Dove vola l'ape Maia?
Viaggio tra i sistemi di riferimento

Letizia Mucelli*

Introduzione

Come evidenziato nella presentazione del laboratorio scritta dai ragazzi e riportata all'inizio della seconda parte di questo volume, gli allievi della classe terza del Liceo Linguistico "Paolino d'Aquileia" si sono proposti di spiegare a bambini di scuola elementare ed a propri coetanei, con la realizzazione di laboratori e giochi didattici, il concetto di sistema di riferimento nel piano e nello spazio, evidenziandone l'importanza e l'applicazione nella quotidianità (dalla necessità di individuare univocamente un punto od un luogo di punti nel piano o nello spazio, a quella di individuare una precisa località su una carta geografica o su una mappa). Il laboratorio è stato pensato e realizzato per visitatori dagli otto anni in poi.

La classe è composta da 21 ragazzi. I maschi sono sei; quattro di essi provengono da altre scuole e sono stati inseriti nel corso del secondo quadrimestre. A tal proposito si sottolinea come l'esperienza di partecipazione a "La matematica dei ragazzi" si sia rivelata utile ai fini di una ottimale integrazione in classe dei nuovi alunni. Di seguito, si riporta una descrizione dei contenuti e delle modalità con cui essi sono stati proposti nel corso della manifestazione "La matematica dei ragazzi". Si "viaggerà" tra sistema di riferimento cartesiano e polare, rettangolare e sferico, passando attraverso un breve excursus storico ed alcuni curiosi, quanto sorprendenti, riscontri nel meraviglioso mondo della natura, evidenziando i legami che sussistono tra i diversi sistemi di riferimento.

Un'alunna si fa portavoce della classe, accogliendo i visitatori, spiegando brevemente le motivazioni che hanno portato a sviluppare l'argomento "i sistemi di riferimento" ed osservando che tale concetto non è da restringere solo all'ambito scientifico, ma si può allargare anche a quello filosofico. Ricorda, ad esempio, lo storico passaggio che ha portato dal sistema di riferimento geocentrico a quello eliocentrico, dalle teorie tolemaiche a quelle copernicane e di Keplero. Non si trascura di osservare come anche per parlare di morale, di etica, del bene e del male, sia sempre necessario fissare dei parametri, dei punti ai quali riferirsi, fino a riconoscere un riferimento assoluto, ad esempio, in Cristo per i Cristiani, in Allah per i Musulmani, in Buddha per i Buddisti[1]. A livello di curiosità, si ricorda l'aneddoto secondo cui al gracile Cartesio ancora bambino, mentre riposava nella sua stanza presso un collegio di Salesiani, sia venuta l'idea di fissare un sistema di riferimento, detto in seguito cartesiano, osservando una mosca che volava e ponendosi il problema di come fare a localizzarla!

L'alunna invita quindi i visitatori ad avvicinarsi ai laboratori, evidenziando anche l'ordine più opportuno da seguire, soprattutto per i più piccoli, per i quali è fondamentale rispettare una propedeuticità, tenendo conto che in alcuni casi è la prima volta che si accostano a concetti quali quelli proposti.

1° Laboratorio – Dove vola l'ape Maia?

In questo primo laboratorio molto apprezzato dai visitatori delle elementari, i bambini visitatori diventano protagonisti di una piccola recita nella quale interpretano ape, sole e fiore per dare un'idea di come animaletti piccoli come le api siano in grado di comunicare con estrema precisione alle proprie compagne, ad esempio, la posizione di una fonte di cibo (fiore), eseguendo delle particolari danze riprodotte schematicamente su un cartellone posto sul pavimento ed orientandosi rispetto al sole. Ai visitatori più grandi si cerca di dare una spiegazione più dettagliata, anche con l'ausilio degli schemi appesi alla parete, in cui sono evidenziati angoli e direzioni rispetto al sole.

2° Laboratorio – Giochi didattici

In questo laboratorio si ritiene opportuno introdurre i bambini al concetto di coordinate cartesiane attraverso un gioco intitolato "caccia all'oggetto". In questo primo approccio, ci si riduce di fatto a lavorare in un solo quadrante: un cartellone è suddiviso in riquadri numerati (vedi Fig. 1), in ciascuno dei quali è inserito un piccolo oggetto e, in alcuni, una caramella! Se viene individuata correttamente la casella indicata tramite assegnazione di coordinate, si vince la caramella. Si osservi che in questo caso le coppie di numeri individuano le caselle e non dei punti. Si rappresentano in verde i numeri scritti orizzontalmente ed in rosso quelli scritti verticalmente: l'obiettivo è quello di differenziare anche visivamente la differenza tra ascisse ed ordinate in un sistema di riferimento cartesiano.

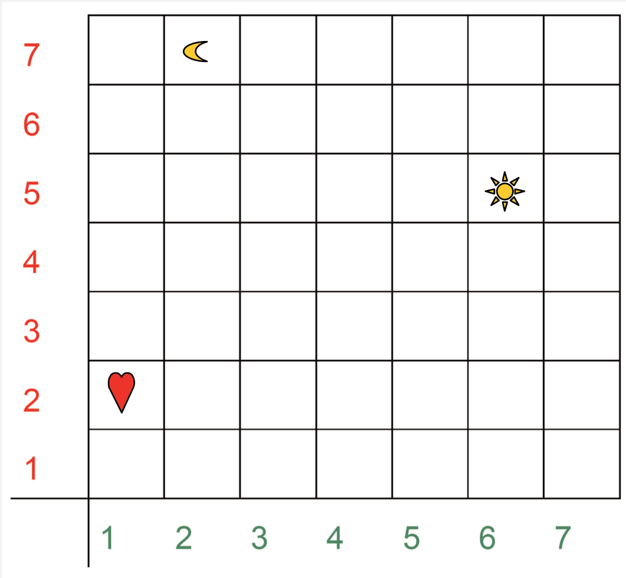

Figura 1

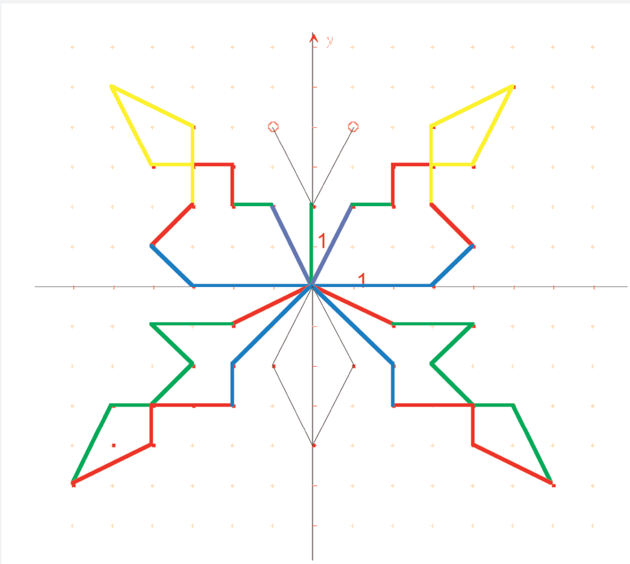

Figura 2

Per illustrare in modo semplice ed immediato il concetto di coppia ordinata, si dice ai bambini che per individuare correttamente le caselle è fondamentale partire sempre con il verde, come con il semaforo! Quindi il segreto per riuscire bene in questo gioco e nei successivi è sempre quello di usare prima il numero verde e poi il rosso, per ciascuna coppia di numeri assegnata. Si passa quindi a mostrare come le abilità imparate con questo primo gioco possano tornare utili nella vita di ogni giorno, per individuare un indirizzo con l'aiuto di "*Tutto città*" (gioco denominato "dove abita il signor Rossi?") o una località sul mappamondo. Altri giochi vengono proposti in questo laboratorio. In uno di questi, i bambini sono invitati a colorare con un determinato colore alcune caselle di uno schema come quello di Fig. 1, indicate assegnando le rispettive coordinate in verde e rosso. Una ulteriore attività propone ai visitatori di inserire dei punti in una griglia con l'asse delle x colorato in verde e l'asse delle y colorato in rosso: si forniscono le coppie ordinate che rappresentano le coordinate di alcuni punti e si chiede ai visitatori di unire i punti trovati per scoprire che immagine si forma (vedi ad es. Fig. 2).

Si osservi che tale attività non è più ristretta solo al primo quadrante del piano cartesiano, ma è estesa a tutti e quattro. Sarebbe quindi necessario introdurre almeno a livello intuitivo i numeri negativi. Vista la tenera età dei visitatori, dopo aver richiamato i classici esempi del termometro ed aver sondato con domande mirate il reale livello di conoscenze dell'interlocutore, per semplificare l'approccio ed ottenere un'immediata acquisizione di abilità nello svolgimento

Esercizi – coordinate e simmetrie

1. Osserva la figura a lato.
2. Individua il punto di coordinate (2,4) e chiamalo A.
3. Individua il simmetrico di A rispetto all'asse y. Chiama B tale punto e scrivi le sue coordinate.
4. Confronta le coordinate di A e B: individua analogie e differenze.
5. Individua il simmetrico di B rispetto alla retta r. Chiama C tale punto e scrivi le sue coordinate.
6. Confronta le coordinate di B e C. Cosa osservi?
7. Individua il simmetrico di B rispetto all'asse x e chiama tale punto D. Scrivi le coordinate di D.
8. Confronta le coordinate di B e D. Cosa osservi?
9. D risulta simmetrico di A rispetto a quale punto?
10. Confronta le coordinate di A e D. Cosa osservi?
11. Quali sono tutti gli assi di simmetria della figura?
12. Qual è il centro di simmetria?

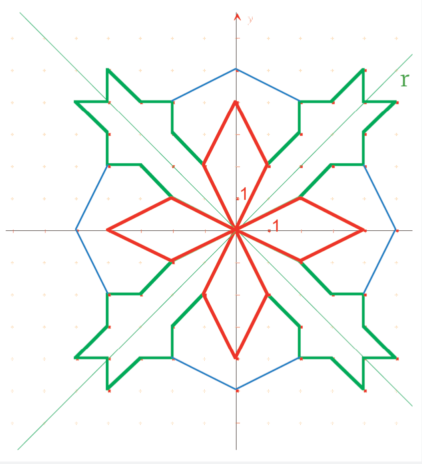

Figura 3

delle attività proposte, si ritiene opportuno semplificare, fornendo le "istruzioni del gioco" come segue: "+ verde significa spostati a destra, – verde significa spostati a sinistra; + rosso significa spostati in alto, – rosso significa spostati in basso". In tal modo, per ottenere lo scopo, gli unici prerequisiti necessari, a parte la conoscenza almeno dei primi numeri naturali, sono la capacità di distinguere i colori, la destra dalla sinistra e l'alto dal basso!

Traendo spunto da lavori di questo tipo, si fanno anche considerazioni relative alle simmetrie, laddove possibile. A tale scopo sono predisposte schede come la Fig. 3.

3° Laboratorio – Battaglia navale nel piano cartesiano

In questo classico gioco, le navi sono rappresentate da insiemi di punti del piano cartesiano disposti in verticale, orizzontale o diagonale. Il campo da gioco (piano cartesiano) è rappresentato su due cartelloni, e in corrispondenza di ciascun punto che forma una nave si colloca un *post-it*, così da poter riutilizzare i medesimi cartelloni quante volte necessario.

Ciascun concorrente tenta di abbattere le navi avversarie indicando ciascun punto attraverso l'assegnazione delle rispettive coordinate. Un arbitro controlla che i concorrenti segnino in modo corretto il punto richiesto. In caso di errore, chi sbaglia perde un turno di gioco.

L'obiettivo didattico principale è quello di chiarire e consolidare il concetto di coppia ordinata, evidenziando che, se si scambiano tra loro i valori delle coordinate di un punto, il punto individuato nel piano non è più il medesimo (a meno che i valori non coincidano). Per focalizzare la questione si è pensato di non trascurare l'aspetto visivo, continuando a disegnare gli assi cartesiani nei colori verde e rosso.

4° Laboratorio – I principali sistemi di riferimento e le relazioni che li legano

Per i visitatori più grandi (almeno coetanei rispetto alla classe che espone), si predispongono dei cartelloni per illustrare anche da un punto vista formale quali siano i legami tra i vari sistemi di riferimento, ed evidenziare come un punto sia univocamente determinato nel piano e nello spazio, rispettivamente, da una coppia e terna ordinata di coordinate.

A tal fine, è necessario definire le funzioni seno e coseno. La definizione proposta è quella classica.

Si evidenzia poi il legame tra coordinate di un punto nel piano in un sistema di riferimento cartesiano e nel sistema polare associato. In modo analogo si estende la questione al caso tridimensionale, ricavando le equazioni che evidenziano il legame tra sistema rettangolare e sferico[2].

Per gli eventuali visitatori più grandi, si predispone infine una postazione in cui sono messi a disposizione alcuni computer. Si propone l'utilizzo dei programmi *Cabrì Gèométre Plus II*, *Derive* ed *Autocad*, per svolgere alcuni esercizi che aiutino ad esplicitare e rendere quanto più possibile evidente la corrispondenza tra aspetto algebrico e relativa rappresentazione geometrica in un sistema di riferimento. Per quanto riguarda l'utilizzo di *Autocad*, si propone solo un semplice esercizio dimostrativo, in cui si realizza sul foglio di lavoro la costruzione di una casetta, assegnando le coordinate in un opportuno sistema rettangolare, per stimolare interesse e dare almeno un'idea delle potenzialità di tale programma, utilizzato di solito curricolarmente nei programmi di studio degli istituti tecnici. Di seguito si riportano le schede di lavoro predisposte con *Cabrì* e *Derive*.

Scheda 1
Sequenza di istruzioni da utilizzare con Cabri

1. Fissa il sistema di coordinate (comando *mostra gli assi).*
2. Disegna un punto X sull'asse *x* (comando *punto su un oggetto*).
3. Coordinate del punto X (comando *coordinate o equazioni*).
4. Scrivi un'espressione (solo la parte relativa alla variabile indipendente di una qualsiasi funzione data in forma esplicita, usando il comando *espressione*).
5. Applica l'espressione scritta all'ascissa del punto X (comando *applica espressione)* e clicca sul foglio.
6. Trasporta sull'asse *y* la misura comparsa: chiama Y il punto che compare sull'asse (usa il comando *trasporto di misura*).
7. Disegna le rette passanti per X ed Y rispettivamente parallele agli assi *x* e *y* (comando *rette parallele*).
8. Indica il *punto intersezione* di tali rette, chiamalo P e mostra le sue coordinate.
9. Usa il comando *traccia* cliccando, nell'ordine, sul punto P (clicca e rilascia il tasto sinistro del mouse), e sul punto X (mantenendo cliccato il pulsante sinistro del mouse trascina il punto X sull'asse x).
10. Usa il comando *luogo* cliccando una volta, nell'ordine, sul punto P e sul punto X.

Scheda 2
Questionario relativo al lavoro svolto con Cabri

1. Cosa accade trascinando con il mouse il punto X lungo l'asse x?
2. Sempre trascinando X, oltre alle coordinate di tale punto, si modificano di conseguenza anche le coordinate di altri punti? Se sì, in quale modo?
3. Da che cosa dipende il legame tra X ed Y?

4. Che cosa rappresenta l'insieme di punti o la linea che compare eseguendo le istruzioni di cui al punto 9 o 10 sopra riportati?
5. Cosa accade se si ruota attorno all'origine del sistema di riferimento l'asse delle ordinate? Si perde il legame tra la coordinata x e quella y del punto P?

Scheda 3
Scheda per esercizi con Derive

1. *Crea espressione* (se ad esempio si vuole scrivere l'equazione $x^2 + y^2 = 1$, con *Derive* si digita *solve* (x ^ 2 + y ^ 2 = 1, x, y)) e premi *invio.*
2. Apri una finestra grafica 2D.
3. Da *opzioni* seleziona *semplifica prima di tracciare il grafico*.
4. Traccia il grafico (seleziona l'icona corrispondente a tale comando).
5. Seleziona il pulsante *modalità traccia* e scorri con le freccette sulla tastiera. Cosa succede sul foglio da disegno?
6. Cosa indicano i numeri che compaiono sotto alla finestra grafica?
7. Ripeti i punti da 1 a 4 con una nuova espressione (ad esempio *solve* (y = x, x, y)).
8. Crea un sistema con le espressioni precedentemente create o selezionando *risolvi sistema* e segui le istruzioni che compaiono sullo schermo, oppure digita il sistema con l'opportuno simbolismo (ad esempio *solve* ([#1, #2], [x, y]) e premendo *invio*).
9. Seleziona *semplifica base*.
10. Cosa compare sullo schermo? Cosa rappresentano?
11. Seleziona il sistema e premi *semplifica approssima*. Quindi ripeti *semplifica base*.
12. Che differenza c'è tra i risultati ottenuti al punto 8 e quelli al punto 10?
13. Cosa significa risolvere un sistema?
14. C'è corrispondenza tra finestra algebrica e finestra grafica? Esprimi delle osservazioni in merito alla questione.

Osservazioni

I ragazzi della classe terza del "Liceo Linguistico Europeo Paolino d'Aquileia" di Gorizia che hanno partecipato a questa edizione 2006 di "La matematica dei ragazzi" avevano preso parte anche all'edizione precedente della manifestazione. Già al termine dell'edizione del 2004 si erano dichiarati entusiasti e pronti a partecipare di nuovo nel 2006. Memori dell'esperienza maturata, sono stati loro stessi a scegliere come interlocutori preferenziali principalmente bambini o ragazzini, al massimo di scuola media inferiore, avendo constatato di persona che questi dimostrano molto più entusiasmo, curiosità e partecipazione dei ragazzi più grandi. I laboratori sono stati quindi ideati e realizzati in questa precisa ottica. Il lavoro dei ragazzi si è rivelato un po' più autonomo rispetto alla volta scorsa, ed è consistito principalmente nell'elaborare giochi quanto più efficaci possibili per semplificare al massimo gli argomenti ed i contenuti relativi ai sistemi di riferimento. Tali argomenti sono stati peraltro sviluppati ed approfonditi in classe, rientrando nei programmi ministeriali per le classi terze degli istituti superiori, in cui appunto lo studio della geometria analitica copre buona parte del programma dell'anno.

Volutamente, i ragazzi hanno limitato il numero di laboratori adatti ai ragazzi più grandi. Come previsto, l'entusiasmo dimostrato dai più piccini è stato incoraggiante e motivo di notevole soddisfazione. I ragazzi impegnati a coinvolgere i piccini nei vari giochi, infatti, inizialmente dubbiosi e timorosi di non esser in grado di comunicare efficacemente e riuscire a trasmettere quanto si erano proposti, soprattutto a quei bambini che a mala pena conoscevano i numeri naturali e solo fino al dieci, ad un certo punto, contenti ed increduli, hanno cominciato ad esclamare e commentare: "*prof., ma capiscono davvero, fanno giusto!*".

Anche questa volta la comunicazione con i visitatori è stata improntata ad un dialogo continuo, ad una interazione che, con domande e suggerimenti mirati, era volta al coinvolgimento diretto ed attivo dei visitatori.

Per quanto riguarda gli insegnanti accompagnatori delle classi in visita, significativa può essere l'osservazione di una docente di scuola media, che ha molto apprezzato l'idea di sfruttare al massimo anche l'aspetto visivo per cercare di chiarire i concetti, come ad esempio la scelta di utilizzare colori diversi per differenziare le ascisse dalle ordinate e fissare un ordine preciso nell'assegnare le coordinate di un punto nel piano cartesiano: un approccio visivo, e semplificare almeno inizialmente al massimo gli argomenti, anche a costo di sacrificare il rigore, diventa infatti necessario e prioritario in una realtà scolastica sempre più variegata ed eterogenea, in cui non è più rara eccezione, ma normalità, l'inserimento di bambini provenienti da altri paesi, che ancora non sono in grado di parlare e comprendere chiaramente l'italiano. In tali casi, la sola comunicazione verbale o scritta convenzionale risulta infatti inefficace ed inadeguata. Il materiale proposto è quindi stato apprezzato come valido spunto anche per risolvere problematiche di questo tipo.

NOTE

* Liceo Linguistico Europeo
"Paolino d'Aquileia",
v. Seminario 7, 34170 Gorizia
e-mail: letizia.mucelli@libero.it

1 Tali argomenti sono stati affrontati in maniera più approfondita in classe durante le ore curricolari di filosofia, religione e fisica.

2 In questa sede non si riportano per brevità i dettagli del lavoro, peraltro facilmente reperibili nei testi di trigonometria (cfr. Lamberti et al., 1991).

BIBLIOGRAFIA

Boyer C.B., 1994, *Storia della Matematica*, Mondatori, Milano.

Dodero N., Baroncini P., Manfredi R., 2004, *Moduli di lineamenti di matematica (mod.F)*, Ghisetti & Corvi, Milano.

Dodero N., Toscani J., 1988, *Lezioni di matematica,* Ghisetti & Corvi, Milano.

Lamberti L., Mereu L, Nanni A., 1991, *Matematica due - Trigonometria*, Etas Libri, Milano.

SITI WEB

http://it.wikipedia.org/wiki/Coordinate_cartesiane.

http://digilander.libero.it/LeoDaga/DVS/refsys.htm.

http://www.skylive.it/pillole/Teoria_riferimenti.htm