)g(x)(f(y)-f(x))-\alpha(\lambda,x,y)(f(y)g(x)-f(x)g(y))}{f(x)[f(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)-f(x))]}=$$

$$=\frac{f(x)g(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)g(x)-f(x)g(x)-f(y)g(x)+f(x)g(y))}{f(x)[f(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)-f(x))]}=$$

$$=\frac{g(x)+\alpha(\lambda,x,y)(g(y)-g(x))}{f(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)-f(x))}\text{; essendo quindi:}$$

---

[28] Si verifica facilmente che $\gamma(\lambda,x,y)\in[0,1]$ e che $\gamma(\lambda,x,y)+\gamma(1-\lambda,y,x)=1$.

$0<f(x+\lambda(y-x))\leq f(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)-f(x)),\ g(x+\lambda(y-x))\geq g(x)+\alpha(\lambda,x,y)(g(y)-g(x))>0,$

si ha: $\dfrac{g(x+\lambda(y-x))}{f(x+\lambda(y-x))}\geq\dfrac{g(x)+\alpha(\lambda,x,y)(g(y)-g(x))}{f(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)-f(x))}=\dfrac{g(x)}{f(x)}+\gamma(\lambda,x,y)\left[\dfrac{g(y)}{f(y)}-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right],$

di conseguenza la funzione g/f è (γ,λ)-concava. ♦

Corollario 1.6.2 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso, $f:C\to\Re$ una funzione (α,λ)-convessa tale che $f(x)>0\ \forall x\in C$ e sia $\gamma(\lambda,x,y)=\dfrac{\alpha(\lambda,x,y)f(y)}{f(x)+\alpha(\lambda,x,y)(f(y)-f(x))}$.
Allora la funzione 1/f risulta allora (γ,λ)-concava.
Dim. Segue direttamente dal teorema precedente osservando che la funzione costante $g(x)=1$ è sicuramente positiva e (α,λ)-concava. ♦

Terminiamo questo paragrafo riassumendo, per mezzo del seguente diagramma, le relazioni intercorrenti tra le varie classi di funzioni concavo-trasformabili.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \boxed{\text{hf.cv}} & & & & \boxed{(h,\phi)\text{-cv}} & & \boxed{(\alpha,\lambda)\text{-cv}} \\
 & & \cup & & & & \cup & & \cup \\
\boxed{\text{log.cv}} & \subset & \boxed{\text{cv}} & \subset & \boxed{\text{r-cv}} & \subset & \boxed{\text{G-cv}} & \subset & \boxed{\text{ss.qcv}}
\end{array}$$

diagramma 7

Si ricordi che nel caso differenziabile una funzione G-concava è pseudo-concava e non soltanto semistrettamente quasi-concava.

Bibliografia

[1] Arrow, K.J. and A.C. Enthoven, *Quasi-concave programming*, Econometrica, vol. 29, pp. 779-800, 1961.

[2] Aumann, R.J., *Values of markets with a continuum of traders*, Econometrica, vol. 43, pp. 611-646, 1975.

[3] Avriel, M., *r-Convex functions*, Math. Programming, vol. 2, pp. 309-323, 1972.

[4] Avriel, M., *Solution of certain non linear programs involving r-convex functions*, J. Optimization Theory Appl., vol. 11, pp. 159-174, 1973.

[5] Avriel, M., *Nonlinear programming: analysis and methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[6] Avriel, M., W.E. Diewert, *et al.*, *Generalized concavity*, Mathematical concepts and methods in science and engineering, vol. 36, edited by A. Miele, Plenum Press, New York, 1988.

[7] Avriel, M., W.E. Diewert, *et al.*, *Introduction to concave and generalized concave functions*, in "Generalized Concavity in Optimization and Economics", edited by S. Schaible and W.T. Ziemba, Academic Press, New York, pp. 21-50, 1981.

[8] Avriel, M. and S. Schaible, *Second order characterizations of pseudoconvex functions*, Math. Prgramming, vol. 14, pp. 170-185, 1978.

[9] Avriel, M. and I. Zang, *Generalized convex functions with applications to nonlinear programming*, in "Mathematical programs for activity analysis", edited by P. Van Moeseke, North-Holland, Amsterdam, 1974.

[10] Ben-Tal, A., *On generalized means and generalized convexity*, J. Optimization Theory Appl., vol. 21, pp. 1-13, 1977.

[11] Bitran, G.R., *Experiments with linear fractional problems*, Naval Research Logistic Quarterly, vol. 26, pp. 689-693, 1979.

[12] Cambini, A., *An algorithm for a special class of generalized convex programs*, in "Generalized Concavity in Optimization and Economics", Academic Press, 1981.

[13] Cambini, A., E. Castagnoli, *et al.* (Eds.), *Generalized Convexity and Fractional Programming with Economic Applications*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 345, edited by M. Beckmann and W. Krelle, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[14] Cambini, A. and L. Martein, *A modified version of Martos's Algorithm*, Methods of Operation Research, vol. 53, pp. 33-44, 1986.

[15] Cambini, A. and L. Martein, *Linear fractional and bicriteria linear fractional programs*, in "Generalized Convexity and Fractional Programming with Economic Applications", vol. 345, edited by A. Cambini, E. Castagnoli, *et al.*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 155-166, 1990.

[16] Cambini, A. and L. Martein, *Equivalence in linear fractional programming*, Optimization, vol. 23, pp. 41-51, 1992.

[17] Cambini, A., L. Martein, and S. Schaible, *On maxinizing a sum of ratios*, Journal of Information & Optimization Sciences, vol. 1, 1989.

[18] Cambini, R., *A class of non-linear programs: theoretical and algorithmical results*, in "Generalized Convexity", vol. 405, edited by S. Komlósi, T. Rapcsák, and S. Schaible, Springer-Verlag, pp. 294-310, 1994.

[19] Cambini, R., *Nuove classi di funzioni scalari concave generalizzate*, Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali, 1994.

[20] Castagnoli, E. and P. Mazzoleni, *Convessità generalizzata ed applicazioni di tipo economico*, Quaderni di Statistica e Matematica Applicata alle Scienze Economico-Sociali, vol. 7-8, pp. 51-73, 1986.

[21] Castagnoli, E. and P. Mazzoleni, *Verso un unico tipo di concavità*, Rivista A.M.A.S.E.S., vol. 9/1, pp. 15-32, 1986.

[22] Castagnoli, E. and P. Mazzoleni, *About derivatives of some generalized concave functions*, in "Continuous-Time, Fractional and Multiobjective Programming", edited by C. Singh and B.K. Dass, Analytic Publishing Co., Delhi, pp. 53-64, 1989.

[23] Castagnoli, E. and P. Mazzoleni, *Towards a unified type of concavity*, in "Continuous-Time, Fractional and Multiobjective Programming", edited by C. Singh and B.K. Dass, Analytic Publishing Co., Delhi, pp. 225-240, 1989.

[24] Castagnoli, E. and P. Mazzoleni, *Differentiable* (α,λ)*-concave functions*, in "Generalized Convexity and Fractional Programming with Economic Applications", vol. 345, edited by A. Cambini, E. Castagnoli, *et al.*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 52-76, 1990.

[25] Craven, B.D., *Vector-valued optimization*, in "Generalized Concavity in Optimization and Economics", edited by S. Schaible and W.T. Ziemba, Academic Press, New York, pp. 661-687, 1981.

[26] Crouzeix, J.P., J.A. Ferland, and S. Schaible, *Improved analysis of the generalized convexity of a function in portfolio theory*, in "Generalized Convexity and Fractional Programming with Economic Applications", vol. 345, edited by A. Cambini, E. Castagnoli, *et al.*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 287-294, 1990.

[27] Dass, B.K., *Recent bounds in coding using programming techniques*, in "Generalized Convexity and Fractional Programming with Economic Applications", vol. 345, edited by A. Cambini, E. Castagnoli, *et al.*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 348-351, 1990.

[28] De Finetti, B., *Sul concetto di media*, G.I.I.A., vol. 3, pp. 3-30, 1931.

[29] De Finetti, B., *Sulle stratificazioni convesse*, Ann. Math. Pura Appl., vol. 30, pp. 173-183, 1949.

[30] Debreu, G., *Representation of a preference ordering by a numerical function*, in "Decision Processes", edited by R.M. Thrall, C.H. Coombs, and R.L. Davis, John Wiley & Sons, Inc., New York, pp. 159-165, 1954.

[31] Debreu, G., *Least concave utility functions*, J. Math. Economics, vol. 3, pp. 121-129, 1976.

[32] Diewert, W.E., *Alternative characterizations of six kinds of quasiconcavity in the nondifferentiable case with applications to nonsmooth programming*, in "Generalized Concavity in Optimization and Economics", edited by S. Schaible and W.T. Ziemba, Academic Press, New York, pp. 51-93, 1981.

[33] Diewert, W.E., *Generalized concavity and economics*, in "Generalized Concavity in Optimization and Economics", edited by S. Schaible and W.T. Ziemba, Academic Press, New York, pp. 511-541, 1981.

[34] Diewert, W.E., M. Avriel, and I. Zang, *Nine kinds of quasiconcavity and concavity*, J. Econ. Theory, vol. 25, pp. 397-420, 1981.

[35] Eichhorn, W., *Concavity and quasiconcavity in the theory of production*, in "Generalized Concavity in Optimization and Economics", edited by S. Schaible and W.T. Ziemba, Academic Press, New York, pp. 627-636, 1981.

[36] Eichhorn, W., *Generalized convexity in economics: some examples*, in "Generalized Convexity and Fractional Programming with Economic Applications", vol. 345, edited by A. Cambini, E. Castagnoli, *et al.*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 266-275, 1990.

[37] Eichhorn, W. and W. Gehrig, *Generalized convexity and the measurement of inequality*, in "Generalized Concavity in Optimization and Economics", edited by S. Schaible and W.T. Ziemba, Academic Press, New York, pp. 637-642, 1981.

[38] Eichhorn, W. and U. Leopold, *Logical aspects concerning Shephard's axioms of production theory*, in "Generalized Convexity and Fractional

Programming with Economic Applications", vol. 345, edited by A. Cambini, E. Castagnoli, *et al.*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 352-358, 1990.

[39] Fenchel, W., *Convex cones, sets and functions*, Mimeographed lecture notes, Princeton University, Princeton, New Jersey, 1951.

[40] Gerencsér, L., *On a close relation between quasi-convex and convex functions and related investigations*, Math. Operationenforsch. Stat., vol. 4, pp. 201-211, 1973.

[41] Ginsberg, W., *Concavity and quasi-concavity in economics*, J. Econ. Theory, vol. 6, pp. 596-605, 1973.

[42] Greenberg, H.J. and W.P. Pierskalla, *A review of quasi-convex functions*, Operation Research, vol. 19, pp. 1553-1570, 1971.

[43] Hanson, M.A., *Bounds for functionally convex optimal control problems*, J. Math. Anal. Appl., vol. 8, pp. 84-89, 1964.

[44] Hardy, G.H., J.E. Littlewood, and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1952.

[45] Hölder, O., *Über einen Mittelwertsatz*, Nachr. Ges. Wiss. Goettingen, pp. 38-47, 1889.

[46] Horst, R., *Mittelbare Konvexe funktionen and optimierungsaufgaben*, in "Methods of Operations Research", vol. 12, edited by R. Henn, H.P. Künzi, and H. Schubert, Verlag Anton Hain, Meisenheim, 1971.

[47] Jensen, J.L.W.V., *Sur les fonctions convexes et les inégalities entre les valeurs moyennes*, Acta Math., vol. 30, pp. 175-193, 1906.

[48] Jeroslow, R., *Some influences of generalized and ordinary convexity in disjunctive and integer programming*, in "Generalized Concavity in Optimization and Economics", edited by S. Schaible and W.T. Ziemba, Academic Press, New York, pp. 689-699, 1981.

[49] Jorgenson, D.W. and L.J. Lau, *Duality and differentiability in production*, J. Econ. Theory, vol. 9, pp. 23-42, 1974.

[50] Kannai, Y., *Approximation of convex preferences*, J. Math. Econ., vol. 1, pp. 101-106, 1974.

[51] Kannai, Y., *Concavifiability and constructions of concave utility functions*, J. Math. Econ., vol. 4, pp. 1-56, 1977.

[52] Kannai, Y., *The ALEP definition of complementarity and least concave utility functions*, J. Econ. Theory, vol. 22, pp. 115-117, 1980.

[53] Kannai, Y., *Concave utility functions-existence, constructions and cardinality*, in "Generalized Concavity in Optimization and Economics", edited by S. Schaible and W.T. Ziemba, Academic Press, New York, pp. 543-611, 1981.

[54] Kannai, Y. and R. Mantel, *Non-convexifiable Pareto sets*, Econometrica, vol. 46, pp. 571-575, 1978.

[55] Karamardian, S., *Duality in mathematical programming*, J. Math. Anal. Appl., vol. 20, pp. 344-358, 1967.

[56] Karamardian, S. and S. Schaible, *Seven kinds of monotone maps*, J. of Optimization Theory and Appl., vol. 66, pp. 37-46, 1990.

[57] Katzner, D.W., *Static demand theory*, MacMillan, New York, 1970.

[58] Klinger, A. and O.L. Mangasarian, *Logarithmic convexity and geometric programming*, J. Math. Anal. Appl., vol. 24, pp. 388-408, 1968.

[59] Kortanek, K.O. and J.P. Evans, *Pseudo-concave programming and Lagrange regularity*, Operations Research, vol. 15, pp. 882-891, 1967.

[60] Lau, L.J., *Applications of profit functions*, in "Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications", vol. 1, edited by M. Fuss and D. McFadden, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[61] Lindberg, P.O., *Power convex functions*, in "Generalized Concavity in Optimization and Economics", edited by S. Schaible and W.T. Ziemba, Academic Press, New York, pp. 153-165, 1981.

[62] Loridan, P. and J. Morgan, *Quasi-convex lower level problem and applications in two level optimization*, in "Generalized Convexity and Fractional Programming with Economic Applications", vol. 345, edited by A. Cambini, E. Castagnoli, *et al.*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 325-341, 1990.

[63] Madden, P., *Concavity and optimization in microeconomics*, Basil Blackwall, 1986.

[64] Mangasarian, O.L., *Pseudo-convex functions*, J. SIAM Control Ser. A, vol. 3, pp. 281-290, 1965.

[65] Mangasarian, O.L., *Nonlinear programming*, McGraw-Hill, New York, 1969.

[66] Mangasarian, O.L., *Convexity, pseudo-convexity and quasi-convexity of composite functions*, Cah. Cent. d'Etud. Rech. Oper., vol. 12, pp. 114-122, 1970.

[67] Martein, L., *Massimo della somma tra una funzione lineare ed una funzione lineare fratta*, Rivista A.M.A.S.E.S., pp. 13-20, 1985.

[68] Martos, B., *Hyperbolic Programming*, Naval Research Logistic Quarterly, vol. 11, pp. 135-155, 1964.

[69] Martos, B., *The direct power of adjacent vertex programming methods*, Manage. Sci., vol. 12, pp. 241-252, 1965.

[70] Martos, B., *Nonlinear programming theory and methods*, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[71] Mazzoleni, P. (Eds.), *Generalized Concavity for Economic Applications*, Tecnoprint, Bologna, 1992.

[72] Minkowsky, H., *Geometrie der zahlen*, Teubner, Leipzig, 1910.

[73] Minkowsky, H., *Theorie der konvexen korper, inbesondere begründung ihres oberflächenbegriffs*, Gesammelte abhandlungen II, Teubner, Leipzig, 1911.

[74] Montrucchio, L. and L. Peccati, *Log-convexity and global portfolio immunization*, in "Generalized Convexity and Fractional Programming with Economic Applications", vol. 345, edited by A. Cambini, E. Castagnoli, *et al.*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 276-286, 1990.

[75] Ortega, J.M. and W.C. Rheinboldt, *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Academic Press, New York, 1970.

[76] Pessa, E. and B. Rizzi, *Problems of convex analysis in economic dynamical models*, in "Generalized Convexity and Fractional Programming with Economic Applications", vol. 345, edited by A. Cambini, E. Castagnoli, *et al.*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 342-347, 1990.

[77] Poljak, B.T., *Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions*, Doklady Akademii Naul C.C.P., vol. 166, pp. 287-290, 1966.

[78] Ponstein, J., *Seven kinds of convexity*, SIAM Rev., vol. 9, pp. 115-119, 1967.

[79] Prékopa, A., *Logarithmic concave measures with applications to stochastic programming*, Acta Sci. Mat., vol. 32, pp. 301-316, 1971.

[80] Roberts, A.W. and D.E. Varberg, *Convex functions*, Academic Press, New York, 1973.

[81] Rockafellar, R.T., *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[82] Rockafellar, R.T., *Saddlepoints of Hamiltonian systems in convex Lagrange problems having a nonzero discount rate*, Journal of Economic Theory, vol. 12, pp. 71-113, 1976.

[83] Rosenbrock, H.H., *An authomatic method for finding the greater or least value of a function*, Computer J., vol. 3, pp. 175-184, 1960.

[84] Scapparone, P., *Teoria del Comportamento del Consumatore*, Editrice Campano, Pisa, 1990.

[85] Schaible, S., *Quasiconvex optimization in general real linear spaces*, Z. Oper. Res., vol. 16, pp. 205-213, 1972.

[86] Schaible, S. and I. Zang, *On the convexifiability of pseudo-convex C^2-functions*, Math. Programming, vol. 19, pp. 289-299, 1980.

[87] Schaible, S. and W.T. Ziemba (Eds.), *Generalized Concavity in Optimization and Economics*, Academic Press, New York, 1981.

[88] Singh, C. and B.K. Dass (Eds.), *Continuous-Time, Fractional and Multiobjective Programming*, Analytic Publishing Co., Delhi, 1989.

[89] Stancu-Minasian, I.M. and S. Tigan, *On some fractional programming models occurring in minimum-risk problems*, in "Generalized Convexity and Fractional Programming with Economic Applications", vol. 345, edited by A. Cambini, E. Castagnoli, *et al.*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 295-324, 1990.

[90] Stoer, J. and C. Witzgall, *Convexity and optimization in finite dimensions*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[91] Thompson, W.A. and D.W. Parke, *Some properties of generalized concave functions*, Operation Research, vol. 21, pp. 305-313, 1973.

[92] Vial, J.P., *Strong convexity of sets and functions*, J. Math. Econ., vol. 9, pp. 187-207, 1982.

2. Concavità generalizzata: caso vettoriale

Come risulta evidente da quanto svolto nel primo capitolo di questa tesi, la concavità generalizzata scalare, pur essendo ancora argomento di notevole interesse e ricerca, può ormai essere ritenuta una teoria consolidata; di contro non esiste ancora una trattazione organica della concavità generalizzata per funzioni vettoriali, come si evince da una analisi effettuata sulla letteratura specializzata [1, 2, 6-9, 12, 13, 16-18, 20-22, 24].
Ad esempio, per i problemi Paretiani, che sono i più ampiamente trattati, ci si limita spesso a considerare la concavità generalizzata componente per componente, mentre per problemi vettoriali relativi ad ordinamenti indotti da un cono non si va al di là di alcune definizioni e proprietà mirate al raggiungimento di specifici obiettivi [3-5, 10, 14].
In questo capitolo si propone uno studio organico delle possibili estensioni a livello vettoriale delle classi di funzioni concave generalizzate scalari, studio teso sia all'analisi delle proprietà delle varie classi sia alla puntualizzazione del loro ruolo nella ottimizzazione vettoriale.
L'estensione delle varie definizioni scalari a livello vettoriale non è ovvia in quanto l'ordinamento nel caso scalare dato dalle relazioni "$>$" e "$\geq$" non ha una univoca traduzione nel caso vettoriale, anche nel caso particolare in cui si consideri un ordinamento parziale indotto da un cono ([1]).

---

[1] Un insieme $C \subseteq \Re^m$ è detto *cono di vertice l'origine* se la condizione $x \in C$ implica $kx \in C \ \forall k \geq 0$; un cono C è inoltre detto *non banale* se è $C \neq \{0\}$ e $C \neq \Re^m$. In particolare un cono C è detto *puntato* se non

In questa tesi è stato scelto l'approccio basato sull'ordinamento indotto da un cono chiuso C non banale di vertice l'origine avente interno non vuoto; in luogo della relazione "≥" viene utilizzata l'appartenenza al cono C, mentre la relazione ">" è sistematicamente sostituita sia con l'appartenenza all'insieme $C^0=C\setminus\{0\}$ sia con l'appartenenza all'interno di C, per il quale sarà usata la notazione C^{00}.
Questa impostazione permetterà l'introduzione di varie classi di funzioni vettoriali concave generalizzate sia in ipotesi di differenziabilità che non.
Dopo aver studiato le relazioni di inclusione tra le classi introdotte ed avere evidenziato la difficoltà di ottenere una loro caratterizzazione nel caso differenziabile, si determinano delle sottoclassi per le quali è possibile ottenere una caratterizzazione del primo ordine.
La scelta di considerare un ordinamento indotto da un cono permette di introdurre i concetti generali di crescenza e monotonia vettoriale e di stabilire vari risultati che, tra l'altro, estendono i corrispondenti nel caso scalare.

2.1. Definizioni e relazioni di inclusione tra le classi

In questo paragrafo verranno proposte, tramite l'approccio precedentemente descritto, delle classi di funzioni concave generalizzate vettoriali che generalizzano quelle scalari esposte nel primo capitolo.
La non univocità della traduzione delle relazioni d'ordine coinvolte nelle definizioni delle funzioni scalari concave generalizzate, comporta l'introduzione di un numero elevato di classi di funzioni vettoriali concave generalizzate. Nasce di conseguenza l'esigenza di avere una forma compatta con la quale poter denominare le varie classi introdotte.
A tal fine, invece di specificare esplicitamente il cono rispetto al quale viene considerata la relazione di appartenenza, verranno utilizzati i simboli $C^*\in\{\dots\}\subseteq\{C,C^0,C^{00},0,C\setminus C^{00}\}$ e $C^\#\in\{\dots\}\subseteq\{C,C^0,C^{00}\}$; con una tale notazione si indica la possibilità per C^* e $C^\#$ di coincidere con uno qualsiasi degli elementi degli insiemi a loro associati. Si osservi che nel caso in cui i due simboli vengano

---

contiene rette, ovvero se $x\in C$, $x\neq 0$, implica $-x\notin C$, ovvero se $\nexists x,y\in C$, $x\neq 0$, tali che $x+y=0$. Un cono C è infine detto *convesso* se è convesso come insieme, il che accade se e solo se $x,y\in C$ implica $x+y\in C$.

utilizzati contemporaneamente sono ammesse tutte le possibili combinazioni delle coppie $(C^*,C^\#)$, in altre parole la scelta effettuata per C^* è indipendente da quella effettuata per $C^\#$ e viceversa.

2.1.1. Funzioni di tipo concavo

Tramite l'approccio precedentemente descritto, si possono associare alle funzioni concave e strettamente concave scalari sei classi di funzioni vettoriali, alle quali ci riferiremo in seguito come classi di funzioni vettoriali di tipo concavo. Si ha al riguardo la seguente definizione, che utilizza la notazione compatta precedentemente descritta.

Definizione 2.1.1 Sia $f:S\to\mathfrak{R}^m$, con $S\subseteq\mathfrak{R}^n$ insieme convesso, e sia $C\subset\mathfrak{R}^m$ un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto.
Posto $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$, si dirà che:

f è *C^*-concava* [C^*.cv] se $\forall x,y\in S$, $x\neq y$, è verificata la condizione:

$$f(x+\lambda(y-x))-\lambda(f(y)-f(x))\in f(x)+C^* \quad \forall\lambda\in(0,1);$$

f è *C^*-semiconcava* [C^*.smcv] se $\forall x,y\in S$, $x\neq y$, è verificata la condizione:

$$f(y)\in f(x)+C \Rightarrow f(x+\lambda(y-x))-\lambda(f(y)-f(x))\in f(x)+C^* \quad \forall\lambda\in(0,1)$$

Nel caso in cui si consideri l'ordinamento indotto dal cono Paretiano $C=(\mathfrak{R}^m_+)$, esiste una relazione tra la C^*-concavità vettoriale, con $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$, e la concavità di ogni singola componente della funzione.
Vale al riguardo la seguente proprietà, la cui dimostrazione segue direttamente dalle definizioni date.

Proprietà 2.1.1 Sia $f:S\to\mathfrak{R}^m$, con $S\subseteq\mathfrak{R}^n$ insieme convesso, una funzione tale che $f(x)=(f_1(x),\dots,f_m(x))$; sia inoltre $C=\mathfrak{R}^m_+=\{y\in\mathfrak{R}^m\colon y\geq 0\}$ il cono Paretiano.

i) f è C-concava se e solo se tutte le funzioni $f_1,\dots,f_m$ sono concave;
ii) se tutte le funzioni $f_1,\dots,f_m$ sono concave ed almeno una è strettamente concava allora la funzione f è C^0-concava;
iii) f è C^{00}-concava se e solo se tutte le funzioni $f_1,\dots,f_m$ sono strettamente concave.

Si osservi che per le classi di funzioni C^*-semiconcave, con $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$, non sussiste in generale alcuna relazione tra la concavità generalizzata rispetto al cono Paretiano e la concavità generalizzata componente per componente; ciò evidenzia che le definizioni proposte sono più generali della richiesta di concavità generalizzata componente per componente.

Esempio 2.1.1 Si consideri la funzione $f(x)=(x^2,-x^2-x,x)$, definita su $S=\Re$ ed il cono Paretiano $C=\Re^3_+$: f è C^{00}-semiconcava, in quanto $\exists x,y\in S$, $x\neq y$, tali che $f(y)\in f(x)+C$, mentre la sua prima componente è strettamente convessa e non verifica alcuna ipotesi di concavità generalizzata (neanche le più deboli introdotte nel primo capitolo, quali la semi quasi-concavità e la quasi-concavità in senso esteso).

Il seguente diagramma illustra le relazioni intercorrenti tra le classi di funzioni di tipo concavo introdotte:

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{C^{00}.\text{smcv}} & \subset & \boxed{C^{0}.\text{smcv}} & \subset & \boxed{C.\text{smcv}} \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \boxed{C^{00}.\text{cv}} & \subset & \boxed{C^{0}.\text{cv}} & \subset & \boxed{C.\text{cv}} \end{array}$$

La rappresentazione usata evidenzia come, nel caso scalare ($m=1$ e $C=\Re^+$), le classi di funzioni C^0-concave, C^{00}-concave, C^0-semiconcave e C^{00}-semiconcave si riducono alla classe delle funzioni strettamente concave, mentre le classi delle funzioni C-concave e C-semiconcave corrispondono a quella delle funzioni concave. I seguenti esempi permettono di verificare che le inclusioni tra le classi sono proprie.

Esempi 2.1.2 Si considerino le funzioni $f:\Re\rightarrow\Re^2$ ed il cono paretiano $C=\Re^2_+$.

i) la funzione $f(x)=(x, e^{-x})$ è C^{00}.smcv in quanto $\exists x,y\in\Re$, $x\neq y$, tali che $f(y)\in f(x)+C$; per la proprietà 2.1.1 però f non è C.cv poiché la sua seconda componente non è una funzione concava;
ii) la funzione $f(x)=(-x^2+2x, 0)$ è, per la proprietà 2.1.1, C^0.cv poiché la sua prima componente è strettamente concava e la seconda è concava; essa però non è C^{00}.smcv, infatti preso $x=0$ ed $y=1$ risulta $f(y)\in f(x)+C$ ma, poiché la seconda componente di f è identicamente nulla, $\exists\lambda\in(0,1)$ tale che $f(x+\lambda(y-x))-\lambda(f(y)-f(x))\in f(x)+C^{00}$;
iii) la funzione vettoriale costantemente nulla è, per la proprietà 2.1.1, C.cv ma non può ovviamente essere C^0.smcv.

2.1.2. Funzioni di tipo quasi-concavo

Alle classi di funzioni scalari quasi-concave introdotte nel paragrafo 1.1.2 è possibile associare quindici classi di funzioni vettoriali di tipo quasi-concavo. Sempre usando la notazione compatta, si ha la seguente definizione.

Definizione 2.1.2 Sia $f:S\rightarrow\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme convesso, e sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto.
Posto $C^*\in\{C,C^0,C^{00},0,C\backslash C^{00}\}$ e $C^\#\in\{C,C^0,C^{00}\}$, si dirà che:

f è *$(C^*,C^\#)$-quasiconcava* [$(C^*,C^\#)$.qcv] se per ogni $x,y\in S$, $x\neq y$, è verificata la condizione:

$$f(y)\in f(x)+C^* \Rightarrow f(x+\lambda(y-x))\in f(x)+C^\# \quad \forall\lambda\in(0,1)$$

Le relazioni intercorrenti tra queste classi di funzioni, che seguono direttamente dalle definizioni date, sono rappresentate graficamente nel seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\boxed{(0,C).qcv} & \supset & \boxed{(C\backslash C^{00},C).qcv} & \supset & \boxed{(C,C).qcv} & \subset & \boxed{(C^0,C).qcv} & \subset & \boxed{(C^{00},C).qcv} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\boxed{(0,C^0).qcv} & \supset & \boxed{(C\backslash C^{00},C^0).qcv} & \supset & \boxed{(C,C^0).qcv} & \subset & \boxed{(C^0,C^0).qcv} & \subset & \boxed{(C^{00},C^0).qcv} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\boxed{(0,C^{00}).qcv} & \supset & \boxed{(C\backslash C^{00},C^{00}).qcv} & \supset & \boxed{(C,C^{00}).qcv} & \subset & \boxed{(C^0,C^{00}).qcv} & \subset & \boxed{(C^{00},C^{00}).qcv}
\end{array}$$

Tale diagramma evidenzia altresì che nel caso scalare le classi (C^{00},C^0).qcv, (C^{00},C^{00}).qcv, (C^0,C^0).qcv e (C^0,C^{00}).qcv si riducono alla classe delle funzioni semistrettamente quasi-concave, le classi (C,C^0).qcv e (C,C^{00}).qcv si riducono a quella delle funzioni strettamente quasi-concave, le classi (C^{00},C).qcv e (C^0,C).qcv si riducono a quella delle funzioni semi quasi-concave, le classi $(0,C)$.qcv e $(C\backslash C^{00},C)$.qcv si riducono a quella delle funzioni quasi-concave in senso esteso, mentre le classi $(C\backslash C^{00},C^0)$.qcv, $(C\backslash C^{00},C^{00})$.qcv, $(0,C^0)$.qcv e $(0,C^{00})$.qcv, si riducono a quella delle funzioni strettamente quasi-concave in senso esteso.

I seguenti teoremi stabiliscono delle caratterizzazioni per alcune delle classi di funzioni di tipo quasi-concavo introdotte.

Teorema 2.1.1 Sia $f:S \to \Re^m$, con $S \subseteq \Re^n$ insieme convesso, e sia $C \subset \Re^m$ un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto.
Posto $C^* \in \{C, C^0, C^{00}\}$, le seguenti condizioni sono equivalenti:
i) la funzione f è (C,C^*)-quasiconcava;
ii) la funzione f è sia (C^0,C^*)-quasiconcava sia $(0,C^*)$-quasiconcava.
iii) la funzione f è sia (C^{00},C^*)-quasiconcava sia $(C \setminus C^{00},C^*)$-quasiconcava.
Dim. Segue in modo diretto dalla definizione. ♦

Teorema 2.1.2 Sia $f:S \to \Re^m$, con $S \subseteq \Re^n$ insieme convesso, e sia $C \subset \Re^m$ un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto.
f è (C,C^0).qcv se e solo se è (C^0,C^0).qcv ed inoltre $\forall x,y \in S$ vale la seguente proprietà:

$$f(y)=f(x) \Rightarrow \exists \bar{\lambda} \in (0,1) \text{ tale che } f(x+\bar{\lambda}(y-x)) \in f(x)+C^0. \quad (2.1)$$

Dim. La necessità è banale, si deve quindi dimostrare solo la sufficienza; essendo f (C^0,C^0).qcv resta da verificare che $\forall x,y \in S$, $x \neq y$, tali che $f(y)=f(x)$ risulta $f(x+\lambda(y-x)) \in f(x)+C^0$ $\forall \lambda \in (0,1)$.
Per la proprietà (2.1) $\exists \bar{\lambda} \in (0,1)$ tale che $f(x+\bar{\lambda}(y-x)) \in f(x)+C^0$; applicando la definizione di funzione (C^0,C^0).qcv nell'intervallo di estremi x ed $x+\bar{\lambda}(y-x)$ e nell'intervallo di estremi $x+\bar{\lambda}(y-x)$ ed y si ottiene, essendo $f(y)=f(x)$, la tesi. ♦

Il seguente esempio mostra come le inclusioni tra le classi di funzioni $(C \setminus C^{00},C^*)$.qcv e (C,C^*).qcv siano proprie.

Esempio 2.1.3 Si consideri la funzione $f(x)=\begin{cases} (x,x) & \text{per } x \in [0,2],\ x \neq 1 \\ (-1,1) & \text{per } x=1 \end{cases}$ ed il cono paretiano $C=\Re^2_+$; f è $(C \setminus C^{00},C^{00})$.qcv (e quindi anche $(C \setminus C^{00},C^0)$.qcv e $(C \setminus C^{00},C)$.qcv) poiché $\nexists x,y \in S$, $x \neq y$, tali che $f(y) \in f(x)+C \setminus C^{00}$, non è però (C,C).qcv (e quindi neanche (C,C^0).qcv né (C,C^{00}).qcv) poiché $f(2) \in f(0)+C$ mentre $f(1) \notin f(0)+C$.

Il seguente teorema evidenzia che sotto ipotesi di continuità le classi di funzioni $(C \setminus C^{00},C^*)$.qcv e (C,C^*).qcv coincidono.

Teorema 2.1.3 Sia $f{:}S\rightarrow\mathfrak{R}^m$, con $S\subseteq\mathfrak{R}^n$ insieme convesso, una funzione vettoriale continua e sia $C\subset\mathfrak{R}^m$ un cono chiuso convesso puntato ([2]) di vertice l'origine ed interno non vuoto. Posto $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$, risulta che la funzione f è (C,C^*)-quasiconcava se e solo se è $(C\setminus C^{00},C^*)$-quasiconcava.

Dim. Poiché la necessità segue direttamente dalle definizioni, si deve dimostrare la sufficienza nei vari casi.

$C^*=C$) Si supponga per assurdo che f sia $(C\setminus C^{00},C)$.qcv ma non (C,C).qcv e che quindi $\exists x,y\in S$ ed $\exists\bar{\lambda}\in(0,1)$ tali che $f(y)\in f(x)+C^{00}$ e $f(x+\bar{\lambda}(y-x))\notin f(x)+C$; per la continuità di f $\exists\tilde{\lambda}\in(\bar{\lambda},1)$ tale che $f(x+\tilde{\lambda}(y-x))\in f(x)+C\setminus C^{00}$; applicando quindi la definizione di funzione $(C\setminus C^{00},C)$.qcv nell'intervallo di estremi x ed $x+\tilde{\lambda}(y-x)$ si ha $f(x+\lambda(y-x))\in f(x)+C$ $\forall\lambda\in(0,\tilde{\lambda})$, assurdo in quanto $\bar{\lambda}\in(0,\tilde{\lambda})$.

$C^*=C^0$) Poiché f è $(C\setminus C^{00},C^0)$.qcv, per definizione è anche $(C\setminus C^{00},C)$.qcv e quindi, per il punto precedente, è (C,C).qcv; si supponga allora per assurdo che f non sia (C,C^0).qcv e che quindi $\exists x,y\in S$ ed un reale $\bar{\lambda}\in(0,1)$ tali che $f(y)\in f(x)+C^{00}$ e $f(x+\bar{\lambda}(y-x))\in f(x)+C\setminus C^0$ ovvero $f(x+\bar{\lambda}(y-x))=f(x)$; applicando la definizione di funzione $(C\setminus C^{00},C^0)$.qcv nell'intervallo di estremi x ed $x+\bar{\lambda}(y-x)$ si ha $f(x+\lambda(y-x))\in f(x)+C^0$ $\forall\lambda\in(0,\bar{\lambda})$. Per la continuità di f pertanto, essendo $f(y)\in f(x)+C^{00}$, $\exists\tilde{\lambda}\in(0,\bar{\lambda})$ tale che $f(x+\tilde{\lambda}(y-x))\in f(x)+C^0$ e $f(y)\in f(x+\tilde{\lambda}(y-x))+C^{00}$; applicando quindi la definizione di funzione (C,C).qcv nell'intervallo di estremi $x+\tilde{\lambda}(y-x)$ ed y si ha $f(x+\lambda(y-x))\in f(x+\tilde{\lambda}(y-x))+C$ $\forall\lambda\in(\tilde{\lambda},1)$. Poiché $\bar{\lambda}\in(\tilde{\lambda},1)$ ed $f(x+\tilde{\lambda}(y-x))\in f(x)+C^0$ si ottiene quindi, essendo C un cono convesso e puntato, $f(x+\bar{\lambda}(y-x))\in f(x)+C^0$, condizione assurda.

$C^*=C^{00}$) Poiché f è $(C\setminus C^{00},C^{00})$.qcv, per definizione è anche $(C\setminus C^{00},C^0)$.qcv e quindi, per il punto precedente, è (C,C^0).qcv. Si supponga per assurdo che f non sia (C,C^{00}).qcv e che quindi $\exists x,y\in S$ ed $\exists\bar{\lambda}\in(0,1)$ tali che $f(y)\in f(x)+C^{00}$ e $f(x+\bar{\lambda}(y-x))\in f(x)+C^0\setminus C^{00}$. Applicando la definizione di funzione $(C\setminus C^{00},C^{00})$.qcv nell'intervallo di estremi x ed $x+\bar{\lambda}(y-x)$ si ha $f(x+\lambda(y-x))\in f(x)+C^{00}$ $\forall\lambda\in(0,\bar{\lambda})$ e di conseguenza, per la continuità di f, essendo $f(y)\in f(x)+C^{00}$, $\exists\tilde{\lambda}\in(0,\bar{\lambda})$ tale che $f(x+\tilde{\lambda}(y-x))\in f(x)+C^{00}$ e $f(y)\in f(x+\tilde{\lambda}(y-x))+C^{00}$. Applicando pertanto la definizione di funzione (C,C^0).qcv nell'intervallo di estremi $x+\tilde{\lambda}(y-x)$ ed y risulta

---

[2] Sia $C\subset\mathfrak{R}^m$ un cono convesso non banale con interno non vuoto; allora valgono le seguenti condizioni:

i) $x\in C,\ y\in C\Rightarrow x+y\in C$; ii) $x\in C^{00},\ y\in C\Rightarrow x+y\in C^{00}$.

Se inoltre C è puntato allora vale la seguente ulteriore implicazione: iii) $x\in C^0,\ y\in C\Rightarrow x+y\in C^0$.

$f(x+\lambda(y-x))\in f(x+\tilde{\lambda}(y-x))+C^0 \ \forall\lambda\in(\tilde{\lambda},1)$. Poiché $\bar{\lambda}\in(\tilde{\lambda},1)$ ed $f(x+\tilde{\lambda}(y-x))\in f(x)+C^{00}$ si ha, essendo C convesso e puntato, $f(x+\bar{\lambda}(y-x))\in f(x)+C^{00}$, assurdo. ♦

Le relazioni tra le varie classi divengono quindi, sotto ipotesi di continuità, quelle espresse dal seguente diagramma.

$$\begin{array}{ccccccc}
(0,C).qcv & \supset & (C\setminus C^{00},C).qcv \equiv (C,C).qcv & \subset & (C^0,C).qcv & \subset & (C^{00},C).qcv \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
(0,C^0).qcv & \supset & (C\setminus C^{00},C^0).qcv \equiv (C,C^0).qcv & \subset & (C^0,C^0).qcv & \subset & (C^{00},C^0).qcv \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
(0,C^{00}).qcv & \supset & (C\setminus C^{00},C^{00}).qcv \equiv (C,C^{00}).qcv & \subset & (C^0,C^{00}).qcv & \subset & (C^{00},C^{00}).qcv
\end{array}$$

I seguenti esempi permettono di verificare che anche sotto ipotesi di continuità le inclusioni tra le varie classi sono proprie.

Esempi 2.1.4 Si considerino le seguenti funzioni $f:S\to\Re^2$, con $S\subseteq\Re$ insieme convesso, ed il cono paretiano $C=\Re^2_+$.

i) la funzione $f(x)=\begin{cases}(0,1-x) & \text{per } x\in[0,1]\\ (0,x-1) & \text{per } x\in[1,2]\end{cases}$ è (C^{00},C^{00}).qcv (e quindi anche (C^{00},C^0).qcv e (C^{00},C).qcv) poiché $\nexists x,y\in S=[0,2]$ tali che $f(y)\in f(x)+C^{00}$, non è però (C^0,C).qcv (e quindi né (C^0,C^0).qcv né (C^0,C^{00}).qcv) poiché $f(2)\in f(1/2)+C^0$ mentre $f(1)\notin f(1/2)+C$;

ii) la funzione $f(x)=(x^2-x,-x^2+x)$, con $x\in S=\Re$, è (C^0,C^{00}).qcv (e quindi anche (C^0,C^0).qcv e (C^0,C).qcv) poiché $\nexists x,y\in S$ tali che $f(y)\in f(x)+C^0$, non è però (C,C).qcv (e quindi né (C,C^0).qcv né (C,C^{00}).qcv) poiché $f(1)\in f(0)+C$ mentre $f(1/2)\notin f(0)+C$;

iii) la funzione $f(x)=(x,x^2-x)$, con $x\in S=[0,1]$, è $(0,C^{00})$.qcv (e quindi anche $(0,C^0)$.qcv e $(0,C)$.qcv) poiché $\nexists x,y\in S$ tali che $f(y)=f(x)$, non è però (C,C).qcv (e quindi né (C,C^0).qcv né (C,C^{00}).qcv) poiché $f(1)\in f(0)+C$ mentre $f(1/2)\notin f(0)+C$;

iv) la funzione $f(x)=\begin{cases}(x,x) & \text{per } x\in[0,1]\\ (2-x,2-x) & \text{per } x\in[1,2]\\ (0,0) & \text{per } x\in[2,3]\end{cases}$ è (C,C).qcv in $S=[0,3]$ (e quindi anche (C^0,C).qcv (C^{00},C).qcv e $(0,C)$.qcv); non è però (C^{00},C^0).qcv (e quindi né (C^0,C^0).qcv né (C,C^0).qcv) poiché $f(1)\in f(3)+C^{00}$ mentre $f(2)\notin f(3)+C^0$, inoltre non è neanche $(0,C^0)$.qcv poiché $f(3)=f(0)$ mentre $f(2)\notin f(0)+C^0$;

v) la funzione $f(x)=\begin{cases} (x,0) & \text{per } x\in[0,1] \\ (2-x,x-1) & \text{per } x\in[1,2] \\ (0,3-x) & \text{per } x\in[2,3] \end{cases}$ è (C,C^0).qcv in $S=[0,3]$ (e quindi anche (C^0,C^0).qcv (C^{00},C^0).qcv e $(0,C^0)$.qcv); non è però (C^{00},C^{00}).qcv (e quindi né (C^0,C^{00}).qcv né (C,C^{00}).qcv) poiché $f(3/2)\in f(0)+C^{00}$ mentre $f(1)\notin f(0)+C^{00}$, inoltre non è neanche $(0,C^{00})$.qcv poiché $f(3)=f(0)$ mentre $f(2)\notin f(0)+C^{00}$;

Osservazione 2.1.1 Gli esempi 2.1.4 i) e v) evidenziano che nel passaggio dal caso scalare al vettoriale non si mantiene la proprietà secondo cui una funzione continua (superiormente semicontinua) ss.qcv è anche qcv; difatti le classi di funzioni (C^0,C^0).qcv e (C^{00},C^{00}).qcv (che corrispondono alle scalari ss.qcv) e la classe di funzioni (C,C).qcv (che corrispondono alle scalari qcv) rimangono distinte anche in ipotesi di continuità, senza alcuna relazione di inclusione.
Gli esempi precedenti inoltre evidenziano che nel caso vettoriale, a differenza del caso scalare, quasi tutte le classi di funzioni di tipo quasi-concavo rimangono distinte l'una dall'altra anche sotto ipotesi di continuità; l'unica parziale analogia al caso scalare è difatti la coincidenza delle classi di funzioni (C,C^*)-qcv e $(C\backslash C^{00},C^*)$-qcv, esattamente come accade tra le e.qcv e le qcv e tra le es.qcv e le s.qcv.

Come è noto una funzione scalare è quasi-concava se e solo se tutti i suoi insiemi di livello superiore e di livello superiore stretto sono convessi, storicamente anzi le funzioni quasi-concave sono "nate" proprio come classe di funzioni caratterizzate da tale proprietà. Per studiare se è possibile estendere tale caratterizzazione alle funzioni vettoriali di tipo quasi-concavo si introduce la seguente definizione di insieme di livello superiore per una funzione vettoriale.

Definizione 2.1.3 Sia $f:S\rightarrow\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ convesso, sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto e sia $\mu\in\Re^m$ un qualsiasi vettore.
L'insieme $U(f,\mu)=\{x\in S: f(x)\in\mu+C\}$ è detto *insieme di livello C-superiore* di f.

Il seguente esempio evidenzia come non sia possibile, nel caso vettoriale, caratterizzare le funzioni (C,C)-quasiconcave tramite la convessità degli insiemi di livello C-superiore; il successivo Teorema 2.1.4 dimostra altresì che la convessità degli insiemi di livello C-superiore è una condizione necessaria, anche se non sufficiente, per la (C,C)-quasiconcavità di una funzione.

Esempio 2.1.5 Si consideri il cono Paretiano $C=\Re^2_+$ e la seguente funzione:

$$f(x,y)=\begin{cases} (x,-x) & \text{per } x\in[-1,1],\ x\neq 0, \text{ ed } y=0 \\ (-2,2) & \text{per } x=0 \text{ ed } y=0 \\ (-1/2,-1/2) & \text{per } x\in[-1,1] \text{ ed } y<0 \end{cases} ;$$

f è (C,C).quasiconcava nell'insieme $S=\{(x,y): x\in[-1,1],\ y\leq 0\}$ ma, ad esempio, per $\mu=(-1/2,-1/2)$ ($\mu=f(x,y)\ \forall y<0,\ x\in[-1,1]$) non è convesso l'insieme di livello:

$$U(f,\mu)=\{(x,y): x\in[-1/2,1/2]\backslash\{0\},\ y=0\}\cup\{(x,y): x\in[-1,1],\ y<0\}.$$

Teorema 2.1.4 Sia $f:S\to\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme convesso, sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto.
Se gli insiemi di livello C-superiore $U(f,\mu)$ di f, con $\mu\in f(S)$, sono convessi allora la funzione f è (C,C)-quasiconcava.
Dim. Siano $x,y\in S$ tali che $f(y)\in f(x)+C$; posto $\mu=f(x)$ risulta $x,y\in U(f,\mu)$ e quindi, per la convessità di $U(f,\mu)$, si ha $x+\lambda(y-x)\in U(f,\mu)\ \forall\lambda\in(0,1)$, da cui la tesi. ♦

Osservazione 2.1.2. In [10] la (C,C)-quasiconcavità di una funzione è stata caratterizzata non rispetto alla convessità degli insiemi di livello C-superiore $U(f,\mu)$-ma attraverso la proprietà che tali insiemi sono stellati rispetto ad ogni punto $x\in S$ tale che $\mu=f(x)$.

2.1.3. Funzioni di tipo strettamente pseudo-concavo

Thompson in [23] introduce una classe di funzioni scalari concave generalizzate che, nel caso differenziabile, coincide con le funzioni pseudo-concave introdotte da Mangasarian [15].
In questo paragrafo saranno definite classi di funzioni vettoriali che estendono quelle proposte da Thompson; vale al riguardo la seguente definizione.

Definizione 2.1.4 Sia $f:S\to\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme convesso, e sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto.
Posto $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$ e $C^\#\in\{C^0,C^{00}\}$, si dirà che:
f è *strettamente* $(C^*,C^\#)$*-pseudoconcava* [$(C^*,C^\#)$.spcv] se per ogni $x,y\in S$, $x\neq y$, è verificata la condizione:

$$f(y)\in f(x)+C^* \Rightarrow \begin{matrix}\exists\xi(x,y)\in C^\# \text{ t.c. } \forall\lambda\in(0,1)\\ f(x+\lambda(y-x))\in f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi(x,y)+C'\end{matrix}$$

dove $\xi(x,y)$ non dipende da λ ma soltanto da x ed y.

Le relazioni intercorrenti tra queste classi di funzioni sono rappresentate graficamente nel seguente diagramma che evidenzia inoltre come, nel caso scalare, le classi di funzioni strettamente (C,C^0)-pseudoconcave e strettamente (C,C^{00})-pseudoconcave si riducano alla classe delle funzioni strettamente pseudo-concave, mentre le altre classi di funzioni corrispondano a quella delle funzioni pseudo-concave.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{(C,C^0).\text{spcv}} & \subset & \boxed{(C^0,C^0).\text{spcv}} & \subset & \boxed{(C^{00},C^0).\text{spcv}} \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \boxed{(C,C^{00}).\text{spcv}} & \subset & \boxed{(C^0,C^{00}).\text{spcv}} & \subset & \boxed{(C^{00},C^{00}).\text{spcv}} \end{array}$$

2.1.4. Relazioni di inclusione tra le classi

In questo sottoparagrafo si determineranno delle relazioni intercorrenti tra le classi di funzioni vettoriali di tipo concavo, quasi-concavo e strettamente pseudo-concavo. Per poter confrontare classi di funzioni di tipo diverso si supporrà che il cono C, che induce l'ordinamento parziale del codominio, sia convesso e puntato, anche se quest'ultima ipotesi non è sempre necessaria.

Teorema 2.1.6 Si consideri una funzione $f:S\to\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme convesso, e sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso convesso e puntato di vertice l'origine ed interno non vuoto. Se f è strettamente $(C^*,C^\#)$-pseudoconcava, con $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$ e $C^\#\in\{C^0,C^{00}\}$, allora è anche $(C^*,C^\#)$-quasiconcava.

Dim. Siano $x,y\in S$, $x\neq y$, tali che $f(y)\in f(x)+C^*$. Poiché f è $(C^*,C^\#)$-spcv allora $\exists\xi(x,y)\in C^\#$ tale che $\forall\lambda\in(0,1)$ risulta $f(x+\lambda(y-x))\in f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi(x,y)+C$; essendo C convesso e puntato quest'ultima condizione implica $f(x+\lambda(y-x))\in f(x)+C^\#$, da cui la tesi. ♦

Teorema 2.1.7 Si consideri una funzione $f:S\to\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme convesso, e sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso convesso e puntato di vertice l'origine ed interno non vuoto. Se f è C^*-semiconcava, con $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$, allora è anche (C,C^*)-quasiconcava.

Dim. Siano $x,y\in S$, $x\neq y$, tali che $f(y)\in f(x)+C$; per ipotesi risulta che per ogni $\lambda\in(0,1)$ si ha $f(x+\lambda(y-x))\in f(x)+\lambda(f(y)-f(x))+C^*$, da cui la tesi essendo C un cono convesso e puntato. ♦

Teorema 2.1.8 Si consideri una funzione $f:S\rightarrow\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme convesso, e sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso convesso e puntato di vertice l'origine ed interno non vuoto.

i) Se f è C-semiconcava allora è anche strettamente (C^{00},C^{00})-pseudoconcava;

ii) Se f è C^0-semiconcava allora è anche strettamente (C^0,C^0)-pseudoconcava;

iii) Se f è C^{00}-semiconcava allora è anche strettamente (C,C^{00})-pseudoconcava.

Dim. i) Si supponga per assurdo che f non sia (C^{00},C^{00}).spcv e quindi esistano due punti $x,y\in S$ tali che $f(y)\in f(x)+C^{00}$ e $\forall\xi(x,y)\in C^{00}$ $\exists\lambda\in(0,1)$ tale che $f(x+\lambda(y-x))\notin f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi(x,y)+C$. Poiché il cono C è convesso si ha che $\lambda(1-\lambda)\xi(x,y)+C\supset\lambda\xi(x,y)+C$, di conseguenza $\forall\xi(x,y)\in C^{00}$ $\exists\lambda\in(0,1)$ tale che $f(x+\lambda(y-x))\notin f(x)+\lambda\xi(x,y)+C$. Posto $\xi(x,y)=f(y)-f(x)\in C^{00}$ esiste quindi un reale $\bar{\lambda}\in(0,1)$ tale che $f(x+\bar{\lambda}(y-x))\notin f(x)+\bar{\lambda}(f(y)-f(x))+C$, condizione assurda poiché nega la C.smcv di f.

ii) Dimostrazione analoga al precedente punto i).

iii) Si supponga per assurdo che f non sia strettamente (C,C^{00}).pseudoconcava; tenuto conto della convessità del cono C, in modo analogo al punto i), si ha quindi che esistono due punti $x,y\in S$, $x\neq y$, tali che $f(y)\in f(x)+C$ e $\forall\xi(x,y)\in C^{00}$ $\exists\lambda\in(0,1)$ tale che $f(x+\lambda(y-x))\notin f(x)+\lambda\xi(x,y)+C$.

Per ogni $\varepsilon\in C^{00}$, posto $\xi(x,y)=f(y)-f(x)+\varepsilon\in C^{00}$, esiste quindi un $\bar{\lambda}\in(0,1)$ tale che $f(x+\bar{\lambda}(y-x))\notin f(x)+\bar{\lambda}(f(y)-f(x)+\varepsilon)+C$; al tendere di ε a zero si ha, essendo C chiuso, $f(x+\bar{\lambda}(y-x))\notin f(x)+\bar{\lambda}(f(y)-f(x))+C^{00}$, condizione assurda poiché nega la C^{00}-semiconcavità di f. ♦

I risultati espressi dai precedenti teoremi sono rappresentati graficamente nel seguente diagramma; si osservi inoltre che le varie inclusioni sono proprie, come mostrano gli Esempi 1.1.1, 1.2.1 ed 1.2.2.

$$\boxed{(C^*,C^\#).\text{spcv}} \subset \boxed{(C^*,C^\#).\text{qcv}}$$

$$\boxed{C^*.\text{smcv}} \subset \boxed{(C,C^*).\text{qcv}}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{(C,C^{00}).\text{spcv}} & & \boxed{(C^0,C^0).\text{spcv}} & & \boxed{(C^{00},C^{00}).\text{spcv}} \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\boxed{C^{00}.\text{smcv}} & \subset & \boxed{C^0.\text{smcv}} & \subset & \boxed{C.\text{smcv}}
\end{array}$$

2.1.5. Quasi-concavità vettoriale e modello del consumatore

In questo sottoparagrafo si suggerisce un modello che, in modo analogo a quanto accade nel caso scalare, permette di associare alle relazioni di preferenza tutte le funzioni vettoriali di tipo quasi-concavo definite nel paragrafo 2.1.2; in pratica per mezzo delle funzioni concave generalizzate vettoriali si interpreta il comportamento di due consumatori che devono confrontare due diversi panieri di beni. Tale situazione è descritta dalla seguente idea di base.

Si consideri il caso di due consumatori che effettuano delle scelte tra vari panieri; ognuno ha il proprio criterio di scelta, criterio che può portare o meno ad un accordo tra i due.

Nel caso in cui i due debbano effettuare una scelta tra l'acquisto di un paniere x e l'acquisto di un paniere y, si possono avere i cinque seguenti casi:

i) entrambi reputano il paniere y migliore del paniere x.
   In questo caso i consumatori acquisteranno sicuramente il paniere di beni y; tale relazione sarà denotata con $yP^{00}x$;

ii) entrambi reputano il paniere y non peggiore del paniere x e solamente uno dei due consumatori considera y sicuramente migliore di x.
   In questo caso vi è sempre accordo tra i due consumatori riguardo all'acquisto del paniere y, anche se tale acquisto è meno soddisfacente per uno dei due consumatori; tale relazione sarà denotata con $yP^{0}x$;

iii) entrambi reputano il paniere y non peggiore del paniere x ma nessuno dei due consumatori considera y sicuramente migliore di x.
   In tal caso la coppia di consumatori reputerà l'acquisto del paniere y in luogo del paniere x una scelta non peggiore; tale relazione sarà denotata con yPx.

iv) entrambi reputano il paniere y equivalente al paniere x, ovvero considerano y non peggiore di x ma neanche migliore.
   In tal caso la coppia di consumatori reputerà equivalente l'acquisto del paniere y o del paniere x; tale relazione sarà denotata con $yP\backslash P^{00}x$.

v) i consumatori reputano il paniere y identico al paniere x, ovvero credono che y ed x abbiano le stesse caratteristiche.
   In tal caso la coppia di consumatori non troverà differenze tra l'acquisto del paniere y e quello di x; tale relazione sarà denotata con $y0_px$.

La situazione precedentemente descritta individua quindi tre relazioni di preferenza, l'una più forte dell'altra, e due relazioni di equivalenza. Si estende quindi il concetto di preferenza di un solo consumatore, caso in cui si hanno due soli gradi di preferenza tra i panieri di beni ed una sola relazione di equivalenza, relazioni che vengono rappresentate, rispetto alle funzioni di utilità, tramite le relazioni binarie "$>$", "$\geq$" e "$=$".

Nel caso quindi di due distinti consumatori che devono effettuare le proprie scelte in coppia, per interpretare le tre relazioni di preferenza tramite una funzione di utilità si deve utilizzare una funzione vettoriale, e questo sia per l'origine del problema (due consumatori ognuno con la propria funzione di utilità indipendente dall'altra) sia per il fatto che una funzione di utilità scalare non può rappresentare i tre livelli di preferenza descritti (dal momento che si può avere solo il "$>$" ed il "$\geq$").

Ecco quindi che per il modello in esame una possibile funzione di utilità può essere concepita come una opportuna funzione $U:A\to\Re^2$, con ordinamento indotto da un cono $C\subseteq\Re^2$ chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto.

Definizione 2.1.5 Una funzione $U:\Re^n_+\to\Re^2$, con ordinamento nel codominio indotto da un cono $C\subseteq\Re^2$ chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto, è detta funzione di utilità per una famiglia di relazioni binarie $\{P,P^0,P^{00},0_p,P\backslash P^{00}\}$ se verifica la seguente proprietà:

$$U(y)\in U(x)+C^* \quad \text{se e solo se} \quad yP^*x,$$

dove $C^*\in\{C,C^0,C^{00},0,C\backslash C^{00}\}$ e $P^*\in\{P,P^0,P^{00},0_p,P\backslash P^{00}\}$.

E' immediato a questo punto estendere al caso vettoriale i principali concetti propri del caso scalare. La seguente definizione, ad esempio, estende a livello vettoriale le definizioni di relazioni di preferenza convesse, quasi-convesse e stellate proposte nelle definizioni 1.1.9 e 1.1.10 relativamente al caso scalare.

Definizione 2.1.6 Sia $\{P,P^0,P^{00},0_p,P\backslash P^{00}\}$ una famiglia di relazioni binarie sull'insieme $X\subseteq\Re^n$, siano inoltre $P^*\in\{P,P^0,P^{00},0_p,P\backslash P^{00}\}$ e $P^\#\in\{P,P^0,P^{00}\}$.
Si dirà che tale famiglia è *$(P^*,P^\#)$-quasiconcava* se per ogni $x,y\in X$, $x\neq y$, è verificata la condizione:

$$yP^*x \Rightarrow x+\lambda(y-x)P^\#x \quad \forall\lambda\in(0,1)$$

E' possibile adesso estendere a livello vettoriale i risultati presentati nelle Proprietà 1.1.5 e 1.1.6 che legano le relazioni di preferenza alle funzioni di utilità concave generalizzate di tipo quasi-concavo.

Si osservi che verranno utilizzate tutte le classi di funzioni vettoriali di tipo quasi-concavo definite nel secondo capitolo.

Proprietà 2.1.2 Sia $U:\Re^n_+ \to \Re^2$, con ordinamento nel codominio indotto da un cono $C \subseteq \Re^2$ chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto, una funzione di utilità per la famiglia di relazioni binarie $\{P, P^0, P^{00}, 0_p, P \setminus P^{00}\}$.
Siano infine $P^* \in \{P, P^0, P^{00}, 0_p, P \setminus P^{00}\}$, $P^{\#} \in \{P, P^0, P^{00}\}$, $C^* \in \{C, C^0, C^{00}, 0, C \setminus C^{00}\}$ e $C^{\#} \in \{C, C^0, C^{00}\}$. Risulta che la famiglia di relazioni è $(P^*, P^{\#})$-quasiconcava se e solo se la funzione di utilità U è $(C^*, C^{\#})$-quasiconcava.

Al variare quindi delle proprietà delle relazioni di preferenza individuate dalla coppia di consumatori (relazioni che sono indipendenti rispetto alle relazioni di preferenza che guidano i due singoli consumatori), è possibile ottenere, analogamente al caso scalare, funzioni di utilità $(C^*, C^{\#})$-quasiconcave.

2.2. Funzioni vettoriali differenziabili concave generalizzate

Nel caso scalare, sotto ipotesi di differenziabilità le funzioni concave generalizzate (in particolare le pseudo-concave) sono caratterizzabili per mezzo di condizioni che coinvolgono le derivate direzionali; ciò invece non è sempre possibile nel caso vettoriale. In questo paragrafo saranno definite delle classi di funzioni concave generalizzate vettoriali differenziabili ([3]) di cui verrà poi studiata la relazione con le classi introdotte nel paragrafo precedente.

2.2.1 Altre classi di funzioni vettoriali concave generalizzate

Al fine di studiare la concavità generalizzata vettoriale in ipotesi di differenziabilità, si introducono le seguenti classi di funzioni.

Definizione 2.2.1 Sia $f:S \to \Re^m$, con $S \subseteq \Re^n$ insieme convesso, una funzione differenziabile e sia $C \subset \Re^m$ un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto. Posto $C^* \in \{C, C^0, C^{00}\}$, si dirà che:
f è *debolmente (C^*,C)-quasiconcava* [(C^*,C).wqcv] se per ogni $x, y \in S$, $x \neq y$, è verificata la condizione: $f(y) \in f(x) + C^* \Rightarrow J_f(x)(y-x) \in C$.

---

[3] Si ricordi che risulta, sotto ipotesi di differenziabilità, $J_f(x)(y-x) = \|y-x\| \frac{\partial f}{\partial d}(x)$ con $d = \frac{y-x}{\|y-x\|}$.

Definizione 2.2.2 Sia $f:S\rightarrow\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme convesso, una funzione differenziabile e sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto. Posto $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$ e $C^\#\in\{C^0,C^{00}\}$, si dirà che:
f è *(C^*,$C^\#$)-pseudoconcava* [(C^*,$C^\#$).pcv] se per ogni $x,y\in S$, $x\neq y$, è verificata la condizione: $f(y)\in f(x)+C^* \Rightarrow J_f(x)(y-x)\in C^\#$.

Osservazione 2.2.1 Nel caso scalare ($m=1$ e $C=\Re^+$) le classi di funzioni debolmente (C^*,C)-quasiconcava e (C^*,$C^\#$)-pseudoconcave altro non sono che la caratterizzazione al primo ordine rispettivamente delle funzioni (C,C)-quasi-concave (quasi-concave scalari) e delle funzioni strettamente (C^*,$C^\#$)-pseudo-concave (pseudo-concave e strettamente pseudo-concave scalari).
Si osservi inoltre che, anche nel caso vettoriale, le classi introdotte esprimono l'appartenenza ai vari coni della derivata direzionale rispetto alla direzione y-x, noto il comportamento della funzione nei punti x ed y.

Le relazioni intercorrenti tra queste classi di funzioni seguono direttamente dalle definizioni e sono rappresentate graficamente nel diagramma successivo.
Esso evidenzia che nel caso scalare le classi di funzioni (C,$C^\#$)-pseudoconcave, con $C^\#\in\{C^0,C^{00}\}$, si riducono alla classe delle funzioni strettamente pseudo-concave; le funzioni (C^*,$C^\#$)-pseudoconcave, con $C^*\in\{C^0,C^{00}\}$ e $C^\#\in\{C^0,C^{00}\}$, si riducono alla classe delle funzioni pseudo-concave; le altre classi di funzioni invece si riducono alla classe delle funzioni quasi-concave.

$$
\begin{array}{ccccc}
\boxed{(C,C).\mathrm{wqcv}} & \subset & \boxed{(C^0,C).\mathrm{wqcv}} & \subset & \boxed{(C^{00},C).\mathrm{wqcv}} \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\boxed{(C,C^0).\mathrm{pcv}} & \subset & \boxed{(C^0,C^0).\mathrm{pcv}} & \subset & \boxed{(C^{00},C^0).\mathrm{pcv}} \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\boxed{(C,C^{00}).\mathrm{pcv}} & \subset & \boxed{(C^0,C^{00}).\mathrm{pcv}} & \subset & \boxed{(C^{00},C^{00}).\mathrm{pcv}}
\end{array}
$$

2.2.2. Relazioni con le classi precedentemente definite

In questo paragrafo si evidenzia come, nel caso differenziabile ([4]), le definizioni 2.2.1 e 2.2.2 generalizzano le funzioni di tipo quasi-concavo e strettamente pseudo-concavo precedentemente definite.

[4] Si ricordi che, per la differenziabilità della funzione f, si ha per ogni $x,y\in S$:

Valgono al riguardo i seguenti teoremi.

Teorema 2.2.1 Si consideri una funzione differenziabile $f:S\to\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme convesso, sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso di vertice l'origine con interno non vuoto e siano $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$ e $C^\#\in\{C,C^0,C^{00}\}$.
Se f è $(C^*,C^\#)$-quasiconcava allora è anche debolmente (C^*,C)-quasiconcava.
Dim. Per la $(C^*,C^\#)$-quasiconcavità di f, presi due punti qualsiasi $x,y\in S$, con $x\neq y$ e tali che $f(y)\in f(x)+C^*$, risulta che $\frac{f(x+\lambda(y-x))-f(x)}{\lambda}\in C^\#$ $\forall\lambda\in(0,1)$; essendo f differenziabile si ha quindi che $J_f(x)(y-x)\in -\|y-x\|\,\sigma(\lambda,0)+C^\#$; la tesi segue facendo tendere λ a 0 e dalla chiusura del cono C. ♦

Teorema 2.2.2 Si consideri una funzione differenziabile $f:S\to\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme convesso, sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso convesso puntato di vertice l'origine con interno non vuoto e siano $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$ e $C^\#\in\{C^0,C^{00}\}$. Se f è strettamente $(C^*,C^\#)$-pseudoconcava allora è anche $(C^*,C^\#)$-pseudoconcava.

Dim. Per la stretta $(C^*,C^\#)$-pseudoconcavità di f, presi due punti qualsiasi $x,y\in S$, con $x\neq y$ e tali che $f(y)\in f(x)+C^*$, risulta che:

$$\frac{f(x+\lambda(y-x))-f(x)}{\lambda}\in(1-\lambda)\xi(x,y)+C \quad \text{con } \xi(x,y)\in C^\# \quad \forall\lambda\in(0,1);$$

essendo f differenziabile si ha quindi:

$$J_f(x)(y-x)\in -\|y-x\|\,\sigma(\lambda,0)+(1-\lambda)\xi(x,y)+C, \text{ con } \xi(x,y)\in C^\#,$$

da cui si ottiene la tesi al tendere di λ a 0 ricordando che il cono C è chiuso convesso e puntato. ♦

Il seguente diagramma illustra i risultati espressi dai precedenti teoremi.

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{(C^*,C^\#).qcv} & \subset & \boxed{(C^*,C).wqcv} \\
\cup & & \cup \\
\boxed{(C^*,C^\#).spcv} & \subset & \boxed{(C^*,C^\#).pcv}
\end{array}$$

Il seguente esempio, unitamente agli Esempi 1.2.2, mostra come tali relazioni di inclusione siano proprie.

$$\frac{f(x+\lambda(y-x))-f(x)}{\lambda}=J_f(x)(y-x)+\|y-x\|\,\sigma(\lambda,0) \text{ con } \lim_{\lambda\to 0}\sigma(\lambda,0)=0,$$

dove $J_f(x)$ è la matrice Jacobiana calcolata nel punto x e σ è una funzione $\sigma:\Re^2\to\Re^m$.

Esempio 2.2.1 Si consideri la seguente funzione differenziabile $f:[0,3]\rightarrow\Re^3$:

$$f(x)=\begin{cases} (-x^2+2x)[1/2,1/2,1]^T & \text{per } x\in[0,1] \\ [1/2,1/2,1]^T+(-2x^3+9x^2-12x+5)[1,-1,0]^T & \text{per } x\in]1,2[\\ [3/2,-1/2,1]^T+(x-2)^2[-5/6,7/6,-1/3]^T & \text{per } x\in[2,3] \end{cases},$$

sia inoltre $C=\Re^3_+$; risulta $f(0)=[0,0,0]^T$ ed $f(3)=[2/3,2/3,2/3]^T$, di conseguenza $f(3)\in f(0)+C^{00}$; si ha però che $f(2)=[3/2,-1/2,1]^T\notin f(0)+C$, pertanto la funzione f non è (C^{00},C).qcv (e quindi non appartiene a nessuna delle classi di funzioni vettoriali concave generalizzate definite nel paragrafo 2.1); ciò nonostante la funzione è (C,C^{00}).pcv (e quindi verifica le definizioni 2.2.1 e 2.2.2) dal momento che $f(y)\in f(x)+C$ solamente per i punti $x\in[0,1[$ ed $y\in]x,3]$ e che, per tali punti, è verificata la relazione $J_f(x)(y-x)=[1/2,1/2,1]^T(y-x)\in C^{00}$.

Osservazione 2.2.2 Il fatto che nel caso vettoriale le inclusioni tra le classi debolmente (C^*,C)-quasiconcava e (C^*,C)-quasiconcava e tra le classi $(C^*,C^\#)$-pseudoconcave e strettamente $(C^*,C^\#)$-pseudoconcave siano proprie, implica che non è possibile caratterizzare al primo ordine le classi di funzioni concave generalizzate vettoriali introdotte nel paragrafo 2.1.
Il motivo per cui non è possibile ottenere una tale caratterizzazione può essere colto nel fatto che le dimostrazioni nel caso scalare si basano sulle due seguenti proprietà che non sussistono nel caso vettoriale:

i) ordinamento totale del codominio della funzione (codominio che nel caso vettoriale è ordinato parzialmente tramite un cono);
ii) validità del Teorema di Lagrange (che non è possibile estendere alle funzioni vettoriali, come mostrato nell'Esempio 2.2.2).

Esempio 2.2.2 Si consideri la seguente funzione differenziabile $f:[0,2]\rightarrow\Re^2$:

$$f(x)=\begin{cases} x(2-x)[3,-1]^T & \text{per } x\in[0,1] \\ [3,-1]^T+(x-1)^2[-2,2]^T & \text{per } x\in]1,2] \end{cases},$$

sia inoltre $C=\Re^2_+$. Risulta $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{1}{2}[1,1]^T$, ma non esiste alcun punto $x\in[0,2]$ tale che $J_f(x)\in C^{00}$.

Il seguente teorema mostra invece come le classi di funzioni C^*-concave, con $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$, siano caratterizzabili al primo ordine come le corrispondenti funzioni scalari.

Teorema 2.2.3 Si consideri una funzione differenziabile $f:S\rightarrow\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme convesso, sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso convesso e puntato di vertice l'origine ed interno non vuoto e sia $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$.

$$f \text{ è } C^*\text{-concava se e solo se } J_f(x)(y-x)\in f(y)-f(x)+C^*;$$

Dim. caso $C^*=C$ Se la funzione f è C-concava allora risulta, $\forall\lambda\in(0,1)$ $\forall x,y\in S$ $x\neq y$, $\frac{f(x+\lambda(y-x))-f(x)}{\lambda}\in f(y)-f(x)+C$; essendo la funzione f differenziabile si ottiene quindi $J_f(x)(y-x)\in -\|y-x\|\,\sigma(\lambda,0)+f(y)-f(x)+C$; facendo tendere λ a 0 e ricordando che il cono C è chiuso segue la condizione necessaria.

Per la sufficienza si considerino due punti qualsiasi x ed y di S ed un reale $\lambda\in(0,1)$. Per le ipotesi si ha:

$$J_f(x+\lambda(y-x))(y-(x+\lambda(y-x)))=f(y)-f(x+\lambda(y-x))+c_1,\ c_1\in C,$$

$$J_f(x+\lambda(y-x))(x-(x+\lambda(y-x)))=f(x)-f(x+\lambda(y-x))+c_2,\ c_2\in C.$$

Moltiplicando la prima uguaglianza per λ e la seconda per $(1-\lambda)$, si ottiene:

$$\lambda(1-\lambda)J_f(x+\lambda(y-x))(y-x)=\lambda f(y)-\lambda f(x+\lambda(y-x))+\lambda c_1,$$

$$-\lambda(1-\lambda)J_f(x+\lambda(y-x))(y-x)=(1-\lambda)f(x)-(1-\lambda)f(x+\lambda(y-x))+(1-\lambda)c_2,$$

da cui si ottiene la tesi sommando membro a membro:

$$f(x+\lambda(y-x))=f(x)+\lambda(f(y)-f(x))+\lambda c_1+(1-\lambda)c_2\in f(x)+\lambda(f(y)-f(x))+C.$$

caso $C^*\in\{C^0,C^{00}\}$ Se f è C^*-concava allora è anche C-concava e quindi, per quanto sopra dimostrato, si ha $J_f(x)((x+\lambda(y-x))-x)\in f(x+\lambda(y-x))-f(x)+C$; essendo $J_f(x)((x+\lambda(y-x))-x)=\lambda J_f(x)(y-x)$ ed essendo $f(x+\lambda(y-x))-\lambda(f(y)-f(x))\in f(x)+C^*$ risulta quindi $\lambda J_f(x)(y-x)\in\lambda(f(y)-f(x))+C^*$ da cui la tesi.

La sufficienza è del tutto analoga al punto precedente. ♦

Per quanto riguarda le funzioni C^*-semiconcave non è invece possibile, come accade nel caso scalare, avere una caratterizzazione al primo ordine ma solamente le seguenti condizioni necessarie.

Teorema 2.2.4 Si consideri una funzione differenziabile $f:S\rightarrow\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme convesso, sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso di vertice l'origine con interno non vuoto e sia $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$.

Se f è C^*-semiconcava allora è anche debolmente (C,C)-quasiconcava.

Dim. Per la ipotesi di C^*-semiconcavità, presi due punti qualsiasi $x,y\in S$, con $x\neq y$ e tali che $f(y)\in f(x)+C$, risulta che $\frac{f(x+\lambda(y-x))-f(x)}{\lambda}\in f(y)-f(x)+C^*$ $\forall\lambda\in(0,1)$; essendo f differenziabile si ha quindi che $J_f(x)(y-x)\in -\|y-x\|\,\sigma(\lambda,0)+f(y)-f(x)+C^*$. La tesi segue facendo tendere λ a 0 e ricordando che il cono C è chiuso. ♦

2.3. Caratterizzazione del primo ordine di alcune sottoclassi

Come si è visto dallo studio sino ad ora svolto, non è possibile fornire, a differenza del caso scalare, una caratterizzazione per le funzioni concave generalizzate vettoriali; spontanea nasce quindi l'esigenza di determinare delle sottoclassi di funzioni concave generalizzate vettoriali che possano essere caratterizzate al primo ordine. Questa esigenza si può tradurre equivalentemente nella ricerca di ipotesi sotto le quali le funzioni $(C^*,C^\#)$-pseudoconcave sono anche strettamente $(C^*,C^\#)$-pseudoconcave oppure le funzioni debolmente (C^*,C)-quasiconcave sono anche $(C^*,C^\#)$-quasiconcave.
Inizialmente si osserverà come sia possibile raggiungere tali risultati in ipotesi di (C^{00},C)-quasiconcavità, che è la più debole tra le classi di funzioni concave generalizzate introdotte; in seguito la caratterizzazione verrà determinata assumendo ipotesi che implicano un certo grado di confontabilità tra gli elementi del codominio della funzione.

Lemma 2.3.1 Sia $f:S\to\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme aperto convesso, una funzione differenziabile e sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto. Se $J_f(x)(y-x)\in C^{00}$, con $x,y\in S$, $x\neq y$, allora $\exists\varepsilon>0$ tale che risulta $f(x+\lambda(y-x))\in f(x)+C^{00}$ $\forall\lambda\in(0,\varepsilon)$.

Dim. Per ipotesi $L=J_f(x)(y-x)=\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{f(x+\lambda(y-x))-f(x)}{\lambda}\in C^{00}$.

Poiché C è un cono chiuso con interno non vuoto, esiste un intorno di L contenuto in C^{00} ed in particolare $\exists\varepsilon>0$ tale che $\dfrac{f(x+\lambda(y-x))-f(x)}{\lambda}\in C^{00}$ $\forall\lambda\in(0,\varepsilon)$, da cui la tesi essendo $\lambda>0$. ♦

Lemma 2.3.2 Sia $f:S\to\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme aperto convesso, una funzione differenziabile e sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso convesso di vertice l'origine ed interno non vuoto; sia inoltre f (C^{00},C)-quasiconcava.
Allora se f è (C^{00},C^{00})-pseudo-concava è anche (C^{00},C^{00})-quasiconcava.
Dim. Siano $x,y\in S$, $x\neq y$, tali che $f(y)\in f(x)+C^{00}$; per ipotesi risulta $J_f(x)(y-x)\in C^{00}$ e quindi, per il Lemma 2.3.1, $\exists\varepsilon>0$ tale che $f(x+\lambda(y-x))\in f(x)+C^{00}$ $\forall\lambda\in(0,\varepsilon)$. Poiché $f(y)\in f(x)+C^{00}$ esiste un $\lambda^*\in(0,\varepsilon)$ tale che $f(x+\lambda^*(y-x))\in f(x)+C^{00}$ ed $f(y)\in f(x+\lambda^*(y-x))+C^{00}$; essendo f (C^{00},C)-qcv è $f(x+\lambda(y-x))\in f(x+\lambda^*(y-x))+C$ $\forall\lambda\in(\lambda^*,1)$. Poiché C è un cono convesso ed $f(x+\lambda^*(y-x))\in f(x)+C^{00}$ si ha $f(x+\lambda(y-x))\in f(x)+C^{00}$ $\forall\lambda\in(\lambda^*,1)$, relazione che vale, per quanto visto, anche per $\lambda\in(0,\lambda^*]$, da cui la tesi. ♦

I due lemma precedenti permettono di dimostrare, assumendo come ipotesi la più generale delle definizioni di funzioni vettoriali concave generalizzate, che una funzione (C^{00},C^{00})-pseudoconcava è anche strettamente (C^{00},C^{00})-pseudoconcava, ovvero che le funzioni (C^{00},C^{00})-pseudo-concave possono essere viste come la caratterizzazione, nel caso differenziabile, delle funzioni strettamente (C^{00},C^{00})-pseudo-concave.

Teorema 2.3.1 Sia $f:S\rightarrow\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme aperto convesso, una funzione differenziabile e sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso convesso di vertice l'origine ed interno non vuoto; sia inoltre f (C^{00},C)-quasiconcava. Allora la funzione f è (C^{00},C^{00})-pseudoconcava se e solo se è strettamente (C^{00},C^{00})-pseudoconcava.
Dim. Per il Teorema 2.2.2 una funzione (C^{00},C^{00}).spcv è anche (C^{00},C^{00}).pcv; si deve quindi dimostrare solamente la necessità.
Si supponga per assurdo che f non sia (C^{00},C^{00}).spcv ed esistano quindi due punti $x,y\in S$, $x\neq y$, tali che $f(y)\in f(x)+C^{00}$ ed inoltre $\forall\xi\in C^{00}\ \exists\lambda_\xi\in(0,1)$ tale che $f(x+\lambda_\xi(y-x))\notin f(x)+\lambda_\xi(1-\lambda_\xi)\xi+C$, ovvero tale che:

$$\frac{f(x+\lambda_\xi(y-x))-f(x)}{\lambda_\xi}\notin(1-\lambda_\xi)\xi+C.$$

Sia $u\in C^{00}$ e sia $\xi_i=u(1/i)$, con i intero positivo; è possibile quindi determinare una successione $\{\lambda_i\}\subset[0,1]$ tale che $\frac{f(x+\lambda_i(y-x))-f(x)}{\lambda_i}\notin u(1-\lambda_i)(1/i)+C$, dalla quale è possibile estrarre una sottosuccessione convergente ad un numero reale $\lambda^*\in[0,1]$, sottosuccessione che, senza ledere la generalità, si può supporre essere la successione stessa. Se $\lambda^*=0$, risulta $J_f(x)(y-x)=\lim_{i\to+\infty}\frac{f(x+\lambda_i(y-x))-f(x)}{\lambda_i}\notin C^{00}$, condizione assurda per la (C^{00},C^{00}).pcv di f.
Se $\lambda^*=1$ risulta invece $f(y)-f(x)=\lim_{i\to+\infty}\frac{f(x+\lambda_i(y-x))-f(x)}{\lambda_i}\notin C^{00}$, condizione ancora assurda per le ipotesi. Si supponga infine che $\lambda^*\in(0,1)$; in questo caso si ha $\frac{f(x+\lambda^*(y-x))-f(x)}{\lambda^*}=\lim_{i\to+\infty}\frac{f(x+\lambda_i(y-x))-f(x)}{\lambda_i}\notin C^{00}$ ovvero $f(x+\lambda^*(y-x))\notin f(x)+C^{00}$, essendo $\lambda^*>0$; quest'ultima relazione implica che la funzione f non è (C^{00},C^{00}).qcv, condizione assurda per il Lemma 2.3.2. ♦

Si determinano adesso delle ulteriori caratterizzazioni imponendo un certo grado di confrontabilità nel codominio di f; a tal fine si introduce il seguente concetto di punto α-minimale.

Definizione 2.3.1 Sia $f:S\rightarrow\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme convesso, e sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto; siano dati inoltre due punti $x,y\in S$ tali che $f(y)\in f(x)+C$ ed un reale $\lambda^*\in[0,1]$.
Il punto $f(x+\lambda^*(y-x))$ si dirà *α-minimale rispetto ad x ed y* se (5):

$$\exists\alpha\in C^{++} \text{ tale che } \alpha^T f(x+\lambda^*(y-x))=\min_{\lambda\in[0,1]}\{\alpha^T f(x+\lambda(y-x))\}.$$

Vale il seguente teorema.

Teorema 2.3.2 Sia $f:S\rightarrow\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme aperto convesso, una funzione differenziabile e sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso convesso puntato di vertice l'origine ed interno non vuoto; siano dati inoltre due punti $x,y\in S$, $x\neq y$, ed un reale $\bar{\lambda}\in(0,1)$ tali che $f(y)\in f(x)+C$ ed $f(x+\bar{\lambda}(y-x))\notin f(x)+C$.
Allora valgono entrambe le seguenti condizioni:
i) $\exists\lambda^*\in(0,1)$ tale che:
   a) $f(x+\lambda^*(y-x))$ è α-minimale rispetto ad x ed y;
   b) $J_f(x+\lambda^*(y-x))(y-x)\notin C^0$;
ii) $\exists\lambda^\#\in(0,1)$ tale che $J_f(x+\lambda^\#(y-x))(y-x)\notin C$.

Dim. i) Per un noto teorema di separazione (6), poiché $f(x+\bar{\lambda}(y-x))-f(x)\notin C$ allora $\exists\alpha\in C^{++}$ tale che $\alpha^T[f(x+\bar{\lambda}(y-x))-f(x)]<0$, ovvero $\alpha^T f(x+\bar{\lambda}(y-x))<\alpha^T f(x)$. Essendo $f(y)-f(x)\in C$ risulta, per la definizione di polare positivo stretto, che $\alpha^T[f(y)-f(x)]\geq 0$, ovvero $\alpha^T f(y)\geq\alpha^T f(x)$; si ha quindi $\alpha^T f(x+\bar{\lambda}(y-x))<\alpha^T f(x)\leq\alpha^T f(y)$.
Si consideri la funzione ad una variabile $g(\lambda)=\alpha^T f(x+\lambda(y-x))$ sull'intervallo chiuso e limitato $[0,1]$; per il teorema di Weierstrass la funzione g, essendo continua, ammette un punto di minimo assoluto $\lambda^*\in[0,1]$; risulta pertanto che $f(x+\lambda^*(y-x))$ è α-minimale rispetto ad x ed y.
Essendo inoltre $\alpha^T f(x+\bar{\lambda}(y-x))<\alpha^T f(x)=g(0)\leq\alpha^T f(y)=g(1)$, il punto di minimo assoluto λ^* deve necessariamente appartenere all'intervallo aperto $(0,1)$,

---

5 Sia $C\subset\Re^m$ un insieme qualsiasi; si definisce %Bazaraa, 1976 #104; Sawaragi, 1985 #89&:

i) *polare positivo di C* il cono chiuso convesso $C^+=\{\alpha\in\Re^m: \alpha^T c\geq 0\ \forall c\in C\}$;

ii) *polare positivo stretto di C* il cono convesso $C^{++}=\{\alpha\in\Re^m: \alpha^T c>0\ \forall c\in C,\ c\neq 0\}\subset C^+$.

Si ricordi inoltre che nel caso in cui $C\subset\Re^m$ sia un cono chiuso convesso, risulta $C^{++}\neq\emptyset$ se e solo se C è un cono puntato.

6 Sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso convesso puntato di vertice l'origine ed interno non vuoto e sia inoltre $x\notin C$; allora $\exists\alpha\in C^{++}$ tale che $\alpha^T x<0$.

pertanto risulta $0=g'(\lambda^*)=\alpha^T[J_f(x+\lambda^*(y-x))(y-x)]$; per la definizione di polare positivo stretto si ha quindi $J_f(x+\lambda^*(y-x))(y-x)\notin C^0$.

ii) Poiché g è una funzione derivabile ad una variabile e $g(0)>g(\lambda^*)$, deve esistere un reale $\lambda^\#\in(0,\lambda^*)$ tale che $g'(\lambda^\#)<0$, ovvero $\alpha^T[J_f(x+\lambda^\#(y-x))(y-x)]<0$; poiché $\alpha\in C^{++}\subset C^+$ si ha $J_f(x+\lambda^\#(y-x))(y-x)\notin C$, da cui la tesi. ♦

Corollario 2.3.1 Sia $f:S\rightarrow\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme aperto convesso, una funzione differenziabile, sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso convesso puntato di vertice l'origine ed interno non vuoto e sia $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$.

Se per ogni $x,y\in S$, $x\neq y$, è verificata la seguente condizione:

$$f(y)\in f(x)+C^* \Rightarrow J_f(x+\lambda(y-x))(y-x)\in C \quad \forall\lambda\in(0,1),$$

allora la funzione f è (C^*,C)-quasiconcava.

Dim. Se per assurdo f non fosse (C^*,C).qcv allora esisterebbero due punti $x,y\in S$, $x\neq y$, ed un reale $\bar\lambda\in(0,1)$ tali che $f(y)\in f(x)+C^*$ ed $f(x+\bar\lambda(y-x))\notin f(x)+C$; per il Teorema 2.3.2 quindi $\exists\lambda^\#\in(0,1)$ tale che $J_f(x+\lambda^\#(y-x))(y-x)\notin C$, condizione assurda poiché nega l'ipotesi. ♦

Teorema 2.3.3 Sia $f:S\rightarrow\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme aperto convesso, una funzione differenziabile e sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso convesso puntato di vertice l'origine ed interno non vuoto.

Si supponga inoltre che per ogni punto $f(x+\lambda^*(y-x))$ α-minimale rispetto ad x ed y $\exists\tilde\lambda\in(\lambda^*,1]$ tale che $f(x+\tilde\lambda(y-x))\in f(x+\lambda^*(y-x))+C^*$, con $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$.

Se f è (C^*,C^0)-pseudo concava allora è anche (C,C)-quasiconcava.

Dim. Si supponga per assurdo che f non sia (C,C).qcv; esistono quindi due punti $x,y\in S$, $x\neq y$, ed un $\bar\lambda\in(0,1)$ tali che $f(y)\in f(x)+C$ ed $f(x+\bar\lambda(y-x))\notin f(x)+C$; per la i) del Teorema 2.3.2 allora $\exists\lambda^*\in(0,1)$ tale che $f(x+\lambda^*(y-x))$ è α-minimale rispetto ad x ed y ed inoltre $J_f(x+\lambda^*(y-x))(y-x)\notin C^0$.

Per ipotesi esiste un $\tilde\lambda\in(\lambda^*,1]$ tale che $f(x+\tilde\lambda(y-x))\in f(x+\lambda^*(y-x))+C^*$, con $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$, e di conseguenza $J_f(x+\lambda^*(y-x))(x+\tilde\lambda(y-x)-x-\lambda^*(y-x))\in C^0$, ovvero $J_f(x+\lambda^*(y-x))(y-x)(\tilde\lambda-\lambda^*)\in C^0$. Essendo $\tilde\lambda>\lambda^*$ si ottiene pertanto $J_f(x+\lambda^*(y-x))(y-x)\in C^0$, condizione assurda in virtù del Teorema 2.3.2. ♦

Teorema 2.3.4 Sia $f:S\rightarrow\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme aperto convesso, una funzione differenziabile e sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso convesso puntato di vertice l'origine ed interno non vuoto.
Si supponga inoltre che per ogni coppia di punti $x,y\in S$, $x\neq y$, ed ogni reale $\lambda^{\#}\in(0,1)$ tali che $f(y)\in f(x)+C$ ed $J_f(x+\lambda^{\#}(y-x))(y-x)\notin C$ esista un reale $\tilde{\lambda}\in(\lambda^{\#},1]$ tale che $f(x+\tilde{\lambda}(y-x))\in f(x+\lambda^{\#}(y-x))+C^*$, con $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$.
Se f è (C^*,C)-pseudo concava allora è anche (C,C)-quasiconcava.
Dim. Si supponga per assurdo che f non sia (C,C).qcv e quindi esistano due punti $x,y\in S$, $x\neq y$, ed un $\tilde{\lambda}\in(0,1)$ tali che $f(y)\in f(x)+C$ ed $f(x+\tilde{\lambda}(y-x))\notin f(x)+C$; per la ii) del Teorema 2.3.2 allora $\exists\lambda^{\#}\in(0,1)$ tale che $J_f(x+\lambda^{\#}(y-x))(y-x)\notin C$.
Per ipotesi esiste un $\tilde{\lambda}\in(\lambda^{\#},1]$ tale che $f(x+\tilde{\lambda}(y-x))\in f(x+\lambda^{\#}(y-x))+C^*$, con $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$, e di conseguenza $J_f(x+\lambda^{\#}(y-x))(x+\tilde{\lambda}(y-x)-x-\lambda^{\#}(y-x))\in C$, ovvero $J_f(x+\lambda^{\#}(y-x))(y-x)(\tilde{\lambda}-\lambda^{\#})\in C$. Essendo $\tilde{\lambda}>\lambda^{\#}$ si ha $J_f(x+\lambda^{\#}(y-x))(y-x)\in C$, condizione assurda poiché nega l'ipotesi. ♦

Corollario 2.3.2 Sia $f:S\rightarrow\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme aperto convesso, una funzione differenziabile e sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso convesso puntato di vertice l'origine ed interno non vuoto.
Si supponga inoltre che sia verificata almeno una delle due seguenti condizioni:

i) per ogni punto $f(x+\lambda^*(y-x))$ α-minimale rispetto ad x ed y esiste un reale $\tilde{\lambda}\in(\lambda^*,1]$ tale che $f(x+\tilde{\lambda}(y-x))\in f(x+\lambda^*(y-x))+C^{00}$;
ii) per ogni coppia di punti $x,y\in S$, $x\neq y$, ed ogni reale $\lambda^{\#}\in(0,1)$ tali che $f(y)\in f(x)+C$ ed $J_f(x+\lambda^{\#}(y-x))(y-x)\notin C$ esiste un reale $\tilde{\lambda}\in(\lambda^{\#},1]$ tale che $f(x+\tilde{\lambda}(y-x))\in f(x+\lambda^{\#}(y-x))+C^{00}$.

Allora la funzione f è (C^{00},C^{00})-pseudoconcava se e solo se è strettamente (C^{00},C^{00})-pseudoconcava.
Dim. Per i Teoremi 2.3.3 e 2.3.4 la funzione f è (C,C).qcv e quindi in particolare è anche (C^{00},C).qcv; la tesi segue quindi direttamente dal Teorema 2.3.1. ♦

2.4. Crescenza, monotonia e teoremi di composizione

Come è stato puntualizzato nel primo capitolo, i concetti di crescenza e monotonia sono in stretta relazione con la concavità generalizzata; al riguardo si ricordi che ogni trasformazione crescente di funzioni quasi-concave fornisce di nuovo una funzione quasi-concava, ogni funzione monotona ad una variabile è quasi-concava, ogni funzione inizialmente crescente e poi decrescente è ancora quasi-concava. In questo paragrafo si vedrà come tali risultati potranno essere estesi, con opportune ipotesi, alle funzioni vettoriali concave generalizzate.

2.4.1. Crescenza per funzioni vettoriali e teoremi di composizione

La definizione di funzione vettoriale crescente proposta in questo sottoparagrafo estende varie definizioni proposte in letteratura; la sua generalità permetterà anche di stabilire varie proprietà e di ottenere come casi particolari alcuni noti risultati.

Definizione 2.4.1 Sia $f:S\rightarrow\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme convesso, e siano $K\subset\Re^n$ e $C\subset\Re^m$ coni chiusi di vertice l'origine con interno non vuoto.
La funzione f è detta $(K^\#,C^*)$-crescente, con $K^\#\in\{K^0,K^{00}\}$ e $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$, se per ogni punto $x,y\in S$ vale la condizione: $y\in x+K^\# \Rightarrow f(y)\in f(x)+C^*$.

La relazione tra le varie classi di funzioni crescenti è illustrata dal seguente diagramma, che evidenzia inoltre come nel caso scalare le classi di funzioni (K^{00},C^{00})-crescenti, (K^{00},C^0)-crescenti, (K^0,C^{00})-crescenti e (K^0,C^0)-crescenti corrispondono alle funzioni crescenti, mentre le classi (K^{00},C)-crescenti e (K^0,C)-crescenti corrispondono alle funzioni nondecrescenti.

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{(K^{00},C^{00}).cr} & \subset & \boxed{(K^{00},C^0).cr} & \subset & \boxed{(K^{00},C).cr} \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\boxed{(K^0,C^{00}).cr} & \subset & \boxed{(K^0,C^0).cr} & \subset & \boxed{(K^0,C).cr}
\end{array}$$

I sei tipi di funzioni vettoriali crescenti precedentemente definiti permettono di dimostrare alcuni teoremi di composizione tramite i quali si studia la concavità generalizzata vettoriale di una funzione $(g\circ f):S\rightarrow\Re^p$, dove $f:S\rightarrow\Re^m$ e $g:D\rightarrow\Re^p$, con $S\subseteq\Re^n$ e $D\subseteq\Re^m$ insiemi convessi tali che $f(S)\subseteq D$.

In seguito verranno considerate funzioni f e g che verificano la seguente proprietà, con $C^{*1} \in \{C, C^0, C^{00}\}$:

$$g(f(x+\lambda(y-x))) \in g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))+C^{*1} \quad \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x,y\in S,\ x\neq y. \qquad (2.4.1)$$

Il seguente teorema specifica alcune classi di funzioni che verificano la (2.4.1).

Teorema 2.4.1 Si considerino le funzioni $f:S\to\Re^m$ e $g:D\to\Re^p$, con $S\subseteq\Re^n$ e $D\subseteq\Re^m$ insiemi convessi tali che $f(S)\subseteq D$, e siano $K\subset\Re^m$ e $C\subset\Re^p$ coni chiusi di vertice l'origine con interno non vuoto.

i) Se f è K-concava e g è (K^0,C)-crescente allora risulta:

$$g(f(x+\lambda(y-x))) \in g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))+C \quad \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x,y\in S,\ x\neq y.$$

ii) Se f è $K^{\#}$-concava e g è $(K^{\#},C^{*1})$-crescente, con $K^{\#}\in\{K^0,K^{00}\}$ e $C^{*1}\in\{C,C^0,C^{00}\}$, allora:

$$g(f(x+\lambda(y-x))) \in g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))+C^{*1} \quad \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x,y\in S,\ x\neq y.$$

Dim. i) Poiché f è K-concava si ha $f(x+\lambda(y-x))\in f(x)+\lambda(f(y)-f(x))+K$ $\forall\lambda\in(0,1)$ $\forall x,y\in S$; se $f(x+\lambda(y-x))=f(x)+\lambda(f(y)-f(x))$ la tesi è banale, altrimenti se $f(x+\lambda(y-x))\in f(x)+\lambda(f(y)-f(x))+K^0$ risulta, essendo g (K^0,C)-crescente, $g(f(x+\lambda(y-x)))\in g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))+C$, da cui la tesi.

ii) Poiché f è $K^{\#}$-concava si ha $f(x+\lambda(y-x))\in f(x)+\lambda(f(y)-f(x))+K^{\#}$ $\forall\lambda\in(0,1)$ $\forall x,y\in S$, $x\neq y$, la tesi segue quindi essendo g $(K^{\#},C^{*1})$-crescente. ♦

Poiché i seguenti risultati coinvolgono vari tipi di concavità generalizzata relativi sia alla funzione f sia alla funzione g, sarà utilizzata una notazione compatta dello stesso tipo di quella usata in precedenza.

I seguenti teoremi sono relativi alle funzioni di tipo concavo, di tipo quasi-concavo e di tipo strettamente pseudo-concavo.

Teorema 2.4.2 Si considerino le funzioni $f:S\to\Re^m$ e $g:D\to\Re^p$, con $S\subseteq\Re^n$ e $D\subseteq\Re^m$ insiemi convessi tali che $f(S)\subseteq D$, e sia $C\subset\Re^p$ un cono chiuso convesso e puntato di vertice l'origine con interno non vuoto.

Siano inoltre le funzioni f e g tali che:

$$g(f(x+\lambda(y-x))) \in g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))+C^{*1} \quad \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x,y\in S,\ x\neq y,$$

con $C^{*1}\in\{C,C^0,C^{00}\}$.

i) Se g è C-concava oppure C-semiconcava allora la funzione composta $(g\circ f):S\to\Re^p$ è rispettivamente C^{*1}-concava oppure C^{*1}-semiconcava.

Nel caso in cui valga la proprietà $f(x)\neq f(y)$ $\forall x,y\in S$, $x\neq y$, risulta allora:

ii) se g è C^{*2}-concava oppure C^{*2}-semiconcava, con $C^{*2}\in\{C^0,C^{00}\}$, allora la funzione composta $(g\circ f):S\to\Re^p$ è rispettivamente C^{*3}-concava oppure C^{*3}-semiconcava, dove $C^{*3}=C^{*1}\cap C^{*2}$.

Dim. i) Sia g una funzione C-concava e siano $x,y \in S$, $x \neq y$; se $f(y)=f(x)$ si ha $g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))-\lambda(g(f(y))-g(f(x)))=g(f(x)) \in g(f(x))+C$ $\forall \lambda \in (0,1)$, se invece $f(y) \neq f(x)$ quest'ultima condizione segue direttamente dalla C-concavità di g. Risulta pertanto che $g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))-\lambda(g(f(y))-g(f(x)))=g(f(x))+c$, con $c \in C$, mentre dalla (2.4.1) si ha che $g(f(x+\lambda(y-x)))=g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))+c_1$ con $c_1 \in C^{*1}$; si ottiene pertanto la seguente relazione:

$$g(f(x+\lambda(y-x)))-\lambda(g(f(y))-g(f(x)))=g(f(x))+c+c_1 \text{ con } c \in C \text{ e } c_1 \in C^{*1}.$$

Poiché C è convesso e puntato si ha che $c+c_1 \in C^{*1}$, da cui la tesi.

Nel caso in cui la funzione g sia C-semiconcava la dimostrazione è analoga.

ii) Sia g una funzione C^{*2}-concava, con $C^{*2} \in \{C^0, C^{00}\}$, e siano $x,y \in S$, $x \neq y$; si osservi che per ipotesi risulta $f(y) \neq f(x)$. Per la C^{*2}-concavità di g risulta:

$$g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))-\lambda(g(f(y))-g(f(x))) \in g(f(x))+C^{*2} \ \forall \lambda \in (0,1),$$

da cui si ha $g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))-\lambda(g(f(y))-g(f(x)))=g(f(x))+c_2$ con $c_2 \in C^{*2}$; per la (2.4.1) si ha quindi $g(f(x+\lambda(y-x)))-\lambda(g(f(y))-g(f(x)))=g(f(x))+c_1+c_2$ con $c_1 \in C^{*1}$ e $c_2 \in C^{*2}$, da cui la tesi essendo C convesso e puntato ed essendo $c_1+c_2 \in C^{*3}=C^{*1} \cap C^{*2}$.

Nel caso in cui la funzione g sia C^{*2}-semiconcava la dimostrazione è analoga. ♦

Teorema 2.4.3 Si considerino le funzioni $f:S \to \Re^m$ e $g:D \to \Re^p$, con $S \subseteq \Re^n$ e $D \subseteq \Re^m$ insiemi convessi tali che $f(S) \subseteq D$, e sia $C \subset \Re^p$ un cono chiuso convesso e puntato di vertice l'origine con interno non vuoto.

Siano inoltre le funzioni f e g tali che:

$$g(f(x+\lambda(y-x))) \in g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))+C^{*1} \quad \forall \lambda \in (0,1) \ \forall x,y \in S, x \neq y,$$

con $C^{*1} \in \{C, C^0, C^{00}\}$.

i) Se g è (C^{*2},C^{*3})-quasiconcava, con $C^{*2} \in \{C^0,C^{00}\}$ e $C^{*3} \in \{C,C^0,C^{00}\}$, allora la funzione $(g \circ f):S \to \Re^p$ è (C^{*2},C^{*4})-quasiconcava, dove $C^{*4}=C^{*1} \cap C^{*3}$;

ii) se g è (C^{*2},C)-quasiconcava, con $C^{*2} \in \{C,0,C \backslash C^{00}\}$, allora la funzione composta $(g \circ f):S \to \Re^p$ è (C^{*2},C^{*1})-quasiconcava.

Nel caso inoltre in cui valga la proprietà $f(x) \neq f(y)$ $\forall x,y \in S$, $x \neq y$, risulta allora:

iii) se g è (C^{*2},C^{*3})-quasiconcava, con $C^{*2} \in \{C,0,C \backslash C^{00}\}$ e $C^{*3} \in \{C^0,C^{00}\}$, allora la funzione $(g \circ f):S \to \Re^p$ è (C^{*2},C^{*4})-quasiconcava, dove $C^{*4}=C^{*1} \cap C^{*3}$.

Dim. i) Siano $x,y \in S$, $x \neq y$, tali che $g(f(y)) \in g(f(x))+C^{*2}$; si osservi che essendo $C^{*2} \in \{C^0,C^{00}\}$ risulta $f(y) \neq f(x)$. Per la (C^{*2},C^{*3})-quasiconcavità di g si ha quindi che $g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x))) \in g(f(x))+C^{*3}$ $\forall \lambda \in (0,1)$, ovvero:

$$g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))=g(f(x))+c_3 \text{ con } c_3 \in C^{*3};$$

per la (2.4.1) risulta inoltre che:

$$g(f(x+\lambda(y-x)))=g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))+c_1 \text{ con } c_1 \in C^{*1};$$

da cui si ha: $g(f(x+\lambda(y-x)))=g(f(x))+c_1+c_3$ con $c_1\in C^{*1}$ e $c_3\in C^{*3}$.
Poiché C è convesso e puntato si ha che $c_1+c_3\in C^{*4}=C^{*1}\cap C^{*3}$, da cui la tesi.
ii) Siano $x,y\in S$, $x\neq y$, tali che $g(f(y))\in g(f(x))+C^{*2}$. Se $f(y)=f(x)$ risulta $g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))=g(f(x))\in g(f(x))+C$ $\forall\lambda\in(0,1)$, se invece $f(y)\neq f(x)$ quest'ultima condizione segue dalla (C^{*2},C)-quasiconcavità di g. La tesi segue quindi in modo analogo al precedente punto i).
iii) Siano $x,y\in S$, $x\neq y$, tali che $g(f(y))\in g(f(x))+C^{*2}$; si osservi inoltre che per ipotesi risulta $f(y)\neq f(x)$. Per la (C^{*2},C^{*3})-quasiconcavità di g si ha quindi che $g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))\in g(f(x))+C^{*3}$ $\forall\lambda\in(0,1)$; la tesi si ottiene quindi in modo analogo al punto i). ♦

Teorema 2.4.4 Si considerino le funzioni $f:S\rightarrow\Re^m$ e $g:D\rightarrow\Re^p$, con $S\subseteq\Re^n$ e $D\subseteq\Re^m$ insiemi convessi tali che $f(S)\subseteq D$, e sia $C\subset\Re^p$ un cono chiuso convesso e puntato di vertice l'origine con interno non vuoto.
Siano inoltre le funzioni f e g tali che:

$$g(f(x+\lambda(y-x)))\in g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))+C \quad \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x,y\in S,\ x\neq y.$$

i) Se g è strettamente $(C^*,C^\#)$-pseudoconcava, con $C^*\in\{C^0,C^{00}\}$ e $C^\#\in\{C^0,C^{00}\}$, allora la funzione $(g\circ f):S\rightarrow\Re^p$ è strettamente $(C^*,C^\#)$-pseudoconcava.

Nel caso in cui valga la proprietà $f(x)\neq f(y)$ $\forall x,y\in S$, $x\neq y$, risulta allora:

ii) se g è strettamente $(C,C^\#)$-pseudoconcava, con $C^\#\in\{C^0,C^{00}\}$, allora la funzione $(g\circ f):S\rightarrow\Re^p$ è strettamente $(C,C^\#)$-pseudoconcava.

Dim. i) Siano $x,y\in S$, $x\neq y$, tali che $g(f(y))\in g(f(x))+C^*$; si osservi che essendo $C^*\in\{C^0,C^{00}\}$ risulta $f(y)\neq f(x)$.
Per la stretta $(C^*,C^\#)$-pseudoconcavità di g risulta che $\exists\xi(f(x),f(y))\in C^\#$ tale che $\forall\lambda\in(0,1)$ si ha $g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))\in g(f(x))+\lambda(1-\lambda)\xi(f(x),f(y))+C$; poiché per ipotesi $g(f(x+\lambda(y-x)))\in g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x)))+C$ $\forall\lambda\in(0,1)$ si ha che $\exists\xi(f(x),f(y))\in C^\#$ tale che $\forall\lambda\in(0,1)$ risulta $g(f(x+\lambda(y-x)))\in g(f(x))+\lambda(1-\lambda)\xi(f(x),f(y))+C$; la tesi si ottiene quindi sostituendo alla funzione $\xi:DxD\rightarrow C^\#\subset\Re^p$, dipendente solo da f(x) ed f(y), la funzione $\xi':SxS\rightarrow C^\#\subset\Re^p$, dipendente solo da x ed y, tale che $\xi'(x,y)=\xi(f(x),f(y))$.
ii) La dimostrazione è analoga alla precedente ricordando che per ipotesi vale la proprietà $f(x)\neq f(y)$ $\forall x,y\in S$, $x\neq y$. ♦

Nel caso particolare in cui la funzione f è affine i risultati espressi nei teoremi precedenti possono essere ulteriormente specificati.
Vale al riguardo il seguente corollario.

Corollario 2.4.1 Si consideri la funzione affine $f:S \to \Re^m$, $f(x)=Ax+b$, dove $A \in \Re^{m \times n}$ e $b \in \Re^m$, e la funzione $g:D \to \Re^p$, con $S \subseteq \Re^n$ e $D \subseteq \Re^m$ insiemi convessi tali che $f(S) \subseteq D$, e sia $C \subset \Re^p$ un cono chiuso convesso e puntato di vertice l'origine con interno non vuoto.

i) Se g è C-concava oppure C-semiconcava allora la funzione composta $(g \circ f):S \to \Re^p$ è rispettivamente C-concava oppure C-semiconcava.

ii) se g è $(C^*,C^\#)$-quasiconcava, con $C^* \in \{C^0,C^{00}\}$ e $C^\# \in \{C,C^0,C^{00}\}$, allora la funzione composta $(g \circ f):S \to \Re^p$ è $(C^*,C^\#)$-quasiconcava;

iii) se g è (C^*,C)-quasiconcava, con $C^* \in \{C,0,C \setminus C^{00}\}$, allora la funzione composta $(g \circ f):S \to \Re^p$ è (C^*,C)-quasiconcava.

iv) Se g è strettamente $(C^*,C^\#)$-pseudoconcava, con $C^* \in \{C^0,C^{00}\}$ e $C^\# \in \{C^0,C^{00}\}$, allora la funzione $(g \circ f):S \to \Re^p$ è strettamente $(C^*,C^\#)$-pseudoconcava.

Nel caso inoltre in cui A sia quadrata ed invertibile risulta allora:

v) se g è C^*-concava oppure C^*-semiconcava, con $C^* \in \{C^0,C^{00}\}$, allora la funzione composta $(g \circ f):S \to \Re^p$ è rispettivamente C^*-concava oppure C^*-semiconcava.

vi) se g è $(C^*,C^\#)$-quasiconcava, con $C^* \in \{C,0,C \setminus C^{00}\}$ e $C^\# \in \{C^0,C^{00}\}$, allora la funzione composta $(g \circ f):S \to \Re^p$ è $(C^*,C^\#)$-quasiconcava.

vii) se g è strettamente $(C,C^\#)$-pseudoconcava, con $C^\# \in \{C^0,C^{00}\}$, allora la funzione $(g \circ f):S \to \Re^p$ è strettamente $(C,C^\#)$-pseudoconcava.

Dim. Le tesi seguono direttamente dai Teoremi 2.4.2, 2.4.3 e 2.4.4 osservando che per la affinità della funzione f vale la (2.4.1) con $C^*=C$ ed osservando che, nel caso in cui la matrice A sia quadrata ed invertibile, si ha necessariamente $f(x)=Ax+b \neq Ay+b=f(y)$ $\forall x,y \in C$, $x \neq y$. ♦

2.4.2. Cammini monotoni e loro proprietà

Come è noto, nel caso scalare una funzione ad una variabile monotona oppure inizialmente crescente e poi decrescente è anche una funzione quasi-concava; tale risultato si può estendere a livello vettoriale per i cammini, cioè per funzioni vettoriali ad una sola variabile, utilizzando i seguenti concetti di cammini crescenti, decrescenti e monotoni, naturalmente indotti dalla $(K^\#,C^*)$-crescenza precedentemente definita.

Definizione 2.4.2 Sia $f:I\rightarrow\Re^m$, con I intervallo della retta reale, sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto, e sia $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$.
La funzione f è detta:
C^*-crescente se $\forall x,y\in I$ vale la condizione: $y>x \Rightarrow f(y)\in f(x)+C^*$;
C^*-decrescente se $\forall x,y\in I$ vale la condizione: $y>x \Rightarrow f(y)\in f(x)-C^*$;
C^*-monotona [C^*.mnt] se è C^*-crescente oppure C^*-decrescente, ovvero se $\forall x,y\in I$ vale la condizione: $y>x \Rightarrow f(y)\in (f(x)+C^*)\cup(f(x)-C^*)$.

Si osservi che per quanto definito nel sottoparagrafo precedente, f è C^*-crescente se è $(K^\#,C^*)$-crescente con $K^\#=\Re^{++}$.

Il seguente diagramma mostra le relazioni intercorrenti tra le varie classi di cammini monotoni, evidenziando che nel caso scalare le classi di funzioni C^{00}-monotone e C^0-monotone, corrispondono alle funzioni strettamente monotone, mentre la classe delle funzioni C-monotone corrisponde alle funzioni monotone.

$$\boxed{\boxed{C^{00}.\text{mnt}} \subset \boxed{C^0.\text{mnt}}} \subset \boxed{\boxed{C.\text{mnt}}}$$

Si inizia lo studio della C^*-crescenza, C^*-decrescenza e C^*-monotonia di un cammino vettoriale mostrando come tali proprietà permettano di prevedere parzialmente il comportamento della funzione.
Il seguente teorema mostra come la C^*-crescenza e la C^*-decrescenza di una funzione permettono di stabilirne il comportamento nell'intervallo [x,y].

Teorema 2.4.5 Sia $f:I\rightarrow\Re^m$, con I intervallo della retta reale, sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto, e sia $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$.
i) Se f è C^*-crescente allora $\forall x,y\in I$ vale la seguente condizione:
$$y>x \Rightarrow f(x+\lambda(y-x))\in(f(x)+C^*)\cap(f(y)-C^*) \quad \forall\lambda\in(0,1);$$
ii) se f è C^*-decrescente allora $\forall x,y\in I$ vale la seguente condizione:
$$y>x \Rightarrow f(x+\lambda(y-x))\in(f(x)-C^*)\cap(f(y)+C^*) \quad \forall\lambda\in(0,1).$$
Dim. Poiché $y>x$ risulta $y>x+\lambda(y-x)>x$ $\forall\lambda\in(0,1)$; dalle definizioni si ha quindi, se f è C^*-crescente, che $f(y)\in f(x+\lambda(y-x))+C^*$ ed $f(x+\lambda(y-x))\in f(x)+C^*$; se invece f è C^*-decrescente che $f(y)\in f(x+\lambda(y-x))-C^*$ ed $f(x+\lambda(y-x))\in f(x)-C^*$, da cui la i) e la ii). ♦

Il seguente teorema mostra come il comportamento della funzione nel suo codominio permetta di stabilire, se il cono C è puntato, la relazione esistente tra le controimmagini.

Teorema 2.4.6 Sia $f:I\to\Re^m$, con I intervallo della retta reale, e sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso puntato di vertice l'origine ed interno non vuoto.

i) Se f è C-crescente allora $\forall x,y\in I$ vale la seguente condizione:
$$f(y)\in f(x)+C^0 \;\Rightarrow\; y>x;$$
ii) Se f è C-decrescente allora $\forall x,y\in I$ vale la seguente condizione:
$$f(y)\in f(x)+C^0 \;\Rightarrow\; y<x.$$
Dim. Si dimostra solamente il punto i) in quanto la dimostrazione del punto ii) è analoga. Sia $f(y)\in f(x)+C^0$ e si supponga per assurdo che sia $y\leq x$; poiché $0\notin C^0$ non può essere $y=x$, d'altra parte la C-crescenza di f implica che $f(x)\in f(y)+C$. Si ha quindi $f(y)-f(x)\in C^0\cap(-C)$, condizione assurda in quanto C è puntato. ♦

I teoremi successivi indicano come l'ipotesi di C*-monotonia permetta di avere informazioni riguardo al comportamento della funzione.

Teorema 2.4.7 Sia $f:I\to\Re^m$, con I intervallo della retta reale, sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso puntato di vertice l'origine ed interno non vuoto, sia $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$. Se f è C*-monotona allora $\forall x,y\in I$ vale la seguente condizione:
$$f(y)\in f(x)+C^0 \;\Rightarrow\; f(x+\lambda(y-x))\in(f(x)+C^*)\cap(f(y)-C^*) \quad \forall\lambda\in(0,1).$$
Dim. Segue direttamente dai Teoremi 2.4.5 e 2.4.6. ♦

Teorema 2.4.8 Sia $f:I\to\Re^m$, con I intervallo della retta reale, e sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto.

i) Se C è puntato ed f è C-monotona allora $\forall x,y\in I$ vale la seguente condizione:
$$f(y)=f(x) \;\Rightarrow\; f(x+\lambda(y-x))=f(y)=f(x) \quad \forall\lambda\in(0,1);$$
ii) se f è C^0-monotona allora $\forall x,y\in I$ vale la seguente condizione:
$$f(y)=f(x) \;\Rightarrow\; x=y.$$
Dim. i) Se $x=y$ la tesi è banale; sia quindi $x\neq y$ e si supponga, senza ledere la generalità, che sia $y>x$. Essendo $f(y)=f(x)$, per il Teorema 2.4.5 risulta, per l'ipotesi di C-monotonia, $f(x+\lambda(y-x))\in(f(x)-C)\cap(f(x)+C)$ $\forall\lambda\in(0,1)$, ovvero $f(x+\lambda(y-x))-f(x)\in C\cap(-C)$; poiché $C\cap(-C)=\{0\}$, si ha la tesi.

ii) Si supponga per assurdo che sia $f(y)=f(x)$ ed $x\neq y$; senza ledere la generalità, si può assumere $y>x$. Per definizione è $f(x)=f(y)\in(f(x)+C^0)\cup(f(x)-C^0)$, condizione assurda poiché $0\notin C^0$. ♦

Nel paragrafo 1.5, sono state introdotte le funzioni quasi-affini come funzioni che sono sia quasi-concave che quasi-convesse e successivamente sono state analizzate le loro proprietà rispetto alla monotonia.
Allo scopo di generalizzare tali risultati alla C*-monotonia si introduce la classe delle funzioni (C,C*)-quasiaffini.

Definizione 2.4.3 Sia $f:I\to\Re^m$, con I intervallo della retta reale, sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto, e sia $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$.
La funzione f è detta *(C,C*)-quasiaffine* se è sia (C,C*)-quasiconcava sia (C,C*)-quasiconvessa (7), ovvero se $\forall x,y\in S$, $x\neq y$, è verificata la condizione:

$$f(y)\in f(x)+C \Rightarrow f(x+\lambda(y-x))\in(f(x)+C^*)\cap(f(y)-C^*) \quad \forall\lambda\in(0,1).$$

Il seguente teorema mostra che anche a livello vettoriale la monotonia implica la quasi-concavità.

Teorema 2.4.9 Sia $f:I\to\Re^m$, con I intervallo della retta reale, sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso puntato di vertice l'origine ed interno non vuoto, sia $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$.
Se f è C*-monotona allora è anche (C,C*)-quasiaffine.
Dim. Siano $x,y\in S$, $x\neq y$, tali che $f(y)\in f(x)+C$.
caso C*=C Se è $f(y)=f(x)$ allora, per la i) del Teorema 2.4.8, risulta:

$$f(x+\lambda(y-x))=f(y)=f(x)\in(f(x)+C)\cap(f(y)-C) \quad \forall\lambda\in(0,1).$$

Se $f(y)\neq f(x)$, cioè $f(y)=f(x)+C^0$, allora per il Teorema 2.4.7 si ha:

$$f(x+\lambda(y-x))\in(f(x)+C)\cap(f(y)-C) \quad \forall\lambda\in(0,1),$$

da cui la tesi.
caso $C^*\in\{C^0,C^{00}\}$ Per la ii) del Teorema 2.4.8, essendo $x\neq y$, si ha $f(y)\neq f(x)$, da cui si ottiene $f(y)\in f(x)+C^0$. Per il Teorema 2.4.7 si ha la tesi essendo:

$$f(x+\lambda(y-x))\in(f(x)+C^*)\cap(f(y)-C^*) \quad \forall\lambda\in(0,1). \qquad \blacklozenge$$

Il seguente teorema è una naturale estensione, al caso vettoriale, della proprietà che una funzione scalare ad una variabile inizialmente crescente e poi decrescente è quasi-concava.

Teorema 2.4.10 Sia $f:I\to\Re^m$, con I=[a,c] intervallo della retta reale, sia $b\in(a,c)$, sia $C\subset\Re^m$ un cono chiuso convesso e puntato di vertice l'origine ed interno non vuoto, e sia $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$. Se f è C*-crescente in [a,b] e C*-decrescente in [b,c] allora è (C,C*)-quasiconcava in I.

---

7 Una funzione f è detta *(C,C*)-quasiconvessa* se la funzione -f è (C,C*)-quasiconcava, ovvero se per ogni $x,y\in S$, $x\neq y$, è verificata la condizione: $f(y)\in f(x)+C \Rightarrow f(x+\lambda(y-x))\in f(y)-C^* \quad \forall\lambda\in(0,1)$.

Dim. Siano $x,y\in[a,c]$, $x\neq y$, tali che $f(y)\in f(x)+C$; si vuole dimostrare che $f(x+\lambda(y-x))\in f(x)+C^*$ $\forall\lambda\in(0,1)$. Il Teorema 2.4.9 e le ipotesi rispettivamente di C^*-crescenza e C^*-decrescenza garantiscono che la precedente condizione vale per ogni $x,y\in[a,b]$ e per ogni $x,y\in[b,c]$.

Si supponga adesso $a<x<b<y<c$ e sia $\lambda^*\in(0,1)$ tale che $b=x+\lambda^*(y-x)$.

Per la C^*-crescenza di f nell'intervallo $[x,b]$ si ha che $f(x+\lambda(y-x))\in f(x)+C^*$ $\forall\lambda\in(0,\lambda^*]$; per la C^*-decrescenza di f in $[b,y]$ si ha invece $f(x+\lambda(y-x))\in f(y)+C^*$ $\forall\lambda\in[\lambda^*,1)$; da queste due condizioni si ha la tesi, tenuto conto che C è convesso e puntato e che $f(y)\in f(x)+C$. Il caso $a<y<b<x<c$ è del tutto analogo al precedente. ♦

2.4.3. Mappe monotone generalizzate

In letteratura, il concetto di monotonia di una funzione è stato esteso a livello vettoriale limitatamente alle mappe, particolari funzioni vettoriali definite in $\Re^n$ e con codominio sempre in $\Re^n$. Karamardian e Schaible [11, 19] hanno introdotto diversi tipi di mappe monotone generalizzate aventi diverse applicazioni, ad esempio in problemi di complementarietà. Di seguito viene fornita, per completezza, una rassegna dei principali risultati relativi a tali classi di funzioni vettoriali, per le cui dimostrazioni si rimanda a [11, 19].

Definizione 2.4.4 Una funzione $F:C\rightarrow\Re^n$, con $C\subseteq\Re^n$, è detta:

monotona (mt)	se $(y-x)^T(F(y)-F(x))\geq 0$ $\forall x,y\in C$;
strettamente monotona (s.mt)	se $(y-x)^T(F(y)-F(x))>0$ $\forall x,y\in C$, $x\neq y$;
fortemente monotona (f.mt)	se $\exists\alpha>0$ t.c. $(y-x)^T(F(y)-F(x))\geq\alpha\|y-x\|^2$ $\forall x,y\in C$;
pseudo-monotona (pmt)	se $(y-x)^TF(x)\geq 0 \Rightarrow (y-x)^TF(y)\geq 0$ $\forall x,y\in C$;
strettamente pseudo-monotona (s.pmt)	se $(y-x)^TF(x)\geq 0 \Rightarrow (y-x)^TF(y)>0$ $\forall x,y\in C$, $x\neq y$;
fortemente pseudo-monotona (f.pmt)	se $\exists\alpha>0$ t.c. $(y-x)^TF(x)\geq 0 \Rightarrow (y-x)^TF(y)\geq\alpha\|y-x\|^2$ $\forall x,y\in C$;
quasi-monotona (qmt)	se $(y-x)^TF(x)>0 \Rightarrow (y-x)^TF(y)\geq 0$ $\forall x,y\in C$;

Vale la seguente proprietà relativa alle mappe pseudo-monotone.

Teorema 2.4.11 Una funzione vettoriale $F:C \rightarrow \Re^n$, con $C \subseteq \Re^n$, è pseudo-monotona se e solo se $(y-x)^T F(x)>0 \Rightarrow (y-x)^T F(y)>0 \ \forall x,y \in C$.

La relazione tra le varie classi di mappe monotone generalizzate è la seguente:

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{\text{f.pmt}} & \subset & \boxed{\text{s.pmt}} & \subset & \boxed{\text{pmt}} & \subset & \boxed{\text{qmt}} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \\
\boxed{\text{f.mt}} & \subset & \boxed{\text{s.mt}} & \subset & \boxed{\text{mt}} & &
\end{array}$$

I seguenti esempi mostrano che tutte queste classi sono distinte l'una dall'altra.

Esempi 2.4.1

i) la funzione $F(x)=\frac{1}{1+x}$, definita per $x \geq 0$, è una mappa s.pmt (e quindi anche pmt) ma non è mt (e quindi neanche s.mt);

ii) la funzione $F(x)=\frac{1}{1+x}$, definita per $x \in [0,1]$, è una mappa f.pmt ma non mt e quindi neanche f.mt;

iii) la funzione $F(x)=x^2$ è una mappa qmt ma non pmt;

iv) la funzione $F(x)=x^2$, definita per $x \geq 0$, è una mappa s.mt (e quindi anche s.pmt) ma non f.pmt (e quindi neanche f.mt);

v) la funzione $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ x & \text{per } x>0 \end{cases}$ è una mappa pmt ma non s.pmt;

vi) la funzione $F(x)=0$ è una mappa mt ma non s.mt.

Nel caso in cui una mappa F rappresenti il gradiente di una funzione differenziabile $f:C \rightarrow \Re$, con $C \subseteq \Re^n$ convesso, è possibile caratterizzare la mappa F tramite la convessità generalizzata della funzione f. Per non appesantire la forma del seguente teorema, la monotonia o concavità generalizzata delle funzioni in esame saranno espresse tramite il simbolo corrispondente.

Teorema 2.4.12 Sia f una funzione differenziabile definita sull'insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$.

i) la mappa ∇f è mt se e solo se la funzione f è cx;

ii) la mappa ∇f è s.mt se e solo se la funzione f è s.cx;

iii) la mappa ∇f è f.mt se e solo se la funzione f è f.cx;
iv) la mappa ∇f è pmt se e solo se la funzione f è pcx;
v) la mappa ∇f è s.pmt se e solo se la funzione f è s.pcx;
vi) la mappa ∇f è qmt se e solo se la funzione f è qcx.

Una caratterizzazione di questo tipo non vale per le mappe fortemente monotone, anche se è possibile dimostrare il seguente risultato.

Teorema 2.4.13 Sia f una funzione differenziabile definita sull'insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$. Se la mappa ∇f è fortemente pseudo-monotona allora:

$$\exists \alpha > 0 \text{ t.c. } f(y) < f(x) + \frac{1}{2}\alpha \|y-x\|^2 \Rightarrow (y-x)^T \nabla f(x) < 0 \quad \forall x,y \in C,\ x \neq y$$

e quindi la funzione f è fortemente pseudo-convessa.

Bibliografia

[1] Behringer, F.A., *Lexicographic quasiconcave multiobjective programming*, ZOR-Zeitschrift fur Operations Research, vol. 21, pp. 103-116, 1977.

[2] Cambini, A. and L. Martein, *Linear fractional and bicriteria linear fractional programs*, in "Generalized Convexity and Fractional Programming with Economic Applications", vol. 345, edited by A. Cambini, E. Castagnoli, *et al.*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 155-166, 1990.

[3] Cambini, A. and L. Martein, *An approach to optimality conditions in vector and scalar optimization*, in "Mathematical Modelling in Economics", edited by W.E. Diewert, K. Spremann, and F. Stehling, Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 345-358, 1993.

[4] Cambini, R., *Una nota sulle possibili estensioni a funzioni vettoriali di significative classi di funzioni concavo-generalizzate*, Technical Report 57, Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia, Università di Pisa, 1992.

[5] Castagnoli, E. and P. Mazzoleni, *Scalar and vector generalized convexity*, in "Nonsmooth optimization and related topics", edited by F.H. Clarke, V.F. Dem'yanov, and F. Giannessi, Plenum Press, New York, 1989.

[6] Choo, E.U. and D.R. Atkins, *Bicriteria linear fractional programming*, J.O.T.A., vol. 36, pp. 203-220, 1982.

[7] Choo, E.U. and D.R. Atkins, *Connectedness in multiple linear fractional programming*, Management Science, vol. 29, pp. 250-255, 1983.

[8] Gulati, T.R. and M.A. Islam, *Proper efficiency in linear fractional vector maximum problem with generalized convex constraints*, European Journal of Operational Research, 1987.

[9] Henig, M.I., *A generalized method of approximating the set of efficients points with respect to a convex cone*, in "Organisations: multiple agents with multiple criteria", edited by J.N. Morse, Springer, Berlin, pp. 140-144, 1981.

[10] Jahn, J., *Mathematical vector optimization in partially ordered linear spaces*, Springer-Verlag, Frankfurt, 1986.

[11] Karamardian, S. and S. Schaible, *Seven kinds of monotone maps*, J. of Optimization Theory and Appl., vol. 66, pp. 37-46, 1990.

[12] Kaul, R.N. and B. Gupta, *Efficiency and linear vector maximum value problem*, ZAMM, vol. 60, pp. 112-113, 1980.

[13] Kornbluth, J.S.H. and R.E. Steuer, *multiple objective linear fraction programming*, MS, vol. 27, pp. 1024-1039, 1981.

[14] Luc, D.T., *Theory of vector optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[15] Mangasarian, O.L., *Pseudo-convex functions*, J. SIAM Control Ser. A, vol. 3, pp. 281-290, 1965.

[16] Martein, L., *On the bicriteria maximization problem*, in "Generalized Convexity and Fractional Programming with Economic Applications", vol. 345, edited by A. Cambini, E. Castagnoli, *et al.*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 77-84, 1990.

[17] Schaible, S., *Bicriteria quasiconcave programs*, Cahiers du C.E.R.O., vol. 25, pp. 93-101, 1983.

[18] Schaible, S., *Fractional Programming*, ZOR-Zeitschrift fur Operations Research, vol. 33, pp. 39-54, 1983.

[19] Schaible, S., *Generalized Monotonicity*, Technical Report 61, Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia, Università di Pisa, 1992.

[20] Singh, C., *A class of multiple-criteria fractional programming problem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 115, pp. 202-213, 1986.

[21] Singh, C. and M.A. Hanson, *Saddle point theory for nondifferentiable multiobjective programming*, Journal of Information and Optimization Sciences, vol. 7, pp. 41-48, 1986.

[22] Stancu-Minasian, I.M., *A survey of methods used for solving the linear fractional programming problems with several objective functions*, in "Symposium on Operations Research", vol. 40, edited by R.E. Burkard and T. Ellinger, Königstein, Hain Meisenheim, pp. 159-162, 1981.

[23] Thompson, W.A. and D.W. Parke, *Some properties of generalized concave functions*, Operation Research, vol. 21, pp. 305-313, 1973.

[24] Weber, R., *Pseudomonotonic multiobjective fractional programming*, Cahiers du C.E.R.O., vol. 25, pp. 115-128, 1983.

3. Condizioni di ottimalità per problemi scalari e vettoriali

Uno dei principali campi di applicazione della concavità generalizzata è quello della ottimizzazione e della determinazione di condizioni di ottimalità; si può anzi dire che la definizione di alcune classi di funzioni concave generalizzate sia stata suggerita dall'esigenza di avere classi di funzioni, le più ampie possibili, che verificassero determinate proprietà di ottimo.

Dal punto di vista dell'ottimizzazione difatti le funzioni concave godono di notevoli proprietà, quali l'ottimalità globale di un punto critico o di un ottimo locale nei problemi di massimo, la convessità dell'insieme dei punti di massimo globale, la sufficienza (sotto opportune condizioni) delle condizioni di Karush-Kuhn-Tucker, la convergenza di determinati algoritmi iterativi di massimo.

Scopo di questo capitolo è quello di presentare alcune condizioni di ottimalità relative ai problemi scalari ed a quelli vettoriali; in particolare l'approccio che verrà seguito permette di estendere e proporre in forma più generale tutti i risultati proposti in [3-5, 7]. In tale approccio le condizioni di ottimalità sono di tipo puntuale e sono inizialmente rivolte a vertici di insiemi stellati, in modo da non richiedere la convessità della regione ammissibile e la concavità generalizzata della funzione obiettivo su tutta la regione ammissibile stessa; tale studio permette di riottenere semplicemente come corollari tutti i classici risultati noti in letteratura; in seguito condizioni di ottimalità sono determinate, senza alcuna ipotesi di concavità generalizzata, sfruttando le direzioni del cono tangente alla regione ammissibile.

Si osservi infine che tale approccio permette di ottenere risultati sia per i problemi scalari che per quelli vettoriali.

3.1. Definizioni e concetti preliminari

Al fine di rendere più chiara e scorrevole l'esposizione dei vari risultati, in questo primo paragrafo si definiscono i principali strumenti che permetteranno lo studio delle condizioni di ottimalità scalare e vettoriale; verranno inoltre ricordate alcune proprietà classiche dell'analisi vettoriale.

3.1.1. Il cono tangente di Bouligand

Una parte delle condizioni di efficienza locale che verranno descritte in questo capitolo saranno basate sul comportamento della funzione obiettivo lungo le direzioni appartenenti al cono tangente di Bouligand, di cui si ricorda di seguito la definizione [1].

Definizione 3.1.1 Dato un insieme $S \subseteq \Re^n$, $S \neq \emptyset$, ed un punto x_0 appartenente alla chiusura di S, si dice cono tangente ad S nel punto x_0 il cono $T(S,x_0)$ di vertice l'origine definito come:

$$T(S,x_0)=\{x\in\Re^n: \exists\{x_k\}\subset S, x_k\to x_0, \exists\{\lambda_k\}\subset\Re^{++}, \lambda_k\to+\infty, x=\lim_{k\to+\infty}\lambda_k(x_k-x_0)\}.$$

dove $\Re^{++}$ denota l'insieme dei numeri reali positivi.

Per utilità di trattazione il cono tangente $T(S,x_0)$ verrà espresso come cono generato dalle proprie direzioni; vale al riguardo la seguente proprietà di semplice verifica.

Proprietà 3.1.1 Sia $T(S,x_0)$ il cono tangente relativo ad un punto x_0 appartenente alla chiusura di un insieme non vuoto $S\subseteq\Re^n$; allora $T(S,x_0)$ può essere espresso nel seguente modo:

$$T(S,x_0)=\{0\}\cup\{x\in\Re^n: x=\lambda d, \lambda>0, d\in\mathcal{D}_T\},$$

dove $\mathcal{D}_T$ denota l'insieme delle direzioni di $T(S,x_0)$, ovvero:

$$\mathcal{D}_T=\{d\in\Re^n: \exists\{x_k\}\subset S\setminus\{x_0\}, x_k\to x_0, d=\lim_{k\to+\infty}\frac{x_k-x_0}{\|x_k-x_0\|}\}.$$

Osservazione 3.1.1 Nel caso in cui l'insieme S sia la regione ammissibile di un problema di ottimo scalare o di estremo vettoriale ed inoltre S sia costituito dal solo punto x_0, si ha $T(S,x_0)=\{0\}$ e $\mathcal{D}_T=\emptyset$; in tale situazione x_0 è ovviamente un punto di ottimo od un punto efficiente del problema. Per evitare questo caso banale si supporrà in seguito che x_0 sia punto di accumulazione per S o, equivalentemente, che sia $\mathcal{D}_T \neq \emptyset$; sotto tale ipotesi il cono tangente si può pertanto esprimere nella forma:

$$T(S,x_0)=\{x\in\Re^n: x=\lambda d, \lambda\geq 0, d\in\mathcal{D}_T\}.$$

Le proprietà relative al cono tangente, più utili ai fini dello sviluppo del capitolo, sono quelle espresse dal seguente teorema.

Teorema 3.1.1 Sia $S\subseteq\Re^n$, $S\neq\emptyset$, ed x_0 un punto appartenente alla chiusura di S.
i) $T(S,x_0)$ è un cono chiuso;
ii) se S è convesso allora $T(S,x_0)$ è un cono chiuso e convesso.

Un altro cono, che sarà in seguito molto utile, è il cono delle direzioni ammissibili, di seguito definito.

Definizione 3.1.2 Dato un insieme $S\subseteq\Re^n$, $S\neq\emptyset$, ed un punto x_0 appartenente alla chiusura di S, si dice cono delle direzioni ammissibili ad S nel punto x_0 il cono $F(S,x_0)$ di vertice l'origine definito come:

$$F(S,x_0)=\{x\in\Re^n: \exists\delta>0 \text{ tale che } x_0+\lambda x\in S\ \forall\lambda\in(0,\delta)\}.$$

Si denoterà inoltre con $\mathcal{D}_F=\{d\in F(S,x_0): \|d\|=1\}$ l'insieme delle direzioni che generano il cono $F(S,x_0)$.

Il seguente teorema mostra alcune proprietà del cono delle direzioni ammissibili.

Teorema 3.1.2 Sia $S\subseteq\Re^n$, $S\neq\emptyset$, ed x_0 un punto appartenente alla chiusura di S.
i) $F(S,x_0)\subseteq T(S,x_0)$ e $\mathcal{D}_F\subseteq\mathcal{D}_T$;
ii) se S è stellato di vertice x_0 allora $\mathrm{Clos}(F(S,x_0))=T(S,x_0)$.

Si osservi che solamente in alcuni casi particolari si ha $F(S,x_0)=T(S,x_0)$ e $\mathcal{D}_F=\mathcal{D}_T$, ad esempio nel caso in cui x_0 è il vertice di un cono poliedrico oppure è interno alla regione ammissibile.
In quest'ultimo caso, che verrà esaminato esplicitamente nel presente capitolo, risulta $F(S,x_0)=T(S,x_0)=\Re^n$; per comodità di notazione verrà pertanto utilizzata la notazione $\mathcal{D}^n$ per indicare l'insieme delle direzioni di $\Re^n$:

$$\mathcal{D}^n=\{d\in\Re^n: \|d\|=1\},$$

ricordando che $\mathcal{D}^n=\mathcal{D}_F=\mathcal{D}_T$ se x_0 è interno alla regione ammissibile.

Le condizioni di ottimalità scalari e di efficienza vettoriali, saranno basate sul verificarsi o meno di certe proprietà lungo le direzioni del cono tangente o del cono delle direzioni ammissibili; a tal fine si definiscono i seguenti ulteriori insiemi.

Definizione 3.1.3 Sia data una direzione $d \in \Re^n$, $\|d\|=1$, ed un valore reale $\varepsilon>0$; si definiscono i seguenti coni convessi:

i) $K(d,\varepsilon)$ è il cono di vertice l'origine tale che:

$$K(d,\varepsilon)=\{x \in \Re^n: x=\lambda y,\ \lambda \geq 0,\ y \in \Re^n \text{ tale che } \|y-d\|<\varepsilon\};$$

ii) r_d è il raggio $\{x \in \Re^n: x=\lambda d, \lambda \geq 0\}$ generato dalla direzione $d \in \Re^n$.

3.1.2. Funzioni direzionalmente derivabili con regolarità

Nell'approccio che verrà seguito nei paragrafi successivi per caratterizzare, tramite le direzioni del cono tangente, l'ottimalità o l'efficienza di un punto x_0, sarà necessario studiare, a partire da una successione $\{x_k\} \subset S \setminus \{x_0\}$ convergente ad x_0 e tale che $\lim_{k \to +\infty} \frac{x_k - x_0}{\|x_k - x_0\|} = d$, l'esistenza del limite, per $k \to +\infty$, della successione $\frac{F(x_k)-F(x_0)}{\|x_k - x_0\|}$, dove F è la funzione obiettivo del problema.

L'importanza della classe di funzioni che sarà di seguito definita, è nel fatto che per esse un tale limite esiste ed è uguale alla derivata direzionale ([1]), rispetto alla direzione d, della funzione F nel punto x_0.

La definizione di questa classe di funzioni è identica sia per il caso scalare che per il caso vettoriale, essa quindi sarà studiata direttamente per il caso vettoriale; anche le dimostrazioni di alcune proprietà di tali funzioni verranno dimostrate solo per il caso vettoriale, essendo quello scalare un semplice caso particolare.

---

[1] Si consideri una funzione vettoriale $F:A \to \Re^m$, con $A \subseteq \Re^n$ aperto, ed un punto $x_0 \in A$. F è detta *direzionalmente derivabile* in x_0 se ammette derivata direzionale finita lungo ogni direzione $d \in \Re^n$, ovvero se per ogni direzione $d \in \Re^n$, $\|d\|=1$, esiste finito il limite, chiamato *derivata direzionale* di F in x_0 nella direzione d, $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{F(x_0+td)-F(x_0)}{t}$; ovviamente risulta $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) = \left[\frac{\partial F_1}{\partial d}(x_0), \ldots, \frac{\partial F_m}{\partial d}(x_0)\right]^T$.
Si consideri una funzione vettoriale $F:A \to \Re^m$, con $A \subseteq \Re^n$ aperto, direzionalmente derivabile nel punto $x_0 \in A$. Se $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) = -\frac{\partial F}{\partial(-d)}(x_0)$ $\forall d \in \Re^n$, $\|d\|=1$, allora si definisce matrice Jacobiana di F in x_0 la seguente matrice con m righe ed n colonne: $J_F(x_0) = \left[\frac{\partial F}{\partial e_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial F}{\partial e_n}(x_0)\right] = \left[\nabla F_1(x_0), \ldots, \nabla F_m(x_0)\right]^T$, dove $e_1, \ldots, e_n$ sono i vettori componenti la base canonica di $\Re^n$.

Definizione 3.1.4 Si consideri una funzione vettoriale $F:A\rightarrow\Re^m$ definita su un aperto $A\subseteq\Re^n$, direzionalmente derivabile in un punto $x_0\in A$.
F è detta *direzionalmente derivabile con regolarità* in x_0 se:

$$\lim_{h_n\rightarrow 0}\frac{h_n}{\|h_n\|}=d \quad \text{implica} \quad \lim_{h_n\rightarrow 0}\frac{F(x_0+h_n)-F(x_0)}{\|h_n\|}=\frac{\partial F}{\partial d}(x_0), \tag{3.1.1}$$

dove $\{h_n\}\subset\Re^n$ è una successione di vettori non nulli convergente all'origine.

La condizione (3.1.1) è più forte della derivabilità direzionale e più debole della differenziabilità (2), come mostra il seguente teorema.

Teorema 3.1.3 Si consideri una funzione vettoriale $F:A\rightarrow\Re^m$ definita su un aperto $A\subseteq\Re^n$, ed un punto $x_0\in A$. Se vale almeno una delle seguenti condizioni:
i) F è direzionalmente derivabile e Lipschitziana in un intorno di x_0 (3),
ii) F è differenziabile in x_0,
allora F è direzionalmente derivabile con regolarità in x_0.

Dim. Sia $\{h_n\}\rightarrow 0$ una successione di vettori di $\Re^n$ tale che $\lim_{h_n\rightarrow 0}\frac{h_n}{\|h_n\|}=d$.

i) Si osservi inizialmente che

$$\frac{F(x_0+h_n)-F(x_0)}{\|h_n\|}=\frac{F(x_0+\|h_n\|\frac{h_n}{\|h_n\|})-F(x_0+\|h_n\|\,d)}{\|h_n\|}+\frac{F(x_0+\|h_n\|\,d)-F(x_0)}{\|h_n\|}.$$

Per la Lipschitzianità della F in un intorno di x_0 esiste una costante reale $L>0$ tale che, al tendere di h_n a 0, $\|F(x_0+\|h_n\|\frac{h_n}{\|h_n\|})-F(x_0+\|h_n\|\,d)\|\leq\|h_n\|\,L\,\|\frac{h_n}{\|h_n\|}-d\|$;

ne consegue che $0\leq\lim_{h_n\rightarrow 0}\frac{\|F(x_0+\|h_n\|\frac{h_n}{\|h_n\|})-F(x_0+\|h_n\|\,d)\|}{\|h_n\|}\leq\lim_{h_n\rightarrow 0}L\,\|\frac{h_n}{\|h_n\|}-d\|=0.$

---

2 Si consideri una funzione vettoriale $F:A\rightarrow\Re^m$, con $A\subseteq\Re^n$ aperto, ed un punto $x_0\in A$.
F è detta *differenziabile* in x_0 se esiste una matrice $M(F,x_0)$, dipendente da F e da x_0, tale che risulta $\lim_{h\rightarrow 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)-M(F,x_0)^T h}{\|h\|}=0$; si ricordi che se F è differenziabile in x_0 allora è $M(F,x_0)=J_F(x_0)$.
Se F è differenziabile possiamo avere il seguente polinomio di Taylor con resto di Peano arrestato al primo ordine: $F(x_0+h)=F(x_0)+\|h\|\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)+\|h\|\,\sigma(h,0)$, con $d=\frac{h}{\|h\|}$ e $\lim_{h\rightarrow 0}\sigma(h,0)=0$, esprimibile anche come $F(x_0+h)=F(x_0)+J_F(x_0)h+\|h\|\,\sigma(h,0)$, $\lim_{h\rightarrow 0}\sigma(h,0)=0$.

3 Si ricordi che una funzione $F:A\rightarrow\Re^m$, con $A\subseteq\Re^n$ aperto, è detta Lipschitziana in un intorno $U\subseteq A$ di x_0 se $\exists L>0$ tale che $\|f(x)-f(y)\|\leq L\|x-y\|\ \forall x,y\in U$.

Si ha perciò:

$$\lim_{h_n\to 0}\frac{F(x_0+h_n)-F(x_0)}{\|h_n\|}=\lim_{h_n\to 0}\frac{F(x_0+\|h_n\|\frac{h_n}{\|h_n\|})-F(x_0+\|h_n\|\,d)}{\|h_n\|}+\lim_{h_n\to 0}\frac{F(x_0+\|h_n\|\,d)-F(x_0)}{\|h_n\|}=$$

$$=\lim_{h_n\to 0}\frac{F(x_0+\|h_n\|\,d)-F(x_0)}{\|h_n\|}=\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\,.$$

ii) Essendo F differenziabile si ha per il polinomio di Taylor con resto di Peano arrestato al primo ordine:

$$\lim_{h_n\to 0}\frac{F(x_0+h_n)-F(x_0)}{\|h_n\|}=\lim_{h_n\to 0}\frac{J_F(x_0)h_n+\|h_n\|\,\sigma(h_n,0)}{\|h_n\|}=$$

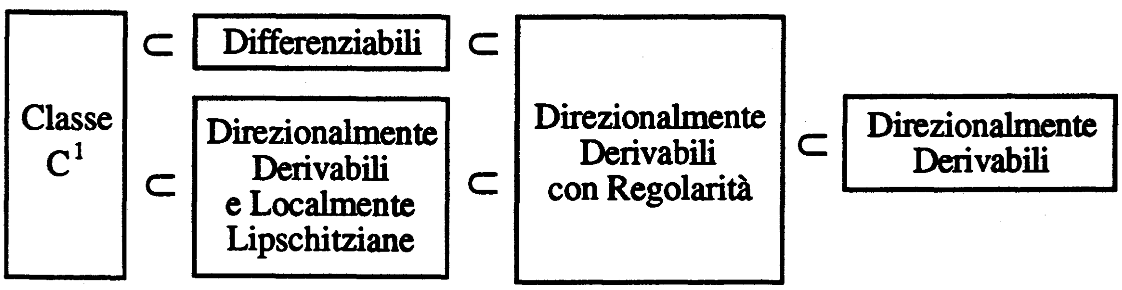
$$=\lim_{h_n\to 0}J_F(x_0)\frac{h_n}{\|h_n\|}+\lim_{h_n\to 0}\sigma(h_n,0)=J_F(x_0)d=\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\,.$$ ♦

I seguenti esempi evidenziano come la classe delle funzioni direzionalmente derivabili con regolarità sia più generale della classe di funzioni differenziabili e della classe di funzioni direzionalmente derivabili e localmente Lipschitziane; mostreranno inoltre come anche queste ultime due classi siano distinte tra loro.

Esempi 3.1.1 Si considerino le seguenti funzioni scalari definite su tutto l'insieme dei reali: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|^3}\sin\frac{1}{x} & \text{per } x\neq 0\\ 0 & \text{per } x=0\end{cases}$, $g(x)=|x|$ ed $h(x)=f(x)+g(x)$.

Tutte e tre le funzioni sono direzionalmente derivabili con regolarità in $x_0=0$; in particolare la funzione f è in $x_0=0$ differenziabile ma non Lipschitziana in un intorno di x_0, la funzione g è in $x_0=0$ direzionalmente derivabile e Lipschitziana in un intorno di x_0 ma non differenziabile, mentre la funzione h è direzionalmente derivabile con regolarità ma non è né Lipschitziana in un intorno di x_0 né differenziabile.

Il diagramma seguente mostra graficamente le relazioni di inclusione propria intercorrenti tra le classi in esame di funzioni direzionalmente differenziabili.



3.1.3. Polare positivo di un cono

Molto utile sarà nel terzo paragrafo il concetto di polare positivo di un cono C, di cui si ricorda di seguito la definizione [1, 13] ed alcune utili proprietà.

Definizione 3.1.5 Sia $C \subset \Re^m$ un cono qualsiasi; si definisce:

i) *polare positivo di C* il cono chiuso convesso:

$$C^+ = \{\alpha \in \Re^m : \alpha^T c \geq 0 \ \forall c \in C\};$$

ii) *polare positivo stretto di C* il cono convesso:

$$C^{++} = \{\alpha \in \Re^m : \alpha^T c > 0 \ \forall c \in C, c \neq 0\}.$$

Si osservi inoltre che valgono le seguenti relazioni di inclusione:

$$\{0\} \subseteq C^+ \quad \text{e} \quad C^{++} \subset C^+.$$

La seguente proprietà mostra sotto quali ipotesi il polare positivo ed il polare positivo stretto di un cono sono insiemi non vuoti.

Proprietà 3.1.2 Sia $C \subset \Re^m$ un cono chiuso convesso con interno non vuoto.

i) $C^+ \neq \{0\}$ se e solo se $0 \notin \mathrm{Int}(C)$;

ii) $C^{++} \neq \emptyset$ se e solo se C è puntato.

Alcuni risultati del terzo paragrafo saranno basati sul seguente risultato, che esprime una relazione tra un vettore non nullo del polare positivo di un cono C ed i vettori appartenenti all'interno del cono C stesso.

Teorema 3.1.4 Sia $C \subset \Re^m$ un cono con interno non vuoto tale che $C^+ \neq \{0\}$. Allora per ogni $\alpha \in C^+$, $\alpha \neq 0$, risulta $\alpha^T c > 0 \ \forall c \in C^{00}$.

Dim. Per definizione risulta $\alpha^T c \geq 0 \ \forall c \in C \ \forall \alpha \in C^+$. Si supponga per assurdo l'esistenza di un $\alpha \in C^+$, $\alpha \neq 0$, e di un vettore $\bar{c} \in C^{00}$ tale che $\alpha^T \bar{c} = 0$; poiché $\bar{c} \in C^{00}$ esiste una sfera B di centro l'origine tale che $\bar{c} + \varepsilon B \subset C \ \ \forall \varepsilon \in (0,1)$; ne consegue che $\alpha^T(\bar{c} + \varepsilon u) = \alpha^T \bar{c} + \varepsilon \alpha^T u = \varepsilon \alpha^T u \geq 0 \ \ \forall \varepsilon \in (0,1) \ \forall u \in B$; risulta quindi $\alpha^T u \geq 0 \ \ \forall u \in B$. Poiché però per ogni vettore $u \in B$ sicuramente anche il vettore $-u \in B$, deve essere $\alpha^T u = 0 \ \ \forall u \in B$ e quindi $\alpha = 0$, condizione che nega l'ipotesi. ♦

Si ricordano infine i seguenti noti risultati di separazione tra coni convessi.

Proprietà 3.1.3 Sia $C \subset \Re^m$ un cono chiuso, convesso e con interno non vuoto e sia $W \subset \Re^m$ un cono convesso e non vuoto. Si ha:

i) se $C^{00} \cap W = \emptyset$ allora $\exists \alpha \in C^+$, $\alpha \neq 0$, tale che $\alpha^T w \leq 0 \ \forall w \in W$.

Se inoltre C è puntato e W è chiuso, risulta che:

ii) se $C \cap W = \{0\}$ allora $\exists \alpha \in C^{++}$ tale che $\alpha^T w \leq 0 \ \forall w \in W$.

3.2. Problemi di ottimo scalare

In questo paragrafo verrà inizialmente studiato l'apporto fornito dalle funzioni concave generalizzate nella determinazione di condizioni di ottimalità locale e globale per il vertice di un insieme stellato; in seguito verrà mostrato come tale approccio permetta di ottenere come semplici corollari tutti i noti risultati della letteratura relativi all'ottimalità globale di un ottimo locale o di un punto critico. Verranno infine determinate altre condizioni di ottimalità per mezzo dello studio del comportamento della funzione obiettivo lungo le direzioni del cono tangente alla regione ammissibile.

3.2.1. Problema in esame e concavità generalizzata nel punto

In questo paragrafo si considera il seguente problema di massimo scalare:

$$P: \begin{cases} \max f(x) \\ x \in S \end{cases},$$

dove f è una funzione scalare $f:A\rightarrow\Re$ definita sull'insieme aperto $A\subseteq\Re^n$ ed $S\subseteq A$ è la regione ammissibile del problema; sia inoltre U l'insieme delle soluzioni ottime del problema P.
In seguito verranno di volta in volta specificate le eventuali ulteriori caratteristiche della funzione f, che potrà essere direzionalmente derivabile o differenziabile, e dell'insieme S, che potrà essere convesso o stellato di vertice x_0.

Nella seguente Definizione 3.2.1 si ricordano, per pura completezza, le classiche definizioni di punto di massimo locale e di massimo locale stretto.

Definizione 3.2.1 Si consideri il problema P. Un punto $x_0\in S$ sarà detto:
i) *punto di massimo per f rispetto alla regione S* se:

$$\nexists y\in S \text{ tale che } f(y)>f(x_0), \text{ ovvero se } f(y)\leq f(x_0) \ \ \forall y\in S;$$

ii) *punto di massimo stretto per f rispetto alla regione S* se:

$$\nexists y\in S \text{ tale che } f(y)\geq f(x_0), \text{ ovvero se } f(y)<f(x_0) \ \ \forall y\in S.$$

Un punto $x_0\in S$ sarà altresì detto punto di massimo locale [punto di massimo locale stretto] per f su S se esiste un intorno $I\subseteq\Re^n$ di x_0 per cui le precedenti proprietà sono verificate in $B=I\cap S$. In alcuni casi sarà utile riferirsi ad un punto di massimo locale per f su S come ad un punto di massimo per f rispetto ad una regione $B=I\cap S$.

Alcune delle condizioni di ottimalità che verranno stabilite in questo paragrafo sfrutteranno la concavità generalizzata della funzione obiettivo f; per questi risultati sarà pertanto necessario assumere la convessità dell'insieme S. Alcune condizioni saranno però relative ad un determinato punto $x_0 \in S$; in tali casi, per determinare condizioni di ottimalità in forma più generale, è sufficiente supporre l'insieme S stellato di vertice x_0 e la funzione obiettivo f concava generalizzata nel punto x_0 rispetto al solo insieme S. Si osservi, per meglio comprendere la generalità dell'approccio, che una funzione localmente concava generalizzata in x_0 rispetto ad un insieme S non è necessariamente concava generalizzata in x_0 in un intorno di x_0, come è mostrato nel seguente Esempio 3.2.1.

Esempio 3.2.1 Si consideri la funzione reale a valori reali $f(x)=-x^3$.
Essa è localmente pseudo-concava in $x_0=0$ rispetto all'insieme $S=\{x\in\Re: x\geq 0\}$; non lo è però rispetto ad un qualsiasi intorno di $x_0=0$, dal momento che nell'insieme $\{x\in\Re: x\leq 0\}$ essa è strettamente convessa.

Si definiscono pertanto le seguenti classi di funzioni concave generalizzate, che estendono quelle definite nel primo capitolo.

Definizione 3.2.2 Sia $S\subseteq\Re^n$ un insieme stellato di vertice x_0 ed $f:S\rightarrow\Re$ una funzione scalare a valori reali. La funzione f è detta:

quasi-concava in x_0 su S se per ogni $y\in S$ vale la condizione:
$$f(y)\geq f(x_0) \Rightarrow f(x_0+\lambda(y-x_0))\geq f(x_0) \quad \forall\lambda\in(0,1);$$

strettamente quasi-concava in x_0 su S se $\forall y\in S$, $y\neq x_0$, vale la condizione:
$$f(y)\geq f(x_0) \Rightarrow f(x_0+\lambda(y-x_0))> f(x_0) \quad \forall\lambda\in(0,1);$$

semi quasi-concava in x_0 su S se per ogni $y\in S$ vale la condizione:
$$f(y)> f(x_0) \Rightarrow f(x_0+\lambda(y-x_0))\geq f(x_0) \quad \forall\lambda\in(0,1);$$

semistrettamente quasi-concava in x_0 su S se per ogni $y\in S$ vale la condizione:
$$f(y)> f(x_0) \Rightarrow f(x_0+\lambda(y-x_0))> f(x_0) \quad \forall\lambda\in(0,1);$$

quasi-concava in senso esteso in x_0 su S se per ogni $y\in S$ vale la condizione:
$$f(y)= f(x_0) \Rightarrow f(x_0+\lambda(y-x_0))\geq f(x_0) \quad \forall\lambda\in(0,1);$$

strettamente quasi-concava in senso esteso in x_0 su S se $\forall y\in S$, $y\neq x_0$, si ha:
$$f(y)= f(x_0) \Rightarrow f(x_0+\lambda(y-x_0))> f(x_0) \quad \forall\lambda\in(0,1).$$

Definizione 3.2.3 Sia $S \subseteq \Re^n$ un insieme stellato di vertice x_0 ed $f: S \to \Re$ una funzione scalare direzionalmente derivabile in x_0. La funzione f è detta:
pseudo-concava in x_0 su S se per ogni $y \in S$ vale la condizione:

$$f(y)>f(x_0) \Rightarrow \begin{cases} \exists \xi(y)>0 \text{ tale che } \forall \lambda \in (0,1) \\ f(x_0+\lambda(y-x_0)) \geq f(x_0)+\lambda(1-\lambda)\xi(y) \end{cases};$$

strettamente pseudo-concava in x_0 su S se $\forall y \in S$, $y \neq x_0$, vale la condizione:

$$f(y) \geq f(x_0) \Rightarrow \begin{cases} \exists \xi(y)>0 \text{ tale che } \forall \lambda \in (0,1) \\ f(x_0+\lambda(y-x_0)) \geq f(x_0)+\lambda(1-\lambda)\xi(y) \end{cases};$$

dove $\xi(y)$ è una funzione dipendente solamente da y.

Nel caso in cui le funzioni di tipo pseudo-concavo in x_0 su S siano direzionalmente derivabili nel punto x_0, valgono i seguenti risultati.

Teorema 3.2.1 Sia $S \subseteq \Re^n$ un insieme stellato di vertice x_0 ed $f: S \to \Re$ una funzione scalare direzionalmente derivabile in x_0.

i) Se f è pseudo-concava in x_0 su S allora per ogni $y \in S$ vale la condizione:

$$f(y)>f(x_0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial d}(x_0)>0 \quad \text{con } d=\frac{y-x_0}{\|y-x_0\|};$$

ii) Se f è strettamente pseudo-concava in x_0 su S allora $\forall y \in S$, $y \neq x_0$, si ha:

$$f(y) \geq f(x_0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial d}(x_0)>0 \quad \text{con } d=\frac{y-x_0}{\|y-x_0\|};$$

Dim. Per ipotesi per ogni $y \in S$, $y \neq x_0$, e $\forall \lambda \in (0,1)$ risulta:

$$\frac{f(x_0+\lambda(y-x_0))-f(x_0)}{\lambda\|y-x_0\|} \geq \begin{cases} \dfrac{(1-\lambda)\xi(y)}{\|y-x_0\|} & \text{se f è pcv in } x_0 \text{ su S ed } f(y)>f(x_0) \\ \dfrac{(1-\lambda)\xi(y)}{\|y-x_0\|} & \text{se f è s.pcv in } x_0 \text{ su S ed } f(y) \geq f(x_0) \end{cases}.$$

Per la derivabilità direzionale di f in x_0 risulta $\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0+\lambda(y-x_0))-f(x_0)}{\lambda\|y-x_0\|} = \frac{\partial f}{\partial d}(x_0)$, con $d=\frac{y-x_0}{\|y-x_0\|}$, da cui le tesi ricordando che $\xi(y)>0$. ♦

3.2.2. Convessità dell'insieme dei massimi globali

Come è noto la convessità dell'insieme U dei massimi globali è garantita nel caso in cui f appartenga alla classe delle funzioni quasi-concave; tale proprietà sussiste anche per la classe più ampia delle funzioni quasi-concave in senso esteso, come è dimostrato nel seguente teorema.

Teorema 3.2.2 Si consideri il problema P con S convesso ed f concava generalizzata in tutto l'insieme S.

i) Se f è quasi-concava in senso esteso ed $U \neq \emptyset$ allora U è convesso.

ii) Se f è strettamente quasi-concava in senso esteso ed $U \neq \emptyset$ allora U è costituito da un solo punto.

Dim. i) Siano $x,y \in U$; poiché $f(y)=f(x)$ ed f è quasi-concava in senso esteso, risulta $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)=f(y)$ $\forall \lambda \in (0,1)$ e quindi, per l'ottimalità di x ed y, deve necessariamente essere $f(x+\lambda(y-x))=f(x)=f(y)$ $\forall \lambda \in (0,1)$ da cui la tesi.

ii) Si supponga per assurdo che esistano due punti distinti $x,y \in U$. Poiché f è strettamente quasi-concava in senso esteso e $f(y)=f(x)$, si ha $f(x+\lambda(y-x))>f(x)$ $\forall \lambda \in (0,1)$, condizione assurda dal momento che $f(x)$ è il massimo valore che la funzione può assumere. ♦

Nel seguente esempio 3.2.2 i) si mette in evidenza che in assenza di ipotesi di quasi-concavità in senso esteso niente si può dire, in generale, sulla convessità dell'insieme U dei massimi globali; l'esempio 3.2.2 ii) invece evidenzia che la classe delle funzioni quasi-concave in senso esteso raccoglie, rispetto a quella delle quasi-concave, un maggior numero di funzioni aventi insieme U convesso.

Esempi 3.2.2

i) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x\neq 0 \\ -1 & \text{per } x=0 \end{cases}$: è sm.qcv ma non e.qcv, ogni punto $x\neq 0$ è di massimo globale e quindi U non è convesso.

ii) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x=1 \\ 1 & \text{per } x\in[0,1[\\ 2 & \text{per } x\in]1,2] \end{cases}$: è e.qcv ma non qcv ed il suo insieme U dei massimi globali è convesso.

3.2.3. Condizioni di ottimalità lungo le direzioni

Come è stato osservato in [5], non vi è in generale alcuna relazione tra l'ottimalità locale rispetto ad una regione e l'ottimalità lungo le singole direzioni ammissibili. Al riguardo il seguente Esempio 3.2.3 mostra un problema, con regione ammissibile data localmente da un cono di vertice x_0, nel quale il punto x_0, pur non essendo di massimo locale rispetto all'intera regione ammissibile, risulta di massimo locale stretto rispetto ad ogni singola direzione appartenente alla regione ammissibile.

Esempio 3.2.3 Si consideri il seguente problema scalare:

$$P:\begin{cases} \max f(x,y)=(y-x^4)(x^2-y) \\ (x,y)\in S=\{(x,y)\in \Re^2:\ x\geq 0,\ y\geq 0 \text{ ed } x^2+y^2<1\} \end{cases}.$$

Si verifica facilmente che $f(x,y)=0$ per $y=x^2$ ed $y=x^4$, $f(x,y)<0$ per $y>x^2$ ed $y<x^4$, $f(x,y)>0$ per $x^4<y<x^2$; di conseguenza l'origine non può essere punto di massimo locale per il problema P, visto che in ogni suo intorno esistono punti in cui la funzione assume valori positivi. L'origine è però punto di massimo locale stretto rispetto ad ogni singola direzione appartenente alla regione ammissibile. Restringendo infatti la funzione f lungo la retta $x=0$ si ha $f(0,y)=-y^2$ e quindi, essendo $f(0,0)=0$, l'origine è di massimo locale stretto su essa; analogo è il risultato relativo alla retta $y=0$ lungo la quale $f(x,0)=-x^6$. Il risultato non cambia neanche applicando la restrizione lungo la retta $y=mx$, con $m>0$, poiché per $x\in(0,m)$, e quindi $y\in(0,m^2)$, la funzione assume valori negativi.

Assumendo invece delle ipotesi di concavità generalizzata nel punto x_0 è possibile caratterizzare, per mezzo del comportamento della funzione lungo le direzioni ammissibili, l'ottimalità locale del punto, ottimalità locale che sarà espressa sotto forma di ottimalità rispetto ad un insieme $B=I\cap S$, con $I\subseteq\Re^n$ intorno di x_0. Si inizia questa analisi con dei teoremi che sfruttano le classi di funzioni di tipo quasi-concavo.

Teorema 3.2.3 Si consideri il problema P con S stellato di vertice x_0; siano inoltre $I \subseteq \Re^n$ un intorno di x_0 e $B=I \cap S$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) x_0 è un punto di massimo per f rispetto alla regione $B \subseteq S$;

ii) x_0 è di massimo locale rispetto ai raggi x_0+r_d, $d \in \mathcal{D}_F$, ed f è semistrettamente quasi-concava in x_0 su B.

Se inoltre f è direzionalmente derivabile in x_0 le precedenti condizioni sono equivalenti alla successiva:

iii) $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) \leq 0$ $\forall d \in \mathcal{D}_F$, x_0 è di massimo locale rispetto ai raggi x_0+r_d, $d \in \mathcal{D}_F$, tali che $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)=0$ ed inoltre f è semistrettamente quasi-concava in x_0 su B.

Se inoltre f è di classe C^2 in x_0 le precedenti condizioni sono equivalenti alla successiva:

iv) $d^T \nabla f(x_0) \leq 0$ $\forall d \in \mathcal{D}_F$, $d^T \nabla^2 f(x_0) d \leq 0$ $\forall d \in \mathcal{D}_F$ tale che $d^T \nabla f(x_0)=0$, x_0 è di massimo locale rispetto ai raggi x_0+r_d, $d \in \mathcal{D}_F$, tali che $d^T \nabla f(x_0)=0$ e $d^T \nabla^2 f(x_0) d=0$ ed inoltre f è semistrettamente quasi-concava in x_0 su B.

Dim. i)⇒ii),iii),iv) Sia x_0 un punto di massimo per f rispetto alla regione $B \subseteq S$; ovviamente x_0 risulta di massimo locale rispetto ad ogni raggio x_0+r_d, $d \in \mathcal{D}_F$, inoltre la funzione f risulta banalmente semistrettamente quasi-concava dal momento che per definizione $\nexists y \in B$ tale che $f(y)>f(x_0)$. Le tesi seguono quindi dal fatto che non può esistere alcuna direzione $d \in \mathcal{D}_F$ per la quale risulti $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)>0$ oppure $d^T \nabla^2 f(x_0) d>0$ con $d^T \nabla f(x_0)=0$, poiché tali condizioni negano, per il teorema di permanenza del segno, l'ottimalità di x_0.

ii)⇒i) Se per assurdo x_0 non è un punto di massimo per f rispetto alla regione $B \subseteq S$ allora $\exists y \in B$ tale che $f(y)>f(x_0)$ e quindi, per la semistrettamente quasi-concavità di f in B, si ha $f(x_0+\lambda(y-x_0))>f(x_0)$ $\forall \lambda \in (0,1)$, condizione che nega l'ottimalità di x_0 rispetto al raggio x_0+r_d con $d=\frac{y-x_0}{\|y-x_0\|} \in \mathcal{D}_F$.

iii),iv)⇒ii) La tesi segue dal fatto che se per una direzione $d \in \mathcal{D}_F$ risulta $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)<0$ oppure $d^T \nabla^2 f(x_0) d<0$ con $d^T \nabla f(x_0)=0$, allora x_0 è, per il teorema di permanenza del segno, punto di massimo locale rispetto a tale direzione. ♦

Si hanno inoltre le seguenti condizioni sufficienti per l'ottimalità locale del vertice di un insieme stellato.

Teorema 3.2.4 Si consideri il problema P con S stellato di vertice x_0; siano inoltre $I \subseteq \Re^n$ un intorno di x_0 e $B=I \cap S$. Condizioni sufficienti affinché il punto x_0 sia un punto di massimo per f rispetto alla regione $B \subseteq S$ sono le seguenti:

i) x_0 è di massimo locale stretto rispetto ai raggi x_0+r_d, $d \in \mathcal{D}_F$, ed f è semi quasi-concava in x_0 su B;

ii) f è direzionalmente derivabile in x_0, $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) \leq 0$ $\forall d \in \mathcal{D}_F$, x_0 è di massimo locale stretto rispetto ai raggi x_0+r_d, $d \in \mathcal{D}_F$, tali che $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)=0$ ed inoltre f è semi quasi-concava in x_0 su B;

iii) f è di classe C^2 in x_0, $d^T \nabla f(x_0) \leq 0$ $\forall d \in \mathcal{D}_F$, $d^T \nabla^2 f(x_0) d \leq 0$ $\forall d \in \mathcal{D}_F$ tale che $d^T \nabla f(x_0)=0$, x_0 è di massimo locale stretto rispetto ai raggi x_0+r_d, $d \in \mathcal{D}_F$, tali che $d^T \nabla f(x_0)=0$ e $d^T \nabla^2 f(x_0) d=0$ ed inoltre f è semi quasi-concava in x_0 su B.

Dim. Dimostrazione analoga a quella del precedente Teorema 3.2.3. ♦

Relativamente ai punti di massimo locale stretto si hanno le seguenti condizioni.

Teorema 3.2.5 Si consideri il problema P con S stellato di vertice x_0; siano inoltre $I \subseteq \Re^n$ un intorno di x_0 e $B=I \cap S$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) x_0 è un punto di massimo stretto per f rispetto alla regione $B \subseteq S$;

ii) x_0 è di massimo locale [massimo locale stretto] rispetto ai raggi x_0+r_d, $d \in \mathcal{D}_F$, ed f è strettamente quasi-concava [quasi-concava] in x_0 su B.

Se inoltre f è direzionalmente derivabile in x_0 le precedenti condizioni sono equivalenti alla successiva:

iii) $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) \leq 0$ $\forall d \in \mathcal{D}_F$, x_0 è di massimo locale [massimo locale stretto] rispetto ai raggi x_0+r_d, $d \in \mathcal{D}_F$, tali che $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)=0$ ed inoltre f è strettamente quasi-concava [quasi-concava] in x_0 su B.

Se inoltre f è di classe C^2 in x_0 le precedenti condizioni sono equivalenti alla successiva:

iv) $d^T \nabla f(x_0) \leq 0$ $\forall d \in \mathcal{D}_F$, $d^T \nabla^2 f(x_0) d \leq 0$ $\forall d \in \mathcal{D}_F$ tale che $d^T \nabla f(x_0)=0$, x_0 è di massimo locale [massimo locale stretto] rispetto ai raggi x_0+r_d, $d \in \mathcal{D}_F$, tali che $d^T \nabla f(x_0)=0$ e $d^T \nabla^2 f(x_0) d=0$ ed inoltre f è strettamente quasi-concava [quasi-concava] in x_0 su B.

Dim. Dimostrazione analoga a quella del precedente Teorema 3.2.3. ♦

Di seguito vengono presentate altre condizioni necessarie e sufficienti di ottimalità che sfruttano le classi di funzioni di tipo pseudo-concavo.

Si osservi che il seguente teorema è relativo sia ai punti di massimo locale che a quelli di massimo locale stretto.

Teorema 3.2.6 Si consideri il problema P con S stellato di vertice x_0; siano inoltre $I \subseteq \Re^n$ un intorno di x_0 e $B=I \cap S$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) x_0 è un punto di massimo [massimo stretto] per f rispetto alla regione $B \subseteq S$;

ii) x_0 è di massimo locale rispetto ai raggi x_0+r_d, $d \in \mathcal{D}_F$, ed inoltre f è pseudo-concava [strettamente pseudo-concava] in x_0 su B.

Se inoltre f è direzionalmente derivabile in x_0 le precedenti condizioni sono equivalenti alla successiva:

iii) $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) \leq 0 \ \forall d \in \mathcal{D}_F$ ed inoltre f è pseudo-concava [strettamente pseudo-concava] in x_0 su B.

Dim. i)⇒ii),iii) La dimostrazione della tesi è analoga a quella presentata nel Teorema 3.2.3 relativamente al caso i)⇒ii),iii),iv).

ii)⇒i) Se f è pseudo-concava [strettamente pseudo-concava] in x_0 su B allora è anche semistrettamente quasi-concava; la tesi segue quindi dal Teorema 3.2.3.

iii)⇒i) Per la sufficienza si supponga per assurdo che x_0 non sia di massimo per f rispetto alla regione $B \subseteq S$ e che quindi $\exists y \in B$ tale che $f(y)>f(x_0)$. Essendo f pseudo-concava e direzionalmente derivabile in x_0 risulta, per il Teorema 3.2.1, che $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)>0$ con $d=\frac{y-x_0}{\|y-x_0\|} \in \mathcal{D}_F$, condizione che contraddice l'ipotesi. ♦

Si osservi che le precedenti condizioni necessarie e sufficienti di ottimalità locale per il vertice di un insieme stellato, forniscono implicitamente anche le seguenti condizioni di ottimalità globale, ottenibili assumendo $I=\Re^n$ e $B=S$.

Corollario 3.2.1 Si consideri il problema P con S insieme stellato di vertice x_0. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) x_0 è un punto di massimo globale per f rispetto alla regione S;

ii) x_0 è di massimo locale rispetto ai raggi x_0+r_d, $d \in \mathcal{D}_F$, ed f è semistrettamente quasi-concava in x_0 su S.

Se inoltre f è direzionalmente derivabile in x_0 le precedenti condizioni sono equivalenti alla successiva:

iii) $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) \leq 0 \ \forall d \in \mathcal{D}_F$, x_0 è di massimo locale rispetto ai raggi x_0+r_d, $d \in \mathcal{D}_F$, tali che $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)=0$ ed inoltre f è semistrettamente quasi-concava in x_0 su S.

Se inoltre f è di classe C^2 in x_0 le precedenti condizioni sono equivalenti alla successiva:

iv) $d^T\nabla f(x_0)\leq 0\ \forall d\in \mathcal{D}_F$, $d^T\nabla^2 f(x_0)d\leq 0\ \forall d\in \mathcal{D}_F$ tale che $d^T\nabla f(x_0)=0$, x_0 è di massimo locale rispetto ai raggi x_0+r_d, $d\in \mathcal{D}_F$, tali che $d^T\nabla f(x_0)=0$ e $d^T\nabla^2 f(x_0)d=0$ ed inoltre f è semistrettamente quasi-concava in x_0 su S.

Corollario 3.2.2 Si consideri il problema P con S stellato di vertice x_0.
Condizioni sufficienti affinché il punto x_0 sia un punto di massimo globale per f rispetto alla regione S sono le seguenti:

i) x_0 è di massimo locale stretto rispetto ai raggi x_0+r_d, $d\in \mathcal{D}_F$, ed f è semi quasi-concava in x_0 su S;

ii) f è direzionalmente derivabile in x_0, $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)\leq 0\ \forall d\in \mathcal{D}_F$, x_0 è di massimo locale stretto rispetto ai raggi x_0+r_d, $d\in \mathcal{D}_F$, tali che $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)=0$ ed inoltre f è semi quasi-concava in x_0 su S;

iii) f è di classe C^2 in x_0, $d^T\nabla f(x_0)\leq 0\ \forall d\in \mathcal{D}_F$, $d^T\nabla^2 f(x_0)d\leq 0\ \forall d\in \mathcal{D}_F$ tale che $d^T\nabla f(x_0)=0$, x_0 è di massimo locale stretto rispetto ai raggi x_0+r_d, $d\in \mathcal{D}_F$, tali che $d^T\nabla f(x_0)=0$ e $d^T\nabla^2 f(x_0)d=0$ ed inoltre f è semi quasi-concava in x_0 su S.

Corollario 3.2.3 Si consideri il problema P con S insieme stellato di vertice x_0.
Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) x_0 è un punto di massimo globale stretto per f rispetto alla regione S;

ii) x_0 è di massimo locale [massimo locale stretto] rispetto ai raggi x_0+r_d, $d\in \mathcal{D}_F$, ed f è strettamente quasi-concava [quasi-concava] in x_0 su S.

Se inoltre f è direzionalmente derivabile in x_0 le precedenti condizioni sono equivalenti alla successiva:

iii) $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)\leq 0\ \forall d\in \mathcal{D}_F$, x_0 è di massimo locale [massimo locale stretto] rispetto ai raggi x_0+r_d, $d\in \mathcal{D}_F$, tali che $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)=0$ ed inoltre f è strettamente quasi-concava [quasi-concava] in x_0 su S.

Se inoltre f è di classe C^2 in x_0 le precedenti condizioni sono equivalenti alla successiva:

iv) $d^T\nabla f(x_0)\leq 0\ \forall d\in \mathcal{D}_F$, $d^T\nabla^2 f(x_0)d\leq 0\ \forall d\in \mathcal{D}_F$ tale che $d^T\nabla f(x_0)=0$, x_0 è di massimo locale [massimo locale stretto] rispetto ai raggi x_0+r_d, $d\in \mathcal{D}_F$, tali che $d^T\nabla f(x_0)=0$ e $d^T\nabla^2 f(x_0)d=0$ ed inoltre f è strettamente quasi-concava [quasi-concava] in x_0 su S.

Corollario 3.2.4 Si consideri il problema P con S insieme stellato di vertice x_0. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) x_0 è un punto di massimo globale [massimo globale stretto] per f rispetto alla regione S;

ii) x_0 è di massimo locale rispetto ai raggi x_0+r_d, $d\in \mathcal{D}_F$, ed inoltre f è pseudo-concava [strettamente pseudo-concava] in x_0 su S.

Se inoltre f è direzionalmente derivabile in x_0 le precedenti condizioni sono equivalenti alla successiva:

iii) $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)\leq 0$ $\forall d\in \mathcal{D}_F$ ed inoltre f è pseudo-concava [strettamente pseudo-concava] in x_0 su S.

3.2.4. Ottimalità globale di un massimo locale

Come è noto la classe più ampia di funzioni concave generalizzate per le quali un punto di massimo locale è anche globale è quella delle funzioni semistrettamente quasi-concave; in particolare se la funzione è strettamente quasi-concava allora un punto di ottimo locale è l'unico punto di massimo globale. Per quanto riguarda invece le funzioni quasi-concave è noto che un punto di massimo locale stretto è anche l'unico punto di massimo globale. La nuova classe delle funzioni semi quasi-concave [8] permette di completare questo panorama relativo all'ottimalità globale di un massimo locale, come è mostrato nel seguente teorema che mostra tali risultati in forma più generale, riferendosi al vertice di un insieme stellato.

Corollario 3.2.5 Si consideri il problema P con S insieme stellato di vertice x_0.

i) Se f è semistrettamente quasi-concava in x_0 su S ed x_0 è di massimo locale per f su S allora x_0 è anche un punto di massimo globale per f su S.

ii) Se f è strettamente quasi-concava in x_0 su S ed x_0 è di massimo locale per f su S allora x_0 è anche l'unico punto di massimo globale stretto per f su S.

iii) Se f è semi quasi-concava in x_0 su S ed x_0 è di massimo locale stretto per f su S allora x_0 è anche un punto di massimo globale per f su S.

iv) Se f è quasi-concava in x_0 su S ed x_0 è di massimo locale stretto per f su S allora x_0 è anche l'unico punto di massimo globale stretto per f su S.

Dim. Le tesi seguono direttamente dai Corollari 3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3. ♦

Nel caso in cui S sia un insieme convesso e la funzione f sia concava generalizzata in tutto S si hanno i seguenti risultati, espressi nella forma più comunemente usata in letteratura.

Corollario 3.2.6 Si consideri il problema P con S insieme convesso.

i) Se f è semistrettamente quasi-concava allora un punto di massimo locale per f su S è anche un punto di massimo globale per f su S.

ii) Se f è strettamente quasi-concava allora un punto di massimo locale per f su S è anche l'unico punto di massimo globale stretto per f su S.

iii) Se f è semi quasi-concava allora un punto di massimo locale stretto per f su S è anche un punto di massimo globale per f su S.

iv) Se f è quasi-concava allora un punto di massimo locale stretto per f su S è anche l'unico punto di massimo globale stretto per f su S.

Nel seguente esempio 3.2.4 i) si mette in evidenza che in assenza di ipotesi di semistretta quasi-concavità niente si può dire, in generale, sull'ottimalità globale di un massimo locale non stretto; l'esempio 3.2.4 ii) invece evidenzia come sia fondamentale l'ipotesi di quasi-concavità per avere un unico punto di massimo globale.

Esempi 3.2.4

i) $f(x)=x+|x|$: è qcv (e quindi sm.qcv) ma non ss.qcv, ogni punto $x<0$ è di massimo locale non stretto ma non è di massimo globale.

ii) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x\neq 0,1 \\ 1 & \text{per } x=0,1 \end{cases}$: è sm.qcv ma non qcv; i punti $x=0,1$ sono sia di massimo locale stretto sia di massimo globale (che non è quindi unico).

3.2.5. Ottimalità globale di un punto critico

Come è noto, nell'ambito della concavità generalizzata, la classe di funzioni più ampia per le quali un punto stazionario è anche un punto di massimo globale è quella delle funzioni differenziabili pseudo-concave; vale al riguardo il seguente corollario relativo al vertice di un insieme stellato.

Corollario 3.2.7 Si consideri il problema P con S insieme stellato di vertice x_0 ed f differenziabile in x_0.

i) Se f è pseudo-concava in x_0 su S ed x_0 è un punto critico allora x_0 è anche un punto di massimo per f rispetto alla regione S.

ii) Se f è strettamente pseudo-concava in x_0 su S ed x_0 è un punto critico allora x_0 è anche l'unico punto di massimo stretto per f rispetto alla regione S.

Dim. Le tesi seguono direttamente dal Corollario 3.2.4. ♦

Nel caso in cui S sia un insieme convesso e la funzione f sia pseudo-concava in tutto S si hanno i seguenti risultati, espressi nella forma più comunemente usata in letteratura [10].

Corollario 3.2.8 Si consideri il problema P con S insieme convesso ed f differenziabile in x_0.

i) Se f è pseudo-concava in S allora un punto critico è anche un punto di massimo globale per f su S.

ii) Se f è strettamente pseudo-concava in S allora un punto critico è anche l'unico punto di massimo globale stretto per f su S.

Nel seguente esempio 3.2.5 i) si mette in evidenza che le funzioni di tipo quasi-concavo non sono sufficienti a garantire l'ottimalità globale di un punto critico; l'esempio 3.2.5 ii) invece evidenzia come sia fondamentale l'ipotesi di stretta pseudo-concavità per avere un unico punto critico che sia di massimo globale.

Esempi 3.2.5

i) $f(x)=x^3$: è s.qcv (e quindi ss.qcv) ma non pcv, $x_0=0$ è un punto critico ma non è di massimo globale.

ii) $f(x)=k$: è pcv ma non s.pcv; tutti i punti sono critici e di massimo globale (che non è quindi unico).

3.2.6. Sufficienza delle condizioni di Karush-Kuhn-Tucker

Come è noto, le funzioni concave generalizzate permettono di determinare una ampia classe di problemi di programmazione differenziabile per la quale le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker divengono condizioni sufficienti di ottimalità globale. Si consideri il problema di massimo vincolato nella forma:

$$P: \begin{cases} \max f(x) \\ g_i(x) \geq 0 \;\; i=1,\dots,m \\ x \in X \subseteq \Re^n \end{cases},$$

dove X è un insieme aperto, $f: X \to \Re$ e $g_i: X \to \Re$, e la regione ammissibile è $RA = \{x \in X \subseteq \Re^n: g_i(x) \geq 0 \;\; i=1,\dots,m\}$.

In ipotesi di differenziabilità della funzione obiettivo e delle funzioni vincolari ed in presenza di una condizione di qualifica sui vincoli, un punto di massimo locale verifica le cosiddette condizioni di Karush-Kuhn-Tucker (K-K-T).

Teorema 3.2.7 (***Karush-Kuhn-Tucker***) Sia P un problema di programmazione differenziabile e sia $\bar{x}$ un punto di massimo locale. Se in $\bar{x}$ è verificata una condizione di qualifica dei vincoli allora esistono m numeri non-negativi $\bar{\lambda}_1,\dots,\bar{\lambda}_m$ tali che:

$$\text{(K-K-T)} \begin{cases} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \\ \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0 \;\; i=1,\dots,m \\ g_i(\bar{x}) \geq 0 \;\; i=1,\dots,m \\ \bar{\lambda}_i \geq 0 \;\; i=1,\dots,m \end{cases}$$

Come è noto le condizioni (K-K-T) rappresentano soltanto una condizione necessaria ma non sufficiente di ottimalità; per completezza si ricorda il seguente teorema che evidenzia il ruolo della concavità generalizzata nello stabilire la sufficienza di tali condizioni.

Teorema 3.2.8 Sia P un problema di programmazione differenziabile dove X è un insieme convesso, la funzione obiettivo f è pseudo-concava e le funzioni vincolari $g_1,\dots,g_m$ sono quasi-concave.

Se $\bar{x}$ verifica le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker allora $\bar{x}$ è un punto di massimo globale per il problema P.

Dim. Si supponga per assurdo che esista un punto $\tilde{y}\in X$ tale che $f(\tilde{y})>f(\bar{x})$ e $g_i(\tilde{y})\geq 0$ $\forall i=1,\dots,m$. Per la pseudo-concavità della funzione obiettivo f si ha:

$$(\tilde{y}-\bar{x})^T\nabla f(\bar{x})>0 \qquad (3.2.1).$$

Si dimostra adesso preliminarmente che, essendo le funzioni g_i, $i=1,\dots,m$, quasi-concave, le funzioni $G_i=\bar{\lambda}_i g_i$ sono ancora quasi-concave. Se $\bar{\lambda}_i=0$ la funzione G_i è costante, quindi concava ed in particolare quasi-concava. Se $\bar{\lambda}_i>0$, presi due qualsiasi punti $x,y\in X$, $G_i(y)\geq G_i(x)$ implica $g_i(y)\geq g_i(x)$ che a sua volta, per la quasi-concavità di g_i, implica $(y-x)^T\nabla g_i(x)\geq 0$ da cui otteniamo $(y-x)^T\nabla G_i(x)\geq 0$ ed anche in questo caso G_i risulta quindi quasi-concava.

Poiché per ogni $i=1,\dots,m$ risulta $G_i(\tilde{y})=\bar{\lambda}_i g_i(\tilde{y})\geq 0=\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x})=G_i(\bar{x})$ abbiamo, per la quasi-concavità delle G_i, $(\tilde{y}-\bar{x})^T\nabla G_i(\bar{x})=\bar{\lambda}_i(\tilde{y}-\bar{x})^T\nabla g_i(\bar{x})\geq 0$ da cui otteniamo, per la prima delle condizioni di Karush-Kuhn-Tucker:

$$0\geq(\tilde{y}-\bar{x})^T\sum_{i=1}^{m}-\bar{\lambda}_i\nabla g_i(\bar{x})=(\tilde{y}-\bar{x})^T\nabla f(\bar{x}),$$

disuguaglianza che è in contraddizione con la (3.2.1). ♦

Il precedente teorema è particolarmente utile nella ottimizzazione matematica ed in economia (si veda ad esempio il comportamento del consumatore); mentre infatti in generale le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker (K-K-T), che forniscono un sistema facilmente risolubile, indicano soltanto i punti candidati ad essere di ottimo, sotto ipotesi di quasi-concavità dei vincoli e di pseudo-concavità della funzione obiettivo garantiscono direttamente l'ottimalità del punto.

3.2.7. Ottimalità locale e cono tangente

In questo sottoparagrafo l'ottimalità di un punto ammissibile x_0 sarà caratterizzata per mezzo delle direzioni del cono tangente $T(S,x_0)$ alla regione ammissibile S nel punto x_0 [1].

Il precedente Esempio 3.2.3 ha messo in evidenzia che l'ottimalità locale lungo ogni direzione ammissibile non implica l'ottimalità locale rispetto a tutta la regione ammissibile. In quell'esempio la regione ammissibile coincide con il

cono tangente e con il cono delle direzioni ammissibili; di conseguenza si può affermare che, in generale, non esiste alcuna relazione tra l'ottimalità locale rispetto alle singole direzioni ammissibili e l'ottimalità rispetto al cono tangente, esattamente come non vi è relazione neanche tra l'ottimalità locale rispetto alla regione ammissibile e l'ottimalità locale rispetto alle direzioni del cono tangente. Non vi è alcuna relazione però neppure tra l'ottimalità rispetto alla regione ammissibile e l'ottimalità rispetto all'intero cono tangente $T(S,x_0)$.
Al riguardo, il seguente Esempio 3.2.6 i) mostra un problema in cui il punto x_0 è di ottimo rispetto alla regione S ma non rispetto al cono tangente, l'Esempio 3.2.6 ii) mostra un problema in cui il punto x_0 è di ottimo rispetto al cono tangente ma non rispetto alla regione S.

Esempi 3.2.6

Si considerino i seguenti problemi scalari di massimo del tipo $P:\begin{cases} \max f(x,y) \\ (x,y)\in S\subseteq\Re^2 \end{cases}$.

i) Sia $f(x,y)=-y$ ed $S=\{(x,y)\in\Re^2: x^3+y\geq0\}$; si verifica facilmente che il problema non ammette ottimo finito, mentre l'origine $x_0=(0,0)$ è di massimo locale rispetto al cono tangente $T(S,x_0)=\{(x,y)\in\Re^2: y\geq0\}$.

ii) Sia $f(x,y)=x^2-y$ ed $S=\{(x,y)\in\Re^2: x^2-y\leq0\}$; si verifica facilmente che l'origine $x_0=(0,0)$ è di massimo locale per il problema, problema che invece non ammette ottimo finito rispetto al cono tangente $T(S,x_0)=\{(x,y)\in\Re^2: y\geq0\}$.

Verrà di seguito dimostrato che per poter caratterizzare l'ottimalità di un punto sarà necessario approfondire lo studio della funzione obiettivo relativamente a quelle direzioni del cono tangente rispetto alle quali la derivata direzionale della funzione obiettivo è nulla.

Teorema 3.2.9 Si consideri il problema P e si supponga che f sia direzionalmente derivabile con regolarità nel punto $x_0\in S$ di accumulazione per S.
Il punto x_0 è di massimo locale [massimo locale stretto] rispetto alla regione S se e solo se $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)\leq0$ $\forall d\in\mathcal{D}_T$ ed inoltre per ogni direzione $d\in\mathcal{D}_T$ tale che $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)=0$ esiste un $\varepsilon>0$ tale che il punto x_0 è di massimo locale [massimo locale stretto] rispetto alla regione $S\cap(x_0+K(d,\varepsilon))$.

Dim. Sia x_0 un punto di massimo locale [massimo locale stretto] rispetto alla regione S. Banalmente lo è anche rispetto alle regioni del tipo $S\cap(x_0+K(d,\varepsilon))$, con $\varepsilon>0$ qualsiasi. Per definizione inoltre $f(x_k)\leq f(x_0)$ $[f(x_k)<f(x_0)]$ $\forall y\in I\cap S$, con

$I \subseteq \Re^n$ opportuno intorno di x_0; in particolare, per la definizione dell'insieme $\mathcal{D}_T$, si può determinare per ogni direzione $d \in \mathcal{D}_T$ una successione $\{x_k\} \subset I \cap S \setminus \{x_0\}$ convergente ad x_0, tale che $\lim_{k \to +\infty} \frac{x_k - x_0}{\|x_k - x_0\|} = d \in \mathcal{D}_T$ ed $f(x_k) \le f(x_0)$ $[f(x_k) < f(x_0)]$; si ha quindi $\frac{f(x_k)-f(x_0)}{\|x_k - x_0\|} \le 0$ da cui risulta per il teorema di permanenza del segno, essendo f direzionalmente derivabile con regolarità, $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) = \lim_{k \to +\infty} \frac{f(x_k)-f(x_0)}{\|x_k - x_0\|} \le 0$.

Per la sufficienza si supponga per assurdo che x_0 non sia localmente di massimo [massimo stretto] rispetto alla regione S. E' allora possibile determinare una successione $\{x_k\} \subset S \setminus \{x_0\}$ convergente ad x_0 tale che $f(x_k) > f(x_0)$ $[f(x_k) \ge f(x_0)]$; tale successione permette di definire la successione di direzioni $d_k = \frac{x_k - x_0}{\|x_k - x_0\|}$ appartenenti alla sfera unitaria $\{d \in \Re^n : \|d\| = 1\}$ che è un insieme compatto, di conseguenza dalla successione $\{x_k\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{x_{k_j}\} \subset \{x_k\}$ convergente ad x_0 e tale che $\tilde{d} = \lim_{j \to +\infty} d_{k_j} = \lim_{j \to +\infty} \frac{x_{k_j} - x_0}{\|x_{k_j} - x_0\|} \in \mathcal{D}_T$; per semplicità di notazione si può quindi supporre, senza perdere la generalità, che sia $\tilde{d} = \lim_{k \to +\infty} \frac{x_k - x_0}{\|x_k - x_0\|} \in \mathcal{D}_T$. Poiché $f(x_k) > f(x_0)$ $[f(x_k) \ge f(x_0)]$ si ha $\frac{f(x_k)-f(x_0)}{\|x_k - x_0\|} \ge 0$ e quindi per il teorema di permanenza del segno, essendo f direzionalmente derivabile con regolarità, risulta $\frac{\partial f}{\partial \tilde{d}}(x_0) = \lim_{k \to +\infty} \frac{f(x_k)-f(x_0)}{\|x_k - x_0\|} \ge 0$; per ipotesi pertanto, poiché $\tilde{d} \in \mathcal{D}_T$, deve essere $\frac{\partial f}{\partial \tilde{d}}(x_0) = 0$.

Fissato un valore reale $\varepsilon > 0$, poiché $\lim_{k \to +\infty} \frac{x_k - x_0}{\|x_k - x_0\|} = \tilde{d} \in \mathcal{D}_T$, la successione $\{x_k\}$ convergente ad x_0 deve essere, da un certo indice in poi, contenuta in $(S \setminus \{x_0\}) \cap (x_0 + K(\tilde{d}, \varepsilon))$ ma ciò è assurdo, dal momento che per ipotesi x_0 è localmente di massimo [massimo stretto] rispetto ad $S \cap (x_0 + K(\tilde{d}, \varepsilon))$. ♦

Direttamente dal precedente Teorema 3.2.9 si ottengono le due seguenti pratiche condizioni di ottimalità.

Corollario 3.2.9 Si consideri il problema P e si supponga che f sia direzionalmente derivabile con regolarità nel punto $x_0 \in S$ di accumulazione per S.

i) Se x_0 è un punto di massimo locale allora $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) \le 0$ $\forall d \in \mathcal{D}_T$.

ii) Se $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) < 0$ $\forall d \in \mathcal{D}_T$ allora x_0 è un punto di massimo locale stretto.

Osservazione 3.2.1

Per meglio comprendere l'importanza delle ipotesi del Teorema 3.2.9, si considerino nuovamente gli Esempi 3.2.6.

i) Sia $f(x,y)=-y$, $S=\{(x,y)\in\Re^2: x^3+y\geq 0\}$, $x_0=(0,0)$ e $T(S,x_0)=\{(x,y)\in\Re^2: y\geq 0\}$. Risulta $\nabla f(x_0)=(0,-1)$ e di conseguenza si ha $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)=d^T\nabla f(x_0)\leq 0$ $\forall d\in\mathcal{D}_T$. In particolare è $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)=d^T\nabla f(x_0)=0$ per le direzioni $\bar{d}=(1,0)\in\mathcal{D}_T$ e $\tilde{d}=(-1,0)\in\mathcal{D}_T$; per la direzione $\bar{d}=(1,0)\in\mathcal{D}_T$ si verifica però che $\forall\varepsilon>0$ il punto x_0 non è di massimo locale rispetto alla regione $S\cap(x_0+K(\bar{d},\varepsilon))$.

ii) Sia $f(x,y)=x^2-y$, $S=\{(x,y)\in\Re^2: x^2-y\leq 0\}$, $x_0=(0,0)$ e $T(S,x_0)=\{(x,y)\in\Re^2: y\geq 0\}$. Risulta $\nabla f(x_0)=(0,-1)$, di conseguenza si ha $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)=d^T\nabla f(x_0)\leq 0$ $\forall d\in\mathcal{D}_T$. In particolare è $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)=d^T\nabla f(x_0)=0$ soltanto per le direzioni $\bar{d}=(1,0)\in\mathcal{D}_T$ e $\tilde{d}=(-1,0)\in\mathcal{D}_T$; per entrambe le direzioni si verifica che esiste un $\varepsilon>0$ tale che il punto x_0 è di massimo locale rispetto alle regioni $S\cap(x_0+K(\bar{d},\varepsilon))$ ed $S\cap(x_0+K(\tilde{d},\varepsilon))$.

Vale inoltre la seguente condizione sufficiente del secondo ordine.

Teorema 3.2.10 Si consideri il problema P e si supponga che f sia una funzione scalare di classe $\mathcal{C}^2$ nel vertice x_0. Condizione sufficiente affinché il punto x_0 sia di massimo locale [massimo locale stretto] rispetto alla regione S e che sia $d^T\nabla f(x_0)\leq 0$ $\forall d\in\mathcal{D}_T$, $d^T\nabla^2 f(x_0)d\leq 0$ $\forall d\in\mathcal{D}_T$ tale che $d^T\nabla f(x_0)=0$ ed inoltre per ogni direzione $d\in\mathcal{D}_T$ tale che $d^T\nabla F(x_0)=0$ e $d^T\nabla^2 F(x_0)d=0$ esiste un $\varepsilon>0$ tale che il punto x_0 è di massimo locale [massimo locale stretto] rispetto alla regione $S\cap(x_0+K(d,\varepsilon))$.

Dim. Si supponga per assurdo che il punto x_0 non sia di massimo locale per il problema; per le ipotesi e per il Teorema 3.2.9 deve allora esistere una direzione $\bar{d}\in\mathcal{D}_T$ tale che $\bar{d}^T\nabla f(x_0)=0$, $\bar{d}^T\nabla^2 f(x_0)\bar{d}<0$ e $\forall\varepsilon>0$ il punto x_0 non è di massimo locale [massimo locale stretto] rispetto alla regione $S\cap(x_0+K(d,\varepsilon))$. E' quindi possibile determinare una successione di punti $\{\bar{x}_k\}\subset S\setminus\{x_0\}$, $\bar{x}_k\to x_0$, tale che

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\bar{x}_k-x_0}{\|\bar{x}_k-x_0\|}=\bar{d} \text{ ed } f(\bar{x}_k)>f(x_0)\ \forall k>0.$$

Posto quindi $\lambda_k=\|\bar{x}_k-x_0\|$ e $d_k=\dfrac{\bar{x}_k-x_0}{\|\bar{x}_k-x_0\|}$, si ha per il polinomio di Taylor con resto di Peano arrestato al secondo ordine:

$$f(\bar{x}_k)=f(x_0)+\lambda_k d_k^T\nabla f(x_0)+\frac{1}{2}\lambda_k^2 d_k^T\nabla^2 f(x_0)d_k+\lambda_k^2\sigma(\lambda_k,0) \quad \text{con} \quad \lim_{k\to+\infty}\sigma(\lambda_k,0)=0$$

da cui, essendo $f(\bar{x}_k)>f(x_0)$, $\lambda_k>0$ e $d_k^T\nabla f(x_0)\leq 0$ $\forall k>0$, si ottiene:

$$\frac{1}{2}\lambda_k^2 d_k^T\nabla^2 f(x_0)d_k+\lambda_k^2\sigma(\lambda_k,0)>0 \quad \text{ovvero} \quad d_k^T\nabla^2 f(x_0)d_k>-2\sigma(\lambda_k,0).$$

Passando al limite per $k\to+\infty$ si ha così $\bar{d}^T\nabla^2 f(x_0)\bar{d}\geq 0$, condizione assurda. ♦

Corollario 3.2.10 Si consideri il problema P e si supponga che f sia scalare e di classe $\mathcal{C}^2$ nel vertice x_0. Se $d^T\nabla f(x_0)\leq 0$ $\forall d\in\mathcal{D}_T$ ed inoltre $d^T\nabla^2 f(x_0)d<0$ $\forall d\in\mathcal{D}_T$ tale che $d^T\nabla f(x_0)=0$ allora x_0 è un punto di massimo locale stretto.

I seguenti Esempi 3.2.7 mostrano come la condizione sufficiente del secondo ordine espressa nel Teorema 3.2.7 non sia anche necessaria; in essi vengono esaminati due problemi scalari in cui il punto x_0 è di massimo locale per f rispetto ad S, nel primo però esiste una direzione $d\in\mathcal{D}_T$ in cui è $d^T\nabla f(x_0)=0$ ed inoltre $d^T\nabla^2 f(x_0)d>0$, nel secondo invece $\exists d\in\mathcal{D}_T$ in cui è $d^T\nabla f(x_0)=0$ e $d^T\nabla^2 f(x_0)d<0$; in corrispondenza di una direzione $d\in\mathcal{D}_T$ del cono tangente in cui la derivata direzionale è nulla, niente si può quindi dire in generale sul segno di $d^T\nabla^2 f(x_0)d$.

Esempi 3.2.7

Si considerino i seguenti problemi scalari di massimo del tipo $P:\begin{cases}\max f(x,y)\\(x,y)\in S\subseteq\Re^2\end{cases}$.

i) Sia $f(x,y)=x^2-y$ ed $S=\{(x,y)\in\Re^2:\ x^2-y\leq 0\}$; è già stato detto, Esempi 3.2.6 ii), che $x_0=(0,0)$ è di massimo locale per il problema; si verifica inoltre facilmente che, essendo $\nabla^2 f(x_0)=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}$, in corrispondenza della direzione $\bar{d}=(1,0)\in\mathcal{D}_T$ si ha $\bar{d}^T\nabla f(x_0)=0$ e $\bar{d}^T\nabla^2 f(x_0)\bar{d}=2>0$.

ii) Sia $f(x,y)=-x^2+y$ ed $S=\{(x,y)\in\Re^2:\ -x^2+y\leq 0\}$; l'origine $x_0=(0,0)$ è ancora punto di massimo locale per il problema; risulta però che in corrispondenza della direzione $\bar{d}=(1,0)\in\mathcal{D}_T$ si ha $\bar{d}^T\nabla f(x_0)=0$ e $\bar{d}^T\nabla^2 f(x_0)\bar{d}=-2<0$.

Nel caso in cui la regione ammissibile S sia tale che risulta $\mathcal{D}_T=\mathcal{D}_F$ (come accade quando x_0 è il vertice di una regione poliedrica) la condizione sufficiente di cui al Teorema 3.2.10 diviene anche necessaria.

Teorema 3.2.11 Si consideri il problema P, con S tale che $\mathcal{D}_T=\mathcal{D}_F$ ed f di classe C^2 nel punto x_0. Condizione necessaria affinché il punto x_0 sia di massimo locale [massimo locale stretto] rispetto alla regione S è che sia $d^T\nabla f(x_0)\leq 0$ $\forall d\in \mathcal{D}_F$, $d^T\nabla^2 f(x_0)d\leq 0$ $\forall d\in \mathcal{D}_F$ tale che $d^T\nabla f(x_0)=0$ ed inoltre per ogni direzione $d\in \mathcal{D}_F$ tale che $d^T\nabla f(x_0)=0$ e $d^T\nabla^2 f(x_0)d=0$ esista un $\varepsilon>0$ tale che x_0 sia di massimo locale [massimo locale stretto] rispetto alla regione $S\cap(x_0+K(d,\varepsilon))$.

Dim. La tesi segue dal Teorema 3.2.9 osservando che se esistesse una direzione $d\in \mathcal{D}_F$ tale che $d^T\nabla F(x_0)=0$ e $d^T\nabla^2 F(x_0)d>0$ il punto x_0 non sarebbe di massimo locale per il problema. ♦

3.2.8. Condizioni di ottimalità per regioni ammissibili regolari

In questo sottoparagrafo verranno considerati particolari problemi di massimo vincolato aventi una funzione obiettivo differenziabile in un determinato punto ammissibile x_0 ed una regione ammissibile "regolare" in x_0, ovvero una regione per la quale il cono delle direzioni ammissibili da x_0 e/o il cono tangente in x_0 sono dei coni poliedrici o, equivalentemente, coni finitamente generati [4].

Queste due situazioni non sono affatto rare, basti considerare un qualsiasi problema di programmazione matematica avente come regione ammissibile un poliedro; inoltre è spesso utile, nell'indagare l'ottimalità di un punto $x_0\in S$, sostituire alla regione ammissibile S un insieme più "regolare" proprio come il cono delle direzioni ammissibili in x_0 di S, il cono linearizzante in x_0 di S o il cono tangente in x_0 di S.

Come è stato mostrato nei precedenti sottoparagrafi 3.2.3 e 3.2.7 nel caso differenziabile le condizioni di ottimalità si basano sul verificarsi o meno delle condizioni $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)\leq 0$ oppure $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)<0$ per ogni direzione d che sia ammissibile od appartenente al cono tangente; nel caso in cui tali coni siano finitamente generati tali condizioni possono essere equivalentemente espresse nel modo seguente.

---

[4] Per pura completezza si ricorda che un cono di vertice l'origine $C\subseteq\Re^n$ è detto:

i) poliedrico se $C=\{x\in\Re^n: Mx\geq 0\}$, con $M\in\Re^{m\times n}$;

ii) finitamente generato dalle direzioni $u_i\in\Re^n$, $i=1,\dots,m$, se $C=\{x\in\Re^n: x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i u_i,\ \lambda_i\geq 0\ \forall i=1,\dots,m\}$.

Si osservi che gli insiemi cono poliedrico e cono finitamente generato sono insiemi chiusi e convessi, si ricordi inoltre che un cono non vuoto è poliedrico se e solo se è finitamente generato.

Teorema 3.2.12 Sia f una funzione scalare $f:A \to \Re$, definita sull'insieme aperto $A \subseteq \Re^n$ e differenziabile in un punto $x_0 \in A$; sia inoltre $C \subset \Re^n$ un cono di vertice l'origine finitamente generato dalle direzioni $u_i \in \Re^n$, $i=1,\dots,m$. Risulta:

i) $d^T\nabla f(x_0) \leq 0$ $\forall d \in C$, $\|d\|=1$, se e solo se $u_i^T\nabla f(x_0) \leq 0$ $\forall i=1,\dots,m$;

ii) $d^T\nabla f(x_0) < 0$ $\forall d \in C$, $\|d\|=1$, se e solo se $u_i^T\nabla f(x_0) < 0$ $\forall i=1,\dots,m$.

Dim. $\Rightarrow$) In entrambi i casi la tesi segue direttamente dal fatto che per definizione le direzioni $u_i \in \Re^n$, $i=1,\dots,m$, appartengono a C ed hanno norma unitaria.

$\Leftarrow$) Sia $d \in \Re^n$, $\|d\|=1$, una qualsiasi direzione di C; per la definizione di cono finitamente generato ed essendo $d \neq 0$, esistono dei valori $\lambda_i \geq 0$, $i=1,\dots,m$, tali che $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i > 0$ e $d=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i u_i$; si ha pertanto che $d^T\nabla f(x_0)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i u_i^T\nabla f(x_0)$, da cui le tesi. ♦

Per mezzo del Teorema precedente si ottengono i seguenti corollari.

Corollario 3.2.11 Si consideri il problema P con S insieme stellato di vertice x_0 ed f differenziabile in x_0; si supponga infine che sia:

$$F(S,x_0)=\{x \in \Re^n:\ x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i u_i,\ \lambda_i \geq 0\ \forall i=1,\dots,m\}.$$

Il punto x_0 è di massimo globale [massimo globale stretto] per f rispetto alla regione S se e solo se risulta $u_i^T\nabla f(x_0) \leq 0$ $\forall i=1,\dots,m$ ed inoltre f è pseudo-concava [strettamente pseudo-concava] in x_0 su S.

Corollario 3.2.12 Si consideri il problema P e si supponga che f sia differenziabile nel punto $x_0 \in S$ di accumulazione per S; si supponga infine che sia:

$$T(S,x_0)=\{x \in \Re^n:\ x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i u_i,\ \lambda_i \geq 0\ \forall i=1,\dots,m\}.$$

i) Se x_0 è un punto di massimo locale allora $u_i^T\nabla f(x_0) \leq 0$ $\forall i=1,\dots,m$.

ii) Se $u_i^T\nabla f(x_0) < 0$ $\forall i=1,\dots,m$ allora x_0 è un punto di massimo locale stretto.

Di fatto diviene estremamente semplice verificare le condizioni di ottimalità, dal momento che è sufficiente determinare il comportamento della derivata direzionale lungo le sole direzioni $u_i \in \Re^n$, $i=1,\dots,m$.

Caso ancor più particolare è quello in cui il cono $C \subset \Re^n$ è l'ortante positivo di $\Re^n$, ovvero è finitamente generato dalla base canonica di $\Re^n$; in tal caso infatti il valore $u_i^T\nabla f(x_0)$ altro non è che la i-esima componente di $\nabla f(x_0)$.

Una immediata applicazione di tali risultati è la determinazione delle condizioni di ottimalità per i problemi di programmazione frazionaria; si consideri al riguardo il seguente problema P di massimo vincolato, presentato in [6]:

$$P: \begin{cases} \max f(x)=(c_0+c^Tx)(d_0+d^Tx)^\alpha \\ x\in S=\{x\in \Re^n: x\geq 0, Ax=b\} \end{cases},$$

dove A è una matrice reale con m righe ed n colonne, $b\in\Re^m$, $c,d\in\Re^n$, $c_0,d_0\in\Re$, α è un parametro reale e $(d_0+d^Tx)>0$ $\forall x\in S$.

Tale problema si può riscrivere rispetto ad una soluzione di base ammissibile $x=(x_B,x_N)$ nel seguente modo:

$$P: \begin{cases} \max f(x)=(c_0+c^Tx)(d_0+d^Tx)^\alpha \\ A_Bx_B+A_Nx_N=b \\ x_B\geq 0 \text{ ed } x_N\geq 0 \end{cases} \equiv \overline{P}: \begin{cases} \max \overline{f}(x_N)=(\overline{c}_0+\overline{c}_N^Tx_N)(\overline{d}_0+\overline{d}_N^Tx_N)^\alpha \\ x_N\in \overline{S}=\{x\in\Re^{m-n}: x\geq 0 \text{ ed } A_B^{-1}b\geq A_B^{-1}A_Nx\} \end{cases},$$

dove $\overline{c}_0=c_0+c_B^TA_B^{-1}b$, $\overline{d}_0=d_0+d_B^TA_B^{-1}b$, $\overline{c}_N^T=c_N^T-c_B^TA_B^{-1}A_N$ e $\overline{d}_N^T=d_N^T-d_B^TA_B^{-1}A_N$.

Questa riscrittura del problema permette di osservare che il cono delle direzioni ammissibili $F(\overline{S},0)$ ed il cono tangente $T(\overline{S},0)$, relativi al punto $x_N=0$ ed alla regione ammissibile $\overline{S}$, coincidono e sono uguali all'ortante positivo di $\Re^{m-n}$, ovvero $F(\overline{S},0)=T(\overline{S},0)=\{x\in\Re^{m-n}: x\geq 0\}$.

Utilizzando il Corollario 3.2.12 si ha quindi che condizione necessaria affinché il vertice $x_N=0$ sia di massimo globale è che sia $\nabla\overline{f}(0)=(\overline{d}_0)^{\alpha-1}(\overline{d}_0\overline{c}+\alpha\overline{c}_0\overline{d})\leq 0$ ovvero, essendo per ipotesi $\overline{d}_0>0$, che sia $\gamma=\overline{d}_0\overline{c}+\alpha\overline{c}_0\overline{d}\leq 0$; analogamente condizione sufficiente affinché il vertice $x_N=0$ sia di massimo globale è che sia $\nabla\overline{f}(0)=(\overline{d}_0)^{\alpha-1}(\overline{d}_0\overline{c}+\alpha\overline{c}_0\overline{d})<0$, ovvero $\gamma=\overline{d}_0\overline{c}+\alpha\overline{c}_0\overline{d}<0$.

Nel caso particolare $\alpha=-1$ si ottiene il noto problema di programmazione lineare frazionaria; sotto tale ipotesi la funzione obiettivo è sia pseudo-concava sia pseudo-convessa nel dominio di definizione, utilizzando il Corollario 3.2.11 quindi si ha che il vertice $x_N=0$ è di massimo globale se e solo se $\nabla\overline{f}(0)\leq 0$, ovvero se e solo se $\gamma=\overline{d}_0\overline{c}-\overline{c}_0\overline{d}\leq 0$; è stata così ritrovato la condizione necessaria e sufficiente, utilizzata da Martos ed altri [2, 12], affinché una soluzione di base ammissibile sia di ottimo per un problema di massimo di programmazione lineare frazionaria.

Come è noto un cono non vuoto è finitamente generato se e solo se è poliedrico; i risultati precedenti possono quindi essere particolarizzati anche tramite questa interpretazione.
In questo caso valgono i seguenti risultati, basati sul lemma di Farkas.

Teorema 3.2.13 Sia f una funzione scalare $f: A \rightarrow \Re$, definita sull'insieme aperto $A \subseteq \Re^n$ e differenziabile in un punto $x_0 \in A$; sia inoltre $C \subset \Re^n$ un cono poliedrico di vertice l'origine $C=\{x \in \Re^n: Mx \geq 0, M \in \Re^{mxn}\}$.
Risulta che $d^T \nabla f(x_0) \leq 0 \ \forall d \in C$ se e solo se $\exists \lambda \in \Re^m, \lambda \geq 0: \nabla f(x_0)+M^T\lambda=0$.

Dim. La tesi segue direttamente dal Lemma di Farkas ([5]) essendo il cono C un cono poliedrico. ♦

Questo risultato ci permette di ottenere i seguenti corollari.

Corollario 3.2.13 Si consideri il problema P con S insieme stellato di vertice x_0 ed f differenziabile in x_0; sia infine:

$$F(S,x_0)=\{x \in \Re^n: Mx \geq 0, M \in \Re^{mxn}\}.$$

Il punto x_0 è di massimo globale [massimo globale stretto] per f rispetto alla regione S se e solo se $\exists \lambda \in \Re^m, \lambda \geq 0: \nabla f(x_0)+M^T\lambda=0$, ed inoltre f è pseudo-concava [strettamente pseudo-concava] in x_0 su S.

Corollario 3.2.14 Si consideri il problema P e si supponga che f sia differenziabile nel punto $x_0 \in S$ di accumulazione per S; sia infine:

$$T(S,x_0)=\{x \in \Re^n: Mx \geq 0, M \in \Re^{mxn}\}.$$

Se x_0 è un punto di massimo locale allora $\exists \lambda \in \Re^m, \lambda \geq 0: \nabla f(x_0)+M^T\lambda=0$.

Si osservi che i precedenti risultati si riducono alle classiche condizioni di Kuhn-Tucker nel caso in cui il cono C sia il cono linearizzante della regione ammissibile S nel punto x_0; in tal caso infatti il problema è del tipo:

$$P: \begin{cases} \max f(x) \\ x \in S=\{x \in \Re^n: g_i(x) \geq 0 \ i=1,\ldots,m\} \end{cases},$$

e la matrice M ha per colonne i gradienti nel punto x_0 delle varie funzioni vincolari g_i, $i=1,\ldots,m$.

---

[5] E' stato considerato il lemma di Farkas espresso nella seguente forma: dati $M \in \Re^{mxn}$, $b \in \Re^n$ ed $y \in \Re^n$ risulta: $b^Ty \leq 0 \ \forall y: My \geq 0$ se e solo se $\exists \lambda \in \Re^m, \lambda \geq 0: b+M^T\lambda=0$.

3.2.9. Concavità generalizzata e problemi di minimo

Dopo aver effettuato un'analisi completa delle proprietà delle funzioni concave generalizzate relativamente ai problemi di massimo, si evidenziano i seguenti risultati relativi ai punti di minimo locale [9].

Teorema 3.2.14 Sia f una funzione concava definita sull'insieme convesso $S \subseteq \Re^n$. Se f ammette il suo minimo globale su S in un punto interno $x_0 \in S$ allora f è costante su S.

Dim. Supponiamo per assurdo che f non sia costante su S e che quindi esista un punto $y \in S$ tale che $f(y) > f(x_0)$; poiché x_0 è un punto interno di S esiste un punto $z \in S$ ed un reale $\lambda \in (0,1)$ tale che $x_0 = \lambda y + (1-\lambda)z$, per la concavità di f abbiamo quindi $f(x_0) \geq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(z) > \lambda f(x_0) + (1-\lambda) f(x_0) = f(x_0)$ il che è assurdo. ♦

Teorema 3.2.15 Sia f una funzione a valori reali definita sul convesso $S \subseteq \Re^n$.

i) Se f è strettamente quasi-concava allora non esiste alcun punto interno $x_0 \in S$ che sia un punto di minimo locale per f su S;

ii) Se f è quasi-concava allora non esiste alcun punto interno $x_0 \in S$ che sia un punto di minimo locale stretto per f su S;

Dim. i) Supponiamo per assurdo che esista un punto x_0 interno a S che sia di minimo locale per f su S, ovvero che esista un intorno $I \subset S$ di x_0 tale che $f(z) \geq f(x_0)$ $\forall z \in I$; esistono quindi necessariamente due punti $x, y \in I \setminus \{x_0\}$, $x \neq y$, tali che per un certo $\lambda \in (0,1)$ risulti $x_0 = x + \lambda(y-x)$; per la stretta quasi-concavità di f risulta quindi $f(x_0) = f(x + \lambda(y-x)) > \min\{f(x), f(y)\} \geq f(x_0)$, il che è assurdo.

ii) Supponiamo per assurdo che esista un punto x_0 interno a S che sia di minimo locale stretto per f su S, ovvero che esista un intorno $I \subset S$ di x_0 tale che $f(z) > f(x_0)$ $\forall z \in I \setminus \{x_0\}$; devono quindi esistere due punti $x, y \in I \setminus \{x_0\}$, $x \neq y$, tali che per un certo $\lambda \in (0,1)$ risulti $x_0 = x + \lambda(y-x)$; per la quasi-concavità di f risulta perció $f(x_0) = f(x + \lambda(y-x)) \geq \min\{f(x), f(y)\} > f(x_0)$, il che è assurdo. ♦

3.3. Problemi di estremo vettoriale

In questo capitolo si determinano, con lo stesso approccio usato nel paragrafo precedente per i problemi scalari, alcune condizioni necessarie e sufficienti di ottimalità per un problema di estremo vettoriale, condizioni che permettono di caratterizzare punti localmente efficienti, debolmente efficienti oppure strettamente efficienti, estendendo i risultati proposti in [3, 4, 7].
Le condizioni di ottimalità sono espresse tramite l'appartenenza ad un opportuno cono di riferimento C delle derivate direzionali della funzione obiettivo rispetto alle direzioni appartenenti al cono tangente alla regione ammissibile nel punto preso in esame.
In particolare, per ciascuno dei tre tipi introdotti di efficienza, viene inizialmente confrontata l'ottimalità locale con l'ottimalità rispetto alle direzioni ammissibili; in seguito viene messa in relazione l'ottimalità locale con l'ottimalità globale e viene analizzata l'ottimalità globale di "punti critici vettoriali".

3.3.1. Il problema multiobiettivo

Si consideri il seguente problema di estremo vettoriale:

$$P: \begin{cases} C\_\max F(x) \\ x \in S \end{cases},$$

dove F è una funzione vettoriale $F: A \to \Re^m$ definita sull'insieme aperto $A \subseteq \Re^n$, $S \subseteq A$ è la regione ammissibile del problema e $C \subseteq \Re^m$ è un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto.

Per mezzo della seguente Definizione 3.3.1 si introducono i tre diversi tipi di efficienza che saranno studiati in questo paragrafo, rispettivamente indotti dal cono C, dal cono C privato dell'origine e dall'interno del cono C.

Definizione 3.3.1 Si consideri il problema P e si ponga $C^0 = C \setminus \{0\}$ e $C^{00} = \mathrm{int}(C)$. Un punto $x_0 \in S$ sarà detto:

i) *C^{00}-efficiente*, ovvero *efficiente debole, per f rispetto alla regione S* se:
$$\nexists y \in S \text{ tale che } F(y) \in F(x_0) + C^{00},$$
ii) *C^0-efficiente*, ovvero *efficiente, per f rispetto alla regione S* se:
$$\nexists y \in S \text{ tale che } F(y) \in F(x_0) + C^0,$$
iii) *C-efficiente*, ovvero *efficiente stretto, per f rispetto alla regione S* se:
$$\nexists y \in S,\ y \neq x_0, \text{ tale che } F(y) \in F(x_0) + C.$$

Un punto $x_0 \in S$ sarà altresì detto localmente efficiente [localmente efficiente debole, localmente efficiente stretto] per F su S se esiste un intorno $I \subseteq \Re^n$ di x_0 per cui le precedenti proprietà sono verificate in $B=I \cap S$. In alcuni casi sarà utile riferirsi ad un punto di massimo locale per F su S come ad un punto di massimo per f rispetto ad una regione $B=I \cap S$.

Ovviamente se $x_0 \in S$ è efficiente stretto è anche efficiente e se è efficiente è anche efficiente debole (poiché $C^{00} \subseteq C^0 \subseteq C$).
In seguito, per esprimere in modo conciso e formale risultati in forma generale che possono poi essere specificati ai vari tipi di efficienza introdotti, sarà utilizzata la notazione C^*-efficiente, con $C^* \in \{C, C^0, C^{00}\}$.
Come nel caso scalare, studiato nel paragrafo precedente, di volta in volta saranno specificate le caratteristiche della funzione vettoriale F e dell'insieme S, sempre con lo scopo di ottenere risultati il più possibile generali.
La concavità generalizzata della funzione F, nel caso in cui S sia un insieme stellato di vertice x_0, sarà assunta nel punto x_0 e limitatamente all'insieme S, verranno pertanto considerate le seguenti classi di funzioni.

Definizione 3.3.2 Sia $S \subseteq \Re^n$ un insieme stellato di vertice x_0, $F: S \rightarrow \Re^m$ una funzione vettoriale e C un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto; siano inoltre $C^*, C^\# \in \{C, C^0, C^{00}\}$.
La funzione F è detta *$(C^*,C^\#)$-quasiconcava in x_0 su S* [$(C^*,C^\#)$.qcv] se per ogni $x \in S$, $x \neq x_0$, è verificata la seguente condizione:

$$F(x) \in F(x_0)+C^* \Rightarrow F(x_0+\lambda(x-x_0)) \in F(x_0)+C^\# \ \forall \lambda \in (0,1).$$

Definizione 3.3.3 Sia $S \subset \Re^n$ un insieme stellato di vertice x_0, $F: S \rightarrow \Re^m$ una funzione direzionalmente derivabile in x_0 e sia C un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto; siano inoltre $C^* \in \{C, C^0, C^{00}\}$ e $C^\# \in \{C^0, C^{00}\}$.
La funzione F è detta *debolmente (C^*,C)-quasiconcava in x_0 su S* [(C^*,C).wqcv] se per ogni $x \in S$, $x \neq x_0$, è verificata la seguente condizione:

$$F(x) \in F(x_0)+C^* \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \in C \quad \text{con } d=\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}.$$

La funzione F è detta *$(C^*,C^\#)$-pseudoconcava in x_0 su S* [$(C^*,C^\#)$.pcv] se per ogni $x \in S$, $x \neq x_0$, è verificata la seguente condizione:

$$F(x) \in F(x_0)+C^* \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \in C^\# \quad \text{con } d=\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}.$$

3.3.2. Condizioni di efficienza lungo le direzioni

Come è stato osservato nel paragrafo precedente, relativamente al caso scalare, non vi è in generale alcuna relazione tra la C^*-efficienza locale rispetto ad una regione e la C^*-efficienza lungo le singole direzioni ammissibili.
Assumendo invece delle ipotesi di concavità generalizzata nel punto x_0 è possibile caratterizzare, per mezzo del comportamento della funzione lungo le direzioni ammissibili, la C^*-efficienza locale del punto, C^*-efficienza locale che sarà espressa sotto forma di C^*-efficienza rispetto ad un insieme $B=I\cap S$, con $I\subseteq\Re^n$ intorno di x_0.
Il teorema seguente mostra delle condizioni necessarie e sufficienti di efficienza (C^0-efficienza) locale per il vertice di un insieme stellato, condizioni ottenibili sfruttando le classi di funzioni di tipo quasi-concavo.

Teorema 3.3.1 Si consideri il problema P con S insieme stellato di vertice x_0; siano $I\subseteq\Re^n$ un intorno di x_0 e $B=I\cap S$; sia inoltre $C^\#\in\{C^0,C^{00}\}$.
Le seguenti condizioni sono equivalenti:
i) x_0 è un punto efficiente per F rispetto alla regione $B\subseteq S$;
ii) x_0 è localmente $C^\#$-efficiente rispetto ai raggi x_0+r_d, $d\in\mathcal{D}_F$, e la funzione F è $(C^0,C^\#)$.qcv in x_0 su B.
Se inoltre F è direzionalmente derivabile in x_0 le precedenti condizioni sono equivalenti alla successiva:
iii) $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C^{00}$ $\forall d\in\mathcal{D}_F$, x_0 è localmente $C^\#$-efficiente rispetto ai raggi x_0+r_d, $d\in\mathcal{D}_F$, tali che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\in C\backslash C^{00}$ ed inoltre F è $(C^0,C^\#)$.qcv in x_0 su B.

Dim. i)⇔ii) La necessità è ovvia per la relazione esistente tra C^* e $C^\#$ e per la definizione di $(C^*,C^\#)$.quasiconcavità. Per la sufficienza si supponga per assurdo che x_0 non sia localmente C^*-efficiente rispetto ad S e che quindi esista una successione $\{x_k\}\subset S\backslash\{x_0\}$ convergente ad x_0 tale che $F(x_k)\in F(x_0)+C^*$; ciò implica che, da un certo indice k in poi, si ha per la locale $(C^*,C^\#)$.qcv di F che $F(x_0+\lambda(x_k-x_0))\in F(x_0)+C^\#$ $\forall\lambda\in(0,1)$, condizione assurda in quanto x_0 è localmente $C^\#$-efficiente rispetto ai raggi.
ii)⇔iii) La necessità segue dal fatto che se per assurdo esistesse una direzione $d\in\mathcal{D}_F$ tale che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\in C^{00}$ allora la funzione F non sarebbe neanche localmente

C^{00}-efficiente rispetto a tale direzione ([6]). Per la sufficienza si deve solamente dimostrare che x_0 è localmente $C^{\#}$-efficiente rispetto ai raggi x_0+r_d, $d\in \mathcal{D}_F$, tali che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C\backslash C^{00}$ ovvero, essendo $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C^{00}$ $\forall d\in \mathcal{D}_F$, tali che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C$. Si supponga quindi per assurdo che esista una direzione $d\in \mathcal{D}_F$ tale che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C$ e rispetto alla quale x_0 non sia localmente $C^{\#}$-efficiente; esiste allora una successione $\{\lambda_k\}\subset\Re^{++}$ convergente a 0 tale che $F(x_0+\lambda_k d)\in F(x_0)+C^{\#}$; per la chiusura di C si ottiene la condizione assurda $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)=\lim_{k\to+\infty}\frac{F(x_0+\lambda_k d)-F(x_0)}{\lambda_k}\in C$. ♦

In modo analogo al precedente teorema si ottengono le seguenti condizioni necessarie e sufficienti per l'efficienza stretta (C-efficienza) e l'efficienza debole (C^{00}-efficienza) del vertice di un insieme stellato.

Teorema 3.3.2 Si consideri il problema P con S insieme stellato di vertice x_0; siano $I\subseteq\Re^n$ un intorno di x_0 e $B=I\cap S$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) x_0 è un punto efficiente debole per F rispetto alla regione $B\subseteq S$;

ii) x_0 è localmente C^{00}-efficiente rispetto ai raggi x_0+r_d, $d\in \mathcal{D}_F$, e la funzione F è (C^{00},C^{00}).qcv in x_0 su B.

Se inoltre F è direzionalmente derivabile in x_0 le precedenti condizioni sono equivalenti alla successiva:

iii) $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C^{00}$ $\forall d\in \mathcal{D}_F$, x_0 è localmente C^{00}-efficiente rispetto ai raggi x_0+r_d, $d\in \mathcal{D}_F$, tali che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\in C\backslash C^{00}$ ed inoltre F è (C^{00},C^{00}).qcv in x_0 su B.

---

[6] Si dimostra facilmente che se $F:S\to\Re^m$, con $S\subset\Re^n$ insieme stellato di vertice x_0, è una funzione direzionalmente derivabile in x_0 ed inoltre C è un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto si ha che se $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\in C^{00}$ allora $\exists\varepsilon>0$ tale che $F(x_0+\lambda d)\in F(x_0)+C^{00}$ $\forall\lambda\in(0,\varepsilon)$.

Teorema 3.3.3 Si consideri il problema P con S insieme stellato di vertice x_0; siano $I \subseteq \Re^n$ un intorno di x_0 e $B=I \cap S$; sia inoltre $C^\# \in \{C, C^0, C^{00}\}$.

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) x_0 è un punto efficiente stretto per F rispetto alla regione $B \subseteq S$;

ii) x_0 è localmente $C^\#$-efficiente rispetto ai raggi x_0+r_d, $d \in \mathcal{D}_F$, e la funzione F è $(C,C^\#)$.qcv in x_0 su B.

Se inoltre F è direzionalmente derivabile in x_0 le precedenti condizioni sono equivalenti alla successiva:

iii) $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \notin C^{00}$ $\forall d \in \mathcal{D}_F$, x_0 è localmente $C^\#$-efficiente rispetto ai raggi x_0+r_d, $d \in \mathcal{D}_F$, tali che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \in C \setminus C^{00}$ ed inoltre F è $(C,C^\#)$.qcv in x_0 su B.

Per mezzo delle funzioni di tipo quasi-concavo si hanno inoltre le seguenti condizioni sufficienti di efficienza (C^0-efficienza) locale e di debole efficienza (C^{00}-efficienza) locale, la cui dimostrazione è analoga a quella del precedente Teorema 3.3.1.

Teorema 3.3.4 Si consideri il problema P con S insieme stellato di vertice x_0; siano $I \subseteq \Re^n$ un intorno di x_0 e $B=I \cap S$. Condizioni sufficienti affinché il punto x_0 sia un punto efficiente per F rispetto alla regione $B \subseteq S$ sono le seguenti:

i) x_0 è localmente C-efficiente rispetto ai raggi x_0+r_d, $d \in \mathcal{D}_F$, e la funzione F è (C^0,C).qcv in x_0 su B.

ii) F è direzionalmente derivabile in x_0, $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \notin C^{00}$ $\forall d \in \mathcal{D}_F$, x_0 è localmente C-efficiente rispetto ai raggi x_0+r_d, $d \in \mathcal{D}_F$, tali che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \in C \setminus C^{00}$ ed inoltre F è (C^0,C).qcv in x_0 su B.

Teorema 3.3.5 Si consideri il problema P con S insieme stellato di vertice x_0; siano $I \subseteq \Re^n$ un intorno di x_0 e $B=I \cap S$; sia inoltre $C^\# \in \{C, C^0\}$.

Condizioni sufficienti affinché il punto x_0 sia un punto efficiente debole per F rispetto alla regione $B \subseteq S$ sono le seguenti:

i) x_0 è localmente $C^\#$-efficiente rispetto ai raggi x_0+r_d, $d \in \mathcal{D}_F$, e la funzione F è $(C^{00},C^\#)$.qcv in x_0 su B.

ii) F è direzionalmente derivabile in x_0, $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \notin C^{00}$ $\forall d \in \mathcal{D}_F$, x_0 è localmente $C^\#$-efficiente rispetto ai raggi x_0+r_d, $d \in \mathcal{D}_F$, tali che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \in C \setminus C^{00}$ ed inoltre F è $(C^{00},C^\#)$.qcv in x_0 su B.

Sfruttando invece le classi di funzioni di tipo pseudo-concavo si ottengono le seguenti ulteriori condizioni di efficienza, efficienza debole ed efficienza stretta; tali condizioni saranno espresse in forma compatta in un unico teorema, nel quale ci si riferirà sempre alla C*-efficienza del punto.

Teorema 3.3.6 Si consideri il problema P con S insieme stellato di vertice x_0 ed F direzionalmente derivabile in x_0; siano $I\subseteq\mathfrak{R}^n$ un intorno di x_0 e $B=I\cap S$; sia inoltre $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) x_0 è un punto C*-efficiente per F rispetto alla regione $B\subseteq S$;

ii) x_0 è localmente C^{00}-efficiente rispetto ai raggi x_0+r_d, $d\in\mathcal{D}_F$, e la funzione F è (C^*,C^{00}).pcv in x_0 su B;

iii) $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C^{00}$ $\forall d\in\mathcal{D}_F$ ed inoltre F è (C^*,C^{00}).pcv in x_0 su B.

Dim. i)⇒ii),iii) Sia x_0 un punto C*-efficiente per F rispetto alla regione $B\subseteq S$; ovviamente x_0 risulta C^{00}-efficiente rispetto ad ogni raggio x_0+r_d, $d\in\mathcal{D}_F$, inoltre la funzione F risulta banalmente (C^*,C^{00}).pseudoconcava dal momento che per definizione $\nexists y\in B$ tale che $f(y)\in f(x_0)+C^*$. Le tesi seguono quindi osservando che se fosse $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\in C^{00}$ per una direzione $d\in\mathcal{D}_F$ allora F non sarebbe localmente C^{00}-efficiente rispetto a tale direzione.

ii)⇒i) Si supponga per assurdo che x_0 non sia C*-efficiente per f rispetto alla regione $B\subseteq S$ e che quindi esista un punto $y\in B$, $y\neq x_0$, tale che $F(y)\in F(x_0)+C^*$; per la definizione di funzione $(C^*,C^{\#})$.pseudoconcava in x_0 risulta $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\in C^{00}$ con $d=\frac{y-x_0}{\|y-x_0\|}$, ovvero $\lim_{t\to0^+}\frac{F(x_0+td)-F(x_0)}{t}\in C^{00}$. Esiste di conseguenza un reale $\varepsilon>0$ tale che $F(x_0+td)\in F(x_0)+C^{00}$ $\forall t\in(0,\varepsilon)$, condizione che è in contraddizione con la locale C^{00}-efficienza di x_0 rispetto al raggio x_0+r_d.

iii)⇒i) Se per assurdo x_0 non è C*-efficiente per f rispetto alla regione $B\subseteq S$ allora $\exists y\in B$ tale che $F(y)\in F(x_0)+C^*$; posto $d=\frac{y-x_0}{\|y-x_0\|}$ si ha, per la (C^*,C^{00})-pseudoconcavità di F, che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\in C^{00}$, condizione che nega l'ipotesi. ♦

Si osservi, confrontando i Teoremi 3.3.4 e 3.3.6, come nel caso delle funzioni direzionalmente derivabili l'ipotesi di pseudo-concavità vettoriale renda superflua, per la caratterizzazione della C*-efficienza del punto x_0, l'ipotesi di efficienza lungo i raggi ammissibili. Le funzioni di tipo pseudo-concavo permettono inoltre di ottenere, analogamente al teorema precedente, le seguenti ulteriori condizioni sufficienti di C*-efficienza.

Teorema 3.3.7 Si consideri il problema P con S insieme stellato di vertice x_0 ed F direzionalmente derivabile in x_0; siano $I \subseteq \Re^n$ un intorno di x_0 e $B=I \cap S$; sia inoltre $C^* \in \{C, C^0, C^{00}\}$. Condizione sufficiente affinché il punto x_0 sia C*-efficiente per F rispetto alla regione $B \subseteq S$ è la seguente:

i) $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \notin C^0 \ \forall d \in \mathcal{D}_F$ ed inoltre F è (C^*, C^0)-pseudoconcava in x_0 su B.

Il seguente Esempio 3.3.1 mostra come la precedente condizione sia sufficiente ma non necessaria.

Esempio 3.3.1

Si consideri la funzione $F: \Re^+ \rightarrow \Re^2$, $F(x)=(-x^2, x)$, ed il cono Paretiano $C=\Re^2_+$.
Ogni punto ammisibile $x_0 \geq 0$ è un punto strettamente efficiente [C-efficiente] dal momento che $\nexists y \geq 0$, $y \neq x_0$, tale che $F(y) \in F(x_0)+\Re^2_+$; la funzione F risulta inoltre, per tale motivo, banalmente (C, C^0)-pseudoconcava in $x_0 \geq 0$ su $B=\Re^+$.
Nel punto $x_0=0$ si ha però $J_F(x_0)=(0,1) \in C^0$, di conseguenza la condizione sufficiente di cui al precedente teorema non è anche necessaria.

Si osservi che, come accade nel caso scalare, le precedenti condizioni di C*-efficienza locale per il vertice di un insieme stellato, forniscono implicitamente anche delle condizioni di ottimalità globale, ottenibili assumendo $I=\Re^n$ e $B=S$.
Il teorema successivo mostra delle condizioni necessarie e sufficienti per l'efficienza [efficienza debole, efficienza stretta] globale del vertice di un insieme stellato; per compattezza di notazione si studierà la C*-efficienza globale del punto, con $C^* \in \{C, C^0, C^{00}\}$, relativamente a funzioni $(C^*, C^\#)$-quasiconcave tali che $C^\# \subseteq C^*$, ovvero tali che:

$$C^* \in \{C, C^0, C^{00}\} \quad \text{e} \quad C^\# \in \begin{cases} \{C, C^0, C^{00}\} & \text{se } C^*=C \\ \{C^0, C^{00}\} & \text{se } C^*=C^0 \\ \{C^{00}\} & \text{se } C^*=C^{00} \end{cases} . \qquad (3.3.1)$$

Corollario 3.3.1 Si consideri il problema P con S insieme stellato di vertice x_0; siano inoltre C^* e $C^\#$ i simboli definiti nella (3.3.1).

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) x_0 è un punto globalmente C^*-efficiente per F rispetto alla regione S;

ii) x_0 è localmente $C^\#$-efficiente rispetto ai raggi x_0+r_d, $d\in\mathcal{D}_F$, e la funzione F è $(C^*,C^\#)$.qcv in x_0 su S.

Se inoltre F è direzionalmente derivabile in x_0 le precedenti condizioni sono equivalenti alla successiva:

iii) $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C^{00}$ $\forall d\in\mathcal{D}_F$, x_0 è localmente $C^\#$-efficiente rispetto ai raggi x_0+r_d, $d\in\mathcal{D}_F$, tali che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\in C\backslash C^{00}$ ed inoltre F è $(C^*,C^\#)$.qcv in x_0 su S.

Il seguente Corollario mostra invece, in notazione compatta, delle condizioni sufficienti di di efficienza (C^0-efficienza) ed efficienza debole (C^{00}-efficienza), relative a funzioni $(C^*,C^\#)$-quasiconcave tali che $C^*\subset C^\#$, $C^*\in\{C^0,C^{00}\}$, ovvero tali che:

$$C^*\in\{C^0,C^{00}\} \quad e \quad C^\#\in\begin{cases} \{C\} & \text{se } C^*=C^0 \\ \{C,C^0\} & \text{se } C^*=C^{00} \end{cases} . \tag{3.3.2}$$

Corollario 3.3.2 Si consideri il problema P con S insieme stellato di vertice x_0; siano inoltre C^* e $C^\#$ i simboli definiti nella (3.3.2).

Condizioni sufficienti affinché il punto x_0 sia un punto globalmente C^*-efficiente per F rispetto alla regione S sono le seguenti:

i) x_0 è localmente $C^\#$-efficiente rispetto ai raggi x_0+r_d, $d\in\mathcal{D}_F$, e la funzione F è $(C^*,C^\#)$.qcv in x_0 su S.

ii) F è direzionalmente derivabile in x_0, $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C^{00}$ $\forall d\in\mathcal{D}_F$, x_0 è localmente $C^\#$-efficiente rispetto ai raggi x_0+r_d, $d\in\mathcal{D}_F$, tali che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\in C\backslash C^{00}$ ed inoltre F è $(C^*,C^\#)$.qcv in x_0 su S.

Anche le funzioni di tipo pseudo-concavo permettono di caratterizzare la C^*-efficienza globale di un punto e di ottenere per essa delle condizioni sufficienti; di nuovo, nel caso direzionalmente derivabile, le funzioni di tipo pseudo-concavo permetteranno di ottenere condizioni di C^*-efficienza basate sulla sola derivata direzionale della funzione F e senza alcuna ipotesi di C^*-efficienza lungo i raggi ammissibili.

Corollario 3.3.3 Si consideri il problema P con S insieme stellato di vertice x_0 ed F direzionalmente derivabile in x_0; sia inoltre $C^* \in \{C, C^0, C^{00}\}$.
Le seguenti condizioni sono equivalenti:
i) x_0 è un punto globalmente C^*-efficiente per F rispetto alla regione S;
ii) x_0 è localmente C^{00}-efficiente rispetto ai raggi x_0+r_d, $d \in \mathcal{D}_F$, e la funzione F è (C^*, C^{00}).pcv in x_0 su S;
iii) $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \notin C^{00}$ $\forall d \in \mathcal{D}_F$ ed inoltre F è (C^*, C^{00}).pcv in x_0 su S.

Corollario 3.3.4 Si consideri il problema P con S insieme stellato di vertice x_0 ed F direzionalmente derivabile in x_0; sia inoltre $C^* \in \{C, C^0, C^{00}\}$.
Condizione sufficiente affinché il punto x_0 sia globalmente C^*-efficiente per F rispetto alla regione S è la seguente:
i) $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \notin C^0$ $\forall d \in \mathcal{D}_F$ ed inoltre F è (C^*, C^0)-pseudoconcava in x_0 su S.

3.3.3. Efficienza locale ed efficienza globale

Come è noto e come è stato esposto nel paragrafo precedente, se un punto è di massimo locale oppure di massimo locale stretto per una funzione rispetto ad una certa regione convessa, allora a seconda della concavità generalizzata della funzione stessa (quasi-concavità, semistretta quasi-concavità, ecc. ecc.) il punto può essere globalmente di massimo oppure di massimo stretto. Tale proprietà si può estendere anche alle funzioni vettoriali grazie alle classi di tipo quasiconcavo introdotte tramite la Definizione 3.3.2; in pratica, a seconda della ipotesi di concavità generalizzata relativa alla funzione F, risulta che l'efficienza locale, anche debole o stretta, implica un certo grado di efficienza anche a livello globale. Nel caso scalare la proprietà espressa dal teorema precedente è banalmente verificata anche dalle funzioni pseudo-concave, essendo esse particolari funzioni quasi-concave; a livello vettoriale però, come è stato mostrato nel paragrafo precedente, una funzione di tipo pseudo-concavo non è necessariamente anche di tipo quasi-concavo; ciò nonostante la proprietà che garantisce l'efficienza globale di un punto localmente efficiente vale a livello vettoriale anche per le funzioni di tipo pseudo-concavo definite tramite la Definizione 3.3.3. Valgono al riguardo i corollari successivi che seguono direttamente dai Corollari 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3.

Corollario 3.3.5 Si consideri il problema P con S insieme stellato di vertice x_0. Condizioni sufficienti affinché il punto x_0 sia un punto globalmente efficiente [C^0-efficiente] per F rispetto alla regione S sono le seguenti:

i) F è $(C^0,C^\#)$-quasiconcava in x_0 su S, con $C^\# \in \{C,C^0,C^{00}\}$, ed x_0 è un punto localmente $C^\#$-efficiente per F su S.

ii) F è direzionalmente derivabile in x_0, F è (C^0,C^{00})-pseudoconcava in x_0 su S ed x_0 è un punto localmente C^{00}-efficiente per F su S.

Corollario 3.3.6 Si consideri il problema P con S insieme stellato di vertice x_0. Condizioni sufficienti affinché il punto x_0 sia un punto globalmente efficiente stretto [C-efficiente] per F rispetto alla regione S sono le seguenti:

i) F è $(C,C^\#)$-quasiconcava in x_0 su S, con $C^\# \in \{C,C^0,C^{00}\}$, ed x_0 è un punto localmente $C^\#$-efficiente per F su S.

ii) F è direzionalmente derivabile in x_0, F è (C,C^{00})-pseudoconcava in x_0 su S ed x_0 è un punto localmente C^{00}-efficiente per F su S.

Corollario 3.3.7 Si consideri il problema P con S insieme stellato di vertice x_0. Condizioni sufficienti affinché il punto x_0 sia un punto globalmente efficiente debole [C^{00}-efficiente] per F rispetto alla regione S sono le seguenti:

i) F è $(C^{00},C^\#)$-quasiconcava in x_0 su S, con $C^\# \in \{C,C^0,C^{00}\}$, ed x_0 è un punto localmente $C^\#$-efficiente per F su S.

ii) F è direzionalmente derivabile in x_0, F è (C^{00},C^{00})-pseudoconcava in x_0 su S ed x_0 è un punto localmente C^{00}-efficiente per F su S.

3.3.4. Efficienza locale e cono tangente

In questo paragrafo la C^*-efficienza di un punto x_0 sarà caratterizzata per mezzo delle direzioni del cono tangente $T(S,x_0)$ alla regione ammissibile S nel punto x_0 [1]; l'approccio seguito è analogo a quello proposto in [3, 5] e permette di estenderne i risultati.

Si ricordi che in generale non vi è, neanche nel caso scalare, alcuna relazione tra la C^*-efficienza locale di un punto rispetto alla regione ammissibile e la C^*-efficienza rispetto alle singole direzioni del cono tangente o rispetto all'intero cono tangente $T(S,x_0)$.

Verrà di seguito dimostrato che per poter caratterizzare la C^*-efficienza di un punto sarà necessario approfondire lo studio della funzione obiettivo relativamente alle direzioni del cono tangente rispetto alle quali la derivata direzionale della funzione obiettivo appartiene alla frontiera del cono C.

Teorema 3.3.8 Si consideri il problema P e si supponga che F sia direzionalmente derivabile con regolarità nel punto x_0 di accumulazione per S; sia inoltre $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$. Il punto x_0 è localmente C*-efficiente rispetto alla regione S se e solo se $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C^{00}$ $\forall d\in\mathcal{D}_T$ ed inoltre per ogni direzione $d\in\mathcal{D}_T$ tale che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\in C\setminus C^{00}$ esiste un $\varepsilon>0$ tale che il punto x_0 è localmente C*-efficiente rispetto alla regione $S\cap(x_0+K(d,\varepsilon))$.

Dim. Sia x_0 localmente C*-efficiente rispetto alla regione S. Banalmente lo è anche rispetto alle regioni del tipo $S\cap(x_0+K(d,\varepsilon))$, con $\varepsilon>0$ qualsiasi.

Per definizione inoltre $F(y)\notin F(x_0)+C^*$ $\forall y\in I\cap S$, con I opportuno intorno di x_0; in particolare, per la definizione dell'insieme $\mathcal{D}_T$, è possibile determinare per ogni direzione $d\in\mathcal{D}_T$ una successione $\{x_k\}\subset I\cap S\setminus\{x_0\}$ convergente ad x_0, tale che $\lim_{k\to+\infty}\frac{x_k-x_0}{\|x_k-x_0\|}=d\in\mathcal{D}_T$ ed $F(x_k)\notin F(x_0)+C^{00}$; si ha quindi $\frac{F(x_k)-F(x_0)}{\|x_k-x_0\|}\notin C^{00}$ da cui risulta, essendo F direzionalmente derivabile con regolarità ed essendo C^{00} un insieme aperto, $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)=\lim_{k\to+\infty}\frac{F(x_k)-F(x_0)}{\|x_k-x_0\|}\notin C^{00}$.

Per la sufficienza si supponga per assurdo che x_0 non sia localmente C*-efficiente rispetto alla regione S. E' allora possibile determinare una successione $\{x_k\}\subset S\setminus\{x_0\}$ convergente ad x_0 tale che $F(x_k)\in F(x_0)+C^*$; tale successione permette di definire la successione di direzioni $d_k=\frac{x_k-x_0}{\|x_k-x_0\|}$ appartenenti alla sfera unitaria $\{d\in\Re^n: \|d\|=1\}$ che è un insieme compatto, di conseguenza dalla successione $\{x_k\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{x_{k_j}\}\subset\{x_k\}$ convergente ad x_0 e tale che $\tilde{d}=\lim_{j\to+\infty}d_{k_j}=\lim_{j\to+\infty}\frac{x_{k_j}-x_0}{\|x_{k_j}-x_0\|}\in\mathcal{D}_T$; per semplicità di notazione si può quindi supporre, senza perdere la generalità, che sia $\tilde{d}=\lim_{k\to+\infty}\frac{x_k-x_0}{\|x_k-x_0\|}\in\mathcal{D}_T$.

Poiché $F(x_k)\in F(x_0)+C^*$ si ha $\frac{F(x_k)-F(x_0)}{\|x_k-x_0\|}\in C^*$ e quindi, essendo C chiuso ed F direzionalmente derivabile con regolarità, $\frac{\partial F}{\partial\tilde{d}}(x_0)=\lim_{k\to+\infty}\frac{F(x_k)-F(x_0)}{\|x_k-x_0\|}\in C$; per ipotesi quindi, poiché $\tilde{d}\in\mathcal{D}_T$, deve essere $\frac{\partial F}{\partial\tilde{d}}(x_0)\in C\setminus C^{00}$.

Fissato un valore reale $\varepsilon>0$, poiché $\lim_{k\to+\infty}\frac{x_k-x_0}{\|x_k-x_0\|}=\tilde{d}\in\mathcal{D}_T$, la successione $\{x_k\}$ convergente ad x_0 deve essere, da un certo indice in poi, contenuta in

$(S\backslash\{x_0\})\cap(x_0+K(\tilde{d},\varepsilon))$ ma ciò è assurdo dal momento che per ipotesi x_0 è localmente C^*-efficiente rispetto ad $S\cap(x_0+K(\tilde{d},\varepsilon))$. ♦

Si osservi che il precedente teorema altro non è che una forma compatta per tre teoremi identici, relativi alle condizioni necessarie e sufficienti di efficienza debole, efficienza ed efficienza stretta di un punto.
Il Teorema 3.3.8 permette di stabilire direttamente le seguenti condizioni necessarie di C^{00}-efficienza e sufficienti di C-efficienza; si osservi che tali condizioni sono state stabilite in [3] limitatamente però ai punti localmente C^0-efficienti.

Corollario 3.3.8 Si consideri il problema P e si supponga che F sia direzionalmente derivabile con regolarità nel punto x_0 di accumulazione per S.

i) Se x_0 è localmente efficiente debole allora $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C^{00}\ \forall d\in\mathcal{D}_T$.

ii) Se $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C\ \forall d\in\mathcal{D}_T$ allora x_0 è localmente efficiente stretto.

Secondo i risultati precedentemente stabiliti, per la determinazione di condizioni necessarie e/o sufficienti di efficienza occorre verificare se risulta $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C^{00}$ oppure $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C$ per ogni direzione del cono tangente $d\in\mathcal{D}_T$.
A tale riguardo è possibile determinare ulteriori condizioni sufficienti di efficienza locale per mezzo di condizioni che garantiscano che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C\ \forall d\in\mathcal{D}_T$.

Corollario 3.3.9 Si consideri il problema P e si supponga che F sia direzionalmente derivabile con regolarità nel punto x_0 di accumulazione per S. Condizione sufficiente affinché il punto x_0 sia localmente efficiente stretto è la seguente:

i) $\exists\alpha\in C^{++}$ tale che $\alpha^T\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\leq 0\ \forall d\in\mathcal{D}_T$ ed inoltre $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\neq 0\ \forall d\in\mathcal{D}_T$.

Se inoltre la funzione F è debolmente differenziabile nel punto $x_0\in S$ si hanno le seguenti ulteriori condizioni sufficienti:

ii) $\exists\alpha\in C^{++}$ tale che $\alpha^T J_F(x_0)d\leq 0\ \forall d\in\mathcal{D}_T$ ed inoltre $J_F(x_0)d\neq 0\ \forall d\in\mathcal{D}_T$;

iii) $\exists\alpha\in C^{++}$ tale che $\alpha^T J_F(x_0)=0$ ed inoltre rango$[J_F(x_0)]=n$.

Dim. i) Per il punto ii) del Corollario 3.3.8 è sufficiente dimostrare che le ipotesi implicano che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C\ \forall d\in\mathcal{D}_T$; si supponga per assurdo che ciò non sia vero e che quindi esista $\bar{d}\in\mathcal{D}_T$ tale che $\frac{\partial F}{\partial \bar{d}}(x_0)\in C$; essendo per ipotesi $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\neq 0$

$\forall d \in \mathcal{D}_T$ deve essere $\frac{\partial F}{\partial \bar{d}}(x_0) \in C^0$; per la definizione di polare positivo stretto si ha quindi che $\alpha^T \frac{\partial F}{\partial \bar{d}}(x_0) > 0$, condizione che nega l'ipotesi.

ii) La tesi segue dal punto i) essendo $J_F(x_0)d = \frac{\partial F}{\partial \bar{d}}(x_0)$.

iii) La tesi segue dal punto ii) poiché per ipotesi $\exists \alpha \in C^{++}$ tale che $\alpha^T J_F(x_0)d = 0$ $\forall d \in \mathcal{D}_T$ ed inoltre l'ipotesi rango$[J_F(x_0)] = n$ implica che $J_F(x_0)d \neq 0$ $\forall d \in \Re^n$, $d \neq 0$, da cui si ha in particolare $J_F(x_0)d \neq 0$ $\forall d \in \mathcal{D}_T$. ♦

Per ottenere invece altre condizioni necessarie e sufficienti di efficienza locale occorre caratterizzare la condizione $\frac{\partial F}{\partial \bar{d}}(x_0) \notin C^{00}$ $\forall d \in \mathcal{D}_T$; a tal fine sono necessarie delle ipotesi aggiuntive di convessità, che vengono di seguito riassunte;

i) il cono di riferimento C di vertice l'origine è, oltre che chiuso e con interno non vuoto, anche convesso;
ii) la regione ammissibile S è tale che il cono tangente $T(S,x_0)$ è convesso (oltre che non banale e chiuso);
iii) in x_0 la funzione obiettivo F è, oltre che direzionalmente derivabile con regolarità, anche debolmente differenziabile.

Si osservi inoltre che nel caso in cui il punto x_0 sia interno alla regione S allora il cono tangente $T(S,x_0)$ coincide con lo spazio $\Re^n$ e quindi risulta $\mathcal{D}^n = \mathcal{D}_F = \mathcal{D}_T$.

Per dimostrare altre condizioni di efficienza, verrà utilizzato il seguente insieme che rappresenta il cono generato dalle derivate direzionali della funzione F lungo le direzioni $\mathcal{D}_T$:

$$W = \{w \in \Re^m: \ w = \mu \frac{\partial F}{\partial \bar{d}}(x_0) = \mu J_F(x_0)d, \ \mu \in \Re^+, \ d \in \mathcal{D}_T\};$$

tale insieme può essere espresso anche nel modo seguente:

$$W = \{w \in \Re^m: \ w = J_F(x_0)b, \ b \in T(S,x_0)\},$$

evidenziando che esso altro non è che una trasformazione lineare del cono tangente $T(S,x_0)$ stesso, risultando quindi a sua volta un cono chiuso, convesso e con interno non vuoto, come è verificato nella seguente proprietà.

Proprietà 3.3.1 Si consideri il problema P e si supponga che F sia debolmente differenziabile nel punto $x_0 \in S$, che i coni C e $T(S,x_0)$ siano convessi. L'insieme $W = \{w \in \Re^m: \ w = J_F(x_0)b, \ b \in T(S,x_0)\}$ è un cono chiuso, convesso e non vuoto.

Dim. L'insieme W risulta chiuso e non vuoto essendo l'immagine, secondo una funzione continua, del cono $T(S,x_0)$ che è un insieme chiuso e non vuoto; il fatto che W sia un cono segue banalmente dalla definizione poiché $w \in W$ implica $\lambda w \in W$ $\forall \lambda \in \Re^+$; per verificare che è convesso basta, per una nota proprietà dei coni convessi, verificare che se $v,w \in W$ allora anche $v+w \in W$, condizione che segue dal fatto che posto $v=J_F(x_0)b$ e $w=J_F(x_0)d$, $b,d \in T(S,x_0)$, si ha $v+w=J_F(x_0)(b+d)$ che, per la convessità del cono $T(S,x_0)$, appartiene a W per definizione. ♦

Nei seguenti teoremi sarà considerato anche il caso in cui x_0 è interno alla regione S, ovvero è $T(S,x_0)=\Re^n$, e quindi risulta $W=\{w \in \Re^m : w=J_F(x_0)v, v \in \Re^n\}$, forma che evidenzia come in questo caso W sia un sottospazio vettoriale.

Corollario 3.3.10 Si consideri il problema P e si supponga che F sia direzionalmente derivabile con regolarità e debolmente differenziabile nel punto x_0 di accumulazione per S e che i coni C e $T(S,x_0)$ siano convessi; sia inoltre $C^* \in \{C, C^0, C^{00}\}$. Condizione necessaria e sufficiente affinché il punto x_0 sia localmente C^*-efficiente rispetto alla regione S è la seguente:

i) $\exists \alpha \in C^+$, $\alpha \neq 0$, tale che $\alpha^T J_F(x_0)d \leq 0$ $\forall d \in \mathcal{D}_T$ ed inoltre per ogni direzione $d \in \mathcal{D}_T$ tale che $J_F(x_0)d \in C \backslash C^{00}$ esiste un $\varepsilon>0$ tale che il punto x_0 è localmente C^*-efficiente rispetto alla regione $S \cap (x_0+K(d,\varepsilon))$.

Se inoltre il punto x_0 è interno ad S si ha la seguente ulteriore condizione necessaria e sufficiente:

ii) $\exists \alpha \in C^+$, $\alpha \neq 0$, tale che $\alpha^T J_F(x_0)=0$ ed inoltre per ogni direzione $d \in \mathcal{D}^n$ tale che $J_F(x_0)d \in C \backslash C^{00}$ esiste un $\varepsilon>0$ tale che il punto x_0 è localmente C^*-efficiente rispetto alla regione $S \cap (x_0+K(d,\varepsilon))$.

Dim. i) Essendo $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)=J_F(x_0)d$ è sufficiente dimostrare, per il Teorema 3.3.8, che la condizione $\exists \alpha \in C^+$, $\alpha \neq 0$, tale che $\alpha^T J_F(x_0)d \leq 0$ $\forall d \in \mathcal{D}_T$ è equivalente alla $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \notin C^{00}$ $\forall d \in \mathcal{D}_T$. Per la sufficienza si osservi che la condizione $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \notin C^{00}$ $\forall d \in \mathcal{D}_T$ implica che $W \cap C^{00} = \emptyset$, di conseguenza per un noto teorema di separazione tra insiemi convessi (vedasi Proprietà 3.1.3) $\exists \alpha \in C^+$, $\alpha \neq 0$, tale che $\alpha^T w \leq 0$ $\forall w \in W$, ovvero tale che $\mu(\alpha^T J_F(x_0)d) \leq 0$ $\forall \mu \in \Re^+$ $\forall d \in \mathcal{D}_T$, da cui si ottiene che $\exists \alpha \in C^+$, $\alpha \neq 0$, tale che $\alpha^T J_F(x_0)d \leq 0$ $\forall d \in \mathcal{D}_T$.

Per la necessità si supponga per assurdo che esista $\bar{d}\in \mathcal{D}_T$ tale che risulti $\frac{\partial F}{\partial \bar{d}}(x_0)=J_F(x_0)\bar{d}\in C^{00}$; per il Teorema 3.1.4 risulta $\alpha^T J_F(x_0)\bar{d}>0$, condizione assurda poiché nega l'ipotesi.

ii) La condizione $\exists\alpha\in C^+$, $\alpha\neq 0$, tale che $\alpha^T J_F(x_0)=0$ implica che $\exists\alpha\in C^+$, $\alpha\neq 0$, tale che $\alpha^T J_F(x_0)d=0$ $\forall d\in \mathcal{D}_T=\mathcal{D}^n$, da cui la locale C^*-efficienza di x_0 per il punto i). Si supponga adesso che x_0 sia C^*-efficiente; per il punto i) $\exists\alpha\in C^+$, $\alpha\neq 0$, tale che $\alpha^T J_F(x_0)d\leq 0$ $\forall d\in \mathcal{D}_T=\mathcal{D}^n$; poiché inoltre se $d\in \mathcal{D}^n$ allora anche $-d\in \mathcal{D}^n$ risulta che $\alpha^T J_F(x_0)d=0$ $\forall d\in \mathcal{D}^n$, da cui si ha che $\alpha^T J_F(x_0)=0$. ♦

Il Corollario 3.3.10 permette di ottenere inoltre le seguenti condizioni necessarie di C^{00}-efficienza.

Corollario 3.3.11 Si consideri il problema P e si supponga che F sia direzionalmente derivabile con regolarità e debolmente differenziabile nel punto x_0 di accumulazione per S e che i coni C e $T(S,x_0)$ siano convessi.

Condizione necessaria affinché il punto x_0 sia localmente C^{00}-efficiente (ovvero debolmente efficiente) rispetto alla regione S è la seguente:

$$\exists\alpha\in C^+,\ \alpha\neq 0, \text{ tale che } \alpha^T J_F(x_0)d\leq 0\ \forall d\in \mathcal{D}_T.$$

Se inoltre x_0 è interno ad S si ha la seguente ulteriore condizione necessaria:

$$\exists\alpha\in C^+,\ \alpha\neq 0, \text{ tale che } \alpha^T J_F(x_0)=0.$$

Si osservi che tali condizioni sono state stabilite in [3] limitatamente però ai punti localmente C^0-efficienti.

Si osservi inoltre che le precedenti condizioni necessarie di efficienza locale possono essere interpretate come possibili generalizzazioni a livello vettoriale del concetto, proprio del caso scalare, di punto critico; ad avvalorare tale interpretazione si vedrà nel prossimo paragrafo che, analogamente a quanto accade nel caso scalare, sotto ipotesi di pseudo-concavità le precedenti condizioni divengono, oltre che necessarie, anche sufficienti.

3.3.5. Pseudoconcavità e punti critici

E' noto che nel caso scalare e sotto ipotesi di pseudo-concavità un punto critico è anche di massimo assoluto oppure di massimo assoluto stretto.

I risultati seguenti, che si possono interpretare come naturale estensione al caso vettoriale di tali proprietà, coinvolgono tutte le classi di funzioni di tipo pseudo-concavo introdotte dalla Definizione 3.3.3.

Come mostrano i Corollari 3.3.3 e 3.3.4, è possibile determinare condizioni di efficienza tramite le condizioni $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \notin C^{00}$ e $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \notin C^0 \ \forall d \in \mathcal{D}_F$; caratterizzando tali condizioni per mezzo del polare positivo e del polare positivo stretto di C è pertanto possibile ottenere ulteriori risultati.

Corollario 3.3.12 Sia S un insieme stellato di vertice x_0 e si consideri il problema P dove F è direzionalmente derivabile in x_0; si supponga inoltre che F sia (C^*,C^{00})-pseudoconcava, con $C^* \in \{C, C^0, C^{00}\}$. Condizione sufficiente affinché il punto x_0 sia globalmente C^*-efficiente è la seguente:

i) $\exists \alpha \in C^+$, $\alpha \neq 0$, tale che $\alpha^T \frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \leq 0 \ \forall d \in \mathcal{D}_F$.

Se inoltre la funzione F è debolmente differenziabile nel punto x_0 si hanno le seguenti ulteriori condizioni sufficienti:

ii) $\exists \alpha \in C^+$, $\alpha \neq 0$, tale che $\alpha^T J_F(x_0) d \leq 0 \ \forall d \in \mathcal{D}_F$;

iii) $\exists \alpha \in C^+$, $\alpha \neq 0$, tale che $\alpha^T J_F(x_0) = 0$.

Dim. i) Per il punto iii) del Corollario 3.3.3 è sufficiente dimostrare che le ipotesi implicano che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \notin C^{00} \ \forall d \in \mathcal{D}_F$; si supponga per assurdo che ciò non sia vero e che quindi esista una direzione $\bar{d} \in \mathcal{D}_F$ tale che $\frac{\partial F}{\partial \bar{d}}(x_0) \in C^{00}$; per il Teorema 3.1.4 risulta $\alpha^T \frac{\partial F}{\partial \bar{d}}(x_0) > 0$, contro l'ipotesi.

ii) La tesi segue dal punto i) essendo $J_F(x_0)d = \frac{\partial F}{\partial d}(x_0)$.

iii) La tesi segue dal punto ii) dal momento che per ipotesi $\exists \alpha \in C^+$, $\alpha \neq 0$, tale che $\alpha^T J_F(x_0) d = 0 \ \forall d \in \mathcal{D}_F$. ♦

Corollario 3.3.13 Sia S un insieme stellato di vertice x_0 e si consideri il problema P dove F è direzionalmente derivabile in x_0; si supponga inoltre che F sia (C^*,C^0)-pseudoconcava, con $C^* \in \{C, C^0, C^{00}\}$. Condizione sufficiente affinché il punto x_0 sia globalmente C^*-efficiente è la seguente:

i) $\exists \alpha \in C^{++}$ tale che $\alpha^T \frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \leq 0 \ \forall d \in \mathcal{D}_F$.

Se inoltre la funzione F è debolmente differenziabile nel punto $x_0 \in S$ si hanno le seguenti ulteriori condizioni sufficienti:

ii) $\exists \alpha \in C^{++}$ tale che $\alpha^T J_F(x_0) d \leq 0 \ \forall d \in \mathcal{D}_F$;

iii) $\exists \alpha \in C^{++}$ tale che $\alpha^T J_F(x_0) = 0$.

Dim. i) Per il punto i) del Corollario 3.3.4 è sufficiente dimostrare che le ipotesi implicano che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \notin C^0 \ \forall d \in \mathcal{D}_F$; si supponga per assurdo che ciò non sia vero e che quindi esista una direzione $\bar{d} \in \mathcal{D}_F$ tale che $\frac{\partial F}{\partial \bar{d}}(x_0) \in C^0$; per la definizione di polare positivo stretto si ha che $\alpha^T \frac{\partial F}{\partial \bar{d}}(x_0) > 0$, contro l'ipotesi.

ii) La tesi segue dal punto i) essendo $J_F(x_0) d = \frac{\partial F}{\partial d}(x_0)$.

iii) La tesi segue dal punto ii) dal momento che per ipotesi $\exists \alpha \in C^{++}$ tale che $\alpha^T J_F(x_0) d = 0 \ \forall d \in \mathcal{D}_F$. ♦

Nel caso in cui sia $\mathcal{D}_T = \mathcal{D}_F$ ed i coni C e $T(S,x_0)$ siano convessi, è possibile determinare le seguenti ulteriori condizioni necessarie e sufficienti di efficienza locale sotto ipotesi di pseudo-concavità della funzione F; questi risultati evidenziano come tali condizioni possano essere considerate come estensione a livello vettoriale del concetto di punto critico.

Corollario 3.3.14 Si consideri il problema P e si supponga che F sia direzionalmente derivabile con regolarità e debolmente differenziabile nel punto x_0 di accumulazione per S, che sia $\mathcal{D}_T = \mathcal{D}_F$ e che i coni C e $T(S,x_0)$ siano convessi; si supponga inoltre che F sia (C^*, C^{00})-pseudoconcava, con $C^* \in \{C, C^0, C^{00}\}$.
Il punto x_0 è globalmente C^*-efficiente se e solo se:

$$\exists \alpha \in C^+, \alpha \neq 0, \text{ tale che } \alpha^T J_F(x_0) d \leq 0 \ \forall d \in \mathcal{D}_T = \mathcal{D}_F;$$

Se inoltre il punto x_0 è interno ad S si ha la seguente ulteriore condizione necessaria e sufficiente:

$$\exists \alpha \in C^+, \alpha \neq 0, \text{ tale che } \alpha^T J_F(x_0) = 0.$$

Dim. La tesi segue direttamente dai Corollari 3.3.11 e 3.3.12. ♦

3.3.6. Condizioni di ottimalità vettoriali di tipo "Kuhn-Tucker"

In questo ultimo sottoparagrafo si vuol mostrare come l'approccio considerato in questa Tesi permetta di estendere al caso vettoriale i risultati tipici del caso scalare relativi alle condizioni di Kuhn-Tucker.

In altre parole verranno determinate delle condizioni di ottimalità di tipo "Kuhn-Tucker" per dei problemi di estremo vettoriale del tipo seguente:

$$P: \begin{cases} \text{C\_max } F(x) \\ x \in S = \{x \in X: G(x) \in K\} \end{cases},$$

dove $X \subset \Re^n$ è un insieme aperto, F e G sono funzioni vettoriali differenziabili $F: X \rightarrow \Re^m$ e $G: X \rightarrow \Re^s$, $S \subseteq X$ è la regione ammissibile del problema e $C \subseteq \Re^m$ e $K \subseteq \Re^s$ sono coni chiusi, convessi, puntati di vertice l'origine ed interno non vuoto. Per maggior semplicita, verranno di seguito considerate condizioni di ottimalità rispetto ad un punto ammissibile $x_0 \in S$ aderente a tutti i vincoli del problema, ovvero tale che $G(x_0)=0$.

Come è noto [3, 4, 11], la C*-efficienza del punto ammissibile $x_0 \in S$ implica la validità della seguente condizione di tipo "Fritz-John":

$$\exists(\alpha_F,\alpha_G) \neq 0,\ \alpha_F \in C^+,\ \alpha_G \in K^+:\ \alpha_F{}^T J_F(x_0) + \alpha_G{}^T J_G(x_0) = 0.$$

Il seguente teorema mostra invece come sotto particolari ipotesi, di pseudo-concavità vettoriale della funzione F e di debole quasi-concavità vettoriale della funzione G, la precedente condizione diviene anche sufficiente.

Teorema 3.3.9 Si consideri il problema di estremo vettoriale P dove S è un insieme stellato di vertice x_0 e le funzioni F e G sono differenziabili in x_0.

i) Se F è (C^*,C^0)-pcv in x_0, la funzione G è (K-K)-wqcv in x_0 ed inoltre:

$$\exists(\alpha_F,\alpha_G) \neq 0,\ \alpha_F \in C^{++},\ \alpha_G \in K^+:\ \alpha_F{}^T J_F(x_0) + \alpha_G{}^T J_G(x_0) = 0,$$

allora x_0 è un punto C*-efficiente.

i) Se F è (C^*,C^{00})-pcv in x_0, la funzione G è (K-K)-wqcv in x_0 ed inoltre:

$$\exists(\alpha_F,\alpha_G) \neq 0,\ \alpha_F \in C^+,\ \alpha_F \neq 0,\ \alpha_G \in K^+:\ \alpha_F{}^T J_F(x_0) + \alpha_G{}^T J_G(x_0) = 0,$$

allora x_0 è un punto C*-efficiente.

Dim. i) Si supponga per assurdo che esista un punto ammissibile $x \in S$, $x \neq x_0$, tale che $F(x) \in F(x_0)+C^*$; essendo F (C^*,C^0)-pcv e differenziabile in x_0 risulta $J_F(x_0)(x-x_0) \in C^0$ e quindi, essendo $\alpha_F \in C^{++}$, $\alpha_F{}^T J_F(x_0)(x-x_0) > 0$. Analogamente, essendo per ipotesi $G(x_0)=0$, si ha che $G(x) \in K = G(x_0)+K$; poiché inoltre G è (K-K)-wqcv e differenziabile in x_0 risulta $J_G(x_0)(x-x_0) \in K$ e quindi, essendo

$\alpha_G \in K^+$, $\alpha_G{}^T J_G(x_0)(x-x_0) \geq 0$. Si ha pertanto $\alpha_F{}^T J_F(x_0)(x-x_0)+\alpha_G{}^T J_G(x_0)(x-x_0)>0$, condizione assurda poiché nega l'ipotesi.

ii) La dimostrazione è, ricordando il Teorema 3.1.4, analoga alla precedente. ♦

Si osservi che le condizioni sufficienti ottenute nel precedente Teorema 3.3.9 sono delle condizioni di ottimalità di tipo "Kuhn-Tucker", dal momento che viene richiesto per ipotesi che sia $\alpha_F \neq 0$.

Bibliografia

[1] Bazaraa, M.S. and C.M. Shetty, *Foundations of optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 122, Springer-Verlag, 1976.

[2] Cambini, A. and L. Martein, *A modified version of Martos's Algorithm*, Methods of Operation Research, vol. 53, pp. 33-44, 1986.

[3] Cambini, A. and L. Martein, *An approach to optimality conditions in vector and scalar optimization*, in "Mathematical Modelling in Economics", edited by W.E. Diewert, K. Spremann, and F. Stehling, Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 345-358, 1993.

[4] Cambini, A., L. Martein, and R. Cambini, *Some optimality conditions in multiobjective programming*, Technical Report n°82, Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia, Università di Pisa, 1994.

[5] Cambini, R., *Alcune condizioni di ottimalità relative ad un insieme stellato*, Rendiconti del Comitato per gli Studi Economici, vol. 29, pp. 7-28, 1992.

[6] Cambini, R., *A class of non-linear programs: theoretical and algorithmical results*, in "Generalized Convexity", vol. 405, edited by S. Komlósi, T. Rapcsák, and S. Schaible, Springer-Verlag, pp. 294-310, 1994.

[7] Cambini, R., *Condizioni di efficienza locale nella ottimizzazione vettoriale*, Technical Report 78, Dept. of Statistics and Applied Mathematics, University of Pisa, 1994.

[8] Cambini, R., *Nuove classi di funzioni scalari concave generalizzate*, Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali, 1994.

[9] Fenchel, W., *Convex cones, sets and functions*, Mimeographed lecture notes, Princeton University, Princeton, New Jersey, 1951.

[10] Mangasarian, O.L., *Pseudo-convex functions*, J. SIAM Control Ser. A, vol. 3, pp. 281-290, 1965.

[11] Martein, L., *Some results on regularity in vector optimization*, Optimization, vol. 20, pp. 787-798, 1989.

[12] Martos, B., *Hyperbolic Programming*, Naval Research Logistic Quarterly, vol. 11, pp. 135-155, 1964.

[13] Sawaragi, Y., H. Nakayama, and T. Tanino, *Theory of multiobjective optimization*, Academic Press, 1985.