

Errori e difficoltà nella comprensione del concetto di variabile algebrica. Uno studio con ragazzi della scuola secondaria di primo grado

SONIA URSINI
Departamento de Matemática Educativa
Cinvestav-IPN, México
soniaul2002@yahoo.com.mx

SUNTO

In questo articolo si analizzano gli errori commessi da un gruppo di 118 ragazzi italiani al termine della scuola secondaria di primo grado nell'affrontare tre diversi usi della variabile algebrica (incognita, numero generico, variabili in relazione funzionale) e nel contempo si illustra come si può utilizzare il Modello 3UV per individuare le difficoltà che si nascondono dietro tali errori. I risultati mostrano che i ragazzi sono stati in grado di manipolare espressioni lineari, risolvere equazioni, riconoscere regole o relazioni funzionali e applicarle, ma solo in casi molto semplici. Nonostante il livello elementare degli esercizi, hanno trovato difficoltà nel percepire la variazione, nell'interpretare la variabile nei suoi differenti ruoli, nello scrivere in simboli equazioni, regole e relazioni funzionali. Le loro risposte rivelano una limitata esperienza nella riflessione sul significato della variabile e la poca padronanza nel suo utilizzo.

PAROLE CHIAVE

DIDATTICA DELLA MATEMATICA / MATHEMATICS EDUCATION; SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO / FIRST GRADE SECONDARY SCHOOL; VARIABILE ALGEBRICA / ALGEBRAIC VARIABLE; ERRORI E DIFFICOLTÀ / ERRORS AND DIFFICULTIES; MODELLO 3UV / 3UV MODEL.

1. INTRODUZIONE

L'apprendimento dell'algebra passa per la comprensione del concetto di variabile algebrica, che per la maggioranza degli studenti comporta notevoli difficoltà, come è noto dai risultati di numerose ricerche svolte negli ultimi trent'anni¹. Sebbene ciò sia ben risaputo, essendo stato evidenziato da numerosi ricercatori

¹ Cfr., ad esempio, MATZ 1982; USISKIN 1988; TRIGUEROS, URSINI 2003; MALARA, NAVARRA 2003.

che hanno dato anche vari suggerimenti per superare tali difficoltà, i risultati finora raggiunti non sono ancora soddisfacenti. Questo può dipendere, in parte, anche dal fatto che i risultati delle ricerche rimangono spesso circoscritti all'ambito della ricerca e non riescono a permeare il lavoro quotidiano degli insegnanti, il cui ruolo è una componente fondamentale per l'apprendimento dei ragazzi. È doveroso quindi cercare di offrire ai docenti degli strumenti idonei e accessibili, assieme a suggerimenti su come usarli per migliorare l'insegnamento e aiutare i ragazzi a sviluppare una miglior comprensione dei concetti matematici, in particolare quello di variabile algebrica.

I ragazzi hanno i primi contatti con la variabile algebrica fin dall'inizio della scuola secondaria di primo grado e molto presto devono affrontare problemi ed esercizi che richiedono di lavorare con distinti usi della variabile (incognita, numero generico, in relazione funzionale)², che appaiono con diversi gradi di difficoltà, col procedere degli studi. Lavorare con i distinti usi della variabile comporta notevoli implicazioni e richiede di sviluppare le capacità di:

- interpretare correttamente il significato del simbolo che si usa per rappresentare la variabile in un dato problema (si utilizza lo stesso simbolo, generalmente una lettera, per rappresentare sia una incognita che un numero generico o una variabile in una relazione funzionale);
- eseguire le azioni necessarie e pertinenti per risolvere un problema (le azioni dipendendo dall'uso della variabile coinvolto, che può cambiare senza che cambi il simbolo che la rappresenta);
- scrivere in simboli la variabile e usarla per produrre espressioni simboliche (equazioni, espressioni generiche, relazioni funzionali);
- passare con flessibilità tra i distinti usi della variabile che possono apparire successivamente in un dato problema (ad esempio, per risolvere un'equazione lineare con molteplici apparizioni dell'incognita è necessario

² Cfr. URSINI 2011.

percepire la variabile sia come un numero generico, per poterlo manipolare, sia come un'incognita specifica, per determinarne il valore).

Per aiutare i ragazzi a sviluppare queste competenze è necessario che il docente abbia a disposizione dei mezzi per determinare quali usi della variabile e quali aspetti, in relazione a ciascun uso, intervengono in un dato problema algebrico. Ciò gli permetterà di riconoscere più facilmente cosa hanno imparato i suoi allievi, di catalogare i loro errori, di identificare con più precisione le loro difficoltà e di indirizzare quindi l'insegnamento verso il superamento delle misconcezioni e degli errori così individuati.

In un articolo precedente³ mi riferivo al Modello 3UV come a uno strumento teorico-metodologico che può essere d'aiuto agli insegnanti per riconoscere le difficoltà degli alunni riguardo a questo argomento. Nel presente articolo uso tale strumento per analizzare gli errori più comuni commessi dai ragazzi. Il proposito è quindi duplice: da una parte, mostrare e analizzare gli errori più frequenti e, dall'altra, far vedere, a chi possa essere interessato, e in particolare agli insegnanti di matematica, come si possa usare il Modello 3UV per individuare le difficoltà che si nascondono dietro gli errori degli studenti.

I dati che utilizzo in quest'articolo fanno parte di quelli raccolti recentemente nel corso di una ricerca congiunta svolta con Luciana Zuccheri nell'ambito di una convenzione tra il CIRD⁴ (Università di Trieste, Italia) e il DME⁵ (Cinvestav-IPN, Messico), con il proposito di indagare cosa imparano i ragazzi italiani e i ragazzi messicani della scuola secondaria di primo grado sui diversi usi della variabile algebrica.

2. IL MODELLO 3UV

In questa sezione mi riferirò molto brevemente al Modello 3UV. Tale strumento teorico-metodologico contempla tre usi della variabile (come incognita; come numero generico; in una relazione funzionale) e gli aspetti corrispondenti. In base

³ URSINI 2011.

⁴ Centro Interdipartimentale per la Ricerca Didattica.

⁵ Departamento de Matemática Educativa.

all'esperienza posso affermare che ogni altro uso della variabile (ad esempio, come parametro) può essere incluso facilmente in uno dei tre usi già citati⁶.

Nel Modello 3UV si considera che lavorare con l'*incognita* implica:

- I1. riconoscere e identificare in una situazione problematica ciò che è sconosciuto e che può essere trovato considerando le restrizioni del problema;
- I2. interpretare la variabile simbolica che appare in un'equazione come la rappresentazione di valori specifici;
- I3. sostituire alla variabile il valore (i valori) che rende (rendono) l'espressione corretta;
- I4. determinare il valore sconosciuto che appare in un'equazione o in un problema, svolgendo le operazioni algebriche e/o aritmetiche;
- I5. scrivere in simboli i valori sconosciuti identificati in una situazione specifica e usarli per porre le equazioni.

Lavorare con il *numero generico* implica:

- G1. riconoscere le leggi, percepire le regole e i metodi in successioni e famiglie di problemi;
- G2. interpretare la variabile simbolica come la rappresentazione di un ente generale, indeterminato, che può assumere qualsiasi valore;
- G3. dedurre regole e metodi generali a partire da successioni e famiglie di problemi;
- G4. manipolare (ridurre, sviluppare) la variabile simbolica;
- G5. scrivere in simboli enunciati, regole o metodi generali;

Lavorare con le variabili in *relazione funzionale* implica:

- F1. riconoscere la corrispondenza tra le variabili in relazione, indipendentemente dalla rappresentazione (tabella, grafico, problemi verbali, espressioni analitiche);

⁶ URSINI, TRIGUEROS 2004.

- F2. determinare i valori della variabile dipendente, dati i valori di quella indipendente;
- F3. determinare i valori della variabile indipendente, dati i valori di quella dipendente;
- F4. riconoscere la variazione congiunta delle variabili coinvolte in una relazione funzionale indipendentemente dalla rappresentazione (tabella, grafico, problemi verbali, espressioni analitiche);
- F5. determinare l'intervallo di variazione di una delle variabili, dato l'intervallo di variazione dell'altra;
- F6. scrivere in simboli una relazione funzionale, basandosi sull'analisi dei dati di un problema⁷.

3. METODO

I dati che analizzo e discuto in quest'articolo provengono dalle risposte date a un questionario da 96 ragazzi che stavano per concludere il primo anno della scuola secondaria di primo grado e da 118 ragazzi che stavano per finire il terzo anno dello stesso grado scolastico. Gli alunni appartenevano a tre scuole della Provincia di Trieste. Il questionario, con 47 quesiti, è una versione leggermente modificata e tradotta in italiano di quello già usato in precedenza per un simile scopo da Trigueros e Ursini. Il tempo dato per rispondere al questionario, che è stato somministrato dai responsabili della ricerca alla presenza del professore di matematica, era di due ore.

Per analizzare i dati, seguendo il Modello 3UV, nel seguito di questo articolo raggrupperò innanzitutto i quesiti in relazione all'uso della variabile coinvolto, classificando le risposte come corrette, non corrette e non date. In un secondo momento esaminerò, per ogni uso della variabile, i quesiti che hanno ottenuto più del 50% di risposte corrette (ciò dà informazioni sulle competenze dai ragazzi) e

⁷ Per approfondimenti sul Modello 3UV e sulle sue applicazioni cfr. TRIGUEROS, URSINI 2003; URSINI 2011; URSINI, TRIGUEROS 2009.

quelli con più del 50% di risposte non corrette (ciò mette in luce quali sono le difficoltà della maggioranza). In terzo luogo userò il Modello 3UV per analizzare le risposte e individuare comprensioni corrette e non corrette, segnalare le competenze raggiunte, ma anche gli errori più comuni e le difficoltà riscontrate in questo campione.

4. RISULTATI

In base all'analisi delle percentuali di risposte corrette, non corrette e non date possiamo affermare che tra il primo e il terzo anno della scuola secondaria di primo grado si riscontra, in generale, un miglioramento della comprensione del concetto di variabile, poiché:

- diminuisce notevolmente la percentuale di risposte non date (infatti, per la gran maggioranza dei ragazzi, lavorare con la variabile non è più una novità);
- aumenta la percentuale di risposte corrette (ad esempio, da 8 quesiti - su 47 - con più del 50% di risposte corrette nel primo anno si passa a 20 nel terzo anno);
- aumenta anche la percentuale di risposte non corrette (ciò indica che il concetto non è ancora del tutto chiaro).

4.1 INCOGNITA

Le risposte date al questionario indicano che la maggioranza dei ragazzi al termine della scuola secondaria di primo grado è stata capace di:

- scrivere in simboli (I5) un'incognita e usarla per fare operazioni semplici, con un solo passaggio (*Scrivi in linguaggio matematico «Un numero sconosciuto moltiplicato per 13 è uguale a 127»*);
- interpretare la variabile simbolica come un'incognita (I2), manipolare la variabile (G4) e determinare il valore dell'incognita (I4), data un'equazione di primo grado, quando si chiede in modo esplicito di trovarne il valore (*Calcola i valori che può avere la lettera nelle seguenti equazioni: $13x+27-2x=30+5x$; $4+x=2$*);

Nonostante i ragazzi non avessero ancora imparato a risolvere equazioni di secondo grado, quasi il 12% ha trovato una soluzione corretta dell'equazione $(x+3)^2=36$ (indicando 3 come risposta), mostrando così che riconoscevano che la variabile rappresentava un'incognita (I1, I2) e che si poteva determinarne il valore (I4).

Gli errori fatti dalla maggioranza sono una ricca fonte d'informazione e mostrano, ad esempio, le difficoltà per manipolare la variabile (G4) quando è accompagnata da un esponente o da un coefficiente. Hanno scritto, ad esempio, che x^2+6x è uguale a $7x^2$, o che $3x+3x$ è uguale a $6x^2$, o che x^2 è uguale a $2x$, mostrando così una certa confusione tra l'uso del coefficiente e dell'esponente.

Gli allievi hanno anche dimostrato difficoltà nello sviluppo del quadrato di un binomio, scrivendo, ad esempio, $(x+3)^2=x^2+9$. Questo tipo di errori sono ben noti e sono stati già evidenziati nel campo della ricerca, ma, come si vede, sono ancora presenti e persistenti, ed è quindi necessario che i docenti, oltre a riconoscerli, ne prendano chiara coscienza e segnalino ai ragazzi le misconcezioni a essi sottostanti.

La maggioranza dei ragazzi ha avuto difficoltà a impostare un'equazione (I5), assegnata verbalmente, quando sia necessario usare parentesi e operazioni che richiedono due passaggi (*Un numero sconosciuto, moltiplicato per la somma dello stesso numero più 12, è uguale a 6*). Gli errori commessi suggeriscono che tali allievi abbiano difficoltà a produrre e a considerare un'espressione aperta (in questo caso, l'espressione $x+12$) come un oggetto matematico a sé stante, con il quale si può operare per produrne un'altra, $x(x+12)$ (risposte errate più comuni: $x \times x+12=6$ o $x \times 2x+12=6$).

Anche di fronte alla richiesta esplicita di porre un'equazione (I5) che permetta di risolvere un problema dato (*Scrivi solo l'equazione (non è necessario risolverla): Giovanni è 15 anni più vecchio di Santiago. La somma delle loro età è 41. Quali sono le loro età?*), la maggioranza non è riuscita a farlo (hanno scritto: $x=41-15$; $15+x=41$; $G+S=41$) o ha cercato, piuttosto, di risolvere il problema aritmeticamente, mostrando così una chiara tendenza a voler trovare una risposta numerica, ma evitando la simbolizzazione algebrica.

Le risposte date a quesiti che richiedevano di interpretare la variabile (I2) (*Scrivi quanti valori può assumere la lettera nella seguente espressione: $3+a+a=a+10$*) inducono a pensare che i ragazzi non sono abituati a riflettere sul significato delle variabili simboliche. Le risposte errate più comuni sono state: *qualsiasi numero, qualunque numero, infinito, tre*. La maggioranza non è riuscita quindi a vedere che si trattava di un'incognita (I2) e ha evidenziato la tendenza a interpretare la variabile come un numero generico (G2). Sembra che questi ragazzi, quando la richiesta non è quella di trovare il valore di una variabile, automaticamente la interpretino come un numero generico (G2), non vedano la necessità di manipolare l'espressione (G4) (in scritto o a mente) e quindi non riescano a comprenderla correttamente. La difficoltà a rendersi conto di cosa rappresenta la variabile in un determinato problema o espressione costituisce un forte ostacolo che impedisce di prendere le decisioni corrette sulle azioni da eseguire in seguito. Il risultato suggerisce che tali ragazzi non abbiano fatto un'esperienza nell'attività di riflessione sui distinti significati della variabile, sufficiente per permettere loro di distinguerli e associarli a situazioni specifiche.

4.2 NUMERO GENERICO

Riguardo all'uso della variabile come numero generico, le risposte dei ragazzi al termine della scuola secondaria di primo grado mostrano che la grande maggioranza di loro è stata in grado di riconoscere e di dedurre regole (G1, G3) molto semplici e applicarle per produrre esempi specifici.

Le difficoltà sono sorte alla richiesta di scrivere in simboli la regola dedotta (G5). Per farlo, di solito è necessario lavorare simultaneamente con vari aspetti che caratterizzano l'uso della variabile come numero generico. Ad esempio, scrivere in simboli la regola come richiesto nel quesito 7.b (cfr. Figura 1) richiede di percepire e dedurre una regola (G1, G3), interpretare il simbolo dato - m in questo caso - come un numero generico (G2) e manipolarlo (G4) per scrivere in simboli (G5) la regola

dedotta (G3). Le risposte più frequenti a questo quesito sono state degli esempi numerici, del tipo: *121 punti, 143 punti, 100 punti, infiniti*.

Osserva quanto segue:

Figura 1	●	Numero di punti: 1
Figura 2	● ● ● ●	Numero di punti: 4
Figura 3	● ● ● ● ● ● ● ● ●	Numero di punti: 9

7.b Se continuiamo ancora, quanti punti avrà la Figura m ?

Figura 1. Il quesito 7b.

La maggioranza dei ragazzi non è riuscita a svincolarsi dai casi numerici specifici e a passare a una riflessione sulle proprie azioni (ossia, sulle operazioni fatte per produrre gli esempi specifici), a generalizzare queste azioni e a descriverle usando il linguaggio algebrico.

La mancanza di abitudine a riflettere sul significato della variabile si ritrova nuovamente (come già segnalato per l'incognita) quando si chiede quanti, e non quali, sono i valori che può assumere la lettera in una data espressione (G2). Ad esempio, di fronte all'espressione $3+a+a+a+10$, molti ragazzi hanno assegnato un valore alla lettera a e hanno poi calcolato il risultato numerico ($3+2+2+2+10=19$); altri hanno scritto che rappresenta 3 valori, o 1 valore, o 2 valori; c'è chi, dopo aver fatto delle manipolazioni, ha interpretato l'espressione come un'equazione ($3a+10$ allora $x=10/3$); c'è chi ha cercato di manipolarla e ha scritto $3a^3+10$; altri hanno risposto scrivendo un numero (5, 10, 13, 16) e c'è ancora chi ha considerato che la domanda "non ha senso". Le risposte ottenute mostrano che per la maggioranza di questi

ragazzi ciò che è veramente importante è che la variabile possa assumere un valore numerico specifico e quindi essi hanno cercato un modo per dedurlo.

Le risposte date ai quesiti che richiedevano una riflessione (interpretare la variabile (G2) o scrivere una regola (G5)), e non solamente eseguire dei calcoli per arrivare a un risultato numerico (I4), o applicare una regola per produrre casi specifici, ci portano a dire⁸ che la maggioranza dei ragazzi non aveva una chiara coscienza delle proprie azioni e, anche se erano capaci di eseguire, quando richiesto, delle azioni apprese, non potevano descriverle. Si rafforza quindi ciò che si era già osservato rispetto all'incognita e che si ritroverà, come vedremo più avanti, anche nell'analizzare i quesiti concernenti la variabile in relazione funzionale.

La difficoltà a considerare un'espressione algebrica come un oggetto matematico con cui si può lavorare per produrre altri oggetti matematici appare nuovamente (come già visto nel caso dei quesiti relativi all'incognita) quando si chiede di riscrivere in linguaggio matematico il seguente enunciato: *Un numero sconosciuto è diviso per 5 e il risultato si somma a 7.* Le risposte (la più comune è stata $x:5=y+7$, ma molti hanno scritto $x/5=7$ o $x/5=x+7$) mettono in evidenza la difficoltà a considerare un'espressione aperta - in questo caso $x/5$ - come un oggetto matematico con cui si può operare per ottenere una nuova espressione. La maggioranza, dopo aver scritto $x/5$, forse per il bisogno di identificare quest'espressione con un nuovo oggetto matematico, ha scritto $x/5=y$, ma poi non è stata in grado di usare la y come un nuovo oggetto e produrre l'espressione richiesta, $y+7$, scrivendo invece $x:5=y+7$.

4.3 VARIABILE IN RELAZIONE FUNZIONALE

La maggioranza dei ragazzi, al termine della scuola secondaria di primo grado, ha mostrato di possedere nozioni, anche se molto elementari, di quest'uso della variabile algebrica. Sono stati capaci di rispondere a quesiti che richiedono di affrontare almeno due dei seguenti aspetti: F1, F2, F3, F4 e F5, anche se a un livello molto elementare. La grande maggioranza non ha evidenziato difficoltà riguardo

⁸ Cfr. VYGOTSKY 1989.

all'idea di corrispondenza (F1), anche se non ha dimostrato di saper interpretare un'espressione del tipo $x+a=y$ come una relazione tra due variabili; i ragazzi hanno, piuttosto, visto la variabile y come la rappresentazione del risultato che si ottiene assegnando diversi valori a x . Infatti, hanno considerato che x possa assumere un valore qualunque, mentre y no.

Come già segnalato nel caso dell'incognita e del numero generico, risulta evidente la difficoltà della maggioranza a scrivere in simboli una relazione funzionale (F6). Nonostante avessero compreso che si trattava di una relazione funzionale e avessero potuto usarla per produrre casi specifici, i ragazzi non sono stati in grado di rappresentarla algebricamente (F6). Ad esempio, le risposte più frequenti al quesito riportato in Figura 2 sono state: $n \cdot 1 = 0,25$ e $5n = 1,25$.

Numero di fotocopie	Prezzo in €
5	1,25
10	2,50
15	3,75
18	4,50
	5,50
23	

Considera la tabella e scrivi la regola. Usa n per rappresentare il numero di fotocopie.

Figura 2. Un quesito sulla variabile in relazione funzionale.

La maggior parte dei ragazzi ha mostrato difficoltà rispetto al concetto di variazione (F4), eccetto nel caso di espressioni lineari molto semplici (*Considera: $y=7+x$. Che cosa succede al valore di y , quando il valore di x aumenta?*).

La difficoltà con la variazione (F4) non sembra però essere associata alla rappresentazione usata (algebrica, tabella, grafico).

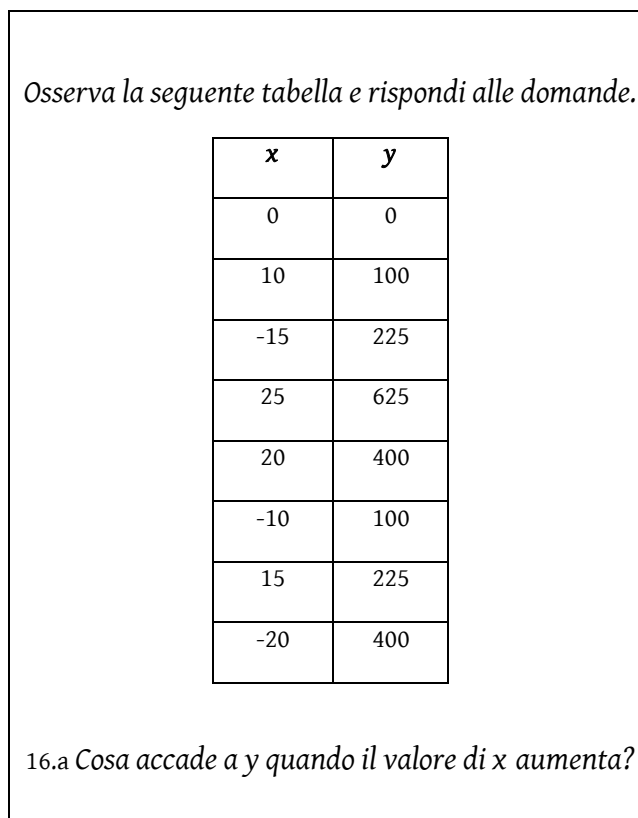


Figura 3.

Ad esempio, i tre quesiti seguenti hanno avuto la percentuale più alta di risposte non corrette, tra tutti quelli del questionario.

- Primo quesito: *Osserva le due espressioni: $n+2$, $2 \cdot n$. Quale delle due rappresenta un valore più grande?* (quesito tratto dal test che Küchemann usò negli anni 1970 per indagare sulla comprensione della variabile da parte di 3000 alunni di scuola secondaria in Inghilterra). Per rispondere a questo quesito è necessario non soltanto rendersi conto che, al variare di n , i valori delle due espressioni ($n+2$ e $2 \cdot n$) variano, ma occorre anche compararle per rendersi conto che variano in modo diverso e che, in un certo intervallo di valori, l'espressione $n+2$ può essere maggiore di $2 \cdot n$. La maggioranza dei ragazzi sembra essersi concentrata, invece, solo sul tipo di operazione coinvolta nelle due espressioni, addizione o moltiplicazione, e quindi ha ritenuto che $2 \cdot n$ rappresentasse un valore più grande, perché implicava una moltiplicazione.

- Secondo quesito. Al secondo quesito (riportato in Figura 3) la grande maggioranza dei ragazzi ha risposto “*aumenta*”, considerando che, quando il valore di x aumenta, anche quello di y aumenta. Ciò suggerisce la mancanza di una visione globale e dinamica della variazione e il predominio di una percezione statica, dove prevale l’idea di corrispondenza.
- Terzo quesito. Le risposte errate più comuni a questo quesito (riportato in Figura 4) sono state: *0,10*; *diminuisce da $x=9$* ; *diminuisce tra 4 e 10*; *diminuisce tra 10 e $+n$* . Tali risposte mostrano chiaramente le difficoltà dei ragazzi a percepire la variazione congiunta considerando i quattro quadranti e anche una possibile confusione tra diminuzione e valori negativi. Nel caso di quest’uso della variabile risalta inoltre che un numero notevolmente maggiore di ragazzi ha lasciato i quesiti senza risposta. Ciò suggerisce che per la maggioranza forse era ancora troppo difficile lavorare con certi aspetti dell’uso della variabile in relazione funzionale, soprattutto quando questi non apparivano isolati ed era necessario passare dall’uno all’altro e combinare i passaggi con delle manipolazioni algebriche - il che implica passare tra diversi aspetti e usi della variabile.

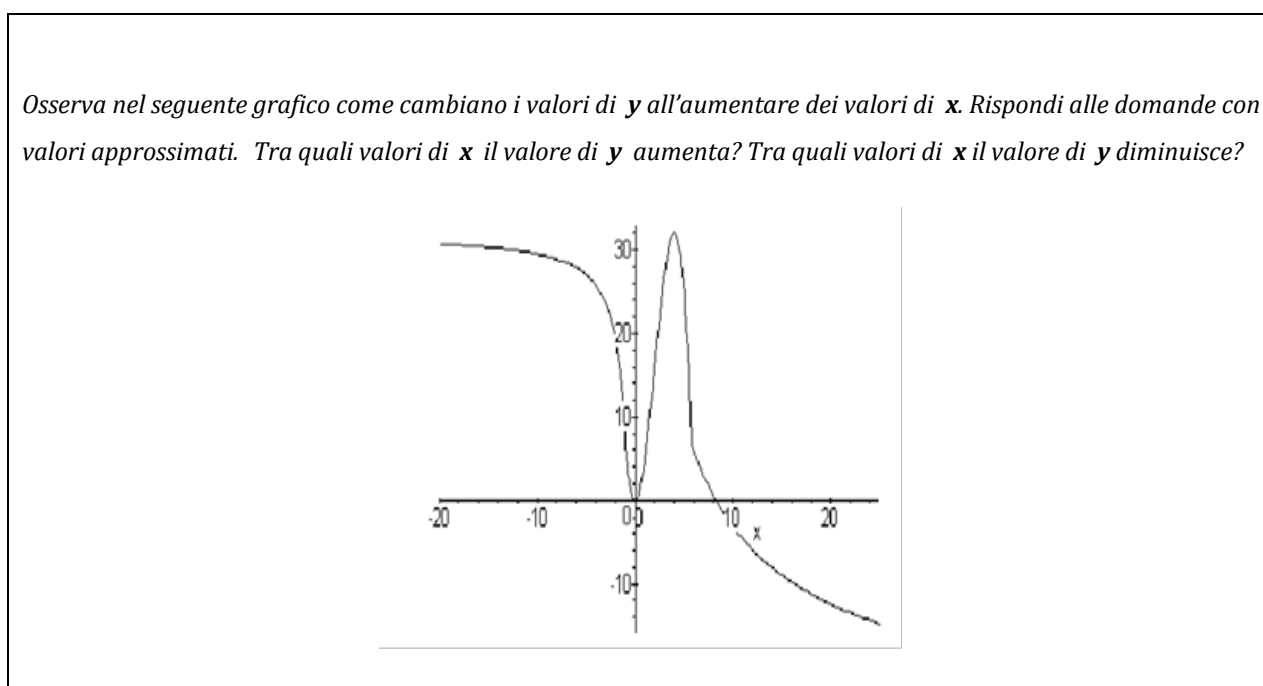


Figura 4.

5. CONCLUSIONI

L'analisi delle risposte date al questionario, usando il Modello 3UV, fornisce informazioni che ci permettono di individuare con una certa precisione cosa hanno appreso i ragazzi alla fine della scuola secondaria di primo grado riguardo all'uso della variabile algebrica e quali sono le loro debolezze, difficoltà e misconcetti in merito. Analizzare gli errori che gli allievi commettono costituisce una fonte importante per capirli e scoprire di cosa abbiano ancora bisogno per impadronirsi di questo concetto.

I risultati ottenuti mostrano che, nei primi tre anni di questo livello scolastico, i ragazzi hanno avuto un primo approccio, a livello molto elementare, alla variabile algebrica. La maggioranza, in casi molto semplici, può interpretare la variabile simbolica come incognita (I2) quando si chiede di calcolarne il valore (I4), e come numero generico (G2), quando si chiede di eseguire delle manipolazioni (G4), ma ha difficoltà nel distinguere tra incognita e numero generico quando si chiede di riflettere sul loro significato (I2, G2). La maggior parte percepisce la corrispondenza tra variabili simboliche (F1) e la variazione (F4), ma solo in casi molto semplici.

I ragazzi possono simbolizzare una variabile e usarla per riprodurre un'equazione data verbalmente - cosa che implica un'operazione con un solo passaggio (I5) -, ma non sono capaci di scrivere in simboli espressioni che richiedono operazioni con due passaggi o di impostare un'equazione (I5) a partire da un problema, anche se molto semplice. Sono capaci di riconoscere e dedurre regole (G1, G3) e relazioni funzionali (F1) molto semplici e applicarle per produrre esempi specifici, ma hanno difficoltà a scrivere in simboli una regola (G5) o una relazione funzionale (F6).

Le risposte corrette, assieme al tipo di errori commessi, suggeriscono che la maggioranza dei ragazzi abbia imparato a eseguire delle richieste esplicite, ma non a riflettere sulle proprie azioni e a decidere autonomamente su come procedere di fronte a un problema matematico, anche se molto semplice. Sviluppare questa capacità dovrebbe essere, ed è, uno degli obiettivi più importanti nella formazione

degli allievi, e non solo nell'ambito dell'insegnamento della matematica, anche se tale disciplina, in particolare l'algebra elementare, potrebbe essere un ottimo veicolo per sviluppare nei ragazzi la capacità di analizzare, di riflettere e di prendere coscienza di ciò che stanno facendo.

Queste considerazioni sorgono essenzialmente dall'analisi degli errori, che, come detto, costituiscono sempre una fonte molto importante per comprendere i ragazzi e scoprire di cosa hanno bisogno per impadronirsi di un concetto. Analizzarli è fondamentale soprattutto per gli insegnanti, poiché essi possono fornire loro dei riferimenti abbastanza precisi per aiutare a decidere dove sarebbe conveniente introdurre delle modifiche nella trattazione del concetto in classe e migliorare l'apprendimento. Non meno importante è creare le condizioni affinché i ragazzi stessi si rendano conto dei propri errori, possano discuterne e riflettere su di essi, tra pari e con la guida dell'insegnante. Imparare la matematica dovrebbe essere per gli studenti molto più stimolante, interessante e formativo che riuscire semplicemente a dare risposte numeriche corrette.

BIBLIOGRAFIA

KÜCHEMANN D.

1980, *The Understanding of Generalised Arithmetic (Algebra) by Secondary School Children*, Unpublished PhD Thesis, Institute of Education University of London.

MALARA N., NAVARRA G.

2003, *ArAl Project. Arithmetic pathways towards favouring prealgebraic thinking*, Bologna, Pitagora.

MATZ M.

1982, *Towards a process model for high school algebra errors*, in SLEEMAN D., BROWN J. J. (a cura di), «Intelligent tutoring system», New York, Academic Press, pp. 25-50.

TRIGUEROS M., URSINI S.

2003, *First year undergraduates difficulties in working with the concept of variable*, «CBMS Research in Collegiate Mathematics Education», 12, pp. 1-29.

URSINI S.

2011, *Il Modello 3UV: uno strumento teorico a disposizione degli insegnanti di matematica*, «QuaderniCIRD», 2, pp. 59-70.

URSINI S., TRIGUEROS M.

2004, *How do high school students interpret parameters in algebra?*, in HØINES M. J., FUGLESTAD A. B. (a cura di), «Proceedings of the XXVIII PME International Conference», Bergen, Vol. 4, pp. 361-368.

2009, *The role of variable in elementary algebra: An approach through the 3UV Model*, «Progress in Education», Progress in Education Series, 19, pp. 1-38.

USISKIN Z.

1988, *Conceptions of school algebra and uses of variables*, in COXFORD A. F., SHULTE A. P. (a cura di), «The Ideas of Algebra K-12», pp. 8-19.

VYGOTSKY L. S.

1989, *Thought and Language*, Cambridge, MIT Press.

WAGNER S.

1983, *What are these things called variables?*, «Mathematics Teacher», October, pp. 474-479.