Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste
Vol. XXXVIII, 21–43 (2006)

Osservazioni sulla Continuità Hölderiana per un Minimo di un Funzionale Convesso con Crescite Non-Standard

Tiziano Granucci (*)

Summary. - *A result for a problem of regularity for a type of functional with not standard growths.*

1. Introduzione

In questo lavoro, partendo dalle tecniche dimostrative presentate in [14] e [16], studiamo la regolarità dei minimi di alcuni funzionali integrali con crescite non-standard. Noi considereremo un funzionale del tipo

$$J(u,\Omega) = \int_\Omega \Phi(|Du|)\, dx \tag{1}$$

dove Φ è una N-funzione e Ω è un aperto limitato con frontiera lipschitziana di $\mathbb{R}^N$. Funzionali di questo tipo sono stati studiati negli anni Novanta; in bibliografia abbiamo citato solo alcuni degli articoli su questo argomento a cui faremo riferimento. In particolare, ricordiamo che in [14] si dimostra una disuguaglianza di tipo Harnack sotto l'ulteriore ipotesi che $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$; mentre in [15] si dimostra che se $|\xi|^p - c_1 \le f(x,s,\xi) \le c_2(|\xi|^q + 1)$, dove $1 < p \le q < \frac{Np}{N-p}$,

(*) Author's address:
Tiziano Granucci, Dipartimento di Matematica "U. Dini", Universitá degli Studi di Firenze, Viale Morgagni 67/a, 50134 Firenze, Italia; E-mail: granucci@math.unifi.it

allora un minimo locale del funzionale $J(u,\Omega) = \int\limits_{\Omega} f(x,u,Du)\, dx$ è localmente hölderiano. Si osserva facilmente che dai risultati di [14] e [15] segue che se $\Phi(|\xi|) - c_1 \leq f(x,s,\xi) \leq c_2(\Phi(|\xi|)+1)$, dove $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$, allora un minimo locale del funzionale $J(u,\Omega) = \int\limits_{\Omega} f(x,u,Du)\, dx$ è localmente hölderiano.

Noi dimostreremo che se $\Phi \in \Delta_2$ allora un minimo locale di (1) è localmente hölderiano.

2. Notazioni e lemmi preliminari

Presentiamo alcuni risultati classici sulle N-funzioni e di teoria della misura che useremo; per maggiori dettagli rimandiamo a [1], [6], [7] e [14].

Definizione 1. *Sia θ una funzione dai reali positivi nei reali positivi che sia crescente, continua a destra e tale che $\lim\limits_{t\to+\infty} \theta(t) = +\infty$ e $\lim\limits_{t\to 0^+} \theta(t) = 0$; allora la funzione definita dalla relazione*

$$\Phi(\xi) = \int_0^{\xi} \theta(t)dt \quad \forall \xi \geq 0$$

è detta una N-funzione e θ la sua derivata destra.

Osservazione 1. *Dalla crescenza della θ segue che*

$$\Phi(\xi) \leq \xi\theta(\xi) \quad \forall \xi \geq 0.$$

Definizione 2. *Diremo che $\Phi \in \Delta_2$ se esiste una costante $\kappa > 0$ tale che per ogni $\xi \geq 0$*

$$\Phi(2\xi) \leq \kappa\Phi(\xi). \tag{2}$$

Inoltre diremo che $\Phi \in \Delta_2^{(m)}$, con $m > 1$, se esiste una costante reale positiva $m > 1$ tale che

$$\Phi(\lambda\xi) \leq \lambda^m \Phi(\xi) \quad \forall \xi > 0 \text{ e } \forall \lambda \geq 1. \tag{3}$$

Si osserva facilmente che $\Phi \in \Delta_2$ se e solo se $\Phi \in \Delta_2^{(m)}$ per qualche $m > 1$; cioè $\Delta_2 = \cup_{m>1} \Delta_2^{(m)}$.

Vale inoltre il seguente teorema:

TEOREMA 1. *Sia* $\Phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *una N-funzione e* $D_+\Phi(t)$ *la sua derivata destra; per* $m > 1$*, le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. $\Phi \in \Delta_2$;
2. $\Phi \in \Delta_2^{(m)}$ per qualche $m > 1$;
3. $tD_+\Phi(t) \le m\Phi(t) \quad \forall t \ge 0$;
4. $\Phi(\lambda t) \le \lambda^m \Phi(t) \quad \forall t \ge 0$ e $\forall \lambda \ge 1$;
5. $t^{-m}\Phi(t)$ è non crescente in $(0, +\infty)$.

Definiamo

$$\widetilde{D_+\Phi}(s) = \sup_{D_+\Phi(t) \le s} \{t\}$$

e

$$\widetilde{\Phi}(s) = \int_0^s \widetilde{D_+\Phi}(\xi)\, d\xi;$$

la funzione $\widetilde{\Phi}$ così definita è detta complementare di Φ e vale la seguente relazione

$$st \le \Phi(t) + \widetilde{\Phi}(s) \tag{4}$$

detta diseguaglianza di Young; inoltre dalla osservazione 1 e dalla definizione di $\widetilde{D_+\Phi}$ segue che

$$\widetilde{\Phi}\left(\frac{\Phi(t)}{t}\right) < \left(\frac{\Phi(t)}{t}\right) t = \Phi(t) \quad \forall t > 0\,. \tag{5}$$

In futuro identificheremo la derivata destra $D_+\Phi$ con la derivata $D\Phi$ in quanto incidono quasi ovunque.

Indicheremo con $W^1L^\Phi(\Omega)$ lo spazio di Orlicz-Sobolev formato dalle classi di funzioni Φ-sommabili con derivata distribuzionale Φ-sommabile dotato della seguente norma:

$$\|u\|_{1,\Phi} = \|u\|_\Phi + \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_\Phi$$

dove $\|u\|_\Phi = Inf\left\{k > 0 : \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{k}\right) dx \le 1\right\}$.

Ricordiamo che se $v \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione localmente lipschitziana in $\mathbb{R}$ tale che $g \circ v$ e $(g' \circ v)Dv$ sono localmente sommabili in Ω, allora $g \circ v \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e $D(g \circ v) = (g' \circ v)Dv$; da tale risultato si ottiene $\Phi(u) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e dalla regola della catena segue $D_+\Phi(|u|)\,|Du| = |D(\Phi(|u|))|$.

Per maggiori dettagli sulle N-funzioni, gli spazi di Orlicz e di Orlicz-Sobolev rimandiamo a [1].

Sarà inoltre necessaria la seguente formula di coarea (vedere [6]).

Teorema 2 (Formula di coarea). *Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ una funzione lipschitziana, $N \geq M$. Allora per ogni insieme $A \subset \mathbb{R}^N$ $\mathcal{L}^N$-misurabile,*

$$\int_A Jf(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^M} \mathcal{H}^{N-M}\left(A \cap f^{-1}(y)\right)\,dy. \tag{6}$$

Inoltre valgono i seguenti corollari che useremo nella dimostrazione.

Corollario 1. *Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana; allora*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |Df(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{N-1}(\{f = t\})\,dt. \tag{7}$$

Corollario 2. *Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ una funzione lipschitziana, $N \geq M$. Allora per ogni funzione $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\mathcal{L}^N$-misurabile si ha*

$$g_{|_{f^{-1}(y)}} \text{ è } \mathcal{H}^{N-M}\text{-misurabile per } \mathcal{L}^M\text{-q.o. } y \in \mathbb{R}^M \tag{8}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x)\,Jf(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^M} \left[\int_{f^{-1}(y)} g(z)\,d\mathcal{H}^{N-M}(z)\right] dy. \tag{9}$$

La seguente diseguaglianza isoperimetrica (vedere [6]) sarà basilare per la dimostrazione.

Teorema 3 (Diseguaglianza isoperimetrica). *Sia E un sottoinsieme limitato di perimetro finito di $\mathbb{R}^N$; allora*

$$\left(\mathcal{L}^N(E)\right)^{\frac{N-1}{N}} \leq CP(E) \tag{10}$$

e per ogni palla $B_r(x) \subset \mathbb{R}^N$

$$\left(\min\left\{\mathcal{L}^N\left(B_r(x) \cap E\right), \mathcal{L}^N\left(B_r(x) - E\right)\right\}\right)^{\frac{N-1}{N}} \leq CP\left(E, B_r(x)\right), \tag{11}$$

dove $P(E)$ *è il perimetro di* E *e* $P(E, B_r(x))$ *è il perimetro di* E *in* $B_r(x)$.

3. Ipotesi e diseguaglianza di Orlicz-Sobolev-Poincaré

3.1. Ipotesi

1 $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una funzione di Caratheodory, cioè

$$\begin{array}{ll} f(\cdot, s, z) & \text{misurabile} \\ f(x, \cdot) & \text{continua} \end{array}$$

2 $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una funzione di Caratheodory e

$$f(x, s, \cdot) \quad \text{è convessa } \forall (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{12}$$

3 Esistono due costanti reali positive $C_1 < C_2$ tali che

$$C_1 \Phi(|z|) \leq f(x, s, z) \leq C_2 \Phi(|z|) \quad \forall (x, s, z) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \tag{13}$$

dove Φ è una N-funzione e $\Phi \in \Delta_2$.

Consideriamo il funzionale

$$F(u, \Omega) = \int_\Omega f(x, u(x), Du(x))\, dx.$$

Definizione 3. *Sia* $u \in W^1_{loc} L^\Phi(\Omega)$*; si dice un quasi-minimo (o più brevemente un Q-minimo) del funzionale* $F(u, \Omega)$ *se esiste una costante reale positiva* $Q \geq 1$ *tale che per ogni* $K \subset\subset \Omega$ *compatto e per ogni* $\varphi \in W^1_{loc} L^\Phi(\Omega)$ *tale che supp*$(u - \varphi) \subset K$ *si ha*

$$F(u, K) \leq QF(\varphi, K).$$

Proposizione 1. *Siano $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ positive e non decrescenti; allora per ogni $a,b\in\mathbb{R}$*

$$h(a)\,g(b)\le h(a)\,g(a)+h(b)\,g(b)\,. \tag{14}$$

Dimostrazione. Supponiamo $a<b$; allora

$$h(a)\,g(b)\le h(b)\,g(b)$$

e quindi

$$h(a)\,g(b)\le h(a)\,g(a)+h(b)\,g(b)\,;$$

analogo risultato se $b<a$. □

Lemma 1. *Sia $u\in W^1_{loc}L^{\Phi}(\Omega)$, con $\Phi\in\Delta_2^{(m)}$, dove $m>1$; supponiamo che $0<\alpha\le 1$, $A=\{x\in\Omega:u-ht\neq 0\}$ e $|A|\ge\alpha>0$; allora per ogni $t\in(0,2)$ si ha*

$$\int\limits_{Q_{2-t}}\Phi\left((u-ht)_+\right)dx\le\frac{C}{\left[1-(1-\alpha)^{\frac{1}{N}}\right]^m}\int\limits_{Q_{2-t}}\Phi\left(\left|D(u-ht)_+\right|\right)dx \tag{15}$$

dove $C=C(N,m,1,2)$ è una costante reale positiva dipendente solo dai numeri m, N, 1, e 2.

Dimostrazione. Sia $u\in W^1_{loc}L^{\Phi}(\Omega)$; allora dalla regola della catena segue che

$$\Phi\left((u-ht)_+\right)\in W^{1,1}_{loc}(\Omega) \tag{16}$$

e quindi segue

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_{2-t}}\Phi\left((u-ht)_+\right)dx \quad&\le\quad\frac{C(N)}{1-(1-\alpha)^{\frac{1}{N}}}\cdot\\ &\cdot\int\limits_{Q_{2-t}}D\Phi\left((u-ht)_+\right)\left|D(u-ht)_+\right|dx.\end{aligned} \tag{17}$$

Sia $\varepsilon>0$, poniamo

$$\begin{aligned}h(s)&=\varepsilon D\Phi(s)\\ g(s)&=s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= (u-ht)_+ \\ b &= \frac{\left|D\,(u-ht)_+\right|}{\varepsilon}; \end{aligned}$$

allora dalla (15) e dalla (14) della proposizione 1 segue che

$$\begin{aligned} \int\limits_{Q_{2-t}} \Phi\left((u-ht)_+\right)\,dx &\leq \frac{2C\,(N)}{1-(1-\alpha)^{\frac{1}{N}}}\varepsilon \int\limits_{Q_{2-t}} D\Phi\left((u-ht)_+\right)\cdot \\ \cdot\,(u-ht)_+\,dx + \frac{2C\,(N)}{1-(1-\alpha)^{\frac{1}{N}}}\varepsilon & \int\limits_{Q_{2-t}} D\Phi\left(\frac{\left|D\,(u-ht)_+\right|}{\varepsilon}\right)\left|\frac{\left|D\,(u-ht)_+\right|}{\varepsilon}\right|\,dx \\ &\leq \frac{2C\,(N)\,m}{1-(1-\alpha)^{\frac{1}{N}}}\varepsilon \int\limits_{Q_{2-t}} \Phi\left((u-ht)_+\right)\,dx + \\ &\quad + \frac{2C\,(N)\,m}{1-(1-\alpha)^{\frac{1}{N}}}\varepsilon \int\limits_{Q_{2-t}} \Phi\left(\frac{\left|D\,(u-ht)_+\right|}{\varepsilon}\right)\,dx \end{aligned}$$

da cui posto

$$\varepsilon = \frac{1-(1-\alpha)^{\frac{1}{N}}}{4C\,(N)\,m}$$

segue che

$$\int\limits_{Q_{2-t}} \Phi\left((u-ht)_+\right)\,dx \leq \int\limits_{Q_{2-t}} \Phi\left(\frac{4C\,(N)\,m}{1-(1-\alpha)^{\frac{1}{N}}}\left|D\,(u-ht)_+\right|\right)\,dx.$$

Ricordandoci che $\Phi \in \Delta_2^{(m)}$, con $m > 1$; allora

$$\Phi\left(\frac{4C\,(N)\,m\left|D\,(u-ht)_+\right|}{1-(1-\alpha)^{\frac{1}{N}}}\right) \leq \frac{C}{\left[1-(1-\alpha)^{\frac{1}{N}}\right]^m}\Phi\left(\left|D\,(u-ht)_+\right|\right)$$

dove $C = C_0\,(N,m) = \max\left\{(4C\,(N)\,m)^m\,,(4m)^m\right\}$, e quindi si ha

$$\int\limits_{Q_{2-t}} \Phi\left((u-ht)_+\right)\,dx \leq \frac{C}{\left[1-(1-\alpha)^{\frac{1}{N}}\right]^m} \int\limits_{Q_{2-t}} \Phi\left(\left|D\,(u-ht)_+\right|\right)\,dx.$$

$\square$

4. Una diseguaglianza di Caccioppoli e sue applicazioni

Sia $f:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\rightarrow\mathbb{R}$ una funzione di Caratheodory tale che per ogni $(x,s,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$

$$C_1\Phi(|\xi|)-b(x)\Phi^{\gamma}(|s|)-a(x)\leq f(x,s,\xi)\leq C_2\Phi(|\xi|)+b(x)\Phi^{\gamma}(|s|)+a(x)$$

dove $C_1<C_2$ sono due costanti positive, $a\in L^h(\Omega)$ e $b\in L^k(\Omega)$ sono due funzioni non negative con $h>1$, $k>\frac{1^*}{1^*-\gamma}$, $1\leq\gamma<1^*=\frac{N}{N-1}$.

Definizione 4. *Sia $I(u,\Omega)=\int_{\Omega} f(x,u(x),Du(x))\,dx$ definito sullo spazio funzionale di Orlicz-Sobolev $W^1L^{\Phi}(\Omega)$. Si dice che $u\in W^1_{loc}L^{\Phi}(\Omega)$ è un quasi-minimo del funzionale se esiste una costante $Q\geq 1$ tale che*

$$I(u,K)\leq QI(v,K)$$

per ogni $v\in W^1_{loc}L^{\Phi}(\Omega)$ con $K=Supp(u-v)\subset\subset\Omega$.

Definizione 5. *Si dice che $u\in W^1_{loc}L^{\Phi}(\Omega)$ è un sub-quasi-minimo se per ogni funzione non positiva $\varphi\in W^1L^{\Phi}(\Omega)$, con supporto $K\subset\subset\Omega$, risulta*

$$I(u,K)\leq QI(u+\varphi,K).$$

Definizione 6. *Si dice che $u\in W^1_{loc}L^{\Phi}(\Omega)$ è un super-quasi-minimo se per ogni funzione non negativa $\varphi\in W^1L^{\Phi}(\Omega)$, con supporto $K\subset\subset\Omega$, risulta*

$$I(u,K)\leq QI(u+\varphi,K).$$

Osservazione 2. *Si osservi che un quasi-minimo è contemporaneamente un super-quasi-minimo e un sub-quasi-minimo. Se $u\in W^1_{loc}L^{\Phi}(\Omega)$, $k\in\mathbb{R}$ e Q_R è un cubo strettamente contenuto in Ω, poniamo*

$$\begin{aligned} A(k,R) &= \{x\in Q_R : u(x)>k\} \\ B(k,R) &= \{x\in Q_R : u(x)<k\}. \end{aligned}$$

Teorema 4. *Sia $u\in W^1_{loc}L^{\Phi}(\Omega)$ un sub-quasi-minimo. Allora esiste un $R_0>0$ tale che per ogni $x_0\in\Omega$, per ogni ρ, R con $\rho<R<$*

$Min\,(R_0, dist\,(x_0, \partial\Omega))$ e per ogni $k \geq 0$ si ha

$$\int\limits_{A(k,\rho)} \Phi\left(|Du|\right) dx \leq \frac{C_0}{(R-\rho)^{\alpha m}} \int\limits_{A(k,R)} \Phi\left(u-k\right) dx + \tag{18}$$
$$+ C_1 \left(\Phi\left(k\right) R^{-\varepsilon N} + \|a\|_h\right) |A\left(k,R\right)|^{1-\frac{1}{N}+\varepsilon}$$

dove $\alpha \in (0,1]$ e $\varepsilon > 0$.

Per la dimostrazione, che segue dalle tecniche presentate in [7], [13], [14] e [15], rimandiamo a [9].

TEOREMA 5. *Se u è un super-quasi-minimo allora $-u$ è un sub-quasi-minimo di $\breve{I}\,(u, \Omega) = \int\limits_{\Omega} \overline{f}\,(x, u, Du)\, dx$ dove $\overline{f}\,(x, s, z) = f\,(x, -s, -z)$. Otteniamo*

$$\int\limits_{B(k,\rho)} \Phi\left(|Du|\right) dx \leq \frac{L_5}{(R-\rho)^{\alpha m}} \int\limits_{B(k,R)} \Phi\left(u-k\right) dx + \tag{19}$$
$$+ L_6 \left(\Phi\left(k\right) R^{-\varepsilon N} + \|a\|_h\right) |B(k,R)|^{1-\frac{1}{N}+\varepsilon}$$

per ogni $k < 0$ e $\rho < R < \min(R_0, dist(x_0, \partial\Omega))$.

DEFINIZIONE 7. *Sia $u \in W^1_{loc} L^\Phi\,(\Omega)$; diremo che u appartiene alla classe di De Giorgi $DG^\Phi_+\,(\Omega, \chi, \varepsilon, R_0, x_0)$ se per ogni coppia di cubi concentrici $Q_\rho \subset\subset Q_R \subset\subset \Omega$ e $R < R_0$ e per ogni $k \geq k_0 \geq 0$ si ha*

$$\int\limits_{A(k,\rho)} \Phi(|Du|) dx \leq \frac{C}{(R-\rho)^{\alpha m}} \int\limits_{A(k,R)} \Phi\left(u-k\right) dx + C\left(\chi + kR^{-\varepsilon N}\right) |A(k,R)|^{1-\frac{1}{N}+\varepsilon}. \tag{20}$$

DEFINIZIONE 8. *Diremo che u appartiene alla classe di De Giorgi $DG^\Phi_-\,(\Omega, \chi, \varepsilon, R_0, x_0)$ se per ogni coppia di cubi concentrici $Q_\rho \subset\subset Q_R \subset\subset \Omega$ e $R < R_0$ e per ogni $k \leq -k_0 \leq 0$ si ha*

$$\int\limits_{B(k,\rho)} \Phi(|Du|) dx \leq \frac{C}{(R-\rho)^{\alpha m}} \int\limits_{B(k,R)} \Phi\left(k-u\right) dx + C\left(\chi + kR^{-\varepsilon N}\right) |B(k,R)|^{1-\frac{1}{N}+\varepsilon}.$$

OSSERVAZIONE 3. *Se u è un quasi-minimo allora $u \in DG^\Phi = DG^\Phi_+ \cap DG^\Phi_-$.*

Osservazione 4. *Posto* $v = u + \chi R^{\beta}$ *dove* $\beta = \varepsilon N$ *e* $h = k + \chi R^{\beta}$ *si ha*

$$\int\limits_{A(h,\rho)} \Phi(|Dv|)dx \leq \frac{C}{(R-\rho)^{\alpha m}} \int\limits_{A(h,R)} \Phi(v-h)\,dx + ChR^{-\varepsilon N}\,|A(h,R)|^{1-\frac{1}{N}+\varepsilon} \tag{21}$$

dove $h \geq h_0 \geq k_0 + \chi R^{\beta}$ *e posto* $v = u - \chi R^{\beta}$ *e* $h = k - \chi R^{\beta}$ *si ha*

$$\int\limits_{B(h,\rho)} \Phi(|Dv|)dx \leq \frac{C}{(R-\rho)^{\alpha m}} \int\limits_{B(h,R)} \Phi(h-v)\,dx + ChR^{-\varepsilon N}\,|B(h,R)|^{1-\frac{1}{N}+\varepsilon}$$

dove $h \leq -h_0$.

Osservazione 5. *Posto* $w(x) = v(Rx)$, $s < r < R$ *e* $s = \sigma R$, $r = \tau R$ *si ottiene*

$$\int\limits_{A(h,\sigma)} \Phi(|Dw|)dx \leq \frac{C}{(\tau-\sigma)^{\alpha m}} \int\limits_{A(h,\tau)} \Phi(w-h)\,dx + Ch\tau^{-\varepsilon N}\,|A(h,\tau)|^{1-\frac{1}{N}+\varepsilon} \tag{22}$$

e

$$\int\limits_{B(h,\sigma)} \Phi(|Dw|)dx \leq \frac{C}{(\tau-\sigma)^{\alpha m}} \int\limits_{B(h,\tau)} \Phi(h-w)\,dx + Ch\tau^{-\varepsilon N}\,|B(h,\tau)|^{1-\frac{1}{N}+\varepsilon}$$

e se $\tau \geq \frac{1}{2}$ *si ha*

$$\int\limits_{A(h,\sigma)} \Phi(|Dw|)dx \leq \frac{C}{(\tau-\sigma)^{\alpha m}} \int\limits_{A(h,\tau)} \Phi(w-h)\,dx + Ch\,|A(h,\tau)|^{1-\frac{1}{N}+\varepsilon}$$

e

$$\int\limits_{B(h,\sigma)} \Phi(|Dw|)dx \leq \frac{C}{(\tau-\sigma)^{\alpha m}} \int\limits_{B(h,\tau)} \Phi(h-w)\,dx + Ch\,|B(h,\tau)|^{1-\frac{1}{N}+\varepsilon}. \tag{23}$$

Teorema 6. *Sia* $u \in DG_{+}^{\Phi}(\Omega)$. *Allora* u *è localmente limitata superiormente in* Ω *e per ogni* $x_0 \in \Omega$ *e* $R < \min(R_0, dist(x_0, \partial\Omega))$ *si ha*

$$\sup_{Q_{\frac{R}{2}}}(u(x)) \leq C\left\{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{|Q_R|}\int\limits_{Q_R} \Phi(u_+)dx\right) + \Phi^{-1}(1) + k_0 + \chi R^{\beta}\right\}. \tag{24}$$

Per la dimostrazione, che segue dalle tecniche presentate in [7], [13], [14] e [15], rimandiamo a [9].

LEMMA 2. *Sia $u \in DG_{-}^{\Phi}(\Omega)$. Allora u è localmente limitata inferiormente in Ω e per ogni $x_0 \in \Omega$ e $R < \min(R_0, dist(x_0, \partial\Omega))$ si ha*

$$\inf_{Q_{\frac{R}{2}}}(u(x)) \geq -C\left\{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{|Q_R|}\int_{Q_R}\Phi(u_-)dx\right) + \Phi^{-1}(1) + k_0 + \chi R^{\beta}\right\}.$$

TEOREMA 7. *Sia $u \in DG^{\Phi}(\Omega)$. Allora u è localmente limitata in Ω e per ogni $x_0 \in \Omega$ e $R < \min(R_0, dist(x_0, \partial\Omega))$ si ha*

$$\sup_{Q_{\frac{R}{2}}}(|u(x)|) \leq C\left\{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{|Q_R|}\int_{Q_R}\Phi(u)dx\right) + \Phi^{-1}(1) + k_0 + \chi R^{\beta}\right\}.$$

Abbiamo quindi concluso una breve presentazione dei risultati sulla limitatezza dei quasi-minimi.

5. Una diseguaglianza di tipo Caccioppoli modificata

Consideriamo

$$\sum_{j,i=1}^{N} D_j(a_{i,j}(x) D_i u) = 0 \tag{25}$$

e la seguente ipotesi di uniforme ellitticità

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{j,i=1}^{N} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \tag{26}$$

dove $\lambda, \Lambda > 0$, e supponiamo che

$$a_{i,j} \in L^{\infty}(\Omega) \tag{27}$$

per $i, j = 1, ..., N$.

TEOREMA 8. *(Teorema di De Giorgi-Nash-Moser). Sia $u \in W^{1,2}(\Omega)$ una soluzione debole di (25), con le condizioni (26) e (27); allora $u \in C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$.*

L'idea di partenza delle dimostrazioni è la seguente diseguaglianza di Caccioppoli:

$$\int_{B_r} \left|D\left([u-k]^+\right)\right|^2 dx \leq \frac{C}{(R-r)^2} \int_{B_R} \left([u-k]^+\right)^2 dx.$$

In [16] si introduce la seguente diseguaglianza.

TEOREMA 9. *(Diseguaglianza di Caccioppoli modificata). Sia* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *una soluzione debole di* (25)*, con le condizioni* (26) *e* (27)*; allora*

$$\int_{B_r} \left|D\left([u-k]^+\right)\right|^2 dx \leq C \int_{\partial B_r} \left([u-k]^+\right) \left|D\left([u-k]^+\right)\right| d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{28}$$

La (31) insieme alla formula di coarea ((4) e (7)) e alla diseguaglianza isoperimetrica (9) sono alla base della dimostrazione del teorema (20) data in [16]. L'idea si basa sullo studio dell'energia

$$g(t) = \int_{Q_{2-t}} \left|D\left(u-tk\right)_+\right| \left(u-tk\right)_+ dx$$

dove $t \in [0,1]$, delle sue proprietà differenziali e dei legami con la diseguaglianza modificata di Caccioppoli (28) e con l'equazione debole di Eulero-Lagrange (25).

Come abbiamo visto precedentemente, la diseguaglianza di Caccioppoli (18), seguendo le linee dimostrative di [13] e [14], implica la limitatezza dei minimi locali. Le tecniche presentate in [13] e [14] però non ci forniscono altre informazioni in questo nostro caso, per poterle usare dovremo avere una qualche maggior integrabilità del gradiente espressa tramite un'opportuna diseguaglianza integrale che non è nota; per maggiori dettagli rimandiamo a [4]. Abbiamo quindi scelto di limitare lo studio a particolari funzionali del tipo dato da (1) e di sviluppare e applicare a questo caso le tecniche presentate in [14] e [16]. Anche se sono meno generici, questi funzionali presentano ugualmente la difficoltà di richiedere tecniche tra loro molto diverse per ottenere un risultato di regolarità. In [9] viene data una diseguaglianza di Caccioppoli modificata più generale di quella che andremo a presentare, applicabile nel caso di funzionali più generali con crescite non-standard.

6. Un funzionale convesso con crescite non-standard

Sia $\Phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una N-funzione di classe $\Delta_2^{(m)}$ con $1 < m < 1^* = \frac{1}{N-1}$. Inoltre supporremo per semplicità di calcolo che valga la normalizzazione $\Phi(1) = 1$; questa ipotesi è puramente tecnica e agevola la presentazione essenziale dei risultati. Consideriamo il funzionale

$$J(u, \Omega) = \int_\Omega \Phi(|Du|)\, dx; \tag{29}$$

dimostreremo che i minimi locali di tale funzionale sono localmente hölderiani.

Si ha l'equazione di Eulero

$$\int_\Omega D\Phi(|Du|) \frac{DuD\varphi}{|Du|} dx = 0 \quad \forall \varphi \in W_0^1 L^\Phi(\Omega). \tag{30}$$

Consideriamo $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che, $Q_r \subset Q_s \Subset \Omega$, Supp$(\psi) \Subset Q_s$, $\psi = 1$ su Q_r, $0 \le \psi \le 1$ su Q_s e $|D\psi| < \frac{C}{(s-t)}$ e $\varphi = \psi(u-k)^+ \in W_0^1 L^\Phi(\Omega)$; allora

$$\int_\Omega D\Phi(|Du|) \frac{DuD(u-k)^+ \psi}{|Du|} dx + \int_\Omega D\Phi(|Du|) \frac{(u-k)^+ DuD\psi}{|Du|} dx = 0,$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \int_{Q_s} D\Phi\left(\left|D(u-k)^+\right|\right) \left|D(u-k)^+\right| \psi\, dx \le & \qquad\qquad (31) \\ \le \quad & \left| -\int_{Q_s} D\Phi\left(\left|D(u-k)^+\right|\right) \frac{(u-k)^+ D(u-k)^+ D\psi}{\left|D(u-k)^+\right|} dx \right| \\ \le \quad & \int_{Q_s} D\Phi\left(\left|D(u-k)^+\right|\right) (u-k)^+ |D\psi|\, dx \\ \le \quad & \frac{C}{(s-t)} \int_{Q_s \setminus Q_t} D\Phi\left(\left|D(u-k)^+\right|\right) (u-k)^+\, dx. \end{aligned}$$

Inoltre si ha

$$\int_{Q_s} D\Phi\left(\left|D(u-k)^+\right|\right) \left|D(u-k)^+\right| \psi\, dx \ge \int_{Q_t} \Phi\left(\left|D(u-k)^+\right|\right) dx \tag{32}$$

e quindi dalla (34) e dalla (35) segue che

$$\int_{Q_t} \Phi\left(\left|D\left(u-k\right)^{+}\right|\right)\,dx \leq \frac{C}{(s-t)}\int_{Q_s\setminus Q_t} D\Phi\left(\left|D\left(u-k\right)^{+}\right|\right)\left(u-k\right)^{+}dx \tag{33}$$

e per $s \to t^{+}$, dalla formula di coarea (7) e corollari, si ha la diseguaglianza di Caccioppoli modificata

$$\int_{Q_t} \Phi\left(\left|D\left(u-k\right)^{+}\right|\right)\,dx \leq C\int_{\partial Q_t} D\Phi\left(\left|D\left(u-k\right)^{+}\right|\right)\left(u-k\right)^{+}\,d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{34}$$

Procedendo come in [16] supponiamo $\left|\left\{(u-kt)^{+}\neq 0\right\}\right| \geq \alpha > 0$ e introduciamo la seguente energia.

Poniamo, per $t \in [0,1]$,

$$g\left(t\right) = \int_{Q_{2-t}} D\Phi\left(\left|D\left(u-kt\right)^{+}\right|\right)\left(u-kt\right)^{+}\,dx \tag{35}$$

allora, dalla formula di coarea (7) e corollari, si ha

$$\begin{aligned} g^{'}\left(t\right) &= -\int_{\partial Q_{2-t}} D\Phi\left(\left|D\left(u-tk\right)^{+}\right|\right)\left(u-tk\right)^{+}\,d\mathcal{H}^{N-1} - \\ &\quad -k\int_{Q_{2-t}} D\Phi\left(\left|D\left(u-kt\right)^{+}\right|\right)\left(u-kt\right)^{+}\,dx. \end{aligned} \tag{36}$$

Consideriamo $\left(g\left(t\right)\right)^{2}$ e procediamo con delle stime; la prima è molto semplice:

$$\begin{aligned} g\left(t\right) &= \int_{Q_{2-t}} D\Phi\left(\left|D\left(u-kt\right)^{+}\right|\right)\left(u-kt\right)^{+}\,dx \\ &\leq M_2\int_{Q_{2-t}} D\Phi\left(\left|D\left(u-kt\right)^{+}\right|\right)\,dx; \end{aligned}$$

l'altra è leggermente più complessa e segue dalle diseguaglianze (3), (4), (5) e (14).

$$g\left(t\right) = \int_{Q_{2-t}} D\Phi\left(\left|D\left(u-kt\right)^{+}\right|\right)\left(u-kt\right)^{+}\,dx$$

$$\begin{aligned}
&\le m \int_{Q_{2-t}} \frac{1}{m} D\Phi\left(\left|D(u-kt)^+\right|\right)(u-kt)^+ \, dx \\
&\le m \int_{Q_{2-t}} \widetilde{\Phi}\left(\frac{1}{m} D\Phi\left(\left|D(u-kt)^+\right|\right)\right) + \Phi\left((u-kt)^+\right) dx \\
&\le m \int_{Q_{2-t}} \widetilde{\Phi}\left(\frac{\Phi\left(\left|D(u-kt)^+\right|\right)}{\left|D(u-kt)^+\right|}\right) dx + m \int_{Q_{2-t}} \Phi\left((u-kt)^+\right) dx \\
&\le m \int_{Q_{2-t}} \Phi\left(\left|D(u-kt)^+\right|\right) dx + m \int_{Q_{2-t}} \Phi\left((u-kt)^+\right) dx.
\end{aligned}$$

Usando la diseguaglianza (15) e la diseguaglianza di Caccioppoli modificata (34) si ha

$$\begin{aligned}
g(t) &\le m \int_{Q_{2-t}} \Phi\left(\left|D(u-kt)^+\right|\right) dx + m \int_{Q_{2-t}} \Phi\left((u-kt)^+\right) dx \\
&\le m \int_{Q_{2-t}} \Phi\left(\left|D(u-kt)^+\right|\right) dx + \\
&\qquad + \frac{mC}{\left[1-(1-\alpha)^{\frac{1}{N}}\right]^m} \int_{Q_{2-t}} \Phi\left(\left|D(u-kt)^+\right|\right) dx \\
&\le m\left(1+\frac{C}{\left[1-(1-\alpha)^{\frac{1}{N}}\right]^m}\right) C_2 \int_{\partial Q_{2-t}} D\Phi\left(\left|D(u-k)^+\right|\right)(u-k)^+ \, d\mathcal{H}^{N-1}
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
(g(t))^2 \le\ & M_2 \int_{Q_{2-t}} D\Phi\left(\left|D(u-kt)^+\right|\right) dx \cdot \\
& \cdot C_3 \int_{\partial Q_t} D\Phi\left(\left|D(u-k)^+\right|\right)(u-k)^+ \, d\mathcal{H}^{N-1}
\end{aligned}$$

dove $C_3 = C_3(m,N,\alpha) = m\left(1+\frac{C}{\left[1-(1-\alpha)^{\frac{1}{N}}\right]^m}\right) C_2$.

Siano

$$\begin{cases}
\int_{\partial Q_{2-t}} D\Phi\left(\left|D(u-k)^+\right|\right)(u-k)^+ \, d\mathcal{H}^{N-1} = I_1 \\
\int_{Q_{2-t}} D\Phi\left(\left|D(u-kt)^+\right|\right) dx = I_2
\end{cases} \tag{37}$$

allora

$$\begin{cases} g^{'}(t) & = & -(I_1 + kI_2), \\ (g(t))^2 & \leq & C_3 M_2 I_1 \cdot I_2. \end{cases} \tag{38}$$

Ci piacerebbe procedere come in [16] e studiare le proprietà differenziali della funzione $g(t)$, ma con gli attuali strumenti a nostra disposizione questo risulta improponibile. Tramite i teoremi (21) e (22) introdotti precedentemente dimostreremo il seguente risultato:

LEMMA 3. *Sia* $\Phi \in \Delta_2^{(m)}$, *con* $m > 1$, *e* $u \in DG_\Phi^+$; *allora per ogni* $p > 1$ *esiste una costante* $c(p, m)$, *dipendente solo da* p *e* m, *tale che per ogni* $Q_R \subset\subset \Omega$ *e* $0 < \varrho < R$ *si ha*

$$\Phi^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{Q_\varrho}\{u\}\right) \leq \frac{c(p,m)}{(R-\varrho)^N} \int_{Q_R} \Phi^{\frac{1}{p}}(u_+)\, dx.$$

Dimostrazione. Si osserva che per ogni $t \in (0,1)$ esiste un $x_1 \in Q_{tR}$ tale che

$$\sup_{Q_{tR}}\{u\} \leq \sup_{Q_{\frac{1-t}{2}R}(x_1)}\{u\}$$

quindi dal teorema (21) segue

$$\Phi\left(\sup_{Q_{tR}}\{u\}\right) \leq \frac{c}{R^N(1-t)^N} \int_{Q_{(1-t)R}} \Phi(u_+)\, dx$$

e quindi per $0 < s < t < 1$ si ha

$$\Phi\left(\sup_{Q_s}\{u\}\right) \leq \frac{c}{(t-s)^N} \int_{Q_t} \Phi(u_+)\, dx.$$

Poniamo $Z(s) = \Phi\left(\sup_{Q_s}\{u\}\right)$ e sia $p > 1$; allora

$$\begin{aligned} Z(s) &\leq [Z(t)]^{1-\frac{1}{p}} \left[\tfrac{c}{(t-s)^N} \textstyle\int_{Q_t} \Phi^{\frac{1}{p}}(u_+)\, dx\right] \\ &\leq \tfrac{1}{2} Z(t) + c(p) \left[\tfrac{c}{(t-s)^N} \textstyle\int_{Q_t} \Phi^{\frac{1}{p}}(u_+)\, dx\right]^p \end{aligned}$$

e applicando il lemma (6.1) di [7] segue il risultato. □

Lemma 4. *Sia* $\left|\{u \leq 0\} \cap Q_{\frac{R}{2}}\right| \geq \frac{1}{2}\left|Q_{\frac{R}{2}}\right|$*; allora esistono* $c_0 > 0$ *e* $\gamma > 0$ *indipendenti da* R *tali che*

$$\Phi\left(\sup_{Q_{\frac{R}{2}}}\{u\}\right) \leq c_0\left|\{u_+ > 0\} \cap Q_R\right|^{\gamma} \Phi\left(\sup_{Q_{2R}}\{u\}\right) \tag{39}$$

Dimostrazione. Dal lemma (23) si ha per ogni $p > 1$

$$\Phi^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{Q_{\frac{R}{2}}}\{u\}\right) \leq \frac{C_0}{R^N}\int_{Q_R}\Phi^{\frac{1}{p}}(u_+)\,dx$$

e dalla diseguaglianza di Hölder segue

$$\Phi^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{Q_{\frac{R}{2}}}\{u\}\right) \leq \frac{C_0\left|\{u_+ > 0\} \cap Q_R\right|^{\frac{p-1}{p}}}{R^N}\left[\int_{Q_R}\Phi(u_+)\,dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Dobbiamo stimare $\int_{Q_R}\Phi(u_+)\,dx$; dalla diseguaglianza di Hölder e di Sobolev segue, usando la proposizione (10), che

$$\begin{aligned}\int_{Q_R}\Phi(u_+)\,dx &\leq \left|\{u_+ > 0\} \cap Q_R\right|^{\frac{1}{N}}\left(\int_{Q_R}\left[\Phi(u_+)\right]^{\frac{N}{N-1}}dx\right)^{\frac{N-1}{N}} \qquad (40)\\ &\leq C(N)\,R^{N-1}\left|\{u_+ > 0\} \cap Q_R\right|^{\frac{2-N}{N}}\int_{Q_R}D\Phi(u_+)\left|Du_+\right|dx\\ &\leq C(N)\,R^{N-1}\left|\{u_+ > 0\} \cap Q_R\right|^{\frac{2-N}{N}}\int_{Q_R}\Phi(\left|Du_+\right|) + \Phi(u_+)\,dx;\end{aligned}$$

quindi dalla diseguaglianza di Caccioppoli (34) si ha

$$\int_{Q_R}\Phi(u_+)\,dx \leq C(N)\,R^{N-1}\left|\{u_+ > 0\} \cap Q_R\right|^{\frac{2-N}{N}}\frac{1}{R^{\alpha m}}\int_{Q_{2R}}\Phi(u_+)\,dx.$$

Quindi abbiamo per ogni $p > 1$

$$\Phi^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{Q_{\frac{R}{2}}}\{u\}\right) \leq C_1 R^{\frac{2N-1-pN-\alpha m}{p}}\left|\{u_+ > 0\} \cap Q_R\right|^{\frac{pN+2-2N}{Np}}\Phi^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{Q_{2R}}\{u\}\right).$$

Scelto $\alpha = \frac{2N-1-pN}{m}$ e $p \in \left(\frac{2N-2}{N}, \frac{2N-1}{N}\right)$, ricordiamo che $N \geq 2$ e quindi $\frac{2N-2}{N} \geq 1$, dunque $p > 1$, si ottiene $\beta = \frac{pN+2-2N}{Np} > 0$ e $\frac{2N-1-pN-\alpha m}{p} = 0$; allora

$$\Phi^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{Q_{\frac{R}{2}}}\{u\}\right) \leq C_2 \left|\{u_+ > 0\} \cap Q_R\right|^\beta \Phi^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{Q_{2R}}\{u\}\right)$$

quindi posto $c_0 = C_2^p$ e $\gamma = p\beta$ si ha

$$\Phi\left(\sup_{Q_{\frac{R}{2}}}\{u\}\right) \leq c_0 \left|\{u_+ > 0\} \cap Q_R\right|^\gamma \Phi\left(\sup_{Q_{2R}}\{u\}\right).$$

□

Sappiamo che se u è un minimo locale allora u è limitato su B_{2R}, e senza perdere di generalità possiamo supporre che $1 = M_4 = \sup_{Q_{2R}}\{u\}$ e $\inf_{Q_{2R}}\{u\} = -1$, inoltre considerando al più $-u$ al posto di u possiamo supporre che $\left|\{u \leq 0\} \cap Q_{\frac{R}{2}}\right| \geq \frac{1}{2}\left|Q_{\frac{R}{2}}\right|$. Chiaramente posto $v = u - 1 + \varepsilon$ con $\varepsilon \in (0,1)$ si ha $\left|\{u - 1 + \varepsilon \leq 0\} \cap Q_{\frac{R}{2}}\right| \geq \frac{1}{2}\left|Q_{\frac{R}{2}}\right|$ e quindi dal lemma (24) segue che

$$\Phi\left(\sup_{Q_{\frac{R}{2}}}\{u - 1 + \varepsilon\}\right) \leq c_0 \left|\{u > 1 - \varepsilon\} \cap Q_R\right|^\gamma \Phi\left(\sup_{Q_{2R}}\{u - 1 + \varepsilon\}\right)$$

e quindi applicando Φ^{-1} si ha

$$\sup_{Q_{\frac{R}{2}}}\{u - 1 + \varepsilon\} \leq c_1 \left|\{u > 1 - \varepsilon\} \cap Q_R\right|^\delta \sup_{Q_{2R}}\{u - 1 + \varepsilon\}$$

con $\delta > 0$ (per maggiori dettagli vedere [8]), dunque

$$\begin{aligned}
\sup_{Q_{\frac{R}{2}}}\{u\} &\leq 1 - \varepsilon + C\left|B_R \cap \{u > 1 - \varepsilon\}\right|^\delta \sup_{B_{2R}}\{u - 1 + \varepsilon\} \\
&\leq 1 - \varepsilon + C\left|B_R \cap \{u > 1 - \varepsilon\}\right|^\delta +
\end{aligned}$$

$$+(\varepsilon-1)C\,|B_R\cap\{u>M_4-\varepsilon\}|^{\gamma}$$
$$\leq\ \ 1-\varepsilon+\varepsilon C\,|B_R\cap\{u>M_4-\varepsilon\}|^{\gamma}\,. \tag{41}$$

La (41) si può generalizzare usando il lemma (23) e ottenere

$$\sup_{B_\varrho}\{u\}\leq 1-\varepsilon+\varepsilon C\,|B_R\cap\{u>1-\varepsilon\}|$$

per ogni $\varrho\in(0,R)$; quindi per ε "piccoli" si ha

$$\sup_{B_R}\{u\}<1; \tag{42}$$

ne segue che $\varphi=\frac{\eta^{\alpha}}{(1-u)^{m-1}}\in W_0^1L^{\Phi}(\Omega)$, dove $\alpha>1$, $\eta\in C_c^{\infty}(B_{2R})$ e $0\leq\eta\leq 1$ in B_{2R}, $\eta=1$ in B_R e $|D\eta|\leq C$.

Teorema 10. *Se $u\in W_{loc}^1L^{\Phi}(\Omega)$ è un minimo locale di* (1) *allora è localmente hölderiano.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione test $\varphi=(1-u)^{1-m}\,\psi^{\alpha}$ dove $\psi\in C_c^{\infty}(\Omega)$ tale che $Q_R\subset Q_{2R}\Subset\Omega$, Supp$(\psi)\Subset Q_{2R}$, $\psi=1$ su Q_R, $0\leq\psi\leq 1$ su Q_{2R} e $|D\psi|<\frac{C}{(s-t)}$ e $\alpha>1$; allora $\varphi=\psi\,(u-k)^{+}\in W_0^1L^{\Phi}(\Omega)$ e

$$\int_\Omega D\Phi\left(|Du|\right)\frac{DuDu\psi^{\alpha}}{|Du|\,(m-1)\,(1-u)^{m}}\,dx+\int_\Omega D\Phi\left(|Du|\right)\frac{\alpha\psi^{\alpha-1}DuD\psi}{(1-u)^{m-1}\,|Du|}\,dx=0$$

da cui segue

$$\int_\Omega D\Phi\left(|Du|\right)\frac{|Du|\,\psi^{\alpha}}{(m-1)\,(1-u)^{m}}\,dx\leq\int_\Omega D\Phi\left(|Du|\right)\frac{\alpha\psi^{\alpha-1}\,|D\psi|}{(1-u)^{m-1}}\,dx$$

quindi dal lemma (5.2) di [7] si ha

$$\int_\Omega D\Phi\left(|Du|\right)\frac{|Du|\,\psi^{\alpha}}{(m-1)\,(1-u)^{m}}\,dx\leq C_1\,(m)\int_\Omega|Du|^{m-1}\,\frac{\alpha\psi^{\alpha-1}\,|D\psi|}{(1-u)^{m-1}}\,dx$$

poiché $1<m<2$ si ha $m-1<1$ e quindi dalla diseguaglianza di Young si ha

$$\int_\Omega\frac{D\Phi\left(|Du|\right)|Du|\,\psi^{\alpha}}{(m-1)\,(1-u)^{m}}\,dx\leq C_1\,(m)\int_\Omega\varepsilon\frac{|Du|\,\psi^{\frac{\alpha-1}{m-1}}}{(1-u)}+C\,(\varepsilon)\,\alpha^{m}\,|D\psi|^{m}\,dx.$$

Ricordando che $D\Phi\left(|Du|\right)|Du| \geq \Phi\left(|Du|\right)$ si ha

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} \frac{\Phi\left(|Du|\right)\psi^{\alpha}}{(m-1)\left(1-u\right)^{m}}\,dx &\leq \int\limits_{\Omega} \frac{D\Phi\left(|Du|\right)|Du|\,\psi^{\alpha}}{(m-1)\left(1-u\right)^{m}}\,dx \\ &\leq C_1(m)\int\limits_{\Omega} \varepsilon\frac{|Du|\,\psi^{\frac{\alpha-1}{m-1}}}{(1-u)} + C(\varepsilon)\,\alpha^m\,|D\psi|^m\,dx.\end{aligned} \tag{43}$$

Scegliamo $\alpha > 1$ in modo che $\alpha = \frac{\alpha-1}{m-1}$, cioè $\alpha = \frac{1}{2-m} > 1$; allora si ha

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\Phi\left(|Du|\right)\psi^{\alpha}}{(m-1)\left(1-u\right)^{m}}\,dx \leq C_1(m)\int\limits_{\Omega} \varepsilon\frac{|Du|\,\psi^{\alpha}}{(1-u)} + C(\varepsilon)\,\alpha^m\,|D\psi|^m\,dx.$$

Resta da stimare $\int\limits_{\Omega} \frac{|Du|\psi^{\alpha}}{(1-u)}\,dx$; poniamo

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : |Du(x)| \leq 1\}$$

e

$$\Omega_2 = \Omega \backslash \Omega_1$$

allora

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} \frac{|Du|\,\psi^{\alpha}}{(1-u)}\,dx &= \int\limits_{\Omega_1} \frac{|Du|\,\psi^{\alpha}}{(1-u)}\,dx + \int\limits_{\Omega_2} \frac{|Du|\,\psi^{\alpha}}{(1-u)}\,dx \\ &\leq \int\limits_{\Omega_1} c_1(m)\,\frac{|Du|^m\,\psi^{\alpha m}}{(1-u)^m} + c_2(m)\,dx \\ &\quad + \int\limits_{\Omega_2} c_1(m)\,\frac{|Du|\,\psi^{\alpha}}{(1-u)^m} + c_2(m)\,|Du|\,\psi^{\alpha}\,dx \\ &\leq c_1(m)\int\limits_{\Omega_1} \frac{\Phi(|Du|)\psi^{\alpha m}}{(1-u)^m}\,dx + \\ &\quad + c_1(m)\int\limits_{\Omega_2} \frac{\Phi\left(|Du|\right)\psi^{\alpha}}{(1-u)^m}\,dx + C(m) \\ &\leq c_1(m)\int\limits_{\Omega_1} \frac{\Phi(|Du|)\psi^{\alpha}}{(1-u)^m}\,dx + \\ &\quad + c_1(m)\int\limits_{\Omega_2} \frac{\Phi\left(|Du|\right)\psi^{\alpha}}{(1-u)^m}\,dx + C(m) \\ &\leq 2c_1(m)\int\limits_{\Omega} \frac{\Phi(|Du|)\psi^{\alpha}}{(1-u)^m}\,dx + C(m)\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{\Phi\left(|Du|\right)\psi^{\alpha}}{(m-1)\left(1-u\right)^{m}}\,dx &\leq \varepsilon\left(2c_1\left(m\right)\int_{\Omega}\frac{\Phi(|Du|)\psi^{\alpha}}{\left(1-u\right)^{m}}\,dx + C\left(m\right)\right)\\ &\quad + \int_{\Omega} C\left(m,\varepsilon\right)\alpha^{m}\left|D\psi\right|^{m}\,dx \qquad (44)\end{aligned}$$

posto $\varepsilon = \frac{1}{4c_1(m)(m-1)}$ si ha

$$\int_{\Omega}\frac{\Phi\left(|Du|\right)\psi^{\alpha}}{\left(1-u\right)^{m}}\,dx \leq C_3\left(m\right).$$

Consideriamo $\int_{B_R}\frac{|Du|}{(1-u)}\,dx$; allora procedendo come in precedenza si ha

$$\begin{aligned}\int_{B_R}\frac{|Du|}{(1-u)}\,dx &\leq \int_{B_R\cap\Omega_1}\frac{|Du|}{(1-u)}\,dx + \int_{B_R\cap\Omega_2}\frac{|Du|}{(1-u)}\,dx\\ &\leq 2c_1\left(m\right)\int_{\Omega}\frac{\Phi(|Du|)\psi^{\alpha}}{\left(1-u\right)^{m}}\,dx + C\left(m\right)\end{aligned}$$

poiché $\int_{\Omega}\frac{\Phi(|Du|)\psi^{\alpha}}{(1-u)^{m}}\,dx \leq C_3\left(m\right)$ si ha

$$\int_{B_R}\frac{|Du|}{(1-u)}\,dx \leq C_4\left(m\right) \qquad (45)$$

dunque usando la formula di coarea (7) e la diseguaglianza isoperimetrica (9) si ha

$$\begin{aligned}C_4\left(m\right) &\geq \int_{B_R}\frac{|Du|}{(1-u)}\,dx \qquad (46)\\ &= \int_{-1}^{1}\frac{P\left(\{u>t\}\cap B_R\right)}{1-t}\,dt\\ &\geq \int_{0}^{1-\varepsilon}\frac{P\left(\{u>t\}\cap B_R\right)}{1-t}\,dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \quad C_5(N)\int_0^{1-\varepsilon}\frac{|\{u>t\}\cap B_R|^{\frac{N-1}{N}}}{1-t}\,dt \\ &\geq \quad C_5(N)\{u>1-\varepsilon\}\cap B_R|^{\frac{N-1}{N}}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right); \end{aligned}$$

da cui, procedendo come in [16], segue la hölderianità del minimo locale. Infatti dalla (45), (46) e (41) si ha

$$\sup_{Q_{\frac{R}{2}}}\{u\}\leq 1-\varepsilon+\varepsilon C\frac{C^{\gamma}(N,m)}{[\log(1)-\log(\varepsilon)]^{\frac{\delta N}{N-1}}}$$

quindi scegliendo ε universalmente piccolo otteniamo che esiste una costante universale $\theta>0$ tale che

$$\sup_{Q_{\frac{R}{2}}}\{u\}\leq 1-\theta.$$

Pertanto l'oscillazione di u si riduce di una costante universale passando da Q_{2R} a $Q_{\frac{R}{2}}$, quindi riscalando e iterando questa stima si ottiene la continuità hölderiana del minimo. ☐

References

[1] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York (1975).

[2] G. Anzellotti, *On the $C^{1,\alpha}$ regularity of $\omega(R)$-minima of quadratic functionals*, Boll. Un. Mat. Ital. **6** v.2 (1983), 195-212.

[3] S. Campanato, *Equazioni ellittiche del secondo ordine e spazi $\mathcal{L}^{2,\lambda}$*, Ann. Mat. Pura Appl. **69** (1965), 321-380.

[4] A. Cianchi and N. Fusco, *Gradient regularity for minimizers under general growth conditions*, J. für die Reine und Ang. Math. **507** (1999), 15-36.

[5] A. Dolcini, L. Esposito and N. Fusco, *$C^{0,\alpha}$ regularity of ω-Minima*, Boll. Un. Mat. Ital., 7, **10** A (1996), 113-125.

[6] L.C. Evans and R. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Boca Raton (1992).

[7] E. Giusti, *Metodi diretti nel calcolo delle variazioni*, UMI, Bologna (1994).

[8] T. Granucci, *$\mathcal{L}^{\Phi,\lambda}$-spaces*, Quaderni del dipartimento di matematica "Ulisse Dini" **4** (2004), 1-17.

[9] T. Granucci, *Un risultato di regolarità per funzionali convessi con crescite non-standard*, Quaderni del dipartimento di matematica "Ulisse Dini" **6** (2005), 1-26.

[10] P. Marcellini, *Regularity for elliptic equations with general growth conditions*, J. Diff. Equat., **105** (1993), 296-333.

[11] P. Marcellini, *Regularity for some scalar variational problems under general growth*, J. Optim. Theory Appl. **1** (1996), 161-181.

[12] P. Marcellini, *Everywhere regularity for a class of elliptic systems without growth conditions*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, (IV) **23** (1996), 1-25.

[13] E. Mascolo and G. Papi, *Local Boundness of minimizers of integrals of the calculus of variations*, Ann. Mat. Pura Appl. **167** (1994), 323-339.

[14] E. Mascolo and G. Papi, *Harnack inequality of minimizers of integral functional with general growth conditions*, NoDEA-Nonlinear Diff. Equat. Appl. **3** (1996), 321-244.

[15] G. Moscariello and L. Nania, *Hölder continuity of minimizers of functional with non standard growth conditions*, Ricerche di Matematica, **15** v. 2 (1991), 259-273.

[16] P. Tilli, *Remarks on the continuity of solutions to elliptic equations in divergence form*, Cal. Var., in stampa.

Received August 24, 2005.