INDEKS JUMLAH JARAK EKSENTRIK GRAF INVERS DARI GRUP QUATERNION DIPERUMUM

SKRIPSI

OLEH:
UZLIFATIL JANNAH
NIM. 17610020

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023

INDEKS JUMLAH JARAK EKSENTRIK GRAF INVERS DARI GRUP QUATERNION DIPERUMUM

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Uzlifatil Jannah
NIM. 17610020

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023

INDEKS JUMLAH JARAK EKSENTRIK GRAF INVERS DARI GRUP QUATERNION DIPERUMUM

SKRIPSI

Oleh
Uzlifatil Jannah
NIM. 17610020

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 11 April 2023

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	Ach. Nashichuddin, MA
NIDT. 19870218201608011 056	NIP. 19730705 200003 1 001

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc,
NIP. 19741129 200012 2 005

iii

INDEKS JUMLAH JARAK EKSENTRIK GRAF INVERS DARI GRUP QUATERNION DIPERUMUM

SKRIPSI

Oleh
Uzlifatil Jannah
NIM. 17610020

Telah dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 08 Mei 2023

Ketua Penguji	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D	....
Anggota Penguji I	: Intan Nisfulaila, M.Si.	....
Anggota Penguji II	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.	....
Anggota Penguji III	: Ach. Nashichuddin, MA	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

iv

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Uzlifatil Jannah

NIM : 17610020

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Indeks Jumlah Jarak Eksentrik Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perilaku tersebut.

Malang, 08 Mei 2023
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
17E92AJX806485230

Uzlifatil Jannah
NIM. 17610020

v

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

"Nikmati setiap proses perjalanan hidup dan jangan lupa untuk bersyukur"

Skripsi ini dipersembahkan untuk:
Ayahanda Drs. Zainuri dan Ibunda Husnul Latifah tercinta yang senantiasa selalu mendoakan dengan tulus, memberi semangat, dukungan, nasihat, motivasi dan kasih sayang yang tiada henti disetiap langkah penulis.
Kakak Hadiyyatan Wasilah dan Adik Farah Maulidah Rahmah yang turut memberi doa dan dukungan. Serta keluarga dan semua teman-teman yang selalu memberikan doa dan support kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarokatuh

Alhamdulillahi robbil'alamiin. Puji syukur kehadirat Allah Swt. Hanya kata itu yang dapat penulis sampaikan karena berkat rahmat, taufiq, hidayah, dan berkah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "Indeks Jumlah Jarak Eksentrik Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum".

Sholawat dan salam senantiasa terlimpahkan kepada Nabi besar Muhammad Saw. yang telah menuntun umatnya dari zaman kegelapan menuju zaman yang cerah, yaitu agama Islam.

Penulis menyadari bahwa tanpa adanya bimbingan, bantuan, dorongan, saran dan doa dari berbagai pihak, dalam penulisan skripsi ini tidak akan mendapatkan hasil yang baik. Penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Mohammad Nafie Jauhari,M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak mamberikan ilmu, nasihat, motivasi, dan arahankepada penulis.
5. Ach. Nasichuddin, MA, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak mamberikan ilmu, nasihat, motivasi, dan arahankepada penulis.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah ikhlas dan sabar dalam memberikan dan mendidik ilmu dengan baik kepada penulis.
7. Orang tua dan seluruh keluarga yang selalu memberikan motivasi, doa, nasihat dan semangat kepada penulis.
8. Seluruh teman-teman mahasiswa Program Studi Matematika angkatan 2017, serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, penulis sampaikan terimakasih atas bantuannya dalam menyelesaikan penyusun skripsi ini.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarokatuh

Malang, 08 Mei 2023

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Jannah, Uzlifatil. 2023. **Indeks Jumlah Jarak Eksentrik Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum.** Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, MA.

Kata Kunci: Indeks Jumlah Jarak Eksentrik, Graf Invers, Grup Quaternion Diperumum

Graf invers dari suatu grup adalah graf yang himpunan titiknya adalah semua anggota grup berhingga sedemikian sehingga dua titik berbeda u dan v terhubung langsung jika hanya jika $u \cdot v \in S$ atau $v \cdot u \in S$. Grup quaternion diperumum adalah grup non-abelian dengan orde $4n$ yang dibangun oleh dua elemen a, b yang disimbolkan $\langle a, b\rangle$ didefinisikan dengan $Q_4 = \langle a.b | a^{2n} = e, b^2 = a^n, b \cdot a \cdot b^{-1} = a^{-1}\rangle$ dan e merupakan elemen identitas, $n \geq \mathbb{N}$ dan $n \geq 2$. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui formula indeks jumlah eksentrik graf invers dari grup quaternion diperumum dengan $n \geq \mathbb{N}$ dan $n \geq 2$. Penelitian ini difokuskan pada formula umum indeks jumlah eksentrik graf invers dari grup quaternion diperumum dengan $n \geq \mathbb{N}$ dan $n \geq 2$. Hasil dari penelitian ini adalah formula indeks jumlah jarak eksentrik graf invers dari grup quaternion diperumum sebagai berikut

$$\xi^{sv}\left(G_S(Q_{4n})\right) = \sum_{v \in V\left(G_S(Q_{4n})\right)} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} = \frac{4(4n-1)(4n^2-2n-1)}{(2n-1)(4n-3)}.$$

ABSTRACT

Jannah, Uzlifatil. 2023. **The Eccentric Distance Sum Index of Inverse Graph of a Generalized Quaternion Group.** Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, MA.

Keywords: Eccentric Distance Sum Index, Inverse Graph, Generalized Quaternion Group

The inverse graph of a group is a graph which the vertices set are all elements of a finite group and two distinct vertices u and v are adjacent if and only if either $u \cdot v \in S$ or $v \cdot u \in S$. A generalized quaternion group is a non-abelian group with order $4n$ constructed from the two elements a, b symbolized $\langle a, b\rangle$ defined by $Q_4 = \langle a.b | a^{2n} = e, b^2 = a^n, b \cdot a \cdot b^{-1} = a^{-1}\rangle$ and the e is identity, $n \geq \mathbb{N}$ and $n \geq 2$. The purpose of this research are to find out the eccentric distance sum index formula of inverse graph of a generalized quaternion group with $n \geq \mathbb{N}$ and $n \geq 2$. The study focused on the general formula of inverse graph of a generalized quaternion group with $n \geq \mathbb{N}$ and $n \geq 2$. The result of this research is the eccentric distance sum index formula of inverse graph of a generalized quaternion group as follows

$$\xi^{sv}\big(G_S(Q_{4n})\big) = \sum_{v \in V\left(G_S(Q_{4n})\right)} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} = \frac{4(4n-1)(4n^2-2n-1)}{(2n-1)(4n-3)}.$$

مستخلص البحث

الجنة، أزلفة. ٢٠٢٣. ***Eccentric Distance Sum Index* للمخطاط المعكوس من زمرة *Quaternion* المعممة**. البحث العلمي. قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الاسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) مُحَمَّد نافع جوهري، الماجستير (٢) احمدناصح الدين، الماجستير

الكلمات الرئيسيه: مؤشر عددالمسافات غريب الأطوار، للمخطاط العكسي، زمرة *Quaternion* المعممة

المخطاط العكسي من الزمرة هوللمخطاط له مجموعة من الرؤوس هي جميع أعضاء زمرة المحدودة بحيث ترتبط رأسان مختلفان u و v مباشرة إذا وفقط أذ $u \cdot v \in S$ أو $v \cdot u \in S$. زمرة *Quaternion* المعممة هي زمرة غيربليانية (non-abelian) بنسق $4n$ التي مكون بواسطة عنصرين a, b يرمز اليه $\langle a, b \rangle$ يمكن تعريفها بـ $Q_4 = \langle a \cdot b | a^{2n} = e, b^2 = a^n, b \cdot a \cdot b^{-1} = a^{-1} \rangle$ و e الوحدة، $n \geq \mathbb{N}$ و $n \geq 2$. الأغراض في هذه المعرفة الصيغ *Eccentric Distance Sum Index* للمخطاط المعكوس من زمرة *Quaternion* المعممة بـ $n \geq \mathbb{N}$ و $n \geq 2$. يركز هذا البحث على الصيغة العامة *Eccentric Distance Sum Index* للمخطاط المعكوس من زمرة *Quaternion* المعممة بـ $n \geq \mathbb{N}$ و $n \geq 2$. وأما نتائج هذا البحث هي *Eccentric Distance Sum Index* للمخطاط المعكوس من زمرة *Quaternion* المعممة هي

$$\xi^{sv}\left(G_S(Q_{4n})\right) = \sum_{v \in V\left(G_S(Q_{4n})\right)} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} = \frac{4(4n-1)(4n^2-2n-1)}{(2n-1)(4n-3)}.$$

BAB 1

PENDAHULUAN

1. Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu mengenai masalah-masalah yang berhubungan dengan berpikir logis dan sistematis. Matematika memiliki banyak macam cabang ilmu. Salah satu macam cabang ilmu dalam matematika yaitu di antaranya aljabar abstrak dan matematika diskrit. Aljabar abstrak membahas ring, grup, lapangan, dan sifat-sifatnya dan lain-lain. Sedangkan matematika diskrit menjelaskan mengenai graf, aljabar *boole*, relasi, dan lain-lain. Ada dua topik menarik pada aljabar abstrak dan matematika diskrit yaitu graf dan grup.

Grup dan sifat-sifatnya mendasari topik yang dibahas dalam aljabar abstrak seperti lapangan dan ring. Grup adalah himpunan tak-kosong dengan operasi biner dan memenuhi sifat tertutup, sifat asosiatif, memiliki elemen identitas, dan setiap elemen memiliki invers (Gilbert, 2015). Salah satu grup yang dibahas pada penelitian ini adalah grup quaternion diperumum yang dinotasikan dengan Q_{4n}. Grup quaternion diperumum adalah suatu grup dengan orde $4n$, $n \geq 2$, di mana n adalah bilangan bulat dengan operasi perkalian (Ma, et al., 2013). Grup quaternion diperumum tersebut dapat diterapkan pada bentuk graf. Dengan kata lain, graf tersebut terbentuk dari grup quaternion diperumum.

Graf didefinisikan sebagai himpunan tak-kosong dari titik (*vertex*) dan sisi (*edge*) yang dinotasikan dengan $G = (V, E)$ yang dalam hal ini V merupakan himpunan tak-kosong dari titik-titik dan E merupakan himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik (Chartrand, 2016). Salah satu graf yang dapat dibentuk dengan menggabungkan graf dan grup adalah graf invers. Graf invers diperkenalkan oleh seorang ilmuwan bernama Alfuraidan dan Zakariya pada tahun 2017. Misalkan Γ adalah grup berhingga dan S adalah suatu himpunan yang tidak invers oleh dirinya sendiri di Γ, yaitu $S = \{u \in \Gamma : \mathrm{u} \neq u^{-1}\}$. Graf invers dari Γ dinotasikan dengan $G_S(\Gamma)$ dan didefinisikan dengan graf yang himpunan titiknya adalah himpunan Γ dan dua elemen berbeda u dan v adalah terhubung langsung di $G_S(\Gamma)$ jika hanya jika $u \cdot v \in S$ atau $v \cdot u \in S$ (Alfuraidan and Zakariya, 2017).

Al-Qur'an sebagai pedoman bagi manusia untuk berbuat dan bertingkahlaku dalam kehidupan sehari-hari. Sebagaimana tercantum dalam Al-Qur'an surat Al-Isra' ayat 26:

وَءَاتِ ذَا الْقُرْبَى حَقَّهُ وَالْمِسْكِيْنَ وَابْنَ الْسَبِيْلِ وَلاَتُبَذِّرْتَبْذِيْرًا

Artinya: "Dan berikanlah haknya kepada kerabat dekat, juga kepada orang miskin dan orang yang dalam perjalanan; dan janganlah kamu menghambur-hamburkan (hartamu) secara boros" (QS. Al-Isra':26) (Departemen Agama RI., 2006).

Dari surat Al-Isra' ayat 26 menjelaskan bahwa anjuran umat manusia untuk berbuat baik, menyambung tali silaturrahim kepada sesama manusia dan tidak menghambur-hamburkan hartanya secara boros. Dalam kitab tafsir Al-Qurtubi dijelaskan ada 3 masalah yaitu berikanlah kepada kerabat dekat apa yang menjadi haknya, memberikan sesuatu kepada orang-orang miskin dan ibnu sabil (orang yang dalam perjalanan), jangan boros atau jangan berlebihan dalam menginfakkan sesuatu yang bukan haknya. (Muhammad, 1964). Pemberian hak kepada sesama manusia dapat diartikan dengan menyambung tali persaudaraan atau silaturahim yang dilakukan dengan memberikan haknya kepada sesama manusia. Dengan menyambung tali persaudaraan atau silaturahim dapat membangun hubungan baik dengan sesama. Sebagaimana yang dianjurkan dalam Al-Quran, dalam kajian ilmu matematika keterhubungan yang berkaitan dengan kajian teori disebut teori graf.

Terdapat beberapa penelitian sebelumnya mengenai graf invers diantaranya adalah penelitian oleh Murni et al. (2020) menjelaskan mengenai spektrum *anti-adjacency* dan *Laplace* pada graf invers dari grup bilangan bulat modulo n. Selain itu Ejima, Aremu, and Audu (2020) menjelaskan mengenai energi graf invers pada grup dihedral dan grup simetri. Selain itu, penelitian oleh R.F. Umbara et al. (2023) menjelaskan mengenai Rainbow Connection Numbers dari graf invers grup berhingga.

Berdasarkan latar belakang tersebut peneliti akan melakukan penelitian mengenai indeks jumlah jarak eksentrik graf invers. Namun, jenis grup yang akan diteliti akan berbeda. Penelitian ini akan membahas mengenai indeks jumlah jarak eksentrik graf invers dari grup quaternion diperumum. Topik ini menarik untuk diteliti karena mencakup dua macam ilmu matematika yaitu aljabar dan teori graf. Pertama berproses pada struktur aljabar dalam bentuk grup. Kemudian berproses pada teori graf. Selanjutnya, menggabungkan grup dan graf. Dengan kata lain, graf terbentuk dari grup quaternion diperumum. Hasil akhir yang akan ditunjukkan dalam penelitian ini adalah formula indeks jumlah jarak eksentrik graf invers dari grup quaternion diperumum.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini berdasarkan pada latar belakang di atas adalah apa formula indeks jumlah jarak eksentrik graf invers dari grup quaternion diperumum?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian dalam penelitian ini berdasarkan pada rumusan masalah di atas adalah untuk mengetahui formula indeks jumlah jarak eksentrik graf invers dari grup quaternion diperumum.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Sebagai pembelajaran bagi peneliti untuk mengembangkan serta memahami mengenai teori graf dan aljabar, khususnya pengetahuan graf invers dari grup quaternion diperumum.
2. Diharapkan dapat digunakan sebagai bahan referensi untuk penelitian selanjutnya dan sebagai tambahan pengetahuan bagi pembaca. Secara khusus, graf invers dari grup quaternion diperumumkan.
3. Memberikan informasi tentang cara menentukan graf invers dari grup quaternion diperumum.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini difokuskan pada indeks jumlah jarak eksentrik graf invers dari grup quaternion diperumum Q_{4n} dengan $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

1.6 Definisi Istilah

Definisi istilah dari penelitian ini adalah:

1. Grup quaternion diperumum merupakan grup non-abelian dengan orde $4n$.
2. Eksentrisitas adalah jumlah maksimum dari titik ke titik yang lain.

3. Sifat asosiatif adalah proses menghitung penjumlahan dan perkalian dikelompokkan dengan cara berbeda maka hasilnya akan sama.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan pada penelitian ini agar dapat mudah dipahami dan terarah digunakan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan

Bab pendahuluan ini menjelaskan mengenai latar belakang penelitian ini, rumusan masalah, tujuan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan dari penelitian ini.

BAB II Kajian Pustaka

Bab kajian pustaka ini menjelaskan mengenai teori-teori terkait penelitian yang mungkin berguna dalam penelitian ini. Teori-teori yang melatarbelakangi penelitian ini antara lain teori graf, teori grup, graf invers, grup quaternion diperumum, serta anjuran untuk menyambung silaturrahim dalam Al-Qur’an.

BAB III Metode Penelitian

Metode penelitian ini membahas mengenai jenis penelitian, pra penelitian, serta tahapan penelitian.

BAB IV Pembahasan

Bab ini membahas mengenai penyelesaian terhadap permasalahan grup quaternion diperumum pada graf invers, serta silaturrahim dan teori graf.

BAB V Penutup

Bab penutup ini membahas mengenai kesimpulan dari hasil pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Grup

Misalkan operasi biner $*$ didefinisikan sebagai elemen himpunan dari G. yang mana G merupakan himpunan tak-kosong. Maka G adalah grup terhadap operasi biner $*$ $(G,*)$ jika empat kondisi berikut terpenuhi:

1. G tertutup terhadap operasi biner $*$. Jika $x \in G$ dan $y \in G$ atau $x, y \in G$ maka $x, y \in G$ menunjukkan bahwa perkalian dari $x * y$ ada di G atau $x * y \in G$.
2. Operasi biner $*$ bersifat assosiatif. Untuk semua $x, y, z \in G$ maka
$$x * (y * z) = (x * y) * z.$$
3. G memiliki elemen identitas e. Ada elemen e di G sedemikian sehingga
$$x * e = e * x = x$$
untuk semua $x \in G$.
4. G memiliki invers. Untuk setiap $x \in G$, terdapat $y \in G$ sedemikian sehingga
$$x * y = y * x = e.$$
(Gilbert, 2015).

Contoh 2.1

Himpunan $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ terhadap operasi penjumlahan modulo 4 adalah grup.

Tabel 2.1 Tabel Cayley pada $\mathbb{Z}_4$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Bukti:

$\mathbb{Z}_4$ memenuhi sifat-sifat grup, yaitu:

1. Tertutup

   Setiap hasil dari penjumlahan $\mathbb{Z}_4$ dengan operasi modulo 4 akan menghasilkan elemen-elemen yang juga berada di $\mathbb{Z}_4$.

2. Asosiatif

   Operasi penjumlahan pada himpunan bulat modulo n pasti sifat asosiatif.

3. Memiliki identitas

   Terdapat $0 \in \mathbb{Z}_4$ sedemikian sehingga $0 + u = u + 0 = u$. Untuk $\forall u \in \mathbb{Z}_4$. Jadi 0 merupakan elemen identitas.

4. Memiliki invers

   Invers dari 0 adalah 0 atau $0^{-1} = 0$.

   Invers dari 1 adalah 3 atau $1^{-1} = 3$ karena $1 + 3 = 0$.

   Invers dari 2 adalah 2 atau $2^{-1} = 2$ karena $2 + 2 = 0$.

   Jadi setiap elemen di $\mathbb{Z}_4$ mempunyai invers.

Berikut ini merupakan beberapa sifat dari grup:

Teorema 2.1

Unsur identitas di suatu grup G adalah tunggal (Sripatmi et al., 2022).

Bukti:

Misalkan e dan x merupakan unsur identitas di G. Akan ditunjukkan bahwa $e = x$. Perhatikan bahwa $e \cdot x = e$ karena x merupakan unsur identitas dan $e \cdot x = x$ karena x juga merupakan unsur identitas. Sehingga $e = x$. Jadi, terbukti bahwa unsur identitas di suatu grup adalah tunggal.

Teorema 2.2

Setiap elemen di suatu grup G terdapat invers yang tunggal (Gallian, 2017).

Bukti:

Misalkan $a \in G$ dan andaikan b dan c merupakan invers dari a. Akan ditunjukkan bahwa $b = c$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} b &= be \\ &= b(ac) \\ &= (ba)c \\ &= ec \\ &= c \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa setiap elemen di suatu grup G terdapat invers yang tunggal.

2.2 Grup Berhingga

Jika suatu grup G memiliki sejumlah berhingga elemen, maka G dikatakan grup berhingga. Banyaknya elemen di G disebut orde G dan dilambangkan dengan $o(g)$ atau $|G|$. Jika G memiliki elemen tidak berhingga, maka G disebut sebagai grup tak berhingga (Gilbert, 2015).

Contoh 2.2

$(Z_{12}, +)$ adalah suatu grup dengan $Z_{12} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$ dan merupakan grup hingga. Orde dari Z_{12} adalah $|Z_{12}| = 12$.

2.3 Grup Quaternion

Grup quaternion merupakan grup non-abelian dengan orde 8. Grup quaternion dinotasikan dengan Q_8 didefinisikan dengan

$$Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}.$$

Yang mana pada operasi perkalian dapat didefinisikan sebagai berikut

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \text{ untuk semua } a \in Q_8$$

$$(-1) \cdot (-1) = 1, (-1) \cdot a = a \cdot (-1) = -a, \text{ untuk semua } a \in Q_8$$

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1$$

$$i \cdot j = k, \quad j \cdot i = -k$$

$$j \cdot k = i, \quad k \cdot j = -i$$

$$k \cdot i = j, \quad i \cdot k = -j.$$

Pada tabel 2.2 dapat dilihat perkalian dari Q_8 sebagai berikut:

Tabel 2.2 Tabel Cayley pada Q_8

$\cdot$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-j$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Untuk setiap $i, j \in Q_8, i \cdot j \neq j \cdot i$. Dengan demikian Q_8 merupakan grup non-abelian dengan orde 8 (Dummit and Foote, 2004).

2.4 Grup Quaternion Diperumum

Grup quaternion diperumum Q_{4n} merupakan grup berorde $4n$ yang dibangun dari dua elemen a, b yang disimbolkan $\langle a, b\rangle$ didefinisikan $a^{2n} = e, b^2 = a^n, b \cdot a \cdot b^{-1} = a^{-1}$ dan e merupakan elemen identitas, dan $n \geq 2$.

Grup quaternion diperumum menggunakan operasi perkalian disimbolkan dengan Q_{4n}, didefinisikan sebagai

$$Q_{4n} = \left\langle a, b \middle| a^{2n} = e, b^2 = a^n, b \cdot a \cdot b^{-1} = a^{-1} \right\rangle.$$

Dengan kata lain, bentuk elemen dari grup quaternion diperumum Q_{4n}, adalah

$$Q_{4n} = \{a, a^2, \dots, a^{2n-1}, e, b, ab, \dots, a^{2n-1}b\} \text{ (Ma et al., 2013).}$$

Grup quaternion diperumum $Q_{4\cdot 2} = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$. Pada tabel 2.3 dapat dilihat perkalian dari Q_8 sebagai berikut:

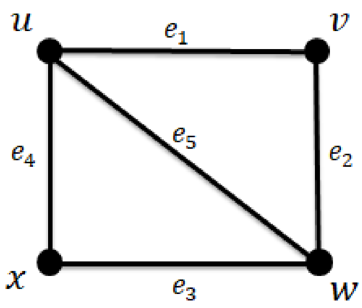
Tabel 2.3 Tabel Cayley pada Q_8

$\cdot$	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	1	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	1	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	1	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	a^2	a	1	a^3
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a^3	a^2	a	1
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	1	a^3	a^2	a
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a	1	a^3	a^2

2.5 Graf

Graf G merupakan himpunan tak-kosong berhingga V dari objek yang disebut titik (*vertex*) dan himpunan E yang mungkin kosong dari subhimpunan 2 elemen dari V disebut sisi (*edge*). Untuk menunjukkan bahwa suatu graf G memiliki himpunan titik V dan himpunan sisi E, dapat dituliskan sebagai $G = (V, E)$. Untuk menekankan bahwa V dan E adalah himpunan titik dan himpunan sisi dari graf G, dapat ditulis V sebagai $V(G)$ dan E sebagai $E(G)$. Setiap sisi $\{u, v\}$ dari G biasanya dilambangkan dengan uv atau vu. Jika $e = uv$ adalah sisi dari G, maka e dikatakan menghubungkan u dan v (Chartrand et al., 2016).

Contoh 2.3 :



Gambar 2.1 Graf G

Berdasarkan gambar 2.1, Graf G memiliki himpunan titik dan sisi berurutan $V(G) = \{u, v, w, x\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ di mana

$$e_1 = uv, e_2 = vw, e_3 = wx, e_4 = ux, e_5 = uw.$$

2.6 Lintasan (*Path*)

Misalkan G merupakan suatu graf dan lintasan yang panjangnya n dari titik awal v_0 ke titik akhir v_n pada graf G adalah barisan selang-seling titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, \dots \dots, e_n, v_n$ sehingga

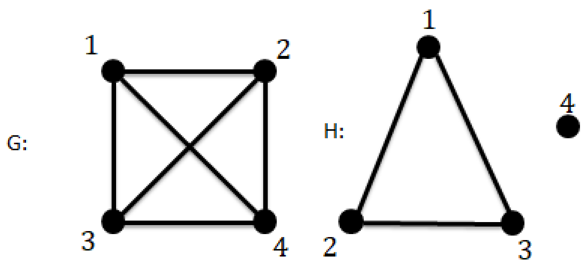
$$e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$$

adalah sisi-sisi di graf G (Munir, 2016).

2.7 Graf Terhubung

Graf G merupakan suatu graf terhubung dan titik u, v adalah titik yang berbeda di G. Jika $u, v \in V(G)$ tidak memiliki lintasan maka titik u, v di G dikatakan terputus atau tak terhubung. Sedangkan jika G memiliki lintasan u, v maka titik u, v di G dikatakan u terhubung ke v di G. Relasi terhubung dari $V(G)$ terdiri dari pasangan terurut (u, v) sehingga u terhubung ke v (West et al., 2012).

Contoh 2.4:



Gambar 2.2 Graf Terhubung dan Graf Tak Terhubung

2.8 Lingkungan

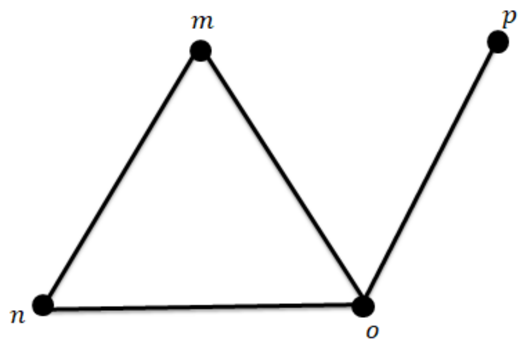
Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf dengan himpunan titik V dan himpunan titik E. Untuk setiap $v \in V$, lingkungan dari v adalah himpunan $N(v) = \{v \in V : uv \in E\}$. $N(v)$ adalah himpunan terbuka titik v di G. Untuk setiap $v \in V$, lingkungan dari v adalah himpunan $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. $N[v]$ adalah himpunan tertutup titik v di G (Nayaka and Purushothama, 2017).

2.9 Derajat Titik

Derajat suatu titik v di graf G adalah banyaknya titik di G yang terhubung langsung dengan v. Jadi, derajat titik v merupakan banyaknya titik di lingkungan $N(v)$. Dengan kata lain, derajat v merupakan banyaknya sisi yang bersisian dengan v. Derajat dari titik v dilambangkan dengan $deg_G(v)$ atau lebih sederhana, dengan $deg\, v$. Oleh karena itu, $deg\, v = |N(v)|$ (Chartrand et al., 2016).

Contoh 2.5:

Diketahui graf G sebagai berikut:



Gambar 2.3 Derajat Titik dari Graf G

Berdasarkan gambar 2.3 diperoleh derajat titik dari graf G yaitu $deg\,(m) = 2$, $deg\,(n) = 2$, $deg\,(o) = 2$, $deg\,(p) = 1$.

2.10 Jumlah Jarak dalam Graf

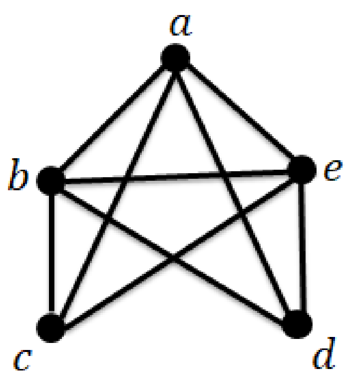
Jika u dan v adalah titik yang berbeda di graf terhubung G, maka terdapat lintasan $u - v$ di G. Terdapat beberapa lintasan $u - v$ di G dengan panjang yang berbeda-beda. Panjang lintasan terpendek $u - v$ di G disebut dengan jarak dari titik u ke titik v dinotasikan dengan $d_G(u,v)$. Secara sederhana dapat ditulis dengan $d(u,v)$ (Chartrand et al., 2016). Jumlah jarak keseluruhan dari suatu titik $v \in G$ disimbolkan dengan $D(v)$ dan didefinisikan dengan

$$D(v) = \sum_{v \in V(G)} d(u,v)$$

(Hua et al., 2018).

Contoh 2.6:

Diketahui graf H sebagai berikut:



Gambar 2.4 Graf *H*

Berdasarkan graf pada gambar 2.4, Jumlah jarak pada graf H sebagai berikut:

$D(a) = d(a,b) + d(a,c) + d(a,d) + d(a,e)$

$= 1 + 1 + 1 + 1$

$= 4$

$D(b) = d(b,a) + d(b,c) + d(b,d) + d(b,e)$

$= 1 + 1 + 1 + 1$

$= 4$

$D(c) = d(c,a) + d(c,b) + d(c,d) + d(c,e)$

$= 1 + 1 + 1 + 2$

$= 5$

$D(d) = d(d, a) + d(d, b) + d(d, c) + d(d, e)$

$= 1 + 1 + 2 + 1$

$= 5$

$D(e) = d(e, a) + d(e, b) + d(e, c) + d(e, d)$

$= 1 + 1 + +1$

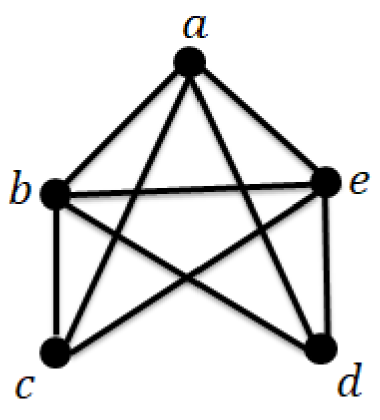
$= 4$

2.11 Eksentrisitas Titik

Eksentrisitas dari titik v di graf terhubung G. $e(v)$ adalah jarak terbesar antara titik v dengan titik yang lain di graf G. Eksentrisitas titik v didefinisikan dengan $e(v) = \max\{d(u, v): \forall u \in V(G)\}$ (Alfuraidan and Zakariya, 2017).

Contoh 2.7:

Diketahui graf H sebagai berikut:



Gambar 2.5 Graf H

Berdasarkan gambar 2.5**,** diperoleh eksentrisitas titik pada graf H sebagai berikut:

$e(a) = \max\{d(a,b), d(a,c), d(a,d), d(a,e)\}$

$= \max\{1,1,1,1\} = 1$

$e(b) = \max\{d(b,a), d(b,c), d(b,d), d(b,e)\}$

$= \max\{1,1,1,1\} = 1$

$e(c) = \max\{d(c,a), d(c,b), d(c,d), d(c,e)\}$

$= \max\{1,1,1,2\} = 2$

$e(d) = \max\{d(d,a), d(d,b), d(d,c), d(d,e)\}$

$= \max\{1,1,2,1\} = 2$

$e(e) = \max\{d(e,a), d(e,b), d(e,c), d(e,d)\}$

$= \max\{1,1,1,1\} = 1$

2.12 Jumlah Jarak Eksentrik

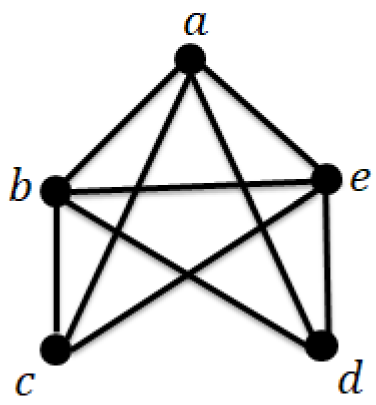
Jumlah jarak eksentrik merupakan jumlah perkalian antara eksentrisitas dengan jumlah jarak keseluruhan titik v. Jumlah jarak eksentrik dari suatu graf G didefinisikan sebagai berikut:

$$\xi^d(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v) D(v)$$

dengan $e(v)$ merupakan eksentrisitas titik v dan $D(v)$ merupakan jumlah jarak titik v ke semua titik di graf G (Abdussakir et al., 2019).

Contoh 2.8:

Diketahui graf H sebagai berikut:



Gambar 2.6 Graf H

Berdasarkan gambar 2.6, kita dapat menentukan jumlah jarak eksentrik dari graf H sebagai berikut:

$$\xi^d(H) = \sum_{v \in V(H)} e(v)D(v)$$

$$= \big(e(a)D(a)\big) + \big(e(b)D(b)\big) + \big(e(c)D(c)\big) + \big(e(d)D(d)\big) + \big(e(e)D(e)\big)$$

$$= (1 \times 4) + (1 \times 4) + (2 \times 5) + (2 \times 5) + (1 \times 4)$$

$$= 32$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa jumlah jarak eksentrik pada graf H adalah 32.

2.13 Indeks Jumlah Jarak Eksentrik

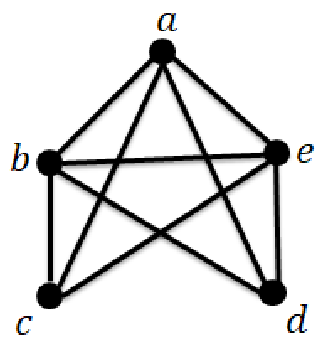
Indeks jumlah jarak eksentrik dari graf G adalah jumlah perkalian antara eksentrisitas titik v dengan jumlah jarak keseluruhan titik v dibagi dengan derajat titik v. Indeks jumlah jarak eksentrik dari suatu graf G didefinisikan sebagai berikut:

$$\xi^{sv}(G) = \sum_{v \in V(H)} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)}$$

dengan $e(v)$ merupakan eksentrisitas titik v, $D(v)$ merupakan jumlah jarak titik v ke semua titik di graf G dan $\deg(v)$ merupakan derajat titik (Abdussakir, 2019).

Contoh 2.9:

Diketahui graf H sebagai berikut:



Gambar 2.7 Graf H

Berdasarkan gambar 2.7, kita dapat menentukan indeks jumlah jarak eksentrik sebagai berikut:

$$\xi^{sv}(H) = \sum_{v \in V(H)} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)}$$

$$= \left(\frac{e(a)d(a)}{\deg(a)}\right) + \left(\frac{e(b)d(b)}{\deg(b)}\right) + \left(\frac{e(c)d(c)}{\deg(c)}\right) + \left(\frac{e(d)d(d)}{\deg(d)}\right) + \left(\frac{e(e)d(e)}{\deg(e)}\right)$$

$$= \left(\frac{1\times4}{4}\right) + \left(\frac{1\times4}{4}\right) + \left(\frac{2\times5}{3}\right) + \left(\frac{2\times5}{3}\right) + \left(\frac{1\times4}{4}\right)$$

$$= \frac{12}{4} + \frac{20}{3} = \frac{29}{3}.$$

2.14 Graf Invers

Misalkan Γ adalah grup berhingga dan $S = \{u \in \Gamma | u \neq u^{-1}\}$. Graf invers yang terkait dengan Γ dinotasikan dengan $G_S(\Gamma)$ dapat didefinisikan sebagai graf yang himpunan titiknya adalah semua anggota Γ sedemikian sehingga dua titik yang berbeda u dan v terhubung langsung jika dan hanya jika $u \cdot v \in S$ atau $v \cdot u \in S$ (Alfuraidan and Zakariya, 2017).

Contoh 2.10:

Diketahui grup quaternion Q_8 sebagai berikut

Tabel 2.4 Tabel Cayleydari Q_8

$\cdot$	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	1	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	1	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	1	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	a^2	a	1	a^3
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a^3	a^2	a	1
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	1	a^3	a^2	a
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a	1	a^3	a^2

Berdasarkan tabel 2.4, dapat diketahui invers dari setiap elemen dari grup quaternion, adalah sebagai berikut:

$1^{-1} = 1$ karena $1 \cdot 1 = 1$

$a^{-1} = a^3$ karena $a \cdot a^3 = a^3 \cdot a = 1$

$(a^2)^{-1} = a^2$ karena $a^2 \cdot a^2 = 1$

$(a^3)^{-1} = a$ karena $a^3 \cdot a = a \cdot a^3 = 1$

$b^{-1} = a^2b$ karena $b \cdot a^2b = a^2b \cdot b = 1$

$ab^{-1} = a^3b$ karena $ab \cdot a^3b = a^3b \cdot ab = 1$

$(a^2b)^{-1} = b$ karena $a^2b \cdot b = b \cdot a^2b = 1$

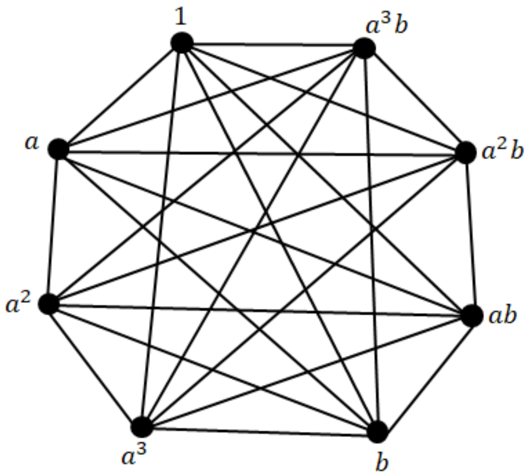
$(a^3b)^{-1} = ab$ karena $a^3b \cdot ab = ab \cdot a^3b = 1$

Berdasarkan uraian tersebut, diketahui bahwa 1 dan a^2 memiliki invers yang sama dengan dirinya sendiri. Jadi dapat dibangun himpunan bagian S dari Q_8 yang memuat elemen-elemen dari Q_8 yang inversnya bukan dirinya sendiri, sehingga kita mendapatkan $S = \{a, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$. Graf invers yang dibentuk dari Q_8 dan $S \subseteq Q_8$ dinotasikan dengan $G_S(Q_8)$. Himpunan titik pada graf $G_S(Q_8)$ adalah $V(G_S(Q_8)) = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$.

Dua titik berbeda $u, v \in V(G_S(Q_8))$ terhubung langsung jika hanya jika $u \cdot v \in S$ atau $v \cdot u \in S$. Sehingga berdasarkan **Tabel 2.4** diperoleh

$$\begin{aligned} E(G_S(Q_8)) = \{&(1,a),(1,a^3),(1,b),(1,ab),(1,a^2b),(1,a^3b),(a,a^2),(a,b),\\ &(a,ab),(a,a^2b),(a,a^3b),(a^2,a^3),(a^2,b),(a^2,ab),(a^2,a^2b),\\ &(a^2,a^3b),(a^3,b),(a^3,ab),(a^3,a^2b),(a^3,a^3b),(b,ab),(b,a^3b),\\ &(ab,a^2b),(a^2b,a^3b)\}. \end{aligned}$$

Sehingga dapat dibuat graf invers dari grup quaternion diperumum $G_S(Q_8)$ sebagai berikut:



Gambar 2.8 $G_S(Q_8)$

2.15 Silaturahim dalam Islam

Perilaku sosial merupakan salah satu unsur dalam kehidupan bersosial. Manusia dalam segi bathiniyah diciptakan terdiri dari naluri yang berbeda seperti naluri baik dan jahat. Naluri baik manusia sebagai makhluk sosial yang disebut dengan fitrah dan naluri jahat jika tidak dibimbing dengan fitrah dan agama maka akan menjadi naluri yang bersifat negatif. Dalam Al-Qur'an disebutkan mengenai naluri manusia sebagai makhluk sosial dan tujuan dari pencipta naluri tersebut. Sebagaimana tercantum dalam Al-Qur'an surat Al-Isra' ayat 26:

وَءَاتِ ذَا الْقُرْبَى حَقَّهُ وَالْمِسْكِيْنَ وَابْنَ الْسَبِيْلِ وَلاَتُبَذِّرْتَبْذِيْرًا

Artinya: *"Dan berikanlah haknya kepada kerabat dekat, juga kepada orang miskin dan orang yang dalam perjalanan; dan janganlah kamu menghambur-hamburkan (hartamu) secara boros" (QS. Al-Isra':26) (Departemen Agama RI., 2006).*

Dari surat Al-Isra' ayat 26 menjelaskan bahwa anjuran umat manusia untuk berbuat baik, menyambung tali silaturrahim kepada sesama manusia dan tidak menghambur-hamburkan hartanya secara boros. Dalam kitab tafsir Al-Qurtubi dijelaskan ada 3 masalah yaitu berikanlah kepada kerabat dekat apa yang menjadi haknya, seperti merawat, memperhatikan, memberi nafkah atau hak-hak kedua orang tua, maka bisa menyambung tali silaturrahim, memberikan sesuatu kepada orang-orang miskin dan ibnu sabil (orang yang dalam perjalanan). Ibnu husain berkata: “pada zaman dahulu Nabi Muhammad Saw. memberikan infaq kepada kerabatnya. Yang dimaksud kerabat dekat ialah keturunannya Nabi Muhammad Saw. Jadi, diberikan hak-haknya melalui baitul mal. Kemudian Jika tidak ada baitul mal maka melalui harta rampasan perang (ghonimah), jangan boros atau jangan berlebihan dalam menginfakkan sesuatu yang bukan haknya. Walaupun secara dzahirnya, menginfakkan harta kita itu baik namun jika kita berlebihan dalam berinfak maka tidak baik. Seperti kita menginfakkan semua harta kita ke baitul mal itu dianggap berlebihan dan bisa dikatakan boros karena juga kita memiliki kebutuhan sendiri. Imam Syafi’i berkata “boros dalam infak itu tidak diperbolehkan walaupun infak adalah amal yang baik” dan disetujui oleh para ulama. Dan pendapat dari golongan malikiyah boros adalah mengambil harta yang menjadi haknya kemudian menyerahkannya atau meletakkannya kepada yang bukan haknya dengan kata lain mendapatkan kekayaannya itu sesuai haknya, tapi menghabiskan harta tersebut bukan pada tempatnya dan disebut dengan isrof (boros) (Muhammad, 1964). Hal tersebut haram, didasari dengan ayat

إِنَّ الْمُبَذِّرِيْنَ كَا نُوْا إِخْوَانَ الشَّيَاطِيْنِ

Artinya: “Sesungguhnya orang yang boros itu adalah temannya setan” (QS. Al-Isra’:27) (Departemen Agama RI., 2006).

Dalam tafsir jalalain menjelaskan bahwa memberikan hak-hak kepada kerabat dari bermuamalah secara baik yaitu memperlakukan, memuliakan dengan baik dan silaturrahim atau menyambung tali silaturrahim kepada kerabat, orang miskin dan orang yang dalam perjalanan, dan jangan berbuat mubadzir atau menghambur-hamburkan harta secara boros yaitu berinfak bukan dalam ketaatan kepada Allah atau sesuatu yang tidak ada manfaatnya seperti menggunakan harta untuk maksiat, riya' (berharap mendapatkan pujian) dan lain-lain (Al-Mahalli and Al-Suyuthi, 2007).

Dalam tafsir Al-Misbah menjelaskan bahwa memberikan hak berupa bantuan, kebajikan dan silarurrahim kepada kerabat dekat dari pihak ibu maupun bapak walaupun kerabat jauh. Dengan demikian juga kepada orang miskin walau bukan kerabat dekat dan orang yang dalam perjalanan dalam bentuk bantuan, zakat maupun sedekah. Dan janganlah menghamburkan harta secara boros yaitu menghabiskan harta bukan pada tempatnya dan tidak mendatangkan maslahat atau bahaya. Pada kata (آتُوْا) *yang artinya pemberian sempurna*. Pemberian ini merupakan pemberian bukan hanya terbatas pada hal-hal materi berupa uang, makanan, buku, dan lain-lain dan pemberian dapat berupa immateri seperti ilmu, nasihat, dan lain-lain. Mayoritas para ulama berpendapat bahwa kata (آتُوْا) bermakna berikanlah yang merupakan kata perintah (fi'il amr) yang artinya anjuran bukan perintah wajib. Sedangkan Abu Hanifah berpendapat bahwa kata (آتُوْا) bermakna berikanlah yang merupakan perintah wajib yang mampu terhadap kerabat dekat. Dan pada kata (تَبْذِيْرَ) *yang artinya pemborosan*. Para ulama' memahami bahwa pemborosan berarti menghabiskan hal-hal yang bukan haknya. Oleh karena itu, seseorang bukanlah seorang pemboros jika membelanjakan atau menginfakkan seluruh hartanya untuk kebaikan. Sayyidina Abu Bakar ra. menyerahkan semua harta miliknya kepada Nabi Muhammad Saw. dan Sayyidina Usman ra. Membelanjakan setengah harta miliknya untuk berjihad dijalan Allah. Nafkah mereka diterima oleh nabi Muhammad Saw. Dan beliau tidak memandang bahwa mereka adalah para pemboros. Sedangkan membasuh wajah lebih dari tiga kali ketika berwudhu maka dikatakan sebagai pemborosan. Padahal berwudhu dilakukan di sungai yang mengalir. Dengan demikian pemborosan lebih banyak bersangkutan dengan tempat bukan dengan kuantitas (Shihab, 2002). Pemberian hak kepada sesama manusia dapat diartikan dengan menyambung tali persaudaraan atau silaturahim yang dilakukan dengan memberikan haknya kepada sesama manusia. Dengan menyambung tali persaudaraan atau silaturahim dapat membangun hubungan baik dengan sesama.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode penelitian kepustakaan (*library research*). Penelitian kepustakaan merupakan penelitian yang dilakukan dengan cara mengumpulkan dan melakukan kajian terhadap buku-buku dan jurnal-jurnal tentang teori graf dan struktur aljabar. Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif. Jenis penelitian ini di mana peneliti menghasilkan data yang berupa kata-kata tertulis.

3.2 Pra Penelitian

Pra penelitian ini diawali dengan mencari sumber-sumber yang berkaitan dengan penelitian ini dan mengkaji beberapa referensi yang berhubungan dengan indeks jumlah jarak eksentrik, graf invers, dan grup quaternion diperumum. Kemudian memahami konsep materi tentang graf invers dan grup quaternion diperumum. Selanjutnya mulai menentukan elemen pada setiap graf invers dari grup quaternion diperumum Q_{4n} dengan $n \in \{2,3,4,5\}$ untuk membantu memunculkan dugaan-dugaan yang berkaitan dengan graf invers dari grup quaternion diperumum Q_{4n} sampai mengetahui formula indeks jumlah jarak eksentrik graf invers dari grup quaternion diperumum.

3.3 Tahapan Penelitian

Adapun tahapan penelitian ini adalah:

1. Menentukan indeks jumlah jarak eksentrik dari grup quaternion diperumum Q_{4n} dengan $n = 2,3,4,5$ untuk menghasilkan dugaan.
2. Membuat tabel Cayley dari grup quaternion diperumum Q_{4n} dengan $n = 2,3,4,5$ untuk menghasilkan dugaan.
3. Mencari invers dari setiap anggota pada grup quaternion diperumum Q_{4n}.
4. Menentukan anggota dari graf invers pada grup quaternion diperumum Q_{4n}.
5. Mencari derajat titik, jumlah jarak dan eksentrisitas titik pada graf invers dari grup quaternion diperumum Q_{4n}.
6. Mencari jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah eksentrik dari grup quaternion diperumum Q_{4n}.
7. Merumuskan formula indeks jumlah jarak eksentrik dari grup quaternion diperumum Q_{4n}.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini membahas cara menentukan formula pada graf invers dari grup quaternion diperumum. Dalam menentukan formula, pada bagian pertama akan menentukan invers dari setiap elemen grup quaternion diperumum Q_{4n} terlebih dahulu agar dapat menggambarkan graf invers dari grup tersebut. Setelah menggambarkan graf invers dari grup quaternion diperumum, maka dapat menentukan formula graf invers dari grup quaternion diperumum Q_{4n} dengan $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

4.1 Indeks Jumlah Jarak Eksentrik Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum $\mathbf{Q_{4n}}$ untuk $\mathbf{n} \in \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$

4.1.1 Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum $\mathbf{Q_{4.2}}$

Grup quaternion diperumum Q_8 adalah $Q_8 = \left\langle a, b \middle| a^4 = e, b^2 = a^2, bab^{-1} = a^{-1} \right\rangle$. Elemen-elemen dari grup quaternion diperumum Q_8 adalah $\{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$. Berikut merupakan tabel Cayley dari Q_8:

Tabel 4.1 Tabel Cayley dari Q_8

$\cdot$	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	1	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	1	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	1	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	a^2	a	1	a^3
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a^3	a^2	a	1
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	1	a^3	a^2	a
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a	1	a^3	a^2

Berdasarkan tabel 4.1, dapat diketahui invers dari setiap elemen dari grup quaternion diperumum, adalah sebagai berikut:

$1^{-1} = 1$ karena $1 \cdot 1 = 1$

$a^{-1} = a^3$ karena $a \cdot a^3 = a^3 \cdot a = 1$

$(a^2)^{-1} = a^2$ karena $a^2 \cdot a^2 = 1$

$(a^3)^{-1} = a$ karena $a^3 \cdot a = a \cdot a^3 = 1$

$b^{-1} = a^2b$ karena $b \cdot a^2b = a^2b \cdot b = 1$

$ab^{-1} = a^3b$ karena $ab \cdot a^3b = a^3b \cdot ab = 1$

$(a^2b)^{-1} = b$ karena $a^2b \cdot b = b \cdot a^2b = 1$

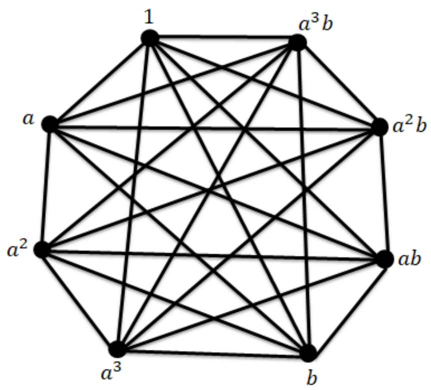
$(a^3b)^{-1} = ab$ karena $a^3b \cdot ab = ab \cdot a^3b = 1$

Berdasarkan uraian tersebut, diketahui bahwa 1 dan a^2 memiliki invers yang sama dengan dirinya sendiri. Jadi dapat dibangun himpunan bagian S dari Q_8 yang memuat elemen-elemen dari Q_8 yang inversnya bukan dirinya sendiri, sehingga kita mendapatkan $S = \{a, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$. Graf invers yang dibentuk dari Q_8 dan $S \subseteq Q_8$ dinotasikan dengan $G_S(Q_8)$. Himpunan titik pada graf $G_S(Q_8)$ adalah $V\big(G_S(Q_8)\big) = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$.

Dua titik berbeda $u, v \in V(G_S(Q_8))$ terhubung langsung jika hanya jika $u \cdot v \in S$ atau $v \cdot u \in S$. Sehingga berdasarkan tabel 4.1 diperoleh

$E(G_S(Q_8)) = \{(1, a), (1, a^3), (1, b), (1, ab), (1, a^2b), (1, a^3b), (a, a^2), (a, b),$
$(a, ab), (a, a^2b), (a, a^3b), (a^2, a^3), (a^2, b), (a^2, ab), (a^2, a^2b),$
$(a^2, a^3b), (a^3, b), (a^3, ab), (a^3, a^2b), (a^3, a^3b), (b, ab), (b, a^3b),$
$(ab, a^2b), (a^2b, a^3b)\}$

Sehingga dapat dibuat graf invers dari grup quaternion diperumum $G_S(Q_8)$ sebagai berikut:



Gambar 4.1 $G_S(Q_8)$

Berdasarkan gambar 4.1, dapat dicari jumlah jarak masing-masing titik pada $G_S(Q_8)$. Jumlah jarak titik $D(x)$ pada $G_S(Q_8)$adalah jumlah jarak antara titik x dengan semua titik di $G_S(Q_8)$. Nilai jumlah jarak masing-masing titik pada $G_S(Q_8)$ diperoleh sebagai berikut:

Berdasarkan gambar 4.1, kita dapat menemukan jumlah jarak setiap titik pada $G_S(Q_8)$. Jumlah jarak titik $D(x)$ di $G_S(Q_8)$ adalah jumlah jarak antara titik x dengan semua titik di $G_S(Q_8)$. Nilai jumlah jarak untuk setiap titik di $G_S(Q_8)$ adalah:

$$D(1) = d(1,a) + d(1,a^2) + d(1,a^3) + d(1,b) + d(1,ab) + d(1,a^2b) + d(1,a^3b)$$
$$= 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$= 8$$

$$D(a) = d(a,1) + d(a,a^2) + d(a,a^3) + d(a,b) + d(a,ab) + d(a,a^2b) + d(a,a^3b)$$
$$= 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$= 8$$

$$D(a^2) = d(a^2,1) + d(a^2,a) + d(a^2,a^3) + d(a^2,b) + d(a^2,ab) + d(a^2,a^2b) + d(a^2,a^3b)$$
$$= 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$= 8$$

$$D(a^3) = d(a^3,1) + d(a^3,a) + d(a^3,a^2) + d(a^3,b) + d(a^3,ab) + d(a^3,a^2b) + d(a^3,a^3b)$$
$$= 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$= 8$$

$$D(b) = d(b,1) + d(b,a) + d(b,a^2) + d(b,a^3) + d(b,ab) + d(b,a^2b) + d(b,a^3b)$$
$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1$$
$$= 8$$

$$D(ab) = d(ab,1) + d(ab,a) + d(ab,a^2) + d(ab,a^3) + d(ab,b) + d(ab,a^2b) + d(ab,a^3b)$$
$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2$$
$$= 8$$

$$D(a^2b) = d(a^2b,1) + d(a^2b,a) + d(a^2b,a^2) + d(a^2b,a^3) + d(a^2b,b)$$
$$+d(a^2b,ab) + d(a^2b,a^3b)$$
$$= 1+1+1+1+2+1+1$$
$$= 8$$

$$D(a^3b) = d(a^3b,1) + d(a^3b,a^2) + d(a^3b,a) + d(a^3b,a^3) + d(a^3b,b)$$
$$+d(a^3b,ab) + d(a^3b,a^2b)$$
$$= 1+1+1+1+1+2+1$$
$$= 8$$

Berdasarkan gambar 4.1, diperoleh nilai eksentrisitas titik $e(x)$ pada $G_S(Q_8)$ sebagai berikut:

$$e(1) = \max\{d(1,a), d(1,a^2), d(1,a^3), d(1,b), d(1,ab), d(1,a^2b), d(1,a^3b)\}$$
$$= \max\{1,2,1,1,1,1,1\} = 2$$

$$e(a) = \max\{d(a,1), d(a,a^2), d(a,a^3), d(a,b), d(a,ab), d(a,a^2b), d(a,a^3b)\}$$
$$= \max\{1,1,2,1,1,1,1\} = 2$$

$$e(a^3) = \max\{d(a^3,1), d(a^3,a), d(a^3,a^2), d(a^3,b), d(a^3,ab), d(a^3,a^2b),$$
$$d(a^3,a^3b)\}$$
$$= \max\{1,1,2,1,1,1,1\} = 2$$

$$e(b) = \max\{d(b,1), d(b,a), d(b,a^2), d(b,a^3), d(b,ab), d(b,a^2b), d(b,a^3b)\}$$
$$= \max\{1,1,1,1,1,2,1\} = 2$$

$$e(ab) = \max\{d(ab,1), d(ab,a), d(ab,a^2), d(ab,a^3), d(ab,b), d(ab,a^2b),$$
$$d(ab,a^3b)\}$$
$$= \max\{1,1,1,1,1,1,2\} = 2$$

$$e(a^2b) = \max\{d(a^2b,1), d(a^2b,a), d(a^2b,a^2), d(a^2b,a^3), d(a^2b,b), d(a^2b,ab),$$
$$d(a^2b,a^3b)\}$$

$= \max\{1,1,1,1,1,2,1\} = 2$

$e(a^3b) = \max\{d(a^3b,1), d(a^3b,a), d(a^3b,a^2), d(a^3b,a^3), d(a^3b,b), d(a^3b,ab)$

$d(a^3b,a^2b)\}$

$= \max\{1,1,1,1,1,2,1\} = 2$

Berdasarkan uraian eksentrisitas tersebut disimpulkan bahwa eksentrisitas setiap titik pada graf invers dari grup quaternion diperumum $G_S(Q_8)$ adalah $e(x) = 2, \forall x \in V(G_S(Q_8))$.

Selanjutnya dengan diperoleh nilai jumlah jarak dan eksentrisitas setiap titik pada $G_S(Q_8)$, maka dapat dihitung jumlah jarak eksentrik dari $G_S(Q_8)$ sebagai berikut:

$$\xi^d\left(G_S(Q_8)\right) = \sum_{v \in V\left(G_S(Q_8)\right)} e(v)D(v)$$

$$= \left(e(1)D(1)\right) + \left(e(a)D(a)\right) + \left(e(a^2)D(a^2)\right) + \left(e(a^3)D(a^3)\right)$$

$$+\left(e(b)D(b)\right) + \left(e(ab)D(ab)\right) + \left(e(a^2b)d(a^2b)\right) +$$

$$\left(e(a^3b)d(a^3b)\right)$$

$$= (2 \times 8) + (2 \times 8) + (2 \times 8) + (2 \times 8) + (2 \times 8) + (2 \times 8)$$

$$+(2 \times 8) + (2 \times 8)$$

$$= 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16$$

$$= 128.$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa nilai jumlah jarak eksentrik pada graf invers dari grup quaternioun diperumum $G_S(Q_8)$ adalah 128. Indeks jumlah jarak eksentrik sebagai berikut:

$$\gamma^{sv}\left(G_S(Q_8)\right) = \sum_{v \in V(G_S(Q_8))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)}$$

$$= \left(\frac{e(1)d(1)}{\deg(1)}\right) + \left(\frac{e(a)d(a)}{\deg(a)}\right) + \left(\frac{e(a^2)d(a^2)}{\deg(a^2)}\right) + \left(\frac{e(a^3)d(a^3)}{\deg(a^3)}\right)$$

$$+ \left(\frac{e(b)d(b)}{\deg(b)}\right) + \left(\frac{e(ab)d(ab)}{\deg(ab)}\right) + \left(\frac{e(a^2b)d(a^2b)}{\deg(a^2b)}\right)$$

$$+ \left(\frac{e(a^3b)d(a^3b)}{\deg(a^3b)}\right)$$

$$= \left(\frac{2\times 8}{6}\right) + \left(\frac{2\times 8}{6}\right) + \left(\frac{2\times 8}{6}\right) + \left(\frac{2\times 8}{6}\right) + \left(\frac{2\times 8}{6}\right) + \left(\frac{2\times 8}{6}\right) + \left(\frac{2\times 8}{6}\right)$$

$$+ \left(\frac{2\times 8}{6}\right)$$

$$= \left(8 \times \frac{16}{6}\right)$$

$$= \frac{64}{3}.$$

4.1.2 Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum $\boldsymbol{Q_{4\cdot 3}}$

Grup quaternion Q_{12} adalah $Q_{12} = \left\langle a, b \middle| a^6 = e, b^2 = a^3, bab^{-1} = a^{-1} \right\rangle$. Elemen-elemen dari grup quaternion diperumum Q_{12} adalah $\{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b\}$. Berikut merupakan tabel Cayley dari Q_{12}:

Tabel 4.2 Tabel Cayley dari Q_{12}

$\cdot$	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b
1	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	b	ab	a^2b	$a^3\mathrm{b}$	a^4b	a^5b
a	a	a^2	a^3	a^4	a^5	1	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	b
a^2	a^2	a^3	a^4	a^5	1	a	a^2b	$a^3\mathrm{b}$	a^4b	a^5b	b	ab
a^3	a^3	a^4	a^5	1	a	a^2	a^3b	a^4b	a^5b	b	ab	a^2b
a^4	a^4	a^5	1	a	a^2	a^3	a^4b	a^5b	b	ab	a^2b	a^3b
a^5	a^5	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b
b	b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	a^3	a^2	a	1	a^5	a^4
ab	ab	b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	a^4	a^3	a^2	a	1	a^5
a^2b	a^2b	ab	b	a^5b	a^4b	a^3b	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a^5b	a^4b	1	a^5	a^4	a^3	a^2	a
a^4b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^5b	a	1	a^5	a^4	a^3	a^2
a^5b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^2	a	1	a^5	a^4	a^3

Berdasarkan tabel 4.2, dapat diketahui invers dari setiap elemen dari grup quaternion diperumum, adalah sebagai berikut:

$1^{-1} = 1$ karena $1 \cdot 1 = 1$

$a^{-1} = a^5$ karena $a \cdot a^5 = a^5 \cdot a = 1$

$(a^2)^{-1} = a^4$ karena $a^2 \cdot a^4 = a^4 \cdot a^2 = 1$

$(a^3)^{-1} = a^3$karena $a^3 \cdot a^3 = 1$

$(a^4)^{-1} = a^2$ karena $a^4 \cdot a^2 = a^2 \cdot a^4 = 1$

$(a^5)^{-1} = a$ karena $a^5 \cdot a = a \cdot a^5 = 1$

$b^{-1} = a^3b$ karena $b \cdot a^3b = a^3b \cdot b = 1$

$ab^{-1} = a^4b$ karena $ab \cdot a^4b = a^4b \cdot ab = 1$

$(a^2b)^{-1} = a^5b$ karena $a^2b \cdot a^5b = a^5b \cdot a^2b = 1$

$(a^3b)^{-1} = b$ karena $a^3b \cdot b = b \cdot a^3b = 1$

$(a^4b)^{-1} = b$ karena $a^4b \cdot ab = ab \cdot a^4b = 1$

$(a^5b)^{-1} = a^2b$ karena $a^5b \cdot a^2b = a^2b \cdot a^5b = 1$

Berdasarkan uraian tersebut, diketahui bahwa 1 dan a^3 invers terhadap dirinya sendiri. Jadi dari Q_{12} dapat dibangun himpunan bagian S yang invernya bukan dirinya sendiri, sehingga diperoleh

$$S = \{a, a^2, a^4, a^5, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b\}.$$

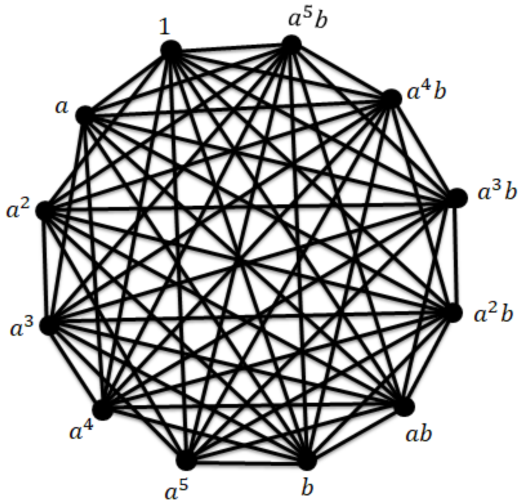
Graf *i*nvers yang dibentuk dari Q_{12} dan $S \subseteq Q_{12}$ dinotasikan dengan $G_S(Q_{12})$. Himpunan titik pada graf $G_S(Q_{12})$ adalah

$$V\big(G_S(Q_{12})\big) = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b\}.$$

Dua titik berbeda $u, v \in V\big(G_S(Q_{12})\big)$ terhubung langsung jika hanya jika $u \cdot v \in S$ atau $v \cdot u \in S$. Sehingga berdasarkan tabel 4.2 diperoleh

$$\begin{aligned} E\big(G_S(Q_{12})\big) = \{&(1,a),(1,a^2),(1,a^4),(1,a^5),(1,b),(1,ab),(1,a^2b),(1,a^3b),\\ &(1,a^4b),(1,a^5b),(a,a^3),(a,a^4),(a,b),(a,ab),(a,a^2b),(a,a^3b),\\ &(a,a^4b),(a,a^5b),(a^2,a^3),(a^2,a^5),(a^2,b),(a^2,ab),(a^2,a^2b),\\ &(a^2,a^3b),(a^2,a^4b),(a^2,a^5b),(a^3,a^4),(a^3,a^5),(a^3,b),(a^3,ab),\\ &(a^3,a^2b),(a^3,a^3b),(a^3,a^4b),(a^3,a^5b),(a^4,b),(a^4,ab),(a^4,a^2b),\\ &(a^4,a^3b),(a^4,a^4b),(a^4,a^5b),(a^5,b),(a^5,ab),(a^5,a^2b),(a^5,a^3b),\\ &(a^5,a^4b),(a^5,a^5b),(b,ab),(b,a^2b),(b,a^4b),(b,a^5b),(ab,a^2b),\\ &(ab,a^3b),(ab,a^5b),(a^2b,a^3b),(a^2b,a^4b),(a^3b,a^4b),(a^3b,a^5b),\\ &(a^4b,a^5b)\}\end{aligned}$$

Sehingga dapat dibuat graf invers dari grup quaternion diperumum $G_S(Q_{12})$ sebagai berikut:



Gambar 4.2 $G_S(Q_{12})$

Berdasarkan gambar 4.2, kita dapat menemukan jumlah jarak setiap titik pada $G_S(Q_{12})$. Jumlah jarak titik $D(x)$ di $G_S(Q_{12})$ adalah jumlah jarak antara titik x dengan semua titik di di $G_S(Q_{12})$. Nilai jumlah jarak untuk setiap titik pada di $G_S(Q_{12})$ adalah:

$$D(1) = d(1,a) + d(1,a^2) + d(1,a^3) + d(1,a^4) + d(1,a^5) + d(1,b)$$
$$+d(1,ab) + d(1,a^2b) + d(1,a^3b) + d(1,a^4b) + d(1,a^5b)$$
$$= 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$= 12$$

$$D(a) = d(a,1) + d(a,a^2) + d(a,a^3) + d(a,a^4) + d(a,a^5) + d(a,b)$$
$$+d(a,ab) + d(a,a^2b) + d(a,a^3b) + d(a,a^4b) + d(a,a^5b)$$
$$= 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$= 13$$

$$D(a^2) = d(a^2,1) + d(a^2,a) + d(a^2,a^3) + d(a^2,a^4) + d(a^2,a^5) + d(a^2,b)$$
$$+d(a^2,ab) + d(a^2,a^2b) + d(a^2,a^3b) + d(a^2,a^4b) + d(a^2,a^5b)$$
$$= 1+2+1+2+1+1+1+1+1+1+1$$
$$= 13$$

$$D(a^3) = d(a^3,1) + d(a^3,a) + d(a^3,a^2) + d(a^3,a^4) + d(a^3,a^5) + d(a^3,b)$$
$$+d(a^3,ab) + d(a^3,a^2b) + d(a^3,a^3b) + d(a^3,a^4b) + d(a^3,a^5b)$$
$$= 1+1+2+1+1+1+1+1+1+1+1$$
$$= 12$$

$$D(a^4) = d(a^4,1) + d(a^4,a) + d(a^4,a^2) + d(a^4,a^3) + d(a^4,a^5) + d(a^4,b)$$
$$+d(a^4,ab) + d(a^4,a^2b) + d(a^4,a^3b) + d(a^4,a^4b) + d(a^4,a^5b)$$
$$= 1+1+2+1+2+1+1+1+1+1+1$$
$$= 13$$

$$D(a^5) = d(a^5,1) + d(a^5,a) + d(a^5,a^2) + d(a^5,a^3) + d(a^5,a^4) + d(a^5,b)$$
$$+d(a^5,ab) + d(a^5,a^2b) + d(a^5,a^3b) + d(a^5,a^4b) + d(a^5,a^5b)$$
$$= 1+2+1+1+2+1+1+1+1+1+1$$
$$= 13$$

$$D(b) = d(b,1) + d(b,a) + d(b,a^2) + d(b,a^3) + d(b,a^4) + d(b,a^5)$$
$$+d(b,ab) + d(b,a^2b) + d(b,a^3b) + d(b,a^4b) + d(b,a^5b)$$
$$= 1+1+1+1+1+1+1+1+2+1+1$$
$$= 12$$

$$D(ab) = d(ab,1) + d(ab,a) + d(ab,a^2) + d(ab,a^3) + d(ab,a^4)$$
$$+d(ab,a^5) + d(ab,b) + d(ab,a^2b) + d(ab,a^3b) + d(ab,a^4b) +$$
$$d(ab,a^5b)$$
$$= 1+1+1+1+1+1+1+1+1+2+1$$

$= 12$

$D(a^2b) = d(a^2b, 1) + d(a^2b, a) + d(a^2b, a^2) + d(a^2b, a^3) + d(a^2b, a^4)$

$+d(a^2b, a^5) + d(a^2b, b) + d(a^2b, ab) + d(a^2b, a^3b) +$

$d(a^2b, a^4b) + d(a^2b, a^5b)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2$

$= 12$

$D(a^3b) = d(a^3b, 1) + d(a^3b, a) + d(a^3b, a^2) + d(a^3b, a^3) + d(a^3b, a^4)$

$+d(a^3b, a^5) + d(a^3b, b) + d(a^3b, ab) + d(a^3b, a^2b) +$

$d(a^3b, a^4b) + d(a^3b, a^5b)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1$

$= 12$

$D(a^4b) = d(a^4b, 1) + d(a^4b, a) + d(a^4b, a^2) + d(a^4b, a^3) + d(a^4b, a^4)$

$+d(a^4b, a^5) + d(a^4b, b) + d(a^4b, ab) + d(a^4b, a^2b) +$

$d(a^4b, a^3b) + d(a^4b, a^5b)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1$

$= 12$

$D(a^5b) = d(a^5b, 1) + d(a^5b, a) + d(a^5b, a^2) + d(a^5b, a^3) + d(a^5b, a^4)$

$+d(a^5b, a^5) + d(a^5b, b) + d(a^5b, ab) + d(a^5b, a^2b) +$

$d(a^5b, a^3b) + d(a^4b, a^5b)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1$

$= 12$

Berdasarkan gambar 4.2, diperoleh nilai eksentrisitas titik $e(x)$ pada $G_S(Q_{12})$ sebagai berikut:

$e(1) = \max\{d(1, a), d(1, a^2), d(1, a^3), d(1, a^4), d(1, a^5), d(1, b), d(1, ab),$

$$d(1,a^2b), d(1,a^3b), d(1,a^4b), d(1,a^5b)\}$$

$$= \max\{1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1\} = 2$$

$$e(a) = \max\{d(a,1), d(a,a^2), d(a,a^3), d(a,a^4), d(a,a^5), d(a,b),$$

$$d(a,ab), d(a,a^2b), d(a,a^3b), d(a,a^4b), d(a,a^5b)\}$$

$$= \max\{1,2,1,2,1,1,1,1,1,1,1\} = 2$$

$$e(a^2) = \max\{d(a^2,1), d(a^2,a), d(a^2,a^3), d(a^2,a^4), d(a^2,a^5), d(a^2,b),$$

$$d(a^2,ab), d(a^2,a^2b), d(a^2,a^3b), d(a^2,a^4b), d(a^2,a^5b)\}$$

$$= \max\{1,2,1,2,1,1,1,1,1,1,1\} = 2$$

$$e(a^3) = \max\{d(a^3,1), d(a^3,a), d(a^3,a^2), d(a^3,a^4), d(a^3,a^5), d(a^3,b),$$

$$d(a^3,ab), d(a^3,a^2b), d(a^3,a^3b), d(a^3,a^4b), d(a^3,a^5b)\}$$

$$= \max\{1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1\} = 2$$

$$e(a^4) = \max\{d(a^4,1), d(a^4,a), d(a^4,a^2), d(a^4,a^3), d(a^4,a^5), d(a^4,b),$$

$$d(a^4,ab), d(a^4,a^2b), d(a^4,a^3b), d(a^4,a^4b), d(a^4,a^3b)\}$$

$$= \max\{1,1,2,1,2,1,1,1,1,1,1\} = 2$$

$$e(a^5) = \max\{d(a^5,1), d(a^5,a), d(a^5,a^2), d(a^5,a^3), d(a^5,a^4), d(a^5,b),$$

$$d(a^5,ab), d(a^5,a^2b), d(a^5,a^3b), d(a^5,a^4b), d(a^5,a^5b)\}$$

$$= \max\{1,1,1,1,2,1,1,1,1,1,1\} = 2$$

$$e(b) = \max\{d(b,1), d(b,a), d(b,a^2), d(b,a^3), d(b,a^4), d(b,a^5), d(b,ab),$$

$$d(b,a^2b), d(b,a^3b), d(b,a^4b), d(b,a^5b)\}$$

$$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,2,1,1\} = 2$$

$$e(ab) = \max\{d(ab,1), d(ab,a), d(ab,a^2), d(ab,a^3), d(ab,a^4), d(ab,a^5),$$

$$d(ab,b), d(ab,a^2b), d(ab,a^3b), d(ab,a^4b), d(ab,a^5b)\}$$

$$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,1\} = 2$$

$$e(a^2b) = \max\{d(a^2b,1), d(a^2b,a), d(a^2b,a^2), d(a^2b,a^3), d(a^2b,a^4),$$

$d(a^2b, a^5), d(a^2b, b), d(a^2b, ab), d(a^2b, a^3b), d(a^2b, a^4b),$

$d(a^2b, a^5b)\}$

$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2\} = 2$

$e(a^3b) = \max\{d(a^3b, 1), d(a^3b, a), d(a^3b, a^2), d(a^3b, a^3), d(a^3b, a^4),$

$d(a^3b, a^5), d(a^3b, b), d(a^3b, ab), d(a^3b, a^2b), d(a^3b, a^4b),$

$d(a^3b, a^5b)\}$

$= \max\{1,1,1,1,1,1,2,1,1,1,1\} = 2$

$e(a^4b) = \max\{d(a^4b, 1), d(a^4b, a), d(a^4b, a^2), d(a^4b, a^3), d(a^4b, a^4),$

$d(a^4b, a^5), d(a^4b, b), d(a^4b, ab), d(a^4b, a^2b), d(a^4b, a^3b),$

$d(a^4b, a^5b)\}$

$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,2,1,1,1\} = 2$

$e(a^5b) = \max\{d(a^5b, 1), d(a^5b, a), d(a^5b, a^2), d(a^5b, a^3), d(a^5b, a^4),$

$d(a^5b, a^5), d(a^5b, b), d(a^5b, ab), d(a^5b, a^2b), d(a^5b, a^3b),$

$d(a^5b, a^4b)\}$

$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,2,1,1\} = 2$

Berdasarkan uraian eksentrisitas tersebut disimpulkan bahwa eksentrisitas setiap titik pada graf invers dari grup quaternion diperumum $G_S(Q_{12})$ adalah $e(x) = 2, \forall x \in V(G_S(Q_{12}))$.

Selanjutnya dengan diperoleh nilai jumlah jarak dan eksentrisitas setiap titik pada $G_S(Q_{12})$, maka dapat dihitung jumlah jarak eksentrik dari $G_S(Q_{12})$ sebagai berikut:

$$\xi^d(G_S(Q_{12})) = \sum_{v \in V(G_S(Q_{12}))} e(v)D(v)$$

$$= (e(1)D(1)) + (e(a)D(a)) + (e(a^2)D(a^2)) + (e(a^3)D(a^3))$$

$$+\left(e(a^4)D(a^4)\right)+\left(e(a^5)D(a^5)\right)+\left(e(b)D(b)\right)+$$

$$\left(e(ab)D(ab)\right)+\left(e(a^2b)D(a^2b)\right)+\left(e(a^3b)D(a^3b)\right)+$$

$$\left(e(a^4b)D(a^4b)\right)+\left(e(a^5b)D(a^5b)\right)$$

$$=(2\times 12)+(2\times 13)+(2\times 13)+(2\times 12)+(2\times 13)$$

$$+(2\times 12)+(2\times 12)+(2\times 12)+(2\times 12)+(2\times 12)+$$

$$(2\times 12)+(2\times 12)$$

$$=24+26+26+24+26+24+24+24+24+24+24+24$$

$$=294.$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa nilai jumlah jarak eksentrik pada graf invers dari grup quaternioun diperumum $G_S(Q_{12})$ adalah 294. Indeks jumlah jarak eksentrik sebagai berikut:

$$\xi^{sv}\left(G_S(Q_{12})\right)=\sum_{v\in V\left(G_S(Q_{12})\right)}\frac{e(v)D(v)}{\deg(v)}$$

$$=\left(\frac{e(1)D(1)}{\deg(1)}\right)+\left(\frac{e(a)D(a)}{\deg(a)}\right)+\left(\frac{e(a^2)D(a^2)}{\deg(a^2)}\right)+\left(\frac{e(a^3)D(a^3)}{\deg(a^3)}\right)+$$

$$\left(\frac{e(a^4)D(a^4)}{\deg(a^4)}\right)+\left(\frac{e(a^5)D(a^5)}{\deg(a^5)}\right)+\left(\frac{e(b)D(b)}{\deg(b)}\right)+\left(\frac{e(ab)D(ab)}{\deg(ab)}\right)+$$

$$\left(\frac{e(a^2b)D(a^2b)}{\deg(a^2b)}\right)+\left(\frac{e(a^3b)D(a^3b)}{\deg(a^3b)}\right)+\left(\frac{e(a^4b)D(a^4b)}{\deg(a^3b)}\right)+$$

$$\left(\frac{e(a^5b)D(a^5b)}{\deg(a^3b)}\right)$$

$$=\left(\frac{2\times 12}{10}\right)+\left(\frac{2\times 13}{9}\right)+\left(\frac{2\times 13}{9}\right)+\left(\frac{2\times 12}{10}\right)+\left(\frac{2\times 13}{9}\right)+\left(\frac{2\times 13}{9}\right)+$$

$$\left(\frac{2\times 12}{10}\right)+\left(\frac{2\times 12}{10}\right)+\left(\frac{2\times 12}{10}\right)+\left(\frac{2\times 12}{10}\right)+\left(\frac{2\times 12}{10}\right)+\left(\frac{2\times 12}{10}\right)$$

$$=\left(8\times\frac{24}{10}\right)+\left(4\times\frac{26}{9}\right)$$

$$=\frac{1384}{45}=\frac{173}{5}.$$

4.1.3 Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum $Q_{4\cdot 4}$

Grup quaternion Q_{16} adalah $Q_{16} = \left\langle a, b \middle| a^8 = e, b^2 = a^4, bab^{-1} = a^{-1} \right\rangle$. Anggota-anggota dari grup quaternion diperumum Q_{16} adalah $\{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b, a^7b\}$. Berikut merupakan table Cayley dari Q_{16}:

Tabel 4.3 Tabel Cayley dari Q_{16}

$\cdot$	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b
1	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b
a	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	1	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	b
a^2	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	1	a	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	b	ab
a^3	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	1	a	a^2	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	b	ab	a^2b
a^4	a^4	a^5	a^6	a^7	1	a	a^2	a^3	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	b	ab	a^2b	a^3b
a^5	a^5	a^6	a^7	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5b	a^6b	a^7b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b
a^6	a^6	a^7	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6b	a^7b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b
a^7	a^7	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b
b	b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	a^4	a^3	a^2	a	1	a^7	a^6	a^5
ab	ab	b	a^3b	a^4b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^7	a^6
a^2b	a^2b	ab	b	a^5b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^7
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1
a^4b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^7b	a^6b	a^5b	1	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a
a^5b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^7b	a^6b	a	1	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2
a^6b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^7b	a^2	a	1	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3
a^7b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^3	a^2	a	1	a^7	a^6	a^5	a^4

Berdasarkan tabel 4.3, dapat diketahui invers dari setiap elemen dari grup quaternion diperumum, adalah sebagai berikut:

$1^{-1} = 1$ karena $1 \cdot 1 = 1$

$a^{-1} = a^7$ karena $a \cdot a^7 = a^7 \cdot a = 1$

$(a^2)^{-1} = a^6$ karena $a^2 \cdot a^6 = a^6 \cdot a^2 = 1$

$(a^3)^{-1} = a^5$ karena $a^3 \cdot a^5 = a^5 \cdot a^3 = 1$

$(a^4)^{-1} = a^4$ karena $a^4 \cdot a^4 = 1$

$(a^5)^{-1} = a^3$ karena $a^5 \cdot a^3 = a^3 \cdot a^5 = 1$

$(a^6)^{-1} = a^2$ karena $a^6 \cdot a^2 = a^2 \cdot a^6 = 1$

$(a^7)^{-1} = a$ karena $a^7 \cdot a = a \cdot a^7 = 1$

$b^{-1} = a^4b$ karena $b \cdot a^4b = a^4b \cdot b = 1$

$ab^{-1} = a^5b$ karena $ab \cdot a^5b = a^5b \cdot ab = 1$

$(a^2b)^{-1} = a^6b$ karena $a^2b \cdot a^6b = a^6b \cdot a^2b = 1$

$(a^3b)^{-1} = a^7b$ karena $a^3b \cdot a^7b = a^7b \cdot a^3b = 1$

$(a^4b)^{-1} = b$ karena $a^4b \cdot b = b \cdot a^4b = 1$

$(a^5b)^{-1} = ab$ karena $a^5b \cdot ab = ab \cdot a^5b = 1$

$(a^6b)^{-1} = a^2b$ karena $a^6b \cdot a^2b = a^2b \cdot a^6b = 1$

$(a^7b)^{-1} = a^3b$ karena $a^7b \cdot a^3b = a^3b \cdot a^7b = 1$

Berdasarkan uraian tersebut, diketahui bahwa 1 dan a^4 invers terhadap dirinya sendiri. Jadi dari Q_{16} dapat dibangun himpunan S yang invernya bukan dirinya sendiri, sehingga diperoleh

$$S = \{a, a^2, a^3, a^5, a^6, a^7, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b, a^7b\}.$$

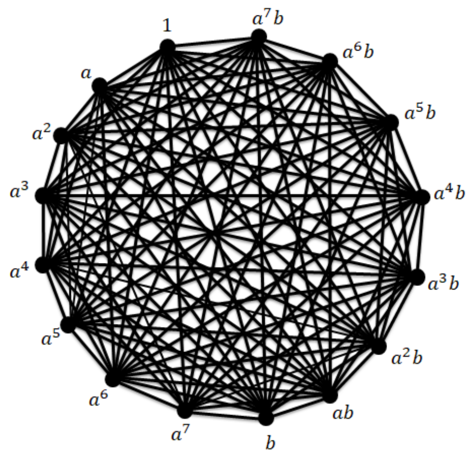
Graf invers yang dibentuk dari Q_{16} dan $S \subseteq Q_{16}$ dinotasikan $G_S(Q_{16})$. Himpunan titik pada graf $G_S(Q_{16})$ adalah

$$V\big(G_S(Q_8)\big) = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b, a^7b\}.$$

Dua titik berbeda $u, v \in V\big(G_S(Q_{16})\big)$ terhubung langsung jika hanya jika $u \cdot v \in S$ atau $v \cdot u \in S$. Sehingga berdasarkan tabel 4.3 diperoleh

$$\begin{aligned}
E\big(G_S(Q_{16})\big) = \{&(1,a),(1,a^2),(1,a^3),(1,a^5),(1,a^6),(1,a^7),(1,b),(1,ab),\\
&(1,a^2b),(1,a^3b),(1,a^4b),(1,a^5b),(1,a^6b),(1,a^7b),(a,a^2),\\
&(a,a^4),(a,a^5),(a,a^6),(a,b),(a,ab),(a,a^2b),(a,a^3b),(a,a^4b),\\
&(a,a^5b),(a,a^6b),(a,a^7b),(a^2,a^3),(a^2,a^4),(a^2,a^5),(a^2,a^7),\\
&(a^2,b),(a^2,ab),(a^2,a^2b),(a^2,a^3b),(a^2,a^4b),(a^2,a^5b),(a^2,a^6b),\\
&(a^2,a^7b),(a^3,a^4),(a^3,a^6),(a^3,a^7),(a^3,b),(a^3,ab),(a^3,a^2b),\\
&(a^3,a^3b),(a^3,a^5b),(a^3,a^6b),(a^3,a^7b),(a^4,a^5),(a^4,a^6),(a^4,a^7),\\
&(a^4,b),(a^4,ab),(a^4,a^2b),(a^4,a^3b),(a^4,a^5b),(a^4,a^6b),(a^4,a^7b),\\
&(a^5,a^6),(a^5,b),(a^5,ab),(a^5,a^2b),(a^5,a^3b),(a^5,a^4b),(a^5,a^5b),\\
&(a^5,a^6b),(a^5,a^7b),(a^6,a^7),(a^6,b),(a^6,ab),(a^6,a^2b),(a^6,a^3b),\\
&(a^6,a^4b),(a^6,a^5b),(a^6,a^6b),(a^6,a^7b),(a^7,b),(a^7,ab),(a^7,a^2b),\\
&(a^7,a^3b),(a^7,a^4b),(a^7,a^5b),(a^7,a^6b),(a^7,a^7b),(b,ab),(b,a^2b),\\
&(b,a^3b),(b,a^5b),(b,a^6b),(b,a^7b),(ab,b),(ab,a^2b),(ab,a^3b),\\
&(ab,a^4b),(ab,a^6b),(ab,a^7b),(a^2b,a^3b),(a^2b,a^4b),(a^2b,a^5b),\\
&(a^2b,a^7b),(a^3b,a^4b),(a^3b,a^5b),(a^3b,a^6b),(a^4b,a^5b),(a^4b,a^6b),\\
&(a^4b,a^7b),(a^5b,a^6b),\ (a^5b,a^7b),(a^6b,a^7b)\}.
\end{aligned}$$

Sehingga dapat dibuat graf invers dari grup quaternion diperumum $G_S(Q_{16})$ sebagai berikut:



Gambar 4.3 $G_S(Q_{16})$

Berdasarkan gambar 4.3, kita dapat menemukan jumlah jarak setiap titik pada $G_S(Q_{16})$. Jumlah jarak titik $D(x)$ di $G_S(Q_{16})$ adalah jumlah jarak antara titik x dengan semua titik di $G_S(Q_{16})$. Nilai jumlah jarak untuk setiap titik pada di $G_S(Q_{16})$ adalah:

$D(1) = d(1,a) + d(1,a^2) + d(1,a^3) + d(1,a^4) + d(1,a^5) + d(1,a^6)$

$+d(1,a^7) \ + d(1,b) + d(1,ab) + d(1,a^2b) + d(1,a^3b) + d(1,a^4b)$

$+d(1,a^5b) + d(1,a^6b) + d(1,a^7b)$

$= 1+1+1+2+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$

$= 16$

$D(a) = d(a,1) + d(a,a^2) + d(a,a^3) + d(a,a^4) + d(a,a^5) + d(a,a^6)$

$+d(a,a^7) + d(a,b) + d(a,ab) + d(a,a^2b) + d(a,a^3b) +$

$d(a,a^4b) + d(a,a^5b) + d(a,a^6b) + d(a,a^7b)$

$= 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

$= 17$

$D(a^2) = d(a^2, 1) + d(a^2, a) + d(a^2, a^3) + d(a^2, a^4) + d(a^2, a^5)$

$+d(a^2, a^6) + d(a^2, a^7) + d(a^2, b) + d(a^2, ab) + d(a^2, a^2b) +$

$d(a^2, a^3b) + d(a^2, a^4b) + d(a^2, a^5b) + d(a^2, a^6b) + d(a^2, a^7b)$

$= 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

$= 17$

$D(a^3) = d(a^3, 1) + d(a^3, a) + d(a^3, a^2) + d(a^3, a^4) + d(a^3, a^5)$

$+d(a^3, a^6) + d(a^3, a^7) + d(a^3, b) + d(a^3, ab) + d(a^3, a^2b) +$

$d(a^3, a^3b) + d(a^3, a^4b) + d(a^3, a^5b) + d(a^3, a^6b) + d(a^3, a^7b)$

$= 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

$= 17$

$D(a^4) = d(a^4, 1) + d(a^4, a) + d(a^4, a^2) + d(a^4, a^3) + d(a^4, a^5)$

$+d(a^4, a^6) + d(a^4, a^7) + d(a^4, b) + d(a^4, ab) + d(a^4, a^2b) +$

$d(a^4, a^3b) + d(a^4, a^4b) + d(a^4, a^5b) + d(a^4, a^6b) + d(a^4, a^7b)$

$= 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

$= 16$

$D(a^5) = d(a^5, 1) + d(a^5, a) + d(a^5, a^2) + d(a^5, a^3) + d(a^5, a^4)$

$+d(a^5, a^6) + d(a^5, a^7) + d(a^5, b) + d(a^5, ab) + d(a^5, a^2b) +$

$d(a^5, a^3b) + d(a^5, a^4b) + d(a^5, a^5b) + d(a^5, a^6b) + d(a^5, a^7b)$

$= 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

$= 17$

$D(a^6) = d(a^6, 1) + d(a^6, a) + d(a^6, a^2) + d(a^6, a^3) + d(a^6, a^4)$

$$+d(a^6,a^5)+d(a^6,a^7)+d(a^6,b)+d(a^6,ab)+d(a^6,a^2b)+$$

$$d(a^6,a^3b)+d(a^6,a^4b)+d(a^6,a^5b)+d(a^6,a^6b)+d(a^6,a^7b)$$

$$=1+1+2+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$$

$$=16$$

$$D(a^7)=d(a^7,1)+d(a^7,a)+d(a^7,a^2)+d(a^7,a^3)+d(a^7,a^4)$$

$$+d(a^7,a^5)+d(a^7,a^6)+d(a^7,b)+d(a^7,ab)+d(a^7,a^2b)+$$

$$d(a^7,a^3b)+d(a^7,a^4b)+d(a^7,a^5b)+d(a^7,a^6b)+d(a^7,a^7b)$$

$$=1+2+1+1+1+2+1+1+1+1+1+1+1+1+1$$

$$=17$$

$$D(b)=d(b,1)+d(b,a)+d(b,a^2)+d(b,a^3)+d(b,a^4)+d(b,a^5)$$

$$+d(b,a^6)+d(b,a^7)+d(b,ab)+d(b,a^2b)+d(b,a^3b)+$$

$$d(b,a^4b)+d(b,a^5b)+d(b,a^6b)+d(b,a^7b)$$

$$=1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+2+1+1+1$$

$$=16$$

$$D(ab)=d(ab,1)+d(ab,a)+d(ab,a^2)+d(ab,a^3)+d(ab,a^4)$$

$$+d(ab,a^5)+d(ab,a^6)+d(ab,a^7)+d(ab,b)+d(ab,a^2b)+$$

$$d(ab,a^3b)+d(ab,a^4b)+d(ab,a^5b)+d(ab,a^6b)+d(ab,a^7b)$$

$$=1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+2+1+1$$

$$=16$$

$$D(a^2b)=d(a^2b,1)+d(a^2b,a)+d(a^2b,a^2)+d(a^2b,a^3)+d(a^2b,a^4)$$

$$+d(a^2b,a^5)+d(a^2b,a^6)+d(a^2b,a^7)+d(a^2b,b)+d(a^2b,ab)+$$

$$d(a^2b,a^3b)+d(a^2b,a^4b)+d(a^2b,a^5b)+d(a^2b,a^6b)+$$

$$d(a^2b,a^7b)$$

$$=1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+2+1$$

$= 16$

$D(a^3b) = d(a^3b, 1) + d(a^3b, a) + d(a^3b, a^2) + d(a^3b, a^3) + d(a^3b, a^4)$

$+d(a^3b, a^5) + d(a^3b, a^6) + d(a^3b, a^7) + d(a^3b, b) + d(a^3b, ab) +$

$d(a^3b, a^2b) + d(a^3b, a^4b) + d(a^3b, a^5b) + d(a^3b, a^6b) +$

$d(a^3b, a^7b)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2$

$= 16$

$D(a^4b) = d(a^4b, 1) + d(a^4b, a) + d(a^4b, a^2) + d(a^4b, a^3) + d(a^4b, a^4)$

$+d(a^4b, a^5) + d(a^4b, a^6) + d(a^4b, a^7) + d(a^4b, b) + d(a^4b, ab) +$

$d(a^4b, a^2b) + d(a^4b, a^3b) + d(a^4b, a^5b) + d(a^4b, a^6b) +$

$d(a^4b, a^7b)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

$= 16$

$D(a^5b) = d(a^5b, 1) + d(a^5b, a) + d(a^5b, a^2) + d(a^5b, a^3) + d(a^5b, a^4)$

$+d(a^5b, a^5) + d(a^5b, a^6) + d(a^5b, a^7) + d(a^5b, b) + d(a^5b, ab) +$

$d(a^5b, a^2b) + d(a^5b, a^3b) + d(a^5b, a^4b) + d(a^5b, a^6b) +$

$d(a^5b, a^7b)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

$= 16$

$D(a^6b) = d(a^6b, 1) + d(a^6b, a) + d(a^6b, a^2) + d(a^5b, a^3) + d(a^6b, a^4)$

$+d(a^6b, a^5) + d(a^6b, a^6) + d(a^6b, a^7) + d(a^6b, b) +$

$d(a^6b, ab) + d(a^6b, a^2b) + d(a^6b, a^3b) + d(a^6b, a^4b) +$

$d(a^6b, a^5b) + d(a^6b, a^7b)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1$

$= 16$

$D(a^7b) = d(a^7b, 1) + d(a^7b, a) + d(a^7b, a^2) + d(a^7b, a^3) + d(a^7b, a^4)$

$+ d(a^7b, a^5) + d(a^7b, a^6) + d(a^7b, a^7) + d(a^7b, b) +$

$d(a^7b, ab) + d(a^7b, a^2b) + d(a^7b, a^3b) + d(a^7b, a^4b) +$

$d(a^7b, a^5b) + d(a^7b, a^6b)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1$

$= 16$

Berdasarkan gambar 4.3, diperoleh nilai eksentrisitas titik $e(x)$ pada $G_S(Q_{16})$ sebagai berikut:

$e(1) = \max\{d(1, a), d(1, a^2), d(1, a^3), d(1, a^4), d(1, a^5), d(1, a^6), d(1, a^7),$

$d(1, b), d(1, ab), d(1, a^2b), d(1, a^3b), d(1, a^4b), d(1, a^5b), d(1, a^6b),$

$d(1, a^7b)\}$

$= \max\{1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\} = 2$

$e(a) = \max\{d(a, 1), d(a, a^2), d(a, a^3), d(a, a^4), d(a, a^5), d(a, a^6), d(a, a^7),$

$d(a, b), d(a, ab), d(a, a^2b), d(a, a^3b), d(a, a^4b), d(a, a^5b), d(a, a^6b),$

$d(a, a^7b)\}$

$= \max\{1,2,1,1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1\} = 2$

$e(a^2) = \max\{d(a^2, 1), d(a^2, a), d(a^2, a^3), d(a^2, a^4), d(a^2, a^5), d(a^2, a^6),$

$d(a^2, a^7), d(a^2, b), d(a^2, ab), d(a^2, a^2b), d(a^2, a^3b), d(a^2, a^4b),$

$d(a^2, a^5b), d(a^2, a^6b), d(a^2, a^7b)\}$

$= \max\{1,2,1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1\} = 2$

$e(a^3) = \max\{d(a^3, 1), d(a^3, a), d(a^3, a^2), d(a^3, a^4), d(a^3, a^5), d(a^3, a^6),$

$d(a^3, a^7), d(a^3, b), d(a^3, ab), d(a^3, a^2b), d(a^3, a^3b), d(a^3, a^4b),$

$d(a^3, a^5b), d(a^3, a^6b), d(a^3, a^7b)\}$

$$= \max\{1,2,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\} = 2$$

$$e(a^4) = \max\{d(a^4,1), d(a^4,a), d(a^4,a^2), d(a^4,a^3), d(a^4,a^5), d(a^4,a^6),$$
$$d(a^4,a^7), d(a^4,b), d(a^4,ab), d(a^4,a^2b), d(a^4,a^3b), d(a^4,a^4b),$$
$$d(a^4,a^5b), d(a^4,a^6b), d(a^4,a^7b)\}$$
$$= \max\{ 2,1,2,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\} = 2$$

$$e(a^5) = \max\{d(a^5,1), d(a^5,a), d(a^5,a^2), d(a^5,a^3), d(a^5,a^4), d(a^5,a^6),$$
$$d(a^5,a^7), d(a^5,b), d(a^5,ab), d(a^5,a^2b), d(a^5,a^3b), d(a^5,a^4b),$$
$$d(a^5,a^5b), d(a^5,a^6b), d(a^5,a^7b)\}$$
$$= \max\{1,1,1,2,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1\} = 2$$

$$e(a^6) = \max\{d(a^6,1), d(a^6,a), d(a^6,a^2), d(a^6,a^3), d(a^6,a^4), d(a^6,a^5),$$
$$d(a^6,a^7), d(a^6,b), d(a^6,ab), d(a^6,a^2b), d(a^6,a^3b), d(a^6,a^4b),$$
$$d(a^6,a^5b), d(a^6,a^6b), d(a^6,a^7b)\}$$
$$= \max\{1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\} = 2$$

$$\mathrm{e}(a^7) = \max\{d(a^7,1), d(a^7,a), d(a^7,a^2), d(a^7,a^3), d(a^7,a^4), d(a^7,a^5),$$
$$d(a^7,a^6), d(a^7,b), d(a^7,ab), d(a^7,a^2b), d(a^7,a^3b), d(a^7,a^4b),$$
$$d(a^7,a^5b), d(a^7,a^6b), d(a^7,a^7b)\}$$
$$= \max\{1,2,1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1\} = 2$$

$$e(b) = \max\{d(b,1), d(b,a), d(b,a^2), d(b,a^3), d(b,a^4), d(b,a^5), d(b,a^6),$$
$$d(b,a^7), d(b,ab), d(b,a^2b), d(b,a^3b), d(b,a^4b), d(b,a^5b),$$
$$d(b,a^6b), d(b,a^7b)\}$$
$$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,1,1,1\} = 2$$

$$e(ab) = \max\{d(ab,1), d(ab,a), d(ab,a^2), d(ab,a^3), d(ab,a^4), d(ab,a^5),$$
$$d(ab,a^6), d(ab,a^7), d(ab,b), d(ab,a^2b), d(ab,a^3b), d(ab,a^4b),$$
$$d(ab,a^5b), d(ab,a^6b), d(ab,a^7b)\}$$

$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,1,1\} = 2$

$$e(a^2b) = \max\{d(a^2b,1), d(a^2b,a), d(a^2b,a^2), d(a^2b,a^3), d(a^2b,a^4),$$

$$d(a^2b,a^5), d(a^2b,a^6), d(a^2b,a^7), d(a^2b,b), d(a^2b,ab),$$

$$d(a^2b,a^3b), d(a^2b,a^4b), d(a^2b,a^5b), d(a^2b,a^6b), d(a^2b,a^7b)\}$$

$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,1\} = 2$

$$e(a^3b) = \max\{d(a^3b,1), d(a^3b,a), d(a^3b,a^2), d(a^3b,a^3), d(a^3b,a^4),$$

$$d(a^3b,a^5), d(a^3b,a^6), d(a^3b,a^7), d(a^3b,b), d(a^3b,ab),$$

$$d(a^3b,a^2b), d(a^3b,a^4b), d(a^3b,a^5b), d(a^3b,a^6b), d(a^3b,a^7b)\}$$

$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2\} = 2$

$$e(a^4b) = \max\{d(a^4b,1), d(a^4b,a), d(a^4b,a^2), d(a^4b,a^3), d(a^4b,a^4),$$

$$d(a^4b,a^5), d(a^4b,a^6), d(a^4b,a^7), d(a^4b,b), d(a^4b,ab),$$

$$d(a^4b,a^2b), d(a^4b,a^3b), d(a^4b,a^5b), d(a^4b,a^6b), d(a^4b,a^7b)\}$$

$= \max\{1.1.1.1.1.1.1.1.1.2.1.1.1.1.1,1\} = 2$

$$e(a^5b) = \max\{d(a^5b,1), d(a^5b,a), d(a^5b,a^2), d(a^5b,a^3), d(a^5b,a^4),$$

$$d(a^5b,a^5), d(a^5b,a^6), d(a^5b,a^7), d(a^5b,b), d(a^5b,ab),$$

$$d(a^5b,a^2b), d(a^5b,a^3b),\ d(a^5b,a^4b), d(a^5b,a^6b), d(a^5b,a^7b)\}$$

$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,1,1,1,1,1\} = 2$

$$e(a^6b) = \max\{d(a^6b,1), d(a^6b,a), d(a^6b,a^2), d(a^5b,a^3), d(a^6b,a^4),$$

$$d(a^6b,a^5), d(a^6b,a^6), d(a^6b,a^7), d(a^6b,b), d(a^6b,ab),$$

$$d(a^6b,a^2b), d(a^6b,a^3b), d(a^6b,a^4b), d(a^6b,a^5b), d(a^6b,a^7b)\}$$

$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,1,1,1,1\} = 2$

$$e(a^7b) = \max\{d(a^7b,1), d(a^7b,a), d(a^7b,a^2), d(a^7b,a^3), d(a^7b,a^4),$$

$$d(a^7b,a^5), d(a^7b,a^6), d(a^7b,a^7), d(a^7b,b), d(a^7b,ab),$$

$$d(a^7b,a^2b), d(a^7b,a^3b), d(a^7b,a^4b), d(a^7b,a^5b), d(a^7b,a^6b)\}$$

$= max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,1,1,1\} = 2$

Berdasarkan uraian eksentrisitas tersebut disimpulkan bahwa eksentrisitas setiap titik pada graf invers dari grup quaternion diperumum $G_S(Q_{16})$ adalah $e(x) = 2$, $\forall x \in V(G_S(Q_{16}))$.

Selanjutnya dengan diperoleh nilai jumlah jarak dan eksentrisitas setiap titik pada $G_S(Q_{16})$, maka dapat dihitung jumlah jarak eksentrik dari $G_S(Q_{16})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\xi^d(G_S(Q_{16})) = \textstyle\sum_{v\in V(G_S(Q_{16}))} e(v)D(v) \\
&= (e(1)D(1)) + (e(a)D(a)) + (e(a^2)D(a^2)) + (e(a^3)D(a^3)) \\
&\quad +(e(a^4)D(a^4)) + (e(a^5)D(a^5)) + (e(a^6)D(a^6)) \\
&\quad +(e(a^7)D(a^7)) + (e(b)D(b)) + (e(ab)D(ab)) \\
&\quad +(e(a^2b)D(a^2b)) + (e(a^4b)D(a^4b)) + (e(a^3b)D(a^3b)) \\
&\quad +(e(a^5b)D(a^5b)) + (e(a^6b)D(a^6b)) + (e(a^7b)D(a^7b)) \\
&= (2\times 16) + (2\times 17) + (2\times 17) + (2\times 17) + (2\times 16) \\
&\quad +(2\times 17) + (2\times 16) + (2\times 17) + (2\times 16) + (2\times 16) \\
&\quad +(2\times 16) + (2\times 16) + (2\times 16) + (2\times 16) + (2\times 16) \\
&\quad +(2\times 16) \\
&= 32 + 34 + 34 + 34 + 32 + 34 + 32 + 34 + 32 + 32 + 32 + 32 \\
&\quad +32 + 32 + 32 + 32 \\
&= 522.
\end{aligned}$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa nilai jumlah jarak eksentrik pada graf invers dari grup quaternioun diperumum $G_S(Q_{16})$ adalah 522. Indeks jumlah jarak eksentrik sebagai berikut:

$$\xi^{sv}\big(G_S(Q_{16})\big) = \sum_{v\in V(G_S(Q_{16}))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)}$$

$$= \left(\frac{e(1)D(1)}{\deg(1)}\right) + \left(\frac{e(a)D(a)}{\deg(a)}\right) + \left(\frac{e(a^2)D(a^2)}{\deg(a^2)}\right) + \left(\frac{e(a^3)D(a^3)}{\deg(a^3)}\right)$$

$$+ \left(\frac{e(a^4)D(a^4)}{\deg(a^4)}\right) + \left(\frac{e(a^5)D(a^5)}{\deg(a^5)}\right) + \left(\frac{e(a^6)D(a^6)}{\deg(a^6)}\right)$$

$$+ \left(\frac{e(a^7)D(a^7)}{\deg(a^7)}\right) + \left(\frac{e(b)D(b)}{\deg(b)}\right) + \left(\frac{e(ab)D(ab)}{\deg(ab)}\right)$$

$$+ \left(\frac{e(a^2b)D(a^2b)}{\deg(a^2b)}\right) + \left(\frac{e(a^3b)D(a^3b)}{\deg(a^3b)}\right) + \left(\frac{e(a^4b)D(a^4b)}{\deg(a^4b)}\right)$$

$$+ \left(\frac{e(a^5b)D(a^5b)}{\deg(a^5b)}\right) + \left(\frac{e(a^6b)D(a^6b)}{\deg(a^6b)}\right) + \left(\frac{e(a^7b)D(a^7b)}{\deg(a^7b)}\right)$$

$$= \left(\frac{2\times16}{14}\right) + \left(\frac{2\times17}{13}\right) + \left(\frac{2\times17}{13}\right) + \left(\frac{2\times17}{13}\right) + \left(\frac{2\times16}{14}\right)$$

$$+ \left(\frac{2\times17}{13}\right) + \left(\frac{2\times16}{14}\right) + \left(\frac{2\times17}{13}\right) + \left(\frac{2\times16}{14}\right) + \left(\frac{2\times16}{14}\right)$$

$$+ \left(\frac{2\times16}{14}\right) + \left(\frac{2\times16}{14}\right) + \left(\frac{2\times16}{14}\right) + \left(\frac{2\times16}{14}\right) + \left(\frac{2\times16}{14}\right)$$

$$+ \left(\frac{2\times16}{14}\right)$$

$$= \left(11 \times \frac{32}{14}\right) + \left(5 \times \frac{34}{13}\right)$$

$$= \frac{3478}{91}.$$

4.1.4 Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum $Q_{4\cdot5}$

Grup quaternion Q_{20} adalah $Q_{20} = \left\langle a, b \middle| a^{10} = e, b^2 = a^5, bab^{-1} = a^{-1} \right\rangle$. Elemen-elemen dari grup quaternion diperumum Q_{20} adalah $\{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b, a^7b, a^8b, a^9b\}$. Berikut merupakan tabel Cayley pada Q_{20}

Tabel 4.4 Tabel Cayley pada Q_{20}

$\cdot$	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b
1	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b
a	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	1	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b
a^2	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab
a^3	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b
a^4	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b
a^5	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b
a^6	a^6	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b
a^7	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b
a^8	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b
a^9	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b
b	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^9	a^8	a^7	a^6
ab	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^9	a^8	a^7
a^2b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^9	a^8
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^9
a^4b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1
a^5b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	1	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a
a^6b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a	1	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2
a^7b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^2	a	1	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3
a^8b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^3	a^2	a	1	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4
a^9b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^4	a^3	a^2	a	1	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5

Berdasarkan tabel 4.4, dapat diketahui invers dari setiap elemen dari grup quaternion diperumum, adalah sebagai berikut:

$1^{-1} = 1$ karena $1 \cdot 1 = 1$

$a^{-1} = a^9$ karena $a \cdot a^9 = a^9 \cdot a = 1$

$(a^2)^{-1} = a^8$ karena $a^2 \cdot a^8 = a^8 \cdot a^2 = 1$

$(a^3)^{-1} = a^7$ karena $a^3 \cdot a^7 = a^7 \cdot a^3 = 1$

$(a^4)^{-1} = a^6$ karena $a^4 \cdot a^6 = a^6 \cdot a^4 = 1$

$(a^5)^{-1} = a^5$ karena $a^5 \cdot a^5 = 1$

$(a^6)^{-1} = a^4$ karena $a^6 \cdot a^4 = a^4 \cdot a^6 = 1$

$(a^7)^{-1} = a^3$ karena $a^7 \cdot a^3 = a^3 \cdot a^7 = 1$

$(a^8)^{-1} = a^2$ karena $a^8 \cdot a^2 = a^2 \cdot a^8 = 1$

$(a^9)^{-1} = a$ karena $a^9 \cdot a = a \cdot a^9 = 1$

$b^{-1} = a^5b$ karena $b \cdot a^5b = a^5b \cdot b = 1$

$ab^{-1} = a^6b$ karena $ab \cdot a^6b = a^6b \cdot ab = 1$

$(a^2b)^{-1} = a^7b$ karena $a^2b \cdot a^7b = a^7b \cdot a^2b = 1$

$(a^3b)^{-1} = a^8b$ karena $a^3b \cdot a^8b = a^8b \cdot a^3b = 1$

$(a^4b)^{-1} = a^9b$ karena $a^4b \cdot a^9b = a^9b \cdot a^4b = 1$

$(a^5b)^{-1} = b$ karena $a^5b \cdot b = b \cdot a^5b = 1$

$(a^6b)^{-1} = ab$ karena $a^6b \cdot ab = ab \cdot a^6b = 1$

$(a^7b)^{-1} = a^2b$ karena $a^7b \cdot a^2b = a^2b \cdot a^7b = 1$

$(a^8b)^{-1} = a^3b$ karena $a^8b \cdot a^3b = a^3b \cdot a^8b = 1$

$(a^9b)^{-1} = a^4b$ karena $a^9b \cdot a^4b = a^4b \cdot a^9b = 1$

Berdasarkan uraian tersebut, diketahui bahwa 1 dan a^5 invers terhadap dirinya sendiri. Jadi dari Q_{20} dapat dibangun himpunan S yang inversnya bukan dirinya sendiri, sehingga diperoleh

$$S = \{a, a^2, a^3, a^4, a^6, a^7, a^8, a^9, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b, a^7b, a^8b, a^9b\}.$$

Graf invers yang dibentuk dari Q_{20} dan $S \subseteq Q_{20}$ dinotasikan $G_S(Q_{20})$. Himpunan titik pada graf $G_S(Q_{20})$ adalah

$$V(G_S(Q_{20})) = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b, a^7b, a^8b, a^9b\}.$$

Dua titik berbeda $u, v \in V(G_S(Q_{20}))$ terhubung langsung jika hanya jika $u \cdot v \in S$ atau $v \cdot u \in S$. Sehingga berdasarkan tabel 4.4 diperoleh

$E(G_S(Q_{20})) = \{(1,a),(1,a^2),(1,a^3),(1,a^4),(1,a^6),(1,a^7),(1,a^8),(1,a^9),$
$(1,b),(1,ab),(1,a^2b),(1,a^3b),(1,a^4b),(1,a^5b),(1,a^6b),(1,a^7b),$
$(1,a^8b),(1,a^9b),(a,a^2),(a,a^3),(a,a^5),(a,a^6),(a,a^7),(a,a^8),$
$(a,b),(a,ab),(a,a^2b),(a,a^3b),(a,a^4b),(a,a^5b),(a,a^6b),(a,a^7b),$
$(a,a^8b),(a,a^9b),(a^2,a^4),(a^2,a^5),(a^2,a^6),(a^2,a^7),(a^2,a^9)(a^2,b),$
$(a^2,ab),(a^2,a^2b),(a^2,a^3b),(a^2,a^4b),(a^2,a^5b),(a^2,a^6b),(a^2,a^7b),$
$(a^2,a^8b),(a^2,a^9b),(a^3,a^4),(a^3,a^5),(a^3,a^6),(a^3,a^8),(a^3,a^9),(a^3,b),$
$(a^3,ab),(a^3,a^2b),(a^3,a^3b),(a^3,a^5b),(a^3,a^6b),(a^3,a^7b),(a^3,a^8b),$
$(a^3,a^9b),(a^4,a^5),(a^4,a^7),(a^4,a^8),(a^4,a^9),(a^4,b),(a^4,ab),(a^4,a^2b),$
$(a^4,a^3b),(a^4,a^5b),(a^4,a^6b),(a^4,a^7b),(a^4,a^8b),(a^4,a^9b),(a^5,a^6),$
$(a^5,a^7),(a^5,a^8),(a^5,a^9),(a^5,b),(a^5,ab),(a^5,a^2b),(a^5,a^3b),$
$(a^5,a^4b),(a^5,a^5b),(a^5,a^6b),(a^5,a^7b),(a^5,a^8b),(a^5,a^9b),(a^6,a^7),$
$(a^6,a^8),(a^6,b),(a^6,ab),(a^6,a^2b),(a^6,a^3b),(a^6,a^4b),(a^6,a^5b),$
$(a^6,a^6b),(a^6,a^7b),(a^6,a^8b),(a^6,a^9b),(a^7,a^9),(a^7,b),(a^7,ab),$
$(a^7,a^2b),(a^7,a^3b),(a^7,a^4b),(a^7,a^5b),(a^7,a^6b),(a^7,a^7b),$
$(a^7,a^8b),(a^7,a^9b),(a^8,a^9),(a^8,b),(a^8,ab),(a^8,a^2b),(a^8,a^3b),$
$(a^8,a^4b),(a^8,a^5b),(a^8,a^6b),(a^8,a^7b),(a^8,a^8b),(a^8,a^9b),(a^9,b),$
$(a^9,ab),(a^9,a^2b),(a^9,a^3b),(a^9,a^4b),(a^9,a^5b),(a^9,a^6b),(a^9,a^7b),$
$(a^9,a^8b),(a^9,a^9b),(b,ab),(b,a^2b),(b,a^3b),(b,a^4b),(b,a^6b),$
$(b,a^7b),(b,a^8b),(b,a^9b),(ab,b),(ab,a^2b),(ab,a^3b),(ab,a^4b),$
$(ab,a^5b),(ab,a^7b),(ab,a^8b),(ab,a^9b),(a^2b,a^3b),(a^2b,a^4b),$
$(a^2b,a^5b),(a^2b,a^2b),(a^2b,a^8b),(a^2b,a^9b),(a^3b,a^4b),$

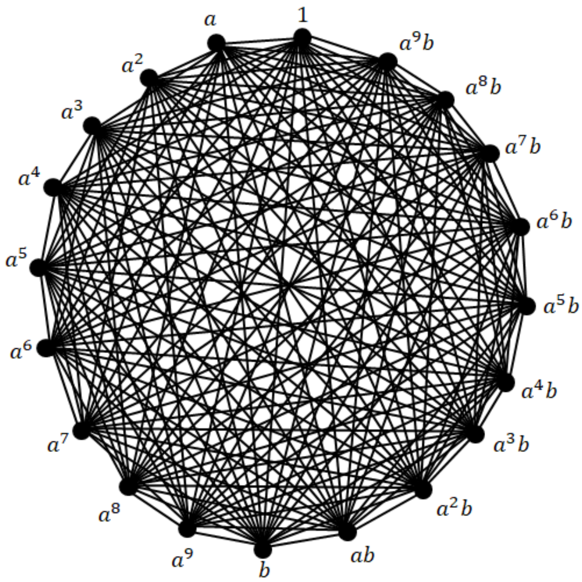
$(a^3b, a^5b), (a^3b, a^6b), (a^3b, a^7b), (a^3b, a^9b), (a^4b, a^5b), (a^4b, a^6b),$

$(a^4b, a^7b), (a^4b, a^8b), (a^4b, a^9b), (a^5b, a^6b), (a^5b, a^7b), (a^5b, a^8b),$

$(a^5b, a^9b), (a^6b, a^7b), (a^6b, a^8b), (a^6b, a^9b), (a^7b, a^8b),$

$(a^7b, a^9b), (a^8b, a^9b)\}.$

Sehingga dapat dibuat graf invers dari grup quaternion diperumum $G_S(Q_{20})$ sebagai berikut:



Gambar 4.4 $G_S(Q_{20})$

Berdasarkan gambar 4.4, kita dapat menemukan jumlah jarak setiap titik pada $G_S(Q_{20})$. Jumlah jarak titik $D(x)$ di $G_S(Q_{20})$ adalah jumlah jarak antara titik x dengan semua titik di di $G_S(Q_{20})$. Nilai jumlah jarak untuk setiap titik pada di $G_S(Q_{20})$ adalah:

$D(1) = d(1, a) + d(1, a^2) + d(1, a^3) + d(1, a^4) + d(1, a^5) + d(1, a^6)$

$+d(1,a^7) + d(1,a^8) + d(1,a^9) + d(1,b) + d(1,ab) + d(1,a^2b) +$

$d(1,a^3b) + d(1,a^4b) + d(1,a^5b) + d(1,a^6b) + d(1,a^7b) +$

$d(1,a^8b) + d(1,a^9b)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$

$1 + 1 + 1$

$= 20$

$D(a) = d(a,1) + d(a,a^2) + d(a,a^3) + d(a,a^4) + d(a,a^5) + d(a,a^6)$

$+d(a,a^7) + d(a,a^8) + d(a,a^9) + d(a,b) + d(a,ab) + d(a,a^2b) +$

$d(a,a^3b) + d(a,a^4b) + d(a,a^5b) + d(a,a^6b) + d(a,a^7b) +$

$d(a,a^8b) + d(a,a^9b)$

$= 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$

$1 + 1 + 1$

$= 21$

$D(a^2) = d(a^2,1) + d(a^2,a) + d(a^2,a^3) + d(a^2,a^4) + d(a^2,a^5)$

$+d(a^2,a^6) + d(a^2,a^7) + d(a^2,a^8) + d(a^2,a^9) + d(a^2,b) +$

$d(a^2,ab) + d(a^2,a^2b) + d(a^2,a^3b) + d(a^2,a^4b) + d(a^2,a^5b) +$

$d(a^2,a^6b) + d(a^2,a^7b) + d(a^2,a^8b) + d(a^2,a^9b)$

$= 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$

$1 + 1 + 1$

$= 21$

$D(a^3) = d(a^3,1) + d(a^3,a) + d(a^3,a^2) + d(a^3,a^4) + d(a^3,a^5)$

$+d(a^3,a^6) + d(a^3,a^7) + d(a^3,a^8) + d(a^3,a^9) + d(a^3,b) +$

$d(a^3,ab) + d(a^3,a^2b) + d(a^3,a^3b) + d(a^3,a^4b) + d(a^3,a^5b) +$

$d(a^3,a^6b) + d(a^3,a^7b) + d(a^3,a^8b) + d(a^3,a^9b)$

$= 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

$= 21$

$D(a^4) = d(a^4, 1) + d(a^4, a) + d(a^4, a^2) + d(a^4, a^3) + d(a^4, a^5)$

$+d(a^4, a^6) + d(a^4, a^7) + d(a^4, a^8) + d(a^4, a^9) + d(a^4, b) +$

$d(a^4, ab) + d(a^4, a^2b) + d(a^4, a^3b) + d(a^4, a^4b) + d(a^4, a^5b) +$

$d(a^4, a^6b) + d(a^4, a^7b) + d(a^4, a^8b) + d(a^4, a^9b)$

$= 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

$= 21$

$D(a^5) = d(a^5, 1) + d(a^5, a) + d(a^5, a^2) + d(a^5, a^3) + d(a^5, a^4)$

$+d(a^5, a^6) + d(a^5, a^7) + d(a^5, a^8) + d(a^5, a^9) + d(a^5, b) +$

$d(a^5, ab) + d(a^5, a^2b) + d(a^5, a^3b) + d(a^5, a^4b) + d(a^5, a^5b) +$

$d(a^5, a^6b) + d(a^5, a^7b) + d(a^5, a^8b) + d(a^5, a^9b)$

$= 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

$= 20$

$D(a^6) = d(a^6, 1) + d(a^6, a) + d(a^6, a^2) + d(a^6, a^3) + d(a^6, a^4)$

$+d(a^6, a^5) + d(a^6, a^7) + d(a^6, a^8) + d(a^6, a^9) + d(a^6, b) +$

$d(a^6, ab) + d(a^6, a^2b) + d(a^6, a^3b) + d(a^6, a^4b) + d(a^6, a^5b) +$

$d(a^6, a^6b) + d(a^6, a^7b) + d(a^6, a^8b) + d(a^6, a^9b)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

$= 21$

$$D(a^7) = d(a^7,1) + d(a^7,a) + d(a^7,a^2) + d(a^7,a^3) + d(a^7,a^4)$$
$$+d(a^7,a^5) + d(a^7,a^6) + d(a^7,a^8) + d(a^7,a^9) + d(a^7,b) +$$
$$d(a^7,ab) + d(a^7,a^2b) + d(a^7,a^3b) + d(a^7,a^4b) + d(a^7,a^5b) +$$
$$d(a^7,a^6b) + d(a^7,a^7b) + d(a^7,a^8b) + d(a^7,a^9b)$$
$$= 1+1+1+2+1+1+1+2+1+1+1+1+1+1+1+1+$$
$$1+1+1$$
$$= 21$$

$$D(a^8) = d(a^8,1) + d(a^8,a) + d(a^8,a^2) + d(a^8,a^3) + d(a^8,a^4)$$
$$+d(a^8,a^5) + d(a^8,a^6) + d(a^8,a^7) + d(a^8,a^9) + d(a^8,b) +$$
$$d(a^8,ab) + d(a^8,a^2b) + d(a^8,a^3b) + d(a^8,a^4b) + d(a^8,a^5b) +$$
$$d(a^8,a^6b) + d(a^8,a^7b) + d(a^8,a^8b) + d(a^8,a^9b)$$
$$= 1+1+2+1+1+1+1+2+1+1+1+1+1+1+1+1+$$
$$1+1+1$$
$$= 21$$

$$D(a^9) = d(a^9,1) + d(a^9,a) + d(a^9,a^2) + d(a^9,a^3) + d(a^9,a^4) + d(a^9,a^5)$$
$$+d(a^9,a^6) + d(a^9,a^7) + d(a^9,a^8) + d(a^9,b) + d(a^9,ab) +$$
$$d(a^9,a^2b) + d(a^9,a^3b) + d(a^9,a^4b) + d(a^9,a^5b) + d(a^9,a^6b) +$$
$$d(a^9,a^7b) + d(a^9,a^8b) + d(a^9,a^9b)$$
$$= 1+2+1+1+1+1+2+1+1+1+1+1+1+1+1+1+$$
$$1+1+1$$
$$= 21$$

$$D(b) = d(b,1) + d(b,a) + d(b,a^2) + d(b,a^3) + d(b,a^4) + d(b,a^5)$$

$$+d(b,a^6)+d(b,a^7)+d(b,a^8)+d(b,a^9)+d(b,ab)+d(b,a^2b)+$$
$$d(b,a^3b)+d(b,a^4b)+d(b,a^5b)+d(b,a^6b)+d(b,a^7b)+$$
$$d(b,a^8b)+d(b,a^9b)$$
$$=1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+2+1+$$
$$1+1+1$$
$$=20$$

$$D(ab)=d(ab,1)+d(ab,a)+d(ab,a^2)+d(ab,a^3)+d(ab,a^4)$$
$$+d(ab,a^5)+d(ab,a^6)+d(ab,a^7)+d(ab,a^8)+d(ab,a^9)+$$
$$d(ab,b)+d(ab,a^2b)+d(ab,a^3b)+d(ab,a^4b)+d(ab,a^5b)+$$
$$d(ab,a^6b)+d(ab,a^7b)+d(ab,a^8b)+d(ab,a^9b)$$
$$=1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+2+$$
$$1+1+1$$
$$=20$$

$$D(a^2b)=d(a^2b,1)+d(a^2b,a)+d(a^2b,a^2)+d(a^2b,a^3)+d(a^2b,a^4)$$
$$+d(a^2b,a^5)+d(a^2b,a^6)+d(a^2b,a^7)+d(a^2b,a^8)+$$
$$d(a^2b,a^9)+d(a^2b,b)+d(a^2b,ab)+d(a^2b,a^3b)+$$
$$d(a^2b,a^4b)+d(a^2b,a^5b)+d(a^2b,a^6b)+d(a^2b,a^7b)+$$
$$d(a^2b,a^8b)+d(a^2b,a^9b)$$
$$=1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+$$
$$2+1+1$$
$$=20$$

$$D(a^3b)=d(a^3b,1)+d(a^3b,a)+d(a^3b,a^2)+d(a^3b,a^3)+d(a^3b,a^4)$$
$$+d(a^3b,a^5)+d(a^3b,a^6)+d(a^3b,a^7)+d(a^3b,a^8)+$$
$$d(a^3b,a^9)+d(a^3b,b)+d(a^3b,ab)+d(a^3b,a^2b)+$$

$d(a^3b, a^4b) + d(a^3b, a^5b) + d(a^3b, a^6b) + d(a^3b, a^7b) +$

$d(a^3b, a^8b) + d(a^3b, a^9b)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$

$1 + 2 + 1$

$= 20$

$D(a^4b) = d(a^4b, 1) + d(a^4b, a) + d(a^4b, a^2) + d(a^4b, a^3) + d(a^4b, a^4)$

$+d(a^4b, a^5) + d(a^4b, a^6) + d(a^4b, a^7) + d(a^4b, a^8) +$

$d(a^4b, a^7) + d(a^4b, b) + d(a^4b, ab) + d(a^4b, a^2b) +$

$d(a^4b, a^3b) + d(a^4b, a^5b) + d(a^4b, a^6b) + d(a^4b, a^7b) +$

$d(a^4b, a^8b) + d(a^4b, a^9b)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$

$1 + 1 + 2$

$= 20$

$D(a^5b) = d(a^5b, 1) + d(a^5b, a) + d(a^5b, a^2) + d(a^5b, a^3) + d(a^5b, a^4)$

$+d(a^5b, a^5) + d(a^5b, a^6) + d(a^5b, a^7) + d(a^5b, a^8) +$

$d(a^5b, a^9) + d(a^5b, b) + d(a^5b, ab) + d(a^5b, a^2b) +$

$d(a^5b, a^3b) + d(a^5b, a^4b) + d(a^5b, a^6b) + d(a^5b, a^7b) +$

$d(a^5b, a^8b) + d(a^5b, a^9b)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$

$1 + 1 + 1$

$= 20$

$$D(a^6b) = d(a^6b,1) + d(a^6b,a) + d(a^6b,a^2) + d(a^5b,a^3) + d(a^6b,a^4)$$
$$+ d(a^6b,a^5) + d(a^6b,a^6) + d(a^6b,a^7) + d(a^6b,a^8)$$
$$+ d(a^6b,a^9) + d(a^6b,b) + d(a^6b,ab) + d(a^6b,a^2b)$$
$$+ d(a^6b,a^3b) + d(a^6b,a^4b) + d(a^6b,a^5b) + d(a^6b,a^7b)$$
$$+ d(a^6b,a^8b) + d(a^6b,a^9b)$$
$$= 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+2+1+1+1+1+1$$
$$+1+1$$
$$= 20$$

$$D(a^7b) = d(a^7b,1) + d(a^7b,a) + d(a^7b,a^2) + d(a^7b,a^3) + d(a^7b,a^4)$$
$$+d(a^7b,a^5) + d(a^7b,a^6) + d(a^7b,a^7) + d(a^7b,a^8) +$$
$$d(a^7b,a^9) + d(a^7b,b) + d(a^7b,ab) + d(a^7b,a^2b) +$$
$$d(a^7b,a^3b) + d(a^7b,a^4b) + d(a^7b,a^5b) + d(a^7b,a^6b) +$$
$$d(a^7b,a^8b) + d(a^7b,a^9b)$$
$$= 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+2+1+1+1+$$
$$1+1+1$$
$$= 20$$

$$D(a^8b) = d(a^8b,1) + d(a^8b,a) + d(a^8b,a^2) + d(a^8b,a^3) + d(a^8b,a^4)$$
$$+d(a^8b,a^5) + d(a^8b,a^6) + d(a^8b,a^7) + d(a^8b,a^8) +$$
$$d(a^8b,a^9) + d(a^8b,b) + d(a^8b,ab) + d(a^8b,a^2b) +$$
$$d(a^8b,a^3b) + d(a^8b,a^4b) + d(a^8b,a^5b) + d(a^8b,a^6b) +$$
$$d(a^8b,a^7b) + d(a^8b,a^9b)$$
$$= 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+2+1+1+$$
$$1+1+1$$
$$= 20$$

$D(a^9b) = d(a^9b,1) + d(a^9b,a) + d(a^9b,a^2) + d(a^9b,a^3) + d(a^9b,a^4)$

$+d(a^9b,a^5) + d(a^9b,a^6) + d(a^9b,a^7) + d(a^9b,a^8) + d(a^9b,a^9) +$

$d(a^9b,b) + d(a^9b,ab) + d(a^9b,a^2b) + d(a^9b,a^3b) +$

$d(a^9b,a^4b) + d(a^9b,a^5b) + d(a^9b,a^6b) + d(a^9b,a^7b) +$

$d(a^9b,a^8b)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 +$

$1 + 1 + 1$

$= 20$

Berdasarkan gambar 4.4, diperoleh nilai eksentrisitas titik $e(x)$ pada $G_S(Q_{20})$ sebagai berikut:

$e(1) = \max\{d(1,a), d(1,a^2), d(1,a^3), d(1,a^4), d(1,a^5), d(1,a^6), d(1,a^7),$

$d(1,a^8), d(1,a^9), d(1,b), d(1,ab), d(1,a^2b), d(1,a^3b), d(1,a^4b),$

$d(1,a^5b), d(1,a^6b), d(1,a^7b), d(1,a^8b), d(1,a^9b)\}$

$= \max\{1,1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$

$= 2$

$e(a) = \max\{d(a,1), d(a,a^2), d(a,a^3), d(a,a^4), d(a,a^5), d(a,a^6), d(a,a^7),$

$d(a,a^8), d(a,a^9), d(a,b), d(a,ab), d(a,a^2b), d(a,a^3b), d(a,a^4b),$

$d(a,a^5b), d(a,a^6b), d(a,a^7b), d(a,a^8b), d(a,a^9b)\}$

$= \max\{1,1,1,2,1,1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$

$= 2$

$e(a^2) = \max\{d(a^2,1), d(a^2,a), d(a^2,a^3), d(a^2,a^4), d(a^2,a^5), d(a^2,a^6),$

$d(a^2,a^7), d(a^2,a^8), d(a^2,a^9), d(a^2,b), d(a^2,ab), d(a^2,a^2b),$

$d(a^2,a^3b), d(a^2,a^4b), d(a^2,a^5b), d(a^2,a^6b), d(a^2,a^7b), d(a^2,a^8b),$

$d(a^2,a^9b)\}$

$= \max\{1,1,2,1,1,1,1,2,1,1.1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$

$= 2$

$e(a^3) = \max\{d(a^3,1), d(a^3,a), d(a^3,a^2), d(a^3,a^4), d(a^3,a^5), d(a^3,a^6),$

$d(a^3,a^7), d(a^3,a^8), d(a^3,a^9), d(a^3,b), d(a^3,ab), d(a^3,a^2b),$

$d(a^3,a^3b), d(a^3,a^4b), d(a^3,a^5b), d(a^3,a^6b), d(a^3,a^7b), d(a^3,a^8b),$

$d(a^3,a^9b)\}$

$= \max\{1,1,2,1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$

$= 2$

$e(a^4) = \max\{d(a^4,1), d(a^4,a), d(a^4,a^2), d(a^4,a^3), d(a^4,a^5), d(a^4,a^6),$

$d(a^4,a^7), d(a^4,a^8), d(a^4,a^9), d(a^4,b), d(a^4,ab), d(a^4,a^2b),$

$d(a^4,a^3b), d(a^4,a^4b), d(a^4,a^5b), d(a^4,a^6b), d(a^4,a^7b), d(a^4,a^8b),$

$d(a^4,a^9b)\}$

$= \max\{1,2,1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$

$= 2$

$e(a^5) = \max\{d(a^5,1), d(a^5,a), d(a^5,a^2), d(a^5,a^3), d(a^5,a^4), d(a^5,a^6),$

$d(a^5,a^7), d(a^5,a^8), d(a^5,a^9), d(a^5,b), d(a^5,ab), d(a^5,a^2b),$

$d(a^5,a^3b), d(a^5,a^4b), d(a^5,a^5b), d(a^5,a^6b), d(a^5,a^7b), d(a^5,a^8b),$

$d(a^5,a^9b)\}$

$= \max\{2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$

$= 2$

$e(a^6) = \max\{d(a^6,1), d(a^6,a), d(a^6,a^2), d(a^6,a^3), d(a^6,a^4), d(a^6,a^5),$

$d(a^6,a^7), d(a^6,a^8), d(a^6,a^9), d(a^6,b), d(a^6,ab), d(a^6,a^2b),$

$d(a^6,a^3b), d(a^6,a^4b), d(a^6,a^5b), d(a^6,a^6b), d(a^6,a^7b), d(a^6,a^8b),$

$d(a^6,a^9b)\}$

$= \max\{1,1,1,1,2,1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$

$= 2$

$e(a^7) = \max\{d(a^7,1), d(a^7,a), d(a^7,a^2), d(a^7,a^3), d(a^7,a^4), d(a^7,a^5),$

$d(a^7,a^6), d(a^7,a^8), d(a^7,a^9), d(a^7,b), d(a^7,ab), d(a^7,a^2b),$

$d(a^7,a^3b), d(a^7,a^4b), d(a^7,a^5b), d(a^7,a^6b), d(a^7,a^7b),$

$d(a^7,a^8b), d(a^7,a^9b)\}$

$= \max\{1,1,1,2,1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$

$= 2$

$e(a^8) = \max\{d(a^8,1), d(a^8,a), d(a^8,a^2), d(a^8,a^3), d(a^8,a^4), d(a^8,a^5),$

$d(a^8,a^6), d(a^8,a^7), d(a^8,a^9), d(a^8,b), d(a^8,ab), d(a^8,a^2b),$

$d(a^8,a^3b), d(a^8,a^4b), d(a^8,a^5b), d(a^8,a^6b), d(a^8,a^7b),$

$d(a^8,a^8b), d(a^8,a^9b)\}$

$= \max\{1,1,2,1,1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$

$= 2$

$e(a^9) = \max\{d(a^9,1), d(a^9,a), d(a^9,a^2), d(a^9,a^3), d(a^9,a^4), d(a^9,a^5),$

$d(a^9,a^6), d(a^9,a^7), d(a^9,a^8), d(a^9,b), d(a^9,ab), d(a^9,a^2b),$

$d(a^9,a^3b), d(a^9,a^4b), d(a^9,a^5b), d(a^9,a^6b), d(a^9,a^7b), d(a^9,a^8b),$

$d(a^9,a^9b)\}$

$= max\{1,2,1,1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$

$= 2$

$e(b) = \max\{d(b,1), d(b,a), d(b,a^2), d(b,a^3), d(b,a^4), d(b,a^5), d(b,a^6),$

$d(b,a^7), d(b,a^8), d(b,a^9), d(b,ab), d(b,a^2b), d(b,a^3b), d(b,a^4b),$

$d(b,a^5b), d(b,a^6b),\ d(b,a^7b), d(b,a^8b), d(b,a^9b)\}$

$= [1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,1,1,1,1\}$

$= 2$

$e(ab) = \max\{d(ab,1), d(ab,a), d(ab,a^2), d(ab,a^3), d(ab,a^4), d(ab,a^5),$

$d(ab,a^6), d(ab,a^7), d(ab,a^8), d(ab,a^9), d(ab,b), d(ab,a^2b),$

$d(ab,a^3b), d(ab,a^4b), d(ab,a^5b), d(ab,a^6b), d(ab,a^7b),$

$d(ab,a^8b), d(ab,a^9b)\}$

$= max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,1,1,1\}$

$= 2$

$e(a^2b) = \max\{d(a^2b,1), d(a^2b,a), d(a^2b,a^2), d(a^2b,a^3), d(a^2b,a^4),$

$d(a^2b,a^5), d(a^2b,a^6), d(a^2b,a^7), d(a^2b,a^8), d(a^2b,a^9),$

$d(a^2b,b), d(a^2b,ab), d(a^2b,a^3b), d(a^2b,a^4b), d(a^2b,a^5b),$

$d(a^2b,a^6b), d(a^2b,a^7b),\ d(a^2b,a^8b), d(a^2b,a^9b)\}$

$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1.1,1,1,1,2,1,1\}$

$= 2$

$e(a^3b) = \max\{d(a^3b,1), d(a^3b,a), d(a^3b,a^2), d(a^3b,a^3), d(a^3b,a^4),$

$d(a^3b,a^5), d(a^3b,a^6), d(a^3b,a^7), d(a^3b,a^8), d(a^3b,a^9),$

$d(a^3b,b), d(a^3b,ab), d(a^3b,a^2b), d(a^3b,a^4b), d(a^3b,a^5b),$

$d(a^3b,a^6b), d(a^3b,a^7b), d(a^3b,a^8b), d(a^3b,a^9b)\}$

$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,1\}$

$= 2$

$e(a^4b) = \max\{d(a^4b,1), d(a^4b,a), d(a^4b,a^2), d(a^4b,a^3), d(a^4b,a^4),$

$d(a^4b,a^5), d(a^4b,a^6), d(a^4b,a^7), d(a^4b,a^8), d(a^4b,a^7),$

$d(a^4b,b), d(a^4b,ab), d(a^4b,a^2b), d(a^4b,a^3b), d(a^4b,a^5b),$

$d(a^4b,a^6b), d(a^4b,a^7b), d(a^4b,a^8b),\ d(a^4b,a^9b)\}$

$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2\}$

$= 2$

$e(a^5b) = \max\{d(a^5b,1), d(a^5b,a), d(a^5b,a^2), d(a^5b,a^3), d(a^5b,a^4),$

$d(a^5b,a^5), d(a^5b,a^6), d(a^5b,a^7), d(a^5b,a^8), d(a^5b,a^9),$

$d(a^5b,b), d(a^5b,ab), d(a^5b,a^2b), d(a^5b,a^3b), d(a^5b,a^4b),$

$d(a^5b,a^6b), d(a^5b,a^7b), d(a^5b,a^8b), d(a^5b,a^9b)\}$

$= max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1\}$

$= 2$

$e(a^6b) = \max\{d(a^6b,1), d(a^6b,a), d(a^6b,a^2), d(a^5b,a^3), d(a^6b,a^4),$

$d(a^6b,a^5), d(a^6b,a^6), d(a^6b,a^7), d(a^6b,a^8), d(a^6b,a^9),$

$d(a^6b,b), d(a^6b,ab), d(a^6b,a^2b), d(a^6b,a^3b), d(a^6b,a^4b),$

$d(a^6b,a^5b), d(a^6b,a^7b), d(a^6b,a^8b), d(a^6b,a^9b)\}$

$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1\}$

$= 2$

$e(a^7b) = \max\{d(a^7b,1), d(a^7b,a), d(a^7b,a^2), d(a^7b,a^3), d(a^7b,a^4),$

$d(a^7b,a^5), d(a^7b,a^6), d(a^7b,a^7), d(a^7b,a^8), d(a^7b,a^9),$

$d(a^7b,b), d(a^7b,ab), d(a^7b,a^2b), d(a^7b,a^3b), d(a^7b,a^4b),$

$d(a^7b,a^5b), d(a^7b,a^6b), d(a^7b,a^8b), d(a^7b,a^9b)\}$

$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,1,1,1,1,1,1\}$

$= 2$

$e(a^8b) = \max\{d(a^8b,1), d(a^8b,a), d(a^8b,a^2), d(a^8b,a^3), d(a^8b,a^4),$

$d(a^8b,a^5), d(a^8b,a^6), d(a^8b,a^7), d(a^8b,a^8), d(a^8b,a^9),$

$d(a^8b,b), d(a^8b,ab), d(a^8b,a^2b), d(a^8b,a^3b), d(a^8b,a^4b)$

$d(a^8b,a^5b), d(a^8b,a^6b), d(a^8b,a^7b), d(a^8b,a^9b)\}$

$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,1,1,1,1,1\}$

$= 2$

$e(a^9b) = \max\{d(a^9b, 1), d(a^9b, a), d(a^9b, a^2), d(a^9b, a^3), d(a^9b, a^4),$

$d(a^9b, a^5), d(a^9b, a^6), d(a^9b, a^7), d(a^9b, a^8), d(a^9b, a^9),$

$d(a^9b, b), d(a^9b, ab), d(a^9b, a^2b), d(a^9b, a^3b), d(a^9b, a^4b),$

$d(a^9b, a^5b), d(a^9b, a^6b), d(a^9b, a^7b), \ d(a^9b, a^8b)\}$

$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,1,1,1,1\}$

$= 2$

Berdasarkan uraian eksentrisitas tersebut disimpulkan bahwa eksentrisitas setiap titik pada graf invers dari grup quaternion diperumum $G_S(Q_{20})$ adalah $e(x) = 2. \forall x \in V(G_S(Q_{20}))$.

Selanjutnya dengan diperoleh nilai jumlah jarak dan eksentrisitas setiap titik pada $G_S(Q_{20})$, maka dapat dihitung jumlah jarak eksentrik dari $G_S(Q_{20})$ sebagai berikut:

$\xi^d(G_S(Q_{20})) = \sum_{v \in V(G_S(Q_{20}))} e(v)D(v)$

$= (e(1)D(1)) + (e(a)D(a)) + (e(a^2)D(a^2)) + (e(a^3)D(a^3)) +$

$(e(a^4)D(a^4)) + (e(a^5)D(a^5)) + (e(a^6)D(a^6)) +$

$(e(a^7)D(a^7)) + (e(a^8)D(a^8)) + (e(a^9)D(a^9)) + (e(b)D(b)) +$

$(e(ab)D(ab)) + (e(a^2b)D(a^2b)) + (e(a^3b)D(a^3b)) +$

$(e(a^4b)D(a^4b)) + (e(a^5b)D(a^5b)) \ + (e(a^6b)D(a^6b)) +$

$(e(a^7b)D(a^7b)) + (e(a^8b)D(a^8b)) + (e(a^9b)D(a^9b))$

$= (2 \times 20) + (2 \times 21) + (2 \times 21) + (2 \times 21) + (2 \times 21) +$

$(2 \times 20) + (2 \times 21) + (2 \times 21) + (2 \times 21) + (2 \times 21) +$

$(2\times 20)+(2\times 20)+(2\times 20)+(2\times 20)+(2\times 20)+$

$(2\times 20)+(2\times 20)+(2\times 20)+(2\times 20)+(2\times 20)$

$=(12\times 40)+(8\times 42)$

$=816.$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa nilai jumlah jarak eksentrik pada graf invers dari grup quaternioun diperumum $G_S(Q_{20})$ adalah 816. Indeks jumlah jarak eksentrik terhubung sebagai berikut:

$$\xi^{sv}\big(G_S(Q_{20})\big)=\sum_{v\in V(G_S(Q_{20}))}\frac{e(v)D(v)}{\deg(v)}$$

$$=\left(\frac{e(1)D(1)}{\deg(1)}\right)+\left(\frac{e(a)D(a)}{\deg(a)}\right)+\left(\frac{e(a^2)D(a^2)}{\deg(a^2)}\right)+\left(\frac{e(a^3)D(a^3)}{\deg(a^3)}\right)+$$

$$\left(\frac{e(a^4)D(a^4)}{\deg(a^4)}\right)+\left(\frac{e(a^5)D(a^5)}{\deg(a^5)}\right)+\left(\frac{e(a^6)D(a^6)}{\deg(a^6)}\right)+\left(\frac{e(a^7)D(a^7)}{\deg(a^7)}\right)+$$

$$\left(\frac{e(a^8)D(a^8)}{\deg(a^8)}\right)+\left(\frac{e(a^9)D(a^9)}{\deg(a^9)}\right)+\left(\frac{e(b)D(b)}{\deg(b)}\right)+\left(\frac{e(ab)D(ab)}{\deg(ab)}\right)+$$

$$\left(\frac{e(a^2b)D(a^2b)}{\deg(a^2b)}\right)+\left(\frac{e(a^3b)D(a^3b)}{\deg(a^3b)}\right)+\left(\frac{e(a^4b)D(a^4b)}{\deg(a^4b)}\right)+$$

$$\left(\frac{e(a^5b)D(a^5b)}{\deg(a^5b)}\right)+\left(\frac{e(a^6b)D(a^6b)}{\deg(a^6b)}\right)+\left(\frac{e(a^7b)D(a^7b)}{\deg(a^7b)}\right)+$$

$$\left(\frac{e(a^8b)D(a^8b)}{\deg(a^8b)}\right)+\left(\frac{e(a^9b)D(a^9b)}{\deg(a^9b)}\right)$$

$$=\left(\frac{2\times 20}{18}\right)+\left(\frac{2\times 21}{17}\right)+\left(\frac{2\times 21}{17}\right)+\left(\frac{2\times 21}{17}\right)+\left(\frac{2\times 21}{17}\right)+\left(\frac{2\times 20}{18}\right)+$$

$$\left(\frac{2\times 21}{17}\right)+\left(\frac{2\times 21}{17}\right)+\left(\frac{2\times 21}{17}\right)+\left(\frac{2\times 21}{17}\right)+\left(\frac{2\times 20}{18}\right)+\left(\frac{2\times 20}{18}\right)+$$

$$\left(\frac{2\times 20}{18}\right)+\left(\frac{2\times 20}{18}\right)+\left(\frac{2\times 20}{18}\right)+\left(\frac{2\times 20}{18}\right)+\left(\frac{2\times 20}{18}\right)+\left(\frac{2\times 20}{18}\right)+$$

$$\left(\frac{2\times 20}{18}\right)+\left(\frac{2\times 20}{18}\right)$$

$$=\left(12\times\frac{40}{18}\right)+\left(8\times\frac{42}{17}\right)$$

$$=\frac{816}{306}=\frac{8}{3}.$$

Dari proses perhitungan masing-masing eksentrisitas titik dan jumlah jarak titik graf invers dari grup quaternion diperumum. Maka diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 4.5 Tabel Eksentrisitas Titik dan Jumlah Jarak Titik

n	$G_S(Q_{4n})$	Eksentrisitas Titik	Jumlah Jarak Titik
2	$G_S(Q_8)$	$e(u) = 2,$ $\forall u \in V\big(G_S(Q_{20})\big)$	$D(u) = 8, \forall u \in S$ $D(u) = 8, \forall u \notin S$
3	$G_S(Q_{12})$	$e(u) = 2,$ $\forall u \in V\big(G_S(Q_{12})\big)$	$D(u) = 12, \forall u \in S$ $D(u) = 13, \forall u \notin S$
4	$G_S(Q_{16})$	$e(u) = 2,$ $\forall u \in V\big(G_S(Q_{16})\big)$	$D(u) = 16, \forall u \in S$ $D(u) = 17, \forall u \notin S$
5	$G_S(Q_{20})$	$e(u) = 2,$ $\forall u \in V\big(G_S(Q_{20})\big)$	$D(u) = 20, \forall u \in S$ $D(u) = 21, \forall u \notin S$

Dari tabel 4.5, diperoleh suatu dugaan sebagai berikut:

$$e(u) = 2, \forall u \in V\big(G_S(Q_{4n})\big)$$

$\forall n \geq 2$, $D(u) = 4 \cdot n$, dan $\forall n \in S$,$D(u) = 4 \cdot n + 1$, $\forall n \notin S$.

Adapun beberapa pengamatan pada graf invers dari grup quaternion diperumum $Q_8, Q_{12}, Q_{16}, Q_{20}$, maka diperoleh lemma graf invers dari grup quaternion diperumum $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ sebagai berikut

Lemma 1

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$**.**

Misal $S \subseteq Q_{4n}$ dan $S = \{x \in Q_{4n} | x^{-1} \neq x\}$. Maka $S = Q_{4n} \setminus \{1, a^n\}$.

Bukti:

$1^{-1} = 1$ karena $1 \cdot 1 = 1$.

$(a^n)^{-1} = a^n$ karena $a^n \cdot a^n = a^{2n} = 1$.

Misal $v \in Q_{4n} \setminus \{1, a^n\}$

Kasus 1, $v = a^i$ untuk suatu $i \in \{1,2, \dots, 2n-1\}, i \neq n$.

Andaikan $v \cdot v = a^i \cdot a^i = a^{2i} = 1$, maka $2i = 0$ jika dan hanya jika $i = 0$ atau $i = n$. Kontradiksi $i \in \{1,2, \dots, 2n-1\} \setminus \{n\}$. Dengan demikian $a^i \in S$ untuk setiap $i \in \{1,2, \dots, 2n-1\}, i \neq n$.

Kasus 2, $v = a^i b$ untuk suatu $i \in \{0,1,2, \dots, 2n-1\}$.

Jika $v = a^i b$ untuk suatu $i \in \{0,1,2, \dots, 2n-1\}$, maka

$$\begin{aligned} v \cdot v &= a^i b \cdot a^i b \\ &= a^i b a^i b^{-1} b b \\ &= a^i a^{-i} b^2 \\ &= b^2 \end{aligned}$$

Sehingga $(a^i b)^{-1} \neq a^i b$ untuk setiap $i \in \{0,1,2, \dots, 2n-1\}$.

Jadi, terbukti bahwa $S = Q_{4n} \setminus \{1, a^n\}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Selanjutnya akan dibuktikan lemma tentang elemen di $\left(G_s(Q_{4n})\right)$ yang terhubung langsung dengan $\{1, a^n\}$ sebagai berikut

Lemma 2

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $\{1, v\} \in E\left(G_s(Q_{4n})\right)$, untuk setiap $v \in V\big(G_s(Q_{4n})\big) \setminus \{1, a^n\}$, dan $\{b, v\} \in E\big(G_s(Q_{4n})\big)$, untuk setiap $v \in V\big(G_s(Q_{4n})\big) \setminus \{b, a^n b\}$.

Bukti:

Misal $v \in S$, maka $v \cdot 1 = v \in S$.

Misal $v \in S$, akan ditunjukkan bahwa $v \in Q_{4n} \setminus \{b, a^n b\}$

Andaikan $b \cdot v \notin S$, maka $b \cdot v = 1$ atau $b \cdot v = a^n$.

Jika $b \cdot v = 1$, maka $v = a^n b$ karena

$$\begin{aligned} b \cdot a^n b &= b \cdot b^2 \cdot b \\ &= b^2 \cdot b^2 \\ &= a^n \cdot a^n \\ &= a^{2n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Kontradiksi $v \notin \{b, a^n b\}$.

Jika $b \cdot v = a^n$, maka $v = b$ karena

$$\begin{aligned} b \cdot v = a^n &\Leftrightarrow b^2 \cdot b \cdot b \cdot v = a^n \\ &\Leftrightarrow \qquad v = bb^2 a^n \\ &\qquad\qquad = b a^n a^n \\ &\qquad\qquad = be \\ &\qquad\qquad = b \end{aligned}$$

Kontradiksi $v \notin \{b, a^n b\}$.

Dengan demikian untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $\{1, v\} \in E(G_s(Q_{4n}))$ untuk setiap $v \in V\big(G_s(Q_{4n})\big) \setminus \{1, a^n\}$, dan $\{b, v\} \in E(G_s(Q_{4n}))$, untuk setiap $v \in V\big(G_s(Q_{4n})\big) \setminus \{b, a^n b\}$.

Selanjutnya akan dibangun lemma tentang jarak disetiap titik sebagai berikut karena akan dibutuhkan untuk membuktikan lemma selanjutnya yaitu lemma eksentrisitas titik.

Lemma 3

Misal $S = Q_{4n} \setminus \{1, a^n\}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika $u, v \in V\big(G_S(Q_{4n})\big)$, maka $d(u, v) \leq 2$.

Bukti:

Misal $u, v \in V\big(G_S(Q_{4n})\big)$. Jika $\{v, u\} \in E\big(G_s(Q_{4n})\big)$, maka $d(u, v) = 1$. Jika $\{u, v\} \notin E\big(G_S(Q_{4n})\big)$, maka dari lemma 2, u dan v terhubung langsung dengan 1 atau b. Sehingga terdapat lintasan $u - 1 - v$ atau $u - b - v$. Dengan demikian, $d(u, v) \leq 2$.

Catatan:

Jika $u \in \{1, a^n\}$ maka u tidak terhubung langsung dengan 1 karena 1 terhubung langsung dengan semua titik di $G_S(Q_{4n})$ kecuali 1 dan a^n. Jadi $u \in \{1, a^n\}$ terhubung langsung dengan b.

Jika $a^n b$ tidak terhubung langsung dengan b maka $a^n b$ terhubung langsung dengan 1, karena jika $a^n \cdot b \in S$, maka $v = b$ karena $a^n \cdot v = a^n \cdot b$. Jika $a^n \cdot a^n b \in S$ maka $v = a^n b$ karena $a^n \cdot a^n b = a^{2n} b = b$.

Jadi terbukti bahwa misal $S = Q_{4n} \setminus \{1, a^n\}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika $u, v \in V(G_S(Q_{4n}))$, maka $d(u, v) \leq 2$.

Selanjutnya akan dibuktikan lemma tentang eksentrisitas titik sebagai berikut

Lemma 4

Misal $S = Q_{4n} \setminus \{1, a^n\}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. $e(u) = 2$, $\forall u \in V\big(G_S(Q_{4n})\big)$.

Bukti:

Karena tidak ada $v \in V\big(G_S(Q_{4n})\big)$ yang terhubung langsung dengan semua titik di $G_S(Q_{4n})$, maka

$$e(u) \geq 2 \;\forall u \in V\big(G_S(Q_{4n})\big) \tag{1}$$

Dari lemma 3 diperoleh

$$e(u) \leq 2 \;\forall u \in V\big(G_S(Q_{4n})\big) \tag{2}$$

Dengan demikian $e(u) = 2$.

Selanjutnya akan dibangun lemma tentang banyaknya titik yang tidak terhubung langsung dengan $a^i \in V\big(G_S(Q_{4n})\big)$ sebagai berikut, karena akan dibutuhkan untuk membuktikan lemma selanjutnya yaitu lemma jumlah jarak titik.

Lemma 5

Banyaknya titik yang tidak terhubung langsung dengan $a^i \in V\big(G_S(Q_{4n})\big)$ untuk setiap $i \in \{0,1, \ldots \ldots, 2n-1\} \setminus \{1, a^n\}$ adalah 2, yaitu titik a^{n-i} dan titik a^{2n-i} untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Bukti:

Misal $i, j \in \{0,1, \ldots \ldots, 2n-1\} \setminus \{1, a^n\}$ dan $i \neq j$.

Andaikan $a^i \cdot a^j \notin S$, maka $a^i \cdot a^j = 1$ atau $a^i \cdot a^j = a^n$

Jika $a^i \cdot a^j = 1$, maka

$$
\begin{aligned}
a^i \cdot a^j &= a^{i+j} = 1 \\
\Leftrightarrow i + j &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad j &= -i \\
&= 2n - i
\end{aligned}
$$

Jika $a^i \cdot a^j = a^n$, maka

$$
\begin{aligned}
a^i \cdot a^j &= a^{i+j} = a^n \\
\Leftrightarrow i + j &= n \\
\Leftrightarrow \quad j &= n - i
\end{aligned}
$$

Jika $a^i \cdot a^j b = a^{i+j} b$, maka $a^i \cdot a^j b = a^{i+j} b \in S$.

Dengan demikian banyaknya titik yang tidak terhubung langsung dengan $a^i \in V\big(G_S(Q_{4n})\big)$ untuk setiap $i \in \{0,1, \dots \dots, 2n-1\} \setminus \{1, a^n\}$ adalah 2, yaitu titik a^{n-i} dan titik a^{2n-i} untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Selanjutnya akan dibangun lemma tentang banyaknya titik yang tidak terhubung langsung dengan $a^i b \in V\big(G_S(Q_{4n})\big)$ sebagai berikut, karena akan dibutuhkan untuk membuktikan lemma selanjutnya yaitu lemma jumlah jarak eksentrik.

Lemma 6

Banyaknya titik yang tidak terhubung langsung dengan $a^i b$

untuk setiap $i \in \{0,1, \dots \dots, 2n-1\} \setminus \{1, a^n\}$ adalah 1 titik yaitu $v = a^{i+n} b$.

Bukti:

Misal $i, j \in \{0,1, \dots \dots, 2n-1\} \setminus \{1, a^n\}$ dan $i \neq j$.

Andaikan $a^i b \cdot a^j b \notin S$, maka $a^i b \cdot a^j b = a^{i+n} b$.

Jika $a^i b \cdot a^j b = a^{i+n} b$, maka

$$a^i b \cdot a^j b = a^{i+j} b = a^{i+n} b$$

$$\Leftrightarrow i + j = n$$

$$\Leftrightarrow \quad j = n - i = i + n$$

Dengan demikian Banyaknya titik yang tidak terhubung langsung dengan $a^i b$ untuk setiap $i \in \{0,1, \ldots \ldots, 2n-1\} \setminus \{1, a^n\}$ adalah 1 titik yaitu $v = a^{i+n} b$.

Selanjutnya akan dibangun lemma tentang jumlah jarak titik sebagai berikut, karena akan dimasukkan pada teorema indeks jumlah jarak eksentrik graf invers dari grup quaternion diperumum.

Lemma 7

$D(1) = 4n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

$D(a^i) = 4n + 1$ untuk setiap $i \in \{1, \ldots \ldots, 2n-1\} \setminus \{1, a^n\}$ dan $D(a^i b) = 4n$ untuk setiap $i \in \{0,1, \ldots \ldots, 2n-1\}$.

Bukti:

1. Titik 1 terhubung langsung dengan a^i untuk setiap $i \in \{1, \ldots \ldots, 2n-1\} \setminus \{n\}$ dan 1 terhubung langsung dengan $a^i b$ untuk setiap $i \in \{0,1, \ldots \ldots, 2n-1\}$ sehingga diperoleh:

$$D(1) = d(1, a^n) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{2n-1} d(1, a^i) + \sum_{i=0}^{2n-1} d(1, a^i \mathrm{b})$$

$$= 2 + 2n - 2 + 2n$$

$$= 4n.$$

2. Titik a^i terhubung langsung dengan titik 1 untuk setiap

   $i \in \{1, \dots \dots, 2n-1\} \setminus \{n\}$ dan titik a^i terhubung langsung dengan titik $a^i b$ untuk setiap $i \in \{0,1, \dots \dots, 2n-1\}$. Sehingga diperoleh:

$$D(a^i) = d(a^i, 1) + \sum_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^{2n-1} d(a^i, a^k) + d(a^i, a^n) + \sum_{j=0}^{2n-1} d(a^i, a^j \mathrm{b})$$

$$= 1 + (2n-1) + 1 + 2n$$

$$= 4n + 1.$$

3. Titik $a^i b$ terhubung langsung dengan titik 1 untuk setiap

   $i \in \{0,1, \dots \dots, 2n-1\}$ dan titik $a^i b$ terhubung langsung dengan titik a^i untuk setiap $i \in \{0,1, \dots \dots, 2n-1\}$. Sehingga diperoleh

$$D(a^i b) = d(a^i b, 1) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{2n-1} d(a^i b, a^i) + \sum_{i=0}^{2n-1} d(a^i b, a^n)$$

$$= 2 + 2n - 2 + 2n$$

$$= 4n.$$

4. Titik a^n terhubung langsung dengan titik a^i untuk setiap

   $i \in \{1, \dots \dots, 2n-1\} \setminus \{n\}$ dan titik a^n terhubung langsung dengan titik $a^i b$ untuk setiap $i \in \{0,1, \dots \dots, 2n-1\}$. Sehingga diperoleh:

$$D(a^i) = d(a^n, 1) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{2n-1} d(a^n, a^i) + \sum_{j=0}^{2n-1} d(a^n, a^i \mathrm{b})$$

$$= 2 + 2n - 2 + 2n$$

$$= 4n.$$

Berdasarkan lemma eksentrisitas titik dan lemma jumlah jarak titik, diperoleh Teorema jumlah jarak eksentrik sebagai berikut

Teorema 1

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $S = Q_{4n} \setminus \{1, a^n\}$. Jumlah jarak eksentrik graf invers dari grup quaternion diperumum adalah

Bukti:

$$\begin{aligned}
\xi^d\left(G_S(Q_{4n})\right) &= \sum_{v\in V\left(G_S(Q_{4n})\right)} e(v)D(v) \\
&= e(1)D(1) + e(a^n)D(a^n) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{2n-1} e(a^i)D(a^i) + \sum_{\substack{i=0\\ i\neq n}}^{2n-1} e(a^ib)D(a^ib) \\
&= 2(4n) + 2(4n) + 2(2n-2)(4n-1) + 2(4n)(2n-1) \\
&= 32n^2 - 12n + 4
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dibangun teorema tentang indeks jumlah jarak eksentrik graf invers dari grup quaternion diperumum yang diperoleh dari teorema jumlah jumlah jarak eksentrik graf invers dari grup quaternion diperumum sebagai berikut

Teorema 2

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $S = Q_{4n} \setminus \{1, a^n\}$. Indeks jumlah jarak eksentrik graf invers dari grup quaternion diperumum adalah

Bukti:

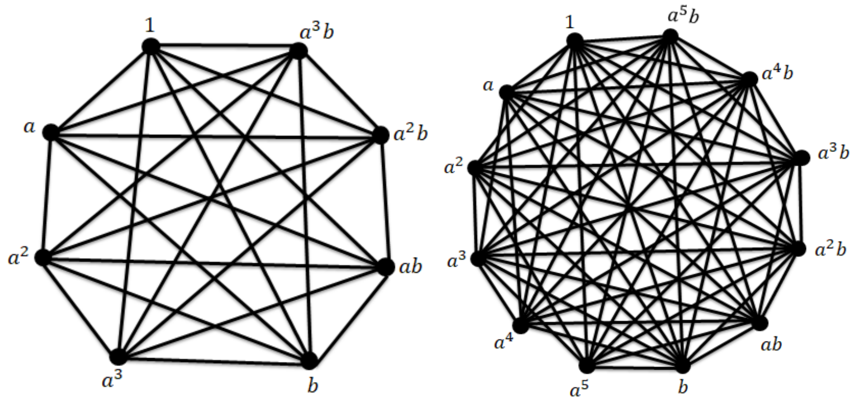
$$\begin{aligned}
\xi^{sv}\left(G_S(Q_{4n})\right) &= \sum_{v\in V\left(G_S(Q_{4n})\right)} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} \\
&= e(1)D(1) + e(a^n)D(a^n) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{2n-1} \frac{e(a^i)D(a^i)}{\deg(a^i)} + \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{e(a^ib)D(a^ib)}{\deg(a^ib)} \\
&= \frac{2(4n)}{4n-2} + \frac{2(4n)}{4n-2} + \frac{2(4n+1)}{4n-3} \times (2n-2) + \frac{2(4n)}{4n-2} \times (2n-1) \\
&= \frac{64n^3 - 48n^2 + 8n + 4}{8n^2 - 10n + 3} \\
&= \frac{4(4n-1)(4n^2-2n-1)}{(2n-1)(4n-3)}
\end{aligned}$$

4.2 Silaturrahim dan Teori Graf

Sebagaimana yang tercantum dalam surat Al-Isra' ayat 26, bahwa anjuran di bumi ini untuk menjalin hubungan baik satu sama lain dan tidak menghambur-hamburkan hartanya secara boros. Cara yang dapat dilakukan untuk menyambung tali silaturrahim atau mengikat ikatan persaudaraan dan tidak menghambur-hamburkan hartanya secara boros yaitu dengan memberikan hak-hak kepada sanak saudara, kepada orang miskin, dan kepada orang dalam perjalanan. Selain itu, memperlakukan, memuliakan kedua orang tua dengan baik juga dapat dikatakan dengan menyambung tali silaturrahim atau mengikat ikatan persaudaraan dan tidak menghambur-hamburkan hartanya secara boros. Salah satu anjuran dalam Islam yaitu agar setiap manusia untuk berbuat baik satu sama lain. Itulah sebabnya manusia dianjurkan untuk membangun tali silaturrahim atau membangun hubungan persaudaraan dengan baik dalam kehidupan sehari-hari.

Jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik yang terhubung haruslah dapat ditemukan di graf terhubung. Jika suatu graf tidak terhubung, maka jumlah jarak eksentrik tidak dapat ditemukan di graf tersebut. Oleh karena itu, hubungan antara suatu titik dengan titik yang lain dalam graf membutuhkan sisi-sisi untuk membuat graf tersebut menjadi graf terhubung. Semakin banyak titik yang digunakan dalam graf, semakin banyak juga sisi yang menghubungkan antara satu titik dengan titik yang lainnya dalam graf. Akibatnya, jumlah jarak eksentrik pada graf lebih besar juga.

Sama halnya dengan menyambung tali persaudaraan atau menyambung tali silaturrahim, semakin banyak koneksi untuk menghubungkan tali persaudaraan atau menghbungkan tali silaturrahim, maka hidupnya akan semakin barokah, rizkinya akan semakin lancar, dan umurnya akan semakin panjang.



Gambar 4.5 $G_S(Q_8)$ dan $G_S(Q_{12})$

Misalnya pada gambar 4.5 terdapat representasi relasi dalam bentuk graf. Asumsikan bahwa titik 1 terhubung dengan titik yang lain yaitu titik $a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b$ dan titik-titik yang lain dalam graf. maka titik 1 dan titik-titik yang lainnya pada graf invers $G_S(Q_8)$ atau graf invers $G_S(Q_{12})$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika keduanya saling menyambung persaudaraan atau menyambung tali silaturrahim. Graf invers $G_S(Q_{12})$ memiliki nilai jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik yang lebih besar dari graf invers $G_S(Q_8)$, karena Graf invers $G_S(Q_{12})$ memiliki lebih banyak elemen dan keterhubungan daripada graf invers $G_S(Q_8)$.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari hasil dan pembahasan pada penelitian ini adalah formula indeks jumlah jarak eksentrik graf invers dari grup quaternion diperumum dengan $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ sebagai berikut

$$\xi^{sv}\left(G_S(Q_{4n})\right) = \sum_{v \in V\left(G_S(Q_{4n})\right)} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} = \frac{4(4n-1)(4n^2-2n-1)}{(2n-1)(4n-3)}.$$

5.2 Saran

Penelitian ini membahas mengenai indeks jumlah jarak eksentrik graf invers dari grup quaternion diperumum. Penulis berharap kepada penelitian selajutnya untuk meneliti mengenai indeks jumlah jarak eksentrik diperoleh dari graf dan grup yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2019. "Some Topological Indices of Subgroup Graph of Symmetric Group." *Mathematics and Statistics* 7(4):98–105. Https://doi.org/10.13189/ms.2019.070402

Abdussakir, A., E. Susanti, N. Hidayati, and N. M. Ulya. 2019. "Eccentric Distance Sum and Adjacent Eccentric Distance Sum Index of Complement of Subgroup Graphs of Dihedral Group." *Journal of Physics: Conference Series* 1375(1). Https://doi.org/10.1088/1742-6596/1375/1/012065

Alfuraidan, Monther R., and Yusuf F. Zakariya. 2017. "Inverse Graphs Associated with Finite Groups." *Electronic Journal of Graph Theory and Applications* 5(1):142–54. Https://doi.org/10.5614/ejgta.2017.5.1.14

Al-Mahalli Jamaluddin, and Al-Suyuthi Jamaluddin, 2007. Tafsir Jalalain: Tafsir Al-Qur'an Al-'Adzim. Surabaya:Al Haramain jaya Indonesia

Chartrand, Gary, Linda Lesniak, and Ping Zhang. 2016. *Graphs & Digraphs, Sixth Edition*.

Departemen Agama RI. 2006. Al-Qur'an Al-Karim dan Terjemah Bahasa Indonesia . Kudus: Menara Kudus

Dummit, David S. and Foote Richard M. (2004). *Abstract Algebra Third Edition*. United States of America:Brooks/Cole Cengage Learning.

Ejima, O., K. O. AREMU, and A. Audu. 2020. "Energy of Inverse Graphs of Dihedral and Symmetric Groups." *Journal of the Egyptian Mathematical Society* 28(1). Https://doi.org/10.1186/s42787-020-00101-8

Gallian, Joseph A. 2017. "*Contemporary Abstract Algebra, Ninth Edition*.". Canada: Nelson Education, Ltd.

Gilbert, L. and Gilbert, J. 2015. *Elements of Modern Algebra Eighth Edition.* Stamford: Nelson Education, Ltd.

Hua, Hongbo, Hongzhuan Wang, and Xiaolan Hu. 2018. "On Eccentric Distance Sum and Degree Distance of Graphs." *Discrete Applied Mathematics* 250:262–75. Https://doi:10.1016/j.dam.2018.04.011

Ma, Xuan Long, Hua Quan Wei, and Guo Zhong. 2013. "The Cyclic Graph of a Finite Group." *Algebra* 2013:1–7. Https://doi:10.1155/2013/107265

Murni, Agung Efriyo Hadi, Ifkra Febry, and Abdussakir. 2020. “Anti-Adjacency and Laplacian Spectra of Inverse Graph of Group of Integers modulo N.” *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 807(1). Https://doi:10.1088/1757-899X/807/1/012033

Munir, Rinaldi. 2016. "Matematika Diskrit" Revisi keenam. Bandung: Informatika Bandung.

Nayaka, S. R. and S. Purushothama. 2017. “The Open Neighborhood Number of a Graph.” 1(6):52–54.

Shihab, M. Quraish. 2002. Tafsir Al-Misbah:pesan, kesan dan keserasian Al-Quran. Jakarta: Lentera Hati

Sripatmi, Arjudin, dan Dwi Novitasari. 2022. "Aljabar Abstrak Edisi 2". Lombok Tengah: Pusat Pengembangan Pendidikan dan Penelitian Indonesia.

Umbara, Rian Febrian Salman, A. N.M. Putri, Pritta Etriana. 2023. *"On the inverse graph of a finite group and its rainbow connection number"*. Vol. 11. Issue 1. hal. 135-147. Https://doi:10.1137/19M1258013

West, Douglas Brent. 2012. “Introduction to Graph Theory (2nd Edition).” *Vaccine* 43(2):383.

RIWAYAT HIDUP

Uzlifatil Jannah, lahir di Gresik pada tanggal 13 Juli 1999. Biasa dipanggil Eli. Ia tinggal di jalan AMD 02 RT 03 RW 01 Desa Morobakung Kecamatan Manyar Kabupaten Gresik. Putri kedua dari 3 bersaudara dari pasangan bapak Drs. Zainuri dan Ibu Husnul Latifah.

Pendidikan dasar ditempuh di MI Roudlotut Tholibin Morobakung, lulus pada tahun 2011. Kemudian melanjutkan sekolah di SMP Al-Ishlah Bungah Gresik, lulus pada tahun 2014. Kemudian melanjutkan pendidikan di MA Al-Ishlah Bungah Gresik dan menempuh pendidikan nonformal di Pondok Pesantren Al-Ishlah Bungah Gresik dan lulus pada tahun 2017. Selanjutnya pada tahun 2017, melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan mengambil Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi. Selama menjadi mahasiswa tahun 2018-2022, menempuh pendidikan nonformal di Pondok Pesantren Putri Al-Hikmah Al-Fatimiyyah dan aktif menjadi pengurus Madrasah Diniyah Al-Hikmah.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Uzlifatil Jannah
NIM : 176100020
Fakultas / Program Studi : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Indeks Jumlah Jarak Eksentrik Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum
Pembimbing I : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	30 September 2022	Konsultasi Judul dan Bab 1	1.
2	4 Oktober 2022	Konsultasi Revisi Bab 1	2.
3	5 Oktober 2022	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4	10 Oktober 2022	Konsultasi Revisi Bab I, II, dan III	4.
5	13 Oktober 2022	Konsultasi Kajian Agama	5.
6	16 Oktober 2022	Konsultasi Revisi Kajian Agama	6.
7	18 Oktober 2022	ACC Seminar Proposal	7.
8	22 November 2022	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	8.
9	6 Desember 2022	Konsultasi Bab IV dan V	9.
10	16 Desember 2022	Revisi Bab IV dan V	10.
11	25 Januari 2023	Konsultasi Kajian Agama	11.
12	30 Januari 2023	Konsultasi Revisi Kajian Agama	12.
13	16 Februari 2023	ACC Seminar Hasil	13.
14	12 Maret 2023	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	14.
15	15 Maret 2023	Konsultasi Keseluruhan	15.
16	20 Maret 2023	ACC Sidang Skripsi	16.
17	08 Mei 2023	ACC Keseluruhan	17.

Malang, 08 Mei 2023
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005