PROCESSI STOCASTICI DI LEVY O DI DE FINETTI – LEVY ?

Attilio Wedlin – Università di Trieste

1. Dopo aver ottenuto a ventun'anni la laurea in Matematica applicata all'Università di Milano nel 1927, Bruno de Finetti ebbe una prima occasione per presentare le sue idee sulla probabilità al Congresso Internazionale dei Matematici di Bologna nel 1928; in quell'occasione parlò dei processi stocastici scambiabili a parametro discreto e della loro applicazione a problemi di inferenza statistica. Come venne riconosciuto in seguito, si trattava di un contributo scientifico molto importante che però non venne colto appieno dagli studiosi presenti al Congresso.

Negli anni immediatamente successivi, dal 1929 al 1931, egli concentrò la sua attenzione sui processi stocastici a parametro continuo "con incrementi omogenei e indipendenti" e sulle relative distribuzioni di probabilità che sono "infinitamente divisibili". Egli dedicò a questo argomento sei pubblicazioni, dalla [2] alla [7] in Bibliografia. Scopo principale di questa relazione è una breve rivisitazione dei suoi contributi su quest'ultimo tema che nella letteratura scientifica corrente viene indicato generalmente con la denominazione di "processi di P. Lèvy" dal nome del grande probabilista francese che, accanto a B. de Finetti, A.N. Kolmogorov, A.Y. Khintchine e K. Ito, diede contributi fondamentali su questi processi stocastici.

E' il caso di chiarire subito che non esiste un qualche problema di priorità scientifica: infatti i probabilisti che si occuparono dell'argomento negli anni Trenta, e cioè P. Lévy, A.N. Kolmogorov e A.Y. Khintchine, riconobbero chiaramente nei loro lavori la priorità di de Finetti nella posizione dei problemi connessi con quei processi e quelle distribuzioni e nella parziale risoluzione degli stessi.

Bisogna anche dire che de Finetti non continuò negli anni successivi ad approfondire gli studi iniziali sul tema: forse perché riteneva che con il decisivo contributo di Lévy nel suo lavoro [12] del 1934 dal titolo "Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes" i principali problemi fossero già risolti o forse perché negli stessi anni egli era principalmente impegnato a dare una forma organica alle sue idee sulla probabilità soggettiva.

Ricordiamo che nel maggio del 1935 B. de Finetti presentò all'Istituto H. Poincarè di Parigi, su invito del matematico e probabilista M. Fréchet che era direttore di quell'Istituto, la sua impostazione soggettiva della teoria delle probabilità. I contenuti delle cinque sessioni del Seminario di de Finetti furono pubblicati negli Atti dell'Istituto con il titolo "La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives" nel 1937.

In questa relazione ci proponiamo di ricordare gli aspetti essenziali dei principali contributi di de Finetti, Kolmogorov, Lévy, Khintchine e Ito sui processi stocastici con incrementi omogenei e indipendenti. Una buona introduzione in lingua italiana ai contributi di de Finetti si trova nelle seguenti pubblicazioni:

"Processi stocastici: teoria e applicazioni" di L. Daboni, L. Sigalotti e M. Zecchin in Atti del Convegno "Ricordo di Bruno de Finetti, professore nell'Ateneo triestino" (Trieste, maggio 1986);

"Teoria e calcolo delle probabilità" di E. Regazzini in "La matematica italiana dopo l'unità – Gli anni tra le due guerre mondiali" (1998).

2. Incominciamo il nostro percorso ricordando che nel testo "Calcul des Probabilités" del 1925 (Gauthier – Villars, Paris) P. Lévy aveva introdotto la nozione di "distribuzioni stabili"; esse, com'è noto, costituiscono un sottoinsieme proprio delle distribuzioni infinitamente divisibili che de Finetti introdurrà nel lavoro [2], "Sulle funzioni ad incremento aleatorio" del 1929, ricollegandole strettamente ai processi stocastici ad incrementi omogenei e indipendenti.

Ricordiamo che una distribuzione di probabilità, di cui indichiamo con F(x) la funzione di ripartizione, è detta "stabile" se, essendo $X_i, i \geq 1,$ numeri aleatori indipendenti con la medesima distribuzione F(x), accade che per ogni intero positivo $n \geq 2$ risulti

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{d}{=} n^{1/\alpha}.X_1 + \beta_n \ ,$$

ove β_n è un numero reale dipendente dall'intero n e $\alpha \in (0,2]$.

L'interesse principale di Lévy per le distribuzioni stabili riguardava la caratterizzazione delle distribuzioni dotate di un "dominio di attrazione" analogamente alla distribuzione Gaussiana (che è una particolare distribuzione stabile per la quale $\alpha = 2$) e non il loro collegamento con i processi ad incrementi indipendenti e omogenei.

Nella Nota del 1929 sopra ricordata de Finetti introdusse la nozione di processo a parametro continuo con incrementi omogenei e indipendenti $\{X(t); t \geq 0\}$ sotto la denominazione "funzione $X(t)$ ad incremento aleatorio, soggetta a legge fissa": con ciò egli intendeva che, suddiviso l'intervallo [0, 1] in n subintervalli di ampiezza 1/n , gli incrementi $X(\frac{h+1}{n}) - X(\frac{h}{n})$, h = 0, 1,….. ……, n-1, sono numeri aleatori indipendenti e ugualmente distribuiti (in seguito i.i.d.); la nozione si estendeva ovviamente ad un qualunque intervallo del semiasse reale positivo suddiviso in subintervalli di uguale ampiezza e non sovrapposti. Indicata con $F_{1/n}(x)$ la comune distribuzione degli incrementi $X(\frac{h+1}{n}) - X(\frac{h}{n})$ e con $\Phi_{1/n}(u)$ la corrispondente funzione caratteristica, dalle ipotesi precedenti si ricavano facilmente le relazioni

$$P\{X(1) \leq x\} = F_1(x) = [F_{1/n}(x)]^{n*},$$

ove $[F_{1/n}(x)]^{n*}$ indica la convoluzione n-ma di $F_{1/n}(x)$, e

$$E[e^{iuX(1)}] = \Phi_1(u) = [\Phi_{1/n}(u)]^n .$$

Estese al caso generale di un qualunque intervallo contenuto in $[0, \infty)$, tali relazioni caratterizzano le distribuzioni infinitamente divisibili la cui definizione è la seguente: un numero aleatorio X e la sua distribuzione di probabilità sono detti infinitamente divisibili se, per ogni intero positivo n esistono numeri aleatori i.i.d. X_{ni}, $1 \leq i \leq n$, tali che risulti $X \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{n} X_{ni}$.

Si prova che, dato un processo a parametro continuo con incrementi omogenei e indipendenti $\{X(t);t\geq 0\}$, la distribuzione di ogni $X(t)$ è infinitamente divisibile; viceversa, considerata una distribuzione infinitamente divisibile, con funzione caratteristica $\Phi(u)$, ad essa corrisponde un processo a parametro continuo con incrementi omogenei e indipendenti $\{X(t);t\geq 0\}$ per il quale è $E[e^{iuX(t)}]=\Phi_t(u)=[\Phi(u)]^t$. A rigore, per la dimostrazione di tale relazione è necessario richiedere che il processo X(t) sia "stocasticamente continuo", cioè che sussista per ogni $t\geq 0$ ed $\varepsilon\geq 0$ la condizione $\lim_{s\to t}P\{|X(s)-X(t)|>\varepsilon\}=0$.

In effetti la moderna definizione di processo di Lévy richiede, oltre all'indipendenza e uguale distribuzione degli incrementi su intervalli disgiunti della stessa ampiezza, anche le condizioni di continuità stocastica per ogni t > 0 e di normalizzazione $X(0)=0$. Si dimostra che allora ogni traiettoria di $X(t)$ è continua a destra per ogni t e dotata di limite sinistro $X(t^-)$: per indicare sinteticamente tali proprietà si usa il termine "càdlàg" di derivazione francese.

In questo primo lavoro sull'argomento de Finetti introdusse la nozione di "legge derivata" della distribuzione infinitamente divisibile con funzione caratteristica $\Phi(u)$ definendola attraverso il passaggio al limite $\lim\left[\Phi_{1/n}(u)\right]^n$, per $n\to\infty$; nei lavori successivi egli riconobbe però l'inadeguatezza di tale strumento per un'analisi approfondita di ulteriori questioni in proposito. Decidiamo quindi di non parlarne in questa breve esposizione.

Nel lavoro citato e nella nota [5] "Le funzioni caratteristiche di legge istantanea" del 1930 de Finetti si sofferma sulle distribuzioni infinitamente divisibili dotate entrambe di momenti secondi finiti con funzioni caratteristiche

$$\Phi_1(u)=\exp\left\{iu\gamma-\frac{\sigma^2}{2}u^2\right\},\quad \gamma\in R,\quad \sigma^2\geq 0,\quad e$$

$$\Phi_2(u)=\exp\{\lambda.[\chi(u)-1]\},\quad \lambda>0,\quad \chi(u)\approx E\left(e^{iuY}\right)\ .$$

corrispondenti al processo di Wiener – Lévy (o di moto browniano) e, rispettivamente, al processo di Poisson composto : sono entrambi processi di Lévy.

Vedremo in seguito che la somma

$$
\begin{aligned}
\Phi(u) &= \Phi_1(u) + \Phi_2(u) = \exp\left\{ iu\gamma - \frac{\sigma^2}{2}u^2 + \lambda.\left[\chi(u) - 1\right] \right\} \\
&= \exp\left\{ iu\gamma - \frac{\sigma^2}{2}u^2 + \int_R \left(e^{iux} - 1\right)\lambda F(dx) \right\}
\end{aligned} \tag{1}
$$

è ancora la funzione caratteristica di una distribuzione infinitamente divisibile corrispondente nel senso suddetto ad un processo di Lévy che risulta abbastanza generale. Nell'ultimo membro dell'espressione $(1), F(x)$ è la funzione di ripartizione corrispondente alla funzione caratteristica $\chi(u)$.

Nella nota già citata del 1930 de Finetti si pose il problema di caratterizzare la classe delle distribuzioni infinitamente divisibili e dimostrò per grandi linee il seguente notevole risultato:

"Le distribuzioni infinitamente divisibili sono tutte e sole quelle aventi funzione caratteristica $\Phi(u) = \exp\left\{\lambda.\left[\chi(u) - 1\right]\right\}$ ed inoltre quelle ottenute come limiti di opportune successioni di funzioni caratteristiche del tipo precedente."

In breve, se $\Phi(u)$ è infinitamente divisibile essa può sempre ottenersi con il seguente passaggio al limite

$$\ln \Phi(u) = \lim_{n\to\infty}\left\{ n.\left[\Phi^{1/n}(u) - 1\right]\right\},$$

nel quale interviene una sequenza di funzioni caratteristiche del tipo su indicato. Egli riconobbe però, e riportiamo le sue parole, che "per una discussione completa di tale risultato occorrono ulteriori e più ampi sviluppi".

A.N. Kolmogorov, nel 1932, nella nota [11] dal titolo "Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo – Il problema di Bruno de Finetti" diede la caratterizzazione generale, nel caso che le distribuzioni abbiano momenti secondi finiti, della classe di distribuzioni infinitamente divisibili mediante la rappresentazione

$$(2) \qquad \Phi(u) = \exp\left\{ iu\gamma' - \frac{\sigma^2}{2}u^2 + \int_{R-\{0\}} \left(e^{iux} - 1 - iux\right)\nu(dx) \right\},$$

ove la misura, eventualmente σ-finita, $\nu(dx)$ sostituisce la più particolare misura finita $\lambda.F(dx)$ della rappresentazione (1) ; si prova che essa deve soddisfare la condizione $\int_{|x|\geq 1} x^2\nu(dx) < \infty$ assieme alla $\nu(\{0\}) = 0$.

Ci sembra utile soffermarci ad interpretare il significato dei suddetti risultati con riferimento ai corrispondenti processi di Lévy $X(t)$, cioè ai processi stocastici per i quali $X(1)$ ha una distribuzione di probabilità con funzione caratteristica espressa dalla (1) o dalla (2).

In corrispondenza alla (1) si hanno processi costituiti dalla sovrapposizione di un processo $X_1(t)$ di moto browniano con drift $\gamma.t$ e un processo di Poisson composto $X_2(t) = \sum_{j=0}^{N(t)} Y_j$ ove i n.a. Y_j sono i.i.d. con funzione di ripartizione $F(x)$ e funzione caratteristica $\chi(u)$, mentre il processo di Poisson $N(t)$, indipendente dagli Y_j, ha intensità λ.

In corrispondenza alla (2) si hanno ancora processi del tipo $X_1(t) + X_2(t)$ ove però $X_2(t)$ è a sua volta una sovrapposizione di processi di Poisson composto tra loro indipendenti e indipendenti da $X_1(t)$.

3. I risultati precedenti vennero generalizzati nel 1934 da P. Lévy nell'importante nota [14] dal titolo "Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes" pubblicata negli Annali della Scuola Normale di Pisa. In essa Lévy pervenne ad una rappresentazione analoga alla precedente

$$(3)\quad \Phi(u) = \exp\left\{ iu\gamma' - \frac{\sigma^2}{2}u^2 + \int_{R-\{0\}} \left(e^{iux} - 1 - iux.I_{(-1,1)}(x)\right)\pi(dx) \right\}$$

ove però la misura $\pi(dx)$ è più generale della precedente $\nu(dx)$ dovendo soddisfare ad una condizione più debole, e cioè alla

$$\int_R (x^2 \wedge 1)\nu(dx) < \infty \quad e \quad \nu\left(\{0\}\right) = 0,$$

che non implica l'esistenza di momenti per $X(t)$.

L'espressione in parentesi della (3) è spesso denominata "esponente caratteristico" della distribuzione infinitamente divisibile con funzione caratteristica $\Phi(u)$. Si usano anche i nomi di "terna generatrice" per la (γ, σ^2, π) e di "misura di Lévy" per $\pi(dx)$.

Dopo l'articolo ricordato di P. Lévy, il probabilista russo A. Khintchine nell'articolo [12], "A new derivation of a formula of Paul Lévy" del 1937, pervenne ad una dimostrazione semplificata della (3) seguendo l'impostazione di Kolmogorov nella nota del 1932 cosicchè in letteratura la (3) è spesso denominata "rappresentazione di Lévy – Khintchine".

L'interpretazione probabilistica della (3), già presente sostanzialmente nella nota di Lévy, venne definitivamente precisata nel 1942 dal matematico giapponese K. Ito nell'articolo [8] dal titolo "On stochastic processes – Infinitely divisible laws of probability" : ne daremo una sommaria descrizione.

Dalla (3) si deduce che il corrispondente generale processo di Lévy può essere così rappresentato:

$$(4)\qquad X(t) = \gamma.t + B_{\sigma^2}(t) + \sum_{s \le t} \Delta X(s),$$

ove γ.t indica il drift deterministico, $B_{\sigma^2}(t)$ è un processo di moto browniano con $\sigma^2 = Var\left[B(1)\right]$ mentre $\sum_{s \le t} \Delta X(s)$ rappresenta una somma aleatoria delle discontinuità del processo nell'intervallo [0, t] , essendo $\Delta X(s)$ l'eventuale discontinuità $X(s)-X(s^{-})$ all'epoca s, anteriore o coincidente con t . Le due ultime componenti stocastiche di $X(t)$ sono indipendenti tra loro.

Nel caso che la misura di Lévy sia finita, cioè che sia $\pi(0,\infty)<\infty$, $\sum_{s\le t}\Delta X(s)$ è un processo di Poisson composto e, come si è visto, $\pi(dx)=\lambda.F(dx)$; se invece $\pi(0,\infty)=\infty$ il processo $\sum_{s\le t}\Delta X(s)$ ha la seguente rappresentazione in termini di "integrali di Poisson":

$$(5) \qquad \sum_{s\le t}\Delta X(s)=\int_{|x|<1} x\left[\mathrm{N}_{\omega}(t,dx)-t.\pi(dx)\right]+\int_{|x|\ge 1} x\mathrm{N}_{\omega}(t,dx) \ ,$$

ove $\mathrm{N}_{\omega}(t,dx)$ denota una "misura aleatoria di Poisson" il cui significato è quello di numero aleatorio delle discontinuità di ampiezza compresa tra x e x + dx che si manifestano entro l'epoca t.

Dalla notazione impiegata per indicarla appare che la misura aleatoria di Poisson, $\mathrm{N}_{\omega}(t,B)$, dipende da tre argomenti: l'evento elementare $\omega\in\Omega$, il periodo di tempo tra 0 e l'epoca t e l'insieme boreliano $B\in \mathrm{B}(R)$. Se supponiamo fissati $t=t' \ e \ B=B'$ allora $\mathrm{N}_{\omega}(t',B')$ è un numero aleatorio con distribuzione poissoniana avente intensità $\pi(B')$; fissato soltanto $B=B'$, $\mathrm{N}_{\omega}(t,B')$ è un processo di Poisson con intensità $\pi(B')$ e funzione valor medio E [$\mathrm{N}_{\omega}(t,B')$] $=t.\pi(B')$; infine, fissati $t=t' \ e \ \omega=\omega'$, $\mathrm{N}_{\omega'}(t',B)$ è una misura σ – finita su $\mathrm{B}(R)$.

L'integrale rispetto alla misura aleatoria di Poisson o, più semplicemente, l'integrale di Poisson $\int_{|x|\ge 1} x\mathrm{N}_{\omega}(t,dx)$ che appare come secondo addendo nella (5) rappresenta la somma aleatoria delle discontinuità con ampiezza non minore di 1, in modulo, nell'intervallo temporale [0, t]. Si prova che esso ha una distribuzione di probabilità tipo Poisson composto con valor medio e varianza dati dalle

$$E\left[\int_{|x|\geq 1} x\mathrm{N}_{\omega}(t,dx)\right] = t.\int_{|x|\geq 1} x\pi(dx) \text{ e}$$

$$Var\left[\int_{|x|\geq 1} x\mathrm{N}_{\omega}(t,dx)\right] = t.\int_{|x|\geq 1} x^2\pi(dx),$$

se $\pi\{x : |x| \geq 1\} < \infty$.

Il primo addendo del secondo membro nella (5) è detto "somma (aleatoria) compensata delle discontinuità di ampiezza compresa tra -1 e 1 nell'intervallo temporale [0, t]"; la compensazione si rende necessaria in quanto nel caso $\pi(0,\infty) = \infty$ l'integrale $\int_{0<|x|<1} x\mathrm{N}_{\omega}(t,dx)$ potrebbe essere non finito a causa della presenza di moltissime discontinuità di ampiezza molto piccola. Per ovviare a questa possibilità si usa la "misura compensata" $\mathrm{N}_{\omega}(t,dx) - t.\pi(dx)$.

Un esempio in proposito è fornito dal processo di Lévy denominato "processo Gamma" ove X(t) $\approx \Gamma$ (α.t, β), cioè ove la densità di probabilità di X(t) è data dalla $f_t(x) = \dfrac{\beta^{\alpha t}}{\Gamma(\alpha t)} x^{\alpha t-1}.e^{-\beta x}$. Esso è caratterizzato dalla terna generatrice $\gamma = 0,\quad \sigma^2 = 0$ e $\pi(x) = \alpha.x^{-1}.e^{-\beta x}$ e risulta $\pi(0,\infty) = \alpha.\int_0^{\infty} x^{-1}.e^{-\beta x}dx = \infty$, essendo però tale misura σ – finita. Infatti considerando, per esempio, la partizione di $(0,\infty)$ costituita dal sottoinsieme illimitato $(1,\infty)$ e dagli infiniti intervalli limitati $\left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right]$ con n = 1, 2, ………. si ha che, come facilmente si verifica, ognuno degli intervalli suddetti ha misura π finita.

4. Riteniamo utile aggiungere qualche ulteriore osservazione sul termine

$$\int_{0<|x|<1} x\left[\mathrm{N}_{\omega}(t,dx)-t.\pi(dx)\right]$$

che compare nella (5).

Suddividendo l'insieme di integrazione al modo seguente

$$\{x:0<|x|<1\}=(-1,0)\cup(0,1)=\bigcup_{n\geq 0}\left\{x:\frac{1}{2^{n+1}}\leq|x|<\frac{1}{2^{n}}\right\}=\bigcup_{n\geq 0}A_n$$

il suddetto integrale si può esprimere come una somma infinita di integrali

$$(6)\qquad \int_{0<|x|<1} x\left[N_{\omega}(t,dx)-t.\pi(dx)\right]=\sum_{n\geq 0}\int_{A_n} x\left[N_{\omega}(t,dx)-t.\pi(dx)\right]$$

alla quale corrisponde l'esponente caratteristico

$$\sum_{n\geq 0} t.\left\{\lambda_n.\int_{A_n}\left(e^{iux}-1\right)F_n(dx)-iu\lambda_n.\int_{A_n} xF_n(dx)\right\},$$

ove si è posto $\lambda_n=\pi(A_n)$ e $F_n(dx)=\dfrac{\pi(dx)}{\lambda_n}$.

Si tratta evidentemente di una somma numerabile di processi di Poisson composto, tra loro indipendenti, con drift lineari. Si prova che questa componente costituisce una "martingala quadrato-integrabile" con un'infinità numerabile di discontinuità su ogni intervallo di tempo finito. Rinviando il lettore per maggiori dettagli al testo di A.E. Kyprianou indicato in Bibliografia, ci limiteremo a fare alcune osservazioni in proposito.

Il singolo addendo della somma a secondo membro della (6), $\int_{A_n} x\left[\mathrm{N}_{\omega}(t,dx)-t.\pi(dx)\right]$, corrisponde ad un processo di Poisson composto, $\sum_{j=1}^{N_n(t)}\xi_j^{(n)}$, per il quale l'intensità del processo di Poisson

$N_n(t)$ è data dalla $\lambda_n = \pi(A_n)$ e la comune distribuzione di probabilità dei numeri aleatori indipendenti $\xi_j^{(n)}$ è la $F_n(dx) = \pi(dx)/\lambda_n$. Chiaramente si tratta del processo delle discontinuità la cui ampiezza aleatoria è contenuta nell'insieme $A_n = (-2^{-n}, -2^{-(n+1)}] \cup [2^{-(n+1)}, 2^{-n})$ e tale processo è stocasticamente indipendente da tutti gli altri processi consimili.

La corrispondente funzione valor medio ha l'espressione

$$E\left[\sum_{j=1}^{N_n(t)} \xi_j^{(n)}\right] = \lambda_n t.\int_R xF_n(dx)$$

e la differenza

$$\sum_{j=1}^{N_n(t)} \xi_j^{(n)} - \lambda_n t.E\left[\xi_1^{(n)}\right] = M_n(t) = \int_{A_n} x\left[\mathrm{N}_\omega(t,dx) - t.\pi(dx)\right]$$

costituisce un processo martingala $M_n(t)$ che si prova facilmente essere quadrato - integrabile.

Indicando con $X^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{k} M_n(t)$ il processo stocastico delle discontinuità la cui ampiezza è contenuta nell'insieme $\bigcup_{n=0}^{k} A_n$ si ha che tale processo è ancora una martingala quadrato – integrabile e contemporaneamente un processo di Lévy. Si prova che la sequenza $\left\{X^{(k)}(t); k \geq 0\right\}$ è una sequenza di Cauchy nello spazio di Hilbert delle martingale quadrato – integrabili rispetto alla norma $\|M(t)\| = E\left[\sup_t M^2(t)\right]$. Pertanto esiste un processo limite $X(t) =$

$$= \lim_{k\to\infty} X^{(k)}(t) = \int_{0<|x|<1} x\left[N_\omega(t,dx) - t.\pi(dx)\right] = \sum_{n\geq 0} \int_{A_n} x\left[N_\omega(t,dx) - t.\pi(dx)\right]$$

che è un processo di Lévy ed anche una martingala quadrato – integrabile.

Ci siamo limitati ad indicare sommariamente la linea dimostrativa della decomposizione di Lévy – Ito presentata nel testo [12] sorvolando su alcuni punti critici per i quali rinviamo il lettore al detto testo. Riteniamo che quella su esposta a grandi linee sia una delle dimostrazioni più semplici del Teorema di Lévy - Ito tra quelle presenti in letteratura.

5. Indicazioni bibliografiche.

[1] Applebaum D. (2009). *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, 2nd ed. Cambridge University Press.

[2] de Finetti B. (1929). Sulle funzioni ad incremento aleatorio. In Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei. Roma.

[3] de Finetti B. (1929). Sulla possibilità di valori eccezionali per una legge di incrementi aleatori. In Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei. Roma.

[4] de Finetti B. (1929). Integrazione delle funzioni a incremento aleatorio. In Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei. Roma.

[5] de Finetti B. (1930). Le funzioni caratteristiche di legge istantanea. In Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei. Roma.

[6] de Finetti B. (1931). Le funzioni caratteristiche di legge istantanea dotate di valori eccezionali. In Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei. Roma.

[7] de Finetti B. (1931). Le leggi differenziali e la rinuncia al determinismo. In Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma.

[8] Ito K. (1942). On stochastic processes I – Infinitely divisible laws of probability. Japan J. Math. 18, 261 – 301. (Reprinted in *Kiyosi Ito Selected Papers*, Springer, 1987).

[9] Kallenberg O. (1997). *Foundations of Modern Probability*. Springer.

[10] Khintchine A.Ya. (1937). A new derivation of a formula by P. Lévy. Bulletin of the Moskov State University 1.

[11] Kolmogorov A.N. (1932). Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo – Un problema di bruno de Finetti. In Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei. Roma.

[12] Kyprianou A.E. (2006). *Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications*. Springer.