

# CAPÍTULO 5

## Ecuación fundamental de Euler

*Arturo Rivetti y Cecilia Lucino*

### Planteo analítico

Los patrones de escurrimiento reales dentro de una bomba centrífuga son tridimensionales, lo cual hace compleja una descripción general de las trayectorias. En cambio, si se asume que el escurrimiento es unidimensional, es sencillo establecer la conexión entre la transferencia de energía y el 'diseño hidráulico' de impulsores y estatores o pasajes estacionarios de estas máquinas, a los fines de comprender cómo se produce la transformación de energía. De hecho, el análisis unidimensional permite deducir en forma satisfactoria (aunque con limitaciones) las características operativas de una bomba, por ejemplo: potencia y salto respecto al caudal, en las condiciones óptimas o de diseño. En las condiciones de operación que se alejan del punto de diseño, en cambio, el análisis unidimensional solo permite anticipar cualitativamente qué tipo de distorsiones tendrá el escurrimiento en comparación con la situación de diseño.

Planteando hipótesis de fluido ideal (es decir: no viscoso, incompresible e irrotacional); considerando que la cantidad de álabes es infinita; y que el escurrimiento es unidimensional, de manera que las trayectorias 'siguen el perfil de los álabes, se logra obtener una descripción muy útil de aspectos relevantes del diseño y funcionamiento de las turbomáquinas en general y las bombas en particular, como, por ejemplo: encontrar una ecuación general que es válida para las turbomáquinas hidráulicas, diferenciar los distintos diseños de acuerdo a la trayectoria del flujo, aplicar la teoría de la similitud a través de las velocidades características y describir estados puntuales de operación (en el punto de diseño y fuera de él).

La mayor o menor representatividad de las hipótesis simplificadoras depende de qué tan alejadas estén las condiciones reales de funcionamiento respecto de las hipótesis. Por ejemplo, cuanto menor es la cantidad de álabes, más se aleja el comportamiento de la hipótesis de escurrimiento unidimensional, ya que entre un álabe y su consecutivo, las trayectorias no son homogéneas sino que se asimilan a las líneas de corriente que rodean a un cuerpo sumergido en una corriente (teoría de la sustentación).

El mecanismo de transferencia del par (o potencia) del eje al fluido que fluye dentro del impulsor es fundamentalmente dinámico; es decir: está relacionado con cambios en la velocidad del fluido. Esto requiere la introducción de la segunda ley de Newton que, planteada en forma de cantidad de movimiento angular, permite explicar de qué manera se le entrega momento cinético al fluido, a través de lo que se conoce como la ecuación fundamental de Euler. Las velocidades

del fluido en la entrada y salida del impulsor se representan con la composición de los triángulos de velocidades, definidos por las componentes que expresan el momento de la cantidad de movimiento (o momento cinético).

De la teoría del volumen de control sabemos que, si la masa se conserva (no hay fugas de caudal por los contornos), en régimen estacionario, la variación de la cantidad de movimiento en el volumen de control es solo función de los estados final e inicial. En el caso de la bomba, la superficie de control que plantearemos está definida por los contornos sólidos y por las secciones de salida y entrada del flujo. El estado final corresponde a la salida del rotor, cuando ya adquirió cantidad de movimiento angular, y el inicial corresponde al ingreso al rotor (podría considerarse también un canal de escurrimiento entre dos álabes consecutivos como volumen de control y generalizarlo al conjunto).

La cantidad de movimiento angular que adquiere el fluido surge del torque resultante de las fuerzas exteriores aplicado al eje. Entonces, bajo las hipótesis planteadas, se puede escribir:

$$\sum T = \int_S \rho r C_u dQ \quad (5.1)$$

Donde  $\sum T$  es la sumatoria de torques aplicados al eje de rotación, resultante de fuerzas exteriores aplicadas al rotor. Dado que no hay otras fuerzas aplicadas, el torque es el entregado por el motor en el eje:

$$\sum (F_{ext} r_i) = T \quad (5.2)$$

El segundo miembro de la Ec. 5.1 denota una integración sobre la superficie exterior del volumen de control  $V_c$  indicado en celeste en la vista en planta (Fig. 5.1) que, para el caso de bombas totalmente radiales, está contenido entre dos superficies anulares perpendiculares al eje. Esta integral expresa el momento de la cantidad de movimiento que adquiere el fluido que pasa por el rotor. Se considera que no hay otras fuerzas que produzcan torque efectivo en el eje además de la proveniente de la potencia mecánica entregada por el motor.

La teoría del volumen de control permite obtener el resultado de la integral de la Ec. 5.2 como la diferencia entre el momento cinético en la sección de salida del rotor y en la entrada, siendo que el caudal es constante. Asumiendo que el escurrimiento es unidimensional, el diferencial de torque aplicado a una línea de corriente es idénticamente absorbido por todas las líneas de corriente de la superficie de escurrimiento que la contiene.

El momento angular del flujo a la salida del rotor estará dado por la componente de la velocidad absoluta que hace momento y se expresa como  $C_{u2}r_2$ ; en el ingreso, será  $C_{u1}r_1$  donde  $r_1$  y  $r_2$  son los radios a los cuales se produce el par para las respectivas componentes tangenciales de  $\vec{C}$  (Fig. 5.2):

$$T = \rho Q (C_{u2}r_2 - C_{u1}r_1) \quad (5.3)$$

El torque  $T$  aplicado al eje de rotación, imprime al rotor una velocidad angular  $\omega$  constante, de manera que:

$$P_m = T\omega \quad (5.4)$$

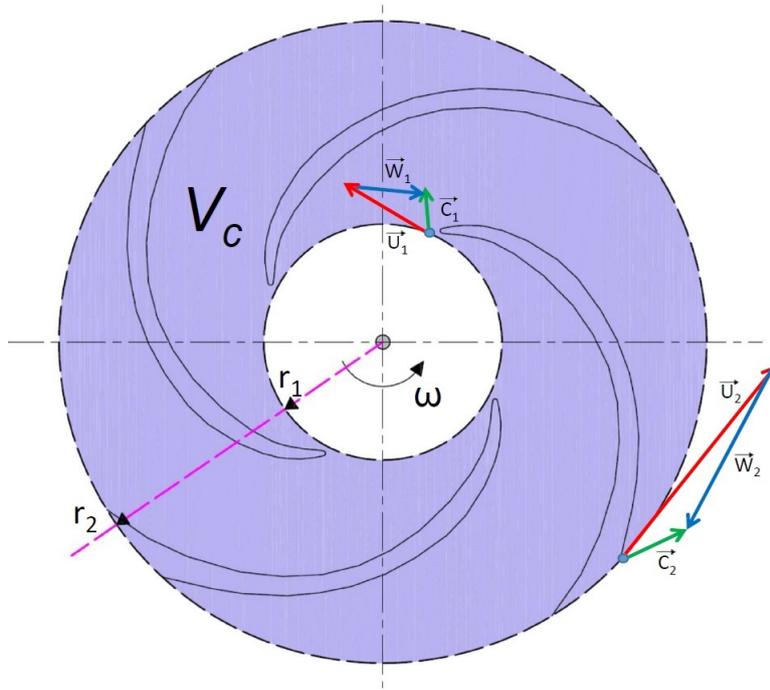


Figura 5.1: Volumen de control para el planteo la ecuación de Euler. En la sección de entrada (1) y la sección de salida (2) se esquematizan los triángulos de velocidades, donde  $\vec{W}$  es la velocidad relativa del fluido,  $\vec{U}$ , la velocidad absoluta del rotor y  $\vec{C}$ , la velocidad absoluta del fluido

Donde  $P_m$  es la potencia mecánica o la energía por unidad de tiempo, que expresa el trabajo realizado para entregar momento angular al fluido. Reemplazando  $T$  de la Ec. 5.4 en la 5.3, aparece en el segundo miembro la velocidad angular  $\omega$  que, multiplicada por los respectivos radios, resulta en la velocidad tangencial del rotor en la salida y la entrada, respectivamente.

$$P_m = \rho Q (C_{u2}\omega r_2 - C_{u1}\omega r_1) \tag{5.5}$$

Dado que  $\vec{U}_2 = \omega r_2$  y  $\vec{U}_1 = \omega r_1$ , entonces:

$$P_m = \rho Q (C_{u2}U_2 - C_{u1}U_1) \tag{5.6}$$

El torque es positivo cuando tiene el mismo sentido de giro que la velocidad angular. Cuando el torque es positivo, se está entregando energía al fluido (bombas, compresores, ventiladores). Cuando es negativo, se está extrayendo energía al fluido (turbina).

Lo mismo puede verse a través de la variación de la componente tangencial del flujo entre el ingreso y la salida del rotor. Cuando esta componente aumenta, significa que el flujo absorbe energía. Para la misma convención de sentido positivo coincidente con el sentido de giro, si la componente tangencial de la velocidad disminuye, significa que se trata de una turbina, ya que se está extrayendo energía del fluido. Por otra parte, la potencia hidráulica se expresa como:

$$P_h = \rho g Q H_u \tag{5.7}$$

Y el rendimiento hidráulico es:

$$\eta_h = \frac{P_h}{P_m} \quad (5.8)$$

Despejando la potencia mecánica de la Ec. 5.8 y reemplazando en la 5.6, luego de reordenar los términos, se llega a:

$$\frac{gH_u}{\eta_h} = (C_{u2}U_2 - C_{u1}U_1) \quad (5.9)$$

Que es la llamada ecuación fundamental de Euler para bombas rotodinámicas, o sea, las bombas que pertenecen al grupo de las turbomáquinas hidráulicas. En esta ecuación se pone en evidencia la relación entre la energía másica transferida al fluido, expresada por  $gH_u$  (la que ha logrado absorber el fluido y que para el caudal de diseño nos dará la potencia hidráulica obtenida), y el cambio que se produjo en las componentes tangenciales del flujo entre la salida y la entrada al volumen de control.

Esta deducción, realizada en forma general, incorpora la componente  $C_{u1}$ , aunque, para la condición de diseño de una bomba, se asume que esta componente es nula. Esto equivale a decir que el ángulo  $\alpha_1$  del triángulo de velocidades es  $90^\circ$  (Fig. 5.2). De esta manera, el segundo término de la Ec. 5.9 se desvanece y se obtiene el máximo salto útil.

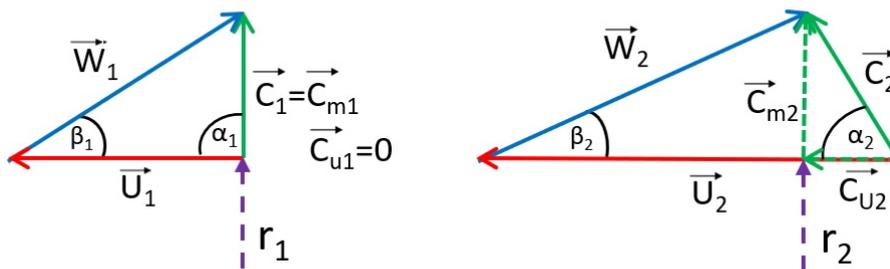


Figura 5.2: Triángulos de velocidades considerando un flujo ideal en la sección de entrada ( $C_{u1}=0$ ).

Otro término que se define es el 'salto rotórico' que, para una bomba, es obtenido como:

$$H_r = \frac{H_u}{\eta_h} \quad (5.10)$$

El salto rotórico es la energía específica que tiene que disponer el rotor para que el fluido adquiera el salto útil. Por esa razón, se divide por el rendimiento hidráulico.

## Curva característica teórica

La ecuación de Euler permite relacionar el salto útil desarrollado (es decir, la energía por unidad de peso obtenida tras el paso del flujo por el rotor) con aspectos propios de su diseño. Debe tenerse en cuenta que se asumen las hipótesis de fluido ideal e incompresible y escurrimiento unidimensional, con infinitos álabes. Utilizando las relaciones trigonométricas de los triángulos de velocidades, es posible encontrar una ecuación que vincula el salto útil con el caudal, a la cual denominaremos 'curva característica teórica'.

Por un lado, se tiene la siguiente relación, a partir de la Fig. 5.2:

$$\tan \beta_2 = \frac{C_{m2}}{U_2 - C_{u2}} \quad (5.11)$$

Despejando  $\vec{C}_{u2}$ , se tiene:

$$C_{u2} = U_2 - C_{m2} \cot \beta_2 \quad (5.12)$$

La componente meridiana  $C_{m2}$  se obtiene del cociente:

$$C_{m2} = \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} \quad (5.13)$$

Donde  $b_2$  representa la altura del área de salida del rotor.

Por otro lado,

$$U_2 = \frac{\pi n}{30} r_2 \quad (5.14)$$

Con lo cual queda la Ec. (5.15):

$$C_{u2} = \frac{\pi n}{30} r_2 - \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} \cot \beta_2 \quad (5.15)$$

Y de la ecuación de Euler, para la condición de diseño:

$$H_u = \frac{\eta_h}{g} C_{u2} U_2 \quad (5.16)$$

Reemplazando la Ec. 5.15 en la 5.16 queda:

$$H_u = \frac{\eta_h}{g} \left( \frac{\pi n}{30} r_2 - \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} \cot \beta_2 \right) \frac{\pi n}{30} r_2 \quad (5.17)$$

Poniendo como  $cte_1$  y  $cte_2$  los valores que no son variables de interés, queda:

$$H_u = \frac{\eta_h}{g} \left( cte_1 n^2 r_2^2 - cte_2 n \frac{Q}{b_2} \cot \beta_2 \right) \quad (5.18)$$

La Ec. 5.18 se puede interpretar como la representación analítica de la relación entre el salto útil y el audal,  $H_u = f(Q)$ , si se cumplen las hipótesis de infinitos álaves, fluido ideal, incompresible y escurrimiento unidimensional. Es decir, obtuvimos una ecuación que expresa cómo varía el salto para distintos caudales, dados una serie de datos geométricos o de diseño. Se puede definir un término  $A$ , que representaría la ordenada al origen dado por:

$$A = \frac{cte_1 n^2 r_2^2}{g} \quad (5.19)$$

Por otra parte, si se considera como constante  $B$  a:

$$B = \frac{cte_2 n}{b_2} \quad (5.20)$$

Si, además,  $\eta = 1$  (fluido ideal), la Ec. 5.18 queda:

$$H_u = A - BQ \cot \beta_2 \quad (5.21)$$

Que es una recta con  $A$  de ordenada al origen y pendiente dada por el valor de la cotangente de  $\beta_2$ . Recordemos que  $\beta_2$  es el ángulo que indica la inclinación del álabe a la salida. En la Fig. 5.3 se representa esta recta, indicada como  $H_t$ , o salto teórico, curva característica con infinitos álabes.

Al tener un número finito de álabes, el salto útil desarrollado, en realidad, será menor al que se obtiene en la Ec. 5.21. Esto se representa esquemáticamente en la Fig. 5.3 con la inscripción ' $H_t$  c.c. con  $Z$  álabes'.

Para un diseño dado, la ordenada al origen teóricamente será función del cuadrado de la velocidad de giro del rotor definida en el diseño, aunque debe tenerse en cuenta que la hipótesis de escurrimiento unidimensional es cada vez más débil a medida que el caudal se aleja del correspondiente al 'punto de diseño', especialmente para caudales muy reducidos, para los cuales se acentúan los fenómenos de desviación del flujo respecto de los contornos físicos y se produce el fenómeno de recirculación.

El hecho de haber planteado hipótesis simplificativas respecto a las características del escurrimiento impide dar cuenta de los efectos ocasionados por las pérdidas de carga en la curva característica obtenida. Considerando en forma conceptual de qué manera intervienen estas pérdidas en la capacidad de la bomba, se pueden mencionar dos factores que la afectarán negativamente: el primero es que a medida que el caudal aumenta, lo hacen las velocidades y con ellas, las pérdidas de carga friccionales, que se pueden representar con una función cuadrática con las velocidades o con los caudales (como se indica en la Fig. 5.3) con la representación de una parábola con ordenada al origen.

El segundo factor que resta capacidad a la bomba es el que se asocia al funcionamiento fuera del 'punto de diseño'. Teniendo en cuenta que la geometría se diseña para una cierta condición de salto, caudal y número de vueltas (Punto  $P_f$  óptimo en la Fig. 5.3), es esperable que en esta condición de operación particular el flujo se encuentre correctamente guiado. Sin embargo, en condiciones que se alejan cada vez más del punto de diseño, el flujo se desviará respecto de la superficie de los álabes y se harán presentes fenómenos de pérdida de carga asociados al desprendimiento en el borde de ataque (ingreso al rotor), como se indica en la misma figura, representados con curvas cuadráticas con ordenada al origen en el punto de diseño y crecientes hacia caudales mayores y menores respectivamente.

Ambos fenómenos de pérdida de carga restan energía al flujo, de manera que el salto útil 'real', o efectivo, se obtendrá de restar, a la altura de energía o salto útil, ambas pérdidas para cada caudal, y seguirá una curva como la que se indica como 'c.c. real'. Obsérvese que las curvas características de cada diseño serán particulares en cuanto a la manera en que las afectan las pérdidas de carga, tanto por la forma de los álabes como también por su cantidad, sus ángulos, los espesores de estos, etc.

También se han representado en la misma figura los triángulos de velocidades teóricos para

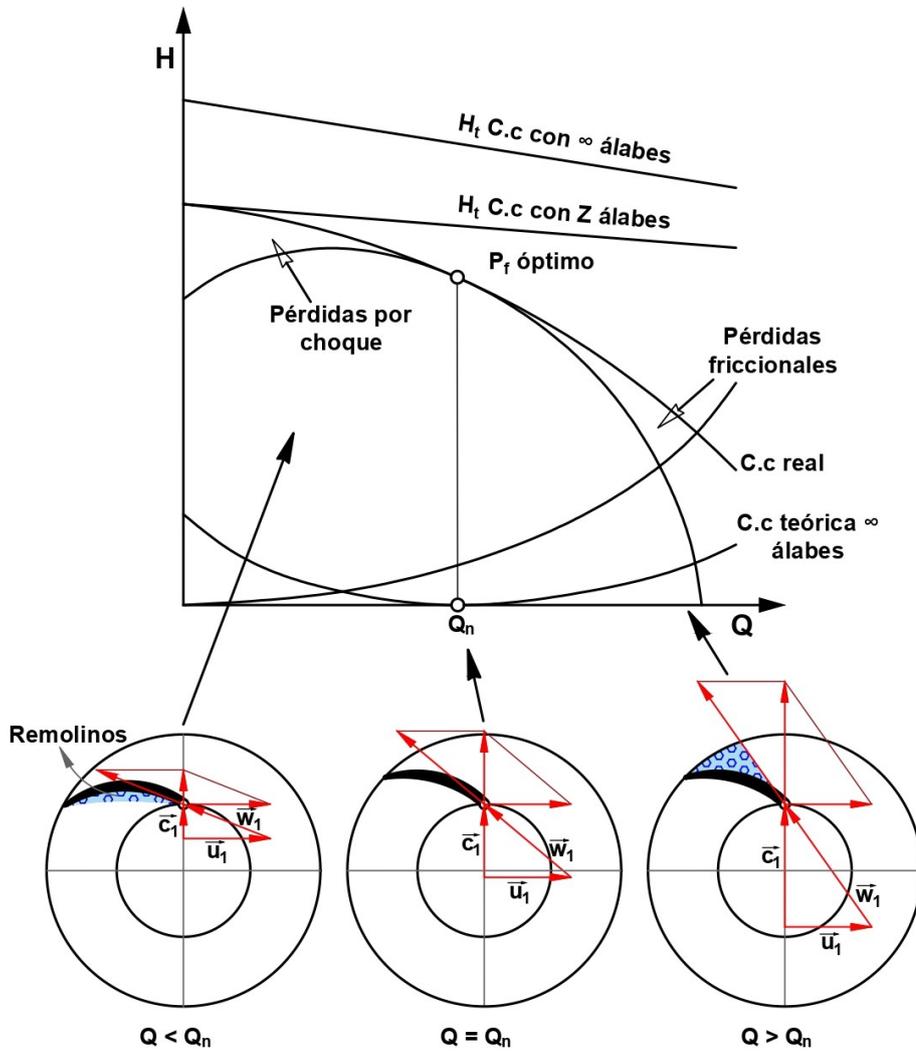


Figura 5.3: Curva característica teórica obtenida a partir de la ecuación de Euler ( $H_t c.c \infty$  álabes) y real ( $H_t c.c$  real) de una bomba radial. En la parte inferior se esquematizan los triángulos de velocidades para el caudal óptimo, un caudal menor y uno mayor. Las pérdidas por choque se representan como regiones de remolinos

caudales mayores y menores que el de diseño.

Al ser  $\beta_2$  un ángulo que queda definido entre la dirección tangencial al giro del rotor y la dirección tangencial al álabe en la salida, este tendrá una magnitud definida en la etapa de diseño y su impacto sobre el resultado, en cuanto a la forma de la curva  $H - Q$ , será muy importante, como lo anticipa la Ec. 5.21. En los rotores de bombas centrífugas los canales entre álabes son divergentes, es decir, tienen áreas de escurrimiento crecientes, de manera que el flujo es gradualmente desacelerado (aunque aumenta la componente tangencial). Este tipo de escurrimiento, con gradiente de presión adverso, es propenso a desarrollar fenómenos de despegamiento de los contornos hidráulicos y, consecuentemente, pérdidas de carga asociadas a estos fenómenos. Normalmente, los diseños de bombas radiales mantienen valores de  $\beta_2$  no mayores de  $25^\circ$ .

En la Ec. 5.21 puede verse que si  $\beta_2$  mayor a  $90^\circ$  teóricamente se obtendría una recta con pendiente positiva, que indicaría que el salto crece con el caudal (Fig. 5.4). Geométricamente, esto se representaría con álabes orientados en el sentido de giro del rotor inversos a los que se han mostrado hasta ahora, pero esto no es más que una especulación teórica. Es decir, por más

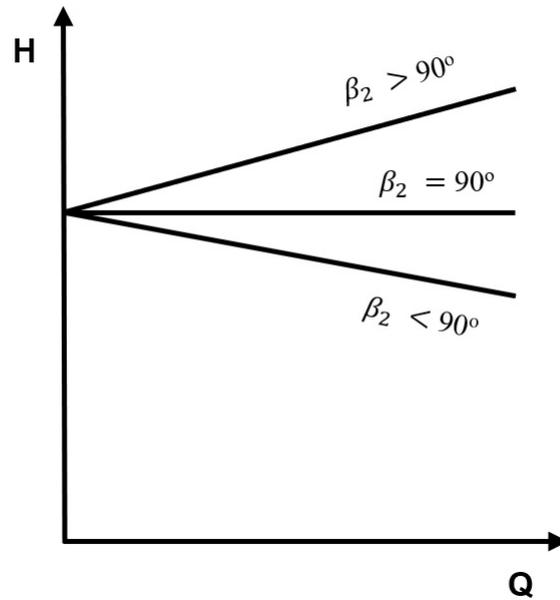


Figura 5.4: Curva característica teórica para distintos ángulos  $\beta_2$ . En las bombas reales  $\beta_2$  es siempre menor a  $90^\circ$

que de la ecuación surja que podrían obtenerse valores de  $H_u$  crecientes con el caudal con  $\beta_2$  mayores de  $90^\circ$  (porque la  $\cot \beta_2$  es mayor) sin embargo esto en la realidad no ocurre. Para que la bomba funcione correctamente el ángulo  $\beta_2$  debe ser menor de  $90^\circ$ , es decir, a medida que la bomba impulsa mayor caudal, entrega menor altura de presión.

La expresión teórica de la curva  $H - Q$  a partir de la ecuación de Euler fue presentada a los fines de introducir las variables de diseño y explicar los factores que conducen a tener una curva particular o 'característica' de cada diseño. Cabe recordar que, en la práctica, los fabricantes de bombas ofrecen en sus catálogos las curvas características reales, obtenidas por medio de ensayos en laboratorio. Estas curvas de base experimental (y no teóricas) son las que se utilizan en la práctica.

## Rendimiento de una bomba

El rendimiento global de una bomba,  $\eta_T$  abarca todas las pérdidas de energía desde el suministro eléctrico al motor ( $P_e$ ) hasta la energía específica entregada por el rotor al fluido, entre las bridas de impulsión y succión ( $P_h$ ). En la Ec. 5.22 se expresa el rendimiento global de la bomba como el producto de tres rendimientos: rendimiento hidráulico  $\eta_h$ , rendimiento mecánico  $\eta_m$  y rendimiento eléctrico  $\eta_e$ .

El rendimiento eléctrico,  $\eta_e$ , incluye todas las pérdidas que se originan en el motor, entre el suministro eléctrico hasta el acople en el eje del motor con la bomba. El rendimiento mecánico,  $\eta_m$ , incluye las pérdidas en los rodamientos que mantienen al eje en su posición y los sellos, que impiden la fuga de caudal entre el eje y la carcasa de la bomba.

En la Ec. 5.23 se definen las relaciones entre los tipos de potencia intervinientes a partir de las definiciones realizadas sobre los rendimientos. En la Fig. 5.5 se esquematiza, sobre el corte

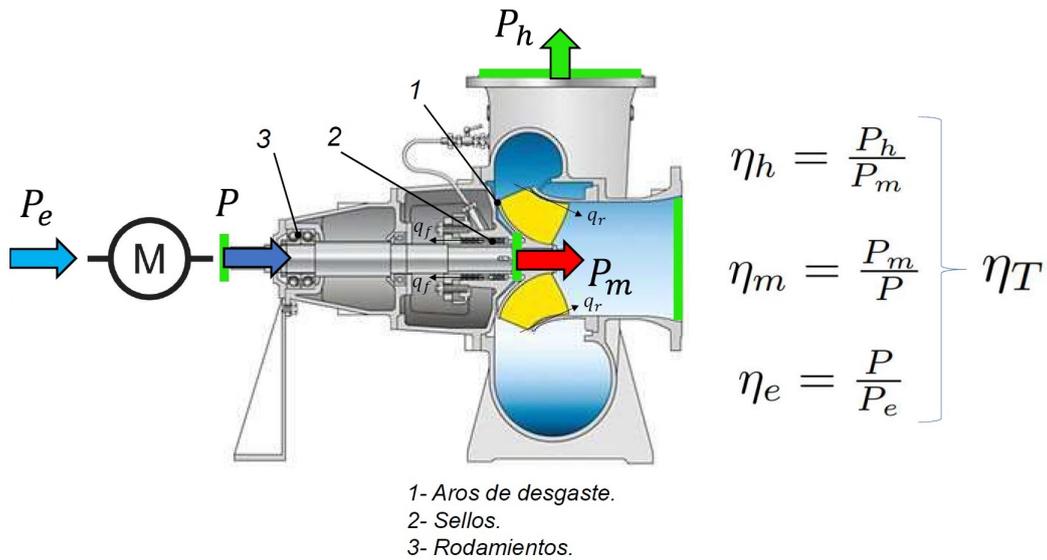


Figura 5.5: Vista en corte de una bomba de flujo mixto, donde se esquematizan las potencias y rendimientos intervinientes. La potencia  $P$  es entregada a la bomba por el motor eléctrico, restando las pérdidas mecánicas por rodamientos y sellos queda la potencia  $P_m$  disponible en el rotor. La potencia hidráulica  $P_h$  es entregada al fluido luego de considerar todas las pérdidas hidráulicas que ocurren dentro de la bomba entre  $P_m$  y  $P_h$  (fuente: <https://bit.ly/2QH2VIG>)

de una bomba de flujo mixto, las potencias intervinientes y la relación de cada una de ellas en el rendimiento global  $\eta_T$  (Karassik, 2001).

$$\eta_T = \eta_h \eta_m \eta_e \tag{5.22}$$

$$P_e > P > P_m > P_h \tag{5.23}$$

El rendimiento  $\eta_h$ , a su vez, se puede subdividir en tres componentes de acuerdo a la Ec. 5.24. Las pérdidas mecánicas por fricción en los aros de desgaste están comprendidas por  $\eta_R$ , las pérdidas hidráulicas por fricción, choque y turbulencia dentro de  $\eta_E$  y las pérdidas volumétricas, que tienen en cuenta el caudal de recirculación  $q_r$  entre las partes rotantes y estacionarias y las fugas de caudal  $q_f$  dentro de  $\eta_V$ .

$$\eta_h = \eta_E \eta_V \eta_R \tag{5.24}$$

En la Fig. 5.6 se muestra, para un diseño particular, cómo se distribuyen los distintos tipos de pérdidas a lo largo del campo de operación de una bomba de flujo mixto y doble succión, en una representación  $P - Q$ , en forma porcentual. En el eje secundario se expresa el porcentaje de potencia  $\Delta P$  que consumen las distintas pérdidas. Puede verse que se encuentran representadas, para este ejemplo, cuatro fuentes de pérdidas: mecánicas, volumétricas (fuga de caudal), hidráulicas y por recirculación. Sobre un total de potencia mecánica en el eje, identificada por el 100% en ordenadas, para cada caudal, se indica la influencia de cada tipo de pérdida. La suma de ellas, para cada caudal, termina dando como resultado de la sustracción, en forma porcentual, la curva  $P - Q$  real, indicada con '4' en el gráfico presentado.

El efecto de pérdidas por recirculación se acentúa a medida que los caudales son menores al caudal de diseño, indicando la mayor dificultad del rotor en guiar en forma efectiva el flujo desde

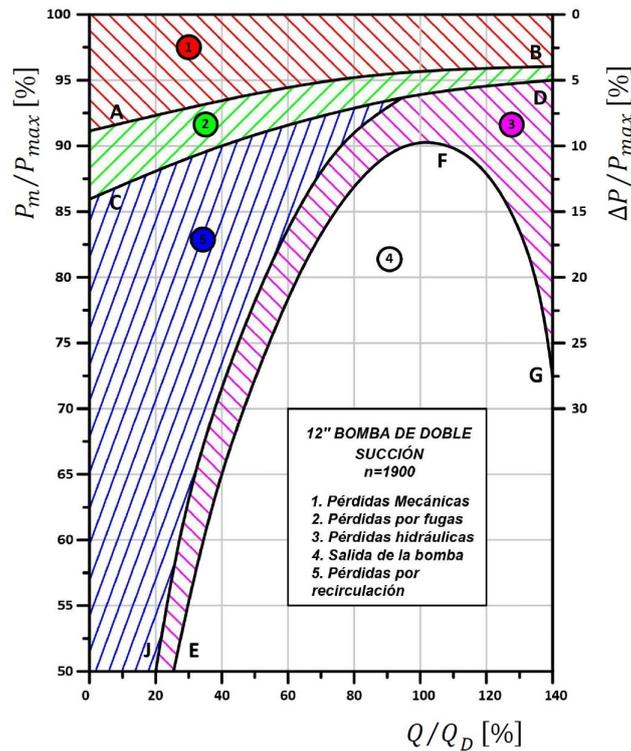


Figura 5.6: Pérdidas de energía en una bomba de flujo mixto y doble succión, discriminadas según su origen. El caudal,  $Q$ , y la potencia,  $P$ , están expresados como porcentaje del caudal de diseño y potencia máxima respectivamente. Las pérdidas mecánicas, para este ejemplo, incluyen las pérdidas de sellos, rodamientos y aros de desgaste

la entrada a la salida del rotor.

Comparando distintos diseños, el efecto de las pérdidas de carga totales, expresado como pérdida porcentual de potencia es mayor a medida que los rotores son más radiales, es decir, para números específicos menores.

## Referencias

Karassik, I.J., Messina, J.P., Cooper, P., Heald, C.C. (2001). *Pump Handbook, 3rd ed.*. New York: McGraw-Hill.

Fig. 5.5: <https://bit.ly/2QH2VIG> en <https://www.ksb.com>. Obtenido el 26/05/2021

## Bibliografía recomendada

Dixon, S.L. (2014). *Fluid Mechanics and Thermodynamics of Turbomachinery, Seventh Edition*.

Oxford: Butterworth-Heinemann Jones, Garr M., (2008). *Pumping Station Design*. Oxford: Butterworth-Heinemann.

Stepanoff, A.J. (1957). *Centrifugal and axial flow pumps: theory, design and application*. New York: John Wiley and Sons.