

CAPÍTULO 9

Modelación matemática de los fenómenos transitorios en acueductos

Juan Manuel Galíndez y Sergio Liscia

Introducción

El diseño de una conducción a presión se concibe con la intención de albergar, sin riesgos de colapso estructural, el escurrimiento del agua en régimen estacionario. Sin embargo, aun el régimen permanente puede manifestarse en, al menos, tres formas disímiles: estático, en el que la velocidad del agua es nula; dinámico a caudal mínimo, ligado a la menor velocidad admisible del agua; o dinámico a caudal máximo, asociado, análogamente, a la mayor velocidad admisible del agua. Este último es, por cierto, determinante en el dimensionado del diámetro de la conducción.

Un análisis pormenorizado de estos tres casos extremos parecería bastar, entonces, para garantizar la seguridad del acueducto; en efecto, ello sería estrictamente cierto en caso de que las transiciones entre unos y otros fueran lo suficientemente suaves. Desafortunadamente, ello es incompatible con los tiempos de operación y de maniobra de los elementos hidráulicos que regulan el escurrimiento: válvulas o compuertas, en tanto se abren o cierran en cuestión de segundos; o turbomáquinas, en tanto se encienden, apagan o cambian su régimen de operación casi instantáneamente, por ejemplo.

Los fenómenos transitorios o impermanentes son entonces aquellos inducidos por un cambio (por lo general, brusco) en las condiciones de escurrimiento, y su importancia para un buen diseño es tal que pueden ocasionar la destrucción o la salida de servicio de un acueducto. Estadísticamente, las fallas o roturas más frecuentes de las conducciones a presión involucran efectos transitorios subestimados o pobremente evaluados: sobrepresiones o depresiones extremas, al punto de inducir cavitación o ingreso de aire por encima de lo tolerable, etcétera.

Las características de los estados impermanentes resultantes están vinculadas a la tipología del acueducto, es decir: según funcionen a gravedad o por bombeo. En este último caso, además, importa si involucra una sola unidad o un complejo de varias unidades y su arreglo: bien en serie o en paralelo, bien en la toma de una cisterna, bien en línea, en alguna sección intermedia del acueducto.

Todas estas configuraciones comportan situaciones previsibles, como el encendido de las bombas o su salida de servicio; la regulación del caudal conducido, ya sea mediante válvulas o la variación de la frecuencia de los motores de las turbomáquinas; en fin, cualquier maniobra que

propenda a satisfacer la demanda cambiante de la provisión de agua o de energía. Se trata de maniobras programadas, que hacen al funcionamiento mismo del acueducto. Existen, asimismo, situaciones accidentales e indeseables, que pueden surgir en cualquier momento de manera inesperada, tales como cortes de energía o fallas hidromecánicas.

El estudio de los fenómenos transitorios resulta de trascendental importancia para unos y otros casos, pues sirve igualmente como guía para implementar óptimas secuencias de operación cuanto como para diseñar los elementos de protección que eviten daños a las conducciones y a las propias máquinas. A fin de asimilar las distintas capas de complejidad involucradas, el estado impermanente se aborda habitualmente por medio de la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales, habida cuenta de que las condiciones de contorno condigan con los elementos hidráulicos de una configuración dada del acueducto. En la práctica, este procedimiento se realiza por medios numéricos antes que analíticos y es el objeto de las secciones siguientes.

Modelación matemática de los fenómenos transitorios en un acueducto

Desde mediados del siglo XIX, el estudio de los transitorios en acueductos ha atraído el interés de ingenieros hidráulicos. Los procesos involucrados pueden ser descriptos por las ecuaciones de la Hidrodinámica, esencialmente, las ecuaciones de conservación de la masa (de continuidad) y la de cantidad de movimiento. Su solución conduce a ecuaciones de propagación de ondas de sobrepresión y de escurrimiento a través de los acueductos.

En estado permanente, no hay cambio en las condiciones del escurrimiento en cualquier tiempo en el tiempo; en términos matemáticos, ello implica que todas las derivadas respecto de la variable tiempo se reducen a cero. En condiciones de escurrimiento impermanentes –los términos ‘impermanente’ y ‘transitorio’ resultan, a todos los efectos, equivalentes–, las variables que describen el movimiento varían en el tiempo. De los diversos métodos de resolución que admiten estos problemas, aquí se desarrollará el así llamado método de las características.

El método de las características convierte el sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales (las ya mencionadas leyes de conservación) en un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales totales, tales que admiten su tratamiento bajo un esquema de diferencias finitas, usando el método de intervalos de tiempo específicos. Este esquema puede ser abordado por métodos computacionales.

El método de las características es ventajoso por varios motivos: 1) los criterios de estabilidad están firmemente establecidos; 2) las condiciones de contorno pueden programarse fácilmente; 3) los términos de menor relevancia pueden conservarse sin mayor desmedro de la velocidad de cálculo; 4) es posible abordar sistemas complejos; 5) de todos los sistemas de resolución en diferencias finitas, es el de mayor precisión; 6) los programas pueden depurarse fácilmente gracias a que el estado permanente satisface todas las condiciones y un error de programación aparece como un cambio respecto de ese estado; 7) es un método detallado que permite su visualización

bien por medio de datos de salida tabulados, bien por medio de figuras y animaciones.

Ecuaciones fundamentales

En esta sección, se desarrollan las ecuaciones diferenciales de conservación de la cantidad de movimiento y de la masa que, a la postre, guían la resolución de los fenómenos de la Hidrodinámica.

Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

Puede aplicarse la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para el escurrimiento de líquido a través de un volumen de control embebido en un tramo cilíndrico de tubería. La ecuación se escribe en términos de la presión a lo largo del eje de la tubería y su velocidad promedio, para más tarde referirla a una forma de la energía piezométrica. En lo que resta de esta formulación, se prefieren los valores de energía piezométrica, H , y el caudal, Q , como variables dependientes, en tanto que la posición x y el tiempo t son las variables independientes.

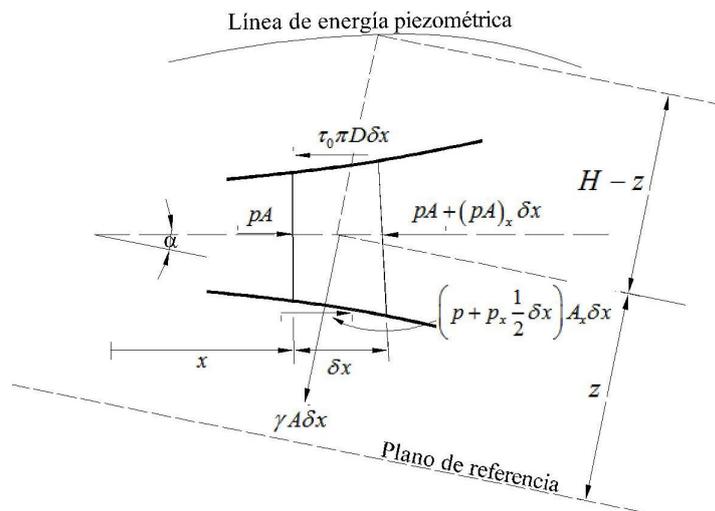


Figura 9.1: Volumen de control para la aplicación de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

La Fig. 9.1 muestra un volumen de control cuya superficie de la sección transversal es A y su espesor es dx .

El área, A , es, en general, una función de la coordenada x , cuya referencia es el eje de la tubería, con un origen arbitrario. La tubería está inclinada respecto de la horizontal en un ángulo α , positivo cuando la elevación aumenta en la dirección positiva de x . Las fuerzas que operan sobre el mencionado volumen de control en la dirección de x son las que se derivan de la presión normal sobre las secciones transversales que lo delimitan, de la tensión de corte y de la componente de presión en la periferia. Asimismo, la gravedad tiene una componente en el sentido del movimiento. La fuerza que deriva de la tensión de corte actúa en reacción al movimiento, por lo cual tiene sentido negativo. Por aplicación de la tercera ley de Newton, la sumatoria de las fuerzas que operan sobre el volumen de control equivale a la variación de su

cantidad de movimiento; o sea:

Fuerzas de presión + Fuerzas de fricción + Fuerzas de gravedad =

$$pA - \left[pA + \frac{\partial(pA)}{\partial x} \delta x \right] + \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{\partial A}{\partial x} \delta x - \tau_0 \pi D \delta x - \gamma A \delta x \sin \alpha = \rho A \delta x \frac{DV}{Dt}$$

Eliminando los diferenciales de segundo orden y agrupando, se obtiene:

$$A \frac{\partial p}{\partial x} + \tau_0 \pi D + \gamma A \sin \alpha + \rho A \frac{DV}{Dt} = 0 \quad (9.1)$$

En los cálculos de escurrimiento transitorio, se considera que la tensión de corte es la misma que si la velocidad fuera permanente, de manera que, en términos del factor de fricción de Darcy–Weisbach, f , se obtiene:

$$\tau_0 = \frac{\rho f V |V|}{8} \quad (9.2)$$

La Ec. 9.2 se desarrolló a partir de la ecuación de Darcy–Weisbach:

$$\Delta p = \frac{\rho f \Delta L V^2}{D} \frac{V^2}{D}$$

Donde L es la longitud de una tubería horizontal, y a partir de un balance de fuerzas en la tubería durante escurrimiento permanente:

$$\Delta p A = \Delta p \frac{\pi D^2}{4} = \tau_0 \pi D \Delta L$$

La aceleración DV/Dt en la Ec. 9.1 corresponde a una partícula del fluido (el volumen de control) que tiene velocidad V , por lo tanto:

$$\frac{DV}{Dt} = V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} \quad (9.3)$$

Que es válida para tuberías convergentes y divergentes. La energía piezométrica (o elevación de la línea de energía respecto de un plano de referencia arbitrario) puede remplazar a p , de manera que:

$$p = \rho g(H - z) \quad (9.4)$$

Donde z es la elevación del eje de la tubería correspondiente a la posición x . Luego:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial(H - z)}{\partial x} = \rho g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \rho g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \sin \alpha \right) \quad (9.5)$$

Esta derivación parcial considera que ρ permanece esencialmente inalterable (constante), en comparación con H o z . Sustituyendo las Ecs. 9.2 y 9.5 en la Ec. 9.1, resulta:

$$g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{fV|V|}{2D} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (9.6)$$

Que también está restringida a escurrimiento de líquidos. La forma de la línea de energía de la ecuación es algo más simple, en razón de que la pendiente del eje de la tubería puede despreciarse sin consecuencias.

Ecuación de continuidad

La siguiente derivación de la ecuación de continuidad es suficientemente general y tiene la ventaja relativa de expresarse en términos de las diversas derivadas totales, es decir, las derivadas con respecto al movimiento. Dos de ellas se introducen directamente dentro de la ecuación de continuidad: derivación con respecto a la componente del movimiento en la dirección del eje de la tubería, y derivación con respecto a una partícula de masa líquida. La tercera derivada total es la derivación con respecto a la onda acústica de movimiento que surge del método de las características, desarrollado más adelante. Con referencia a la Fig. 9.2, un volumen de control

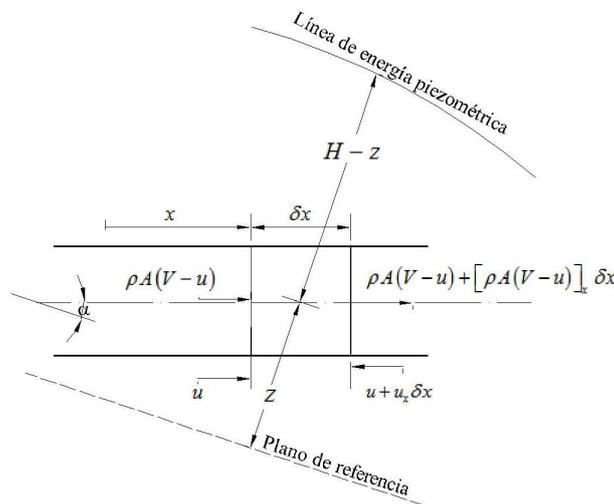


Figura 9.2: Volumen de control para la aplicación de la ecuación de conservación de la masa

de longitud δx en movimiento en el instante t puede considerarse fijo en relación con la tubería; en efecto, se mueve y se expande solo en la medida en que lo hace la superficie interior de la tubería. El principio de conservación de la masa puede enunciarse entonces de este modo: la razón en que el influjo de masa en el volumen de control equivale a la razón de incremento de la masa dentro de este, o bien:

$$\rho A(V - u) - \left[\rho A(V - u) + \frac{\partial [\rho A(V - u)]}{\partial x} \delta x \right] = \frac{D'(\rho A \delta x)}{Dt}$$

O, más simplemente:

$$-\frac{\partial [\rho A(V - u)]}{\partial x} \delta x = \frac{D'(\rho A \delta x)}{Dt} \quad (9.7)$$

Sea la cara aguas arriba ubicada en la coordenada x , y sea u la velocidad relativa a la pared de la tubería en x . La derivada total con respecto al movimiento axial de la tubería está dada por:

$$\frac{D'}{Dt} = u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (9.8)$$

Y la razón de incremento de la longitud del volumen de control está dada por:

$$\frac{D'}{Dt} \delta x = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \quad (9.9)$$

Por expansión parcial de la Ec. 9.7 con el uso de la Ec. 9.9:

$$-\frac{\partial(\rho AV)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Au)}{\partial x} = \frac{D'(\rho A)}{Dt} + \rho A \frac{\partial u}{\partial x} \quad (9.10)$$

Una expansión adicional de la Ec. 9.10, usando la Ec. 9.8, da:

$$-\frac{\partial(\rho AV)}{\partial x} + \rho A \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial(\rho A)}{\partial x} = u \frac{\partial(\rho A)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \rho A \frac{\partial u}{\partial x}$$

O, simplificando:

$$-\frac{\partial(\rho AV)}{\partial x} = \frac{\partial(\rho A)}{\partial t}$$

Que ahora puede escribirse como:

$$-\rho A \frac{\partial V}{\partial x} = V \frac{\partial(\rho A)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t}$$

Los últimos dos términos de la Ec. 9.11 representan la derivada de ρA con respecto al movimiento de una partícula de masa, o:

$$-\rho A \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{D(\rho A)}{Dt} \quad (9.11)$$

En la que:

$$\frac{D}{Dt} = V \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Sustituyendo en la Ec. 9.11 y expandiendo la derivada total respecto de t , se obtiene:

$$-\rho A \frac{\partial V}{\partial x} = A \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{DA}{Dt} \quad (9.12)$$

Y luego, dividiendo ambos miembros de la Ec. 9.12 por ρA :

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = A \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{1}{A} \frac{DA}{Dt} \quad (9.13)$$

La Ec. 9.13 es válida para tuberías convergentes y divergentes tanto como para tuberías cilíndricas. También es válida para tuberías flexibles, o para escurrimiento de gas, dado que no se requirió de hipótesis simplificativas.

Al restringir la formulación al escurrimiento de agua en tuberías de propiedades elásticas definidas, la Ec. 9.13 queda reducida a:

$$a^2 \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} = 0 \quad (9.14)$$

Donde a^2 , el cuadrado de la celeridad de la onda de sobrepresión, está dado por la Ec. 9.15:

$$a^2 = \frac{\frac{K}{\rho}}{1 + \left[\frac{K D}{E e}\right] c_1} \quad (9.15)$$

Al expresar la presión en términos de la energía piezométrica (Ec. 9.4), se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{DH}{Dt} - \frac{Dz}{Dt} = 0$$

Que, correspondientemente expandida, resulta:

$$\frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} - V \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

Dado que, por un lado, puede ignorarse el movimiento transversal y, por el otro, $\partial z / \partial x = \alpha$, se obtiene, finalmente:

$$\frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} - V \sin \alpha = 0 \quad (9.16)$$

Que es la forma de la ecuación de continuidad más conveniente para la elaboración posterior. Al igual que en la forma final de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (Ec. 9.6), H y V son las variables dependientes de la posición, x , y el tiempo, t .

Solución por el método de las características

Como se ha dicho, las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento y de continuidad configuran un sistema de ecuaciones diferenciales para el cual no hay disponible una solución general. Sin embargo, las ecuaciones en derivadas parciales pueden adquirir la forma de un sistema de ecuaciones en derivadas totales mediante el así llamado método de las características. De este modo, estas últimas ecuaciones pueden ser integradas dentro de un esquema de ecuaciones de diferencias finitas pasibles de ser tratadas, convenientemente, por métodos numéricos.

Sea entonces el sistema de ecuaciones diferenciales en cuestión:

$$\begin{cases} g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{fV|V|}{2D} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \\ \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} - V \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad (9.17)$$

La práctica ha demostrado que, en la mayoría de los casos, el sistema puede simplificarse ignorando la contribución de algunos de los términos intervinientes. Así se procederá de aquí en más, sin desmedro del procedimiento analítico que conduce a la formulación del esquema numérico buscado. De tal modo, entonces, que es posible reducir el sistema presentado al siguiente, en el que las formas simplificadas de las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento y de continuidad se identifican como L_1 y L_2 :

$$L_1 = g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{fV|V|}{2D} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (9.18)$$

$$L_2 = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (9.19)$$

Estas ecuaciones pueden luego combinarse linealmente usando un multiplicador λ .

$$L_1 + \lambda L_2 = 0$$

O sea:

$$g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{fV|V|}{2D} + \frac{\partial V}{\partial t} + \lambda \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0$$

Agrupando convenientemente:

$$\lambda \left(\frac{g}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \lambda \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad (9.20)$$

Cualesquiera dos valores reales de λ darán como resultado dos ecuaciones en términos de las variables dependientes H y V que habrán de ser a todos los efectos equivalentes a las Ecs. 9.18 y 9.19. Una selección apropiada de dos valores particulares de λ redundará en la simplificación de la Ec. 9.20.

En general, tanto H como V son funciones de x y de t . Si se asume que la variable independiente x es una función de t , entonces, son válidas las siguientes identidades:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Si se admite que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g}{\lambda} = \frac{\lambda a^2}{g}$$

Entonces la Ec. 9.20 se transforma en una ecuación diferencial ordinaria:

$$\lambda \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad (9.21)$$

Es fácil comprobar que, dadas las condiciones expuestas, λ equivale a:

$$\lambda = \pm \frac{g}{a} \quad (9.22)$$

Y, en consecuencia:

$$\frac{dx}{dt} = \pm a \quad (9.23)$$

Sustituyendo sucesivamente los valores de λ (Ec. 22) en la Ec. 9.21, se obtiene entonces el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \\ \frac{dx}{dt} = \pm a \end{cases} \quad (9.24)$$

$$\begin{cases} -\frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \\ \frac{dx}{dt} = -a \end{cases} \quad (9.25)$$

Al haber asignado a λ dos distintos valores reales, el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales devino un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas totales.

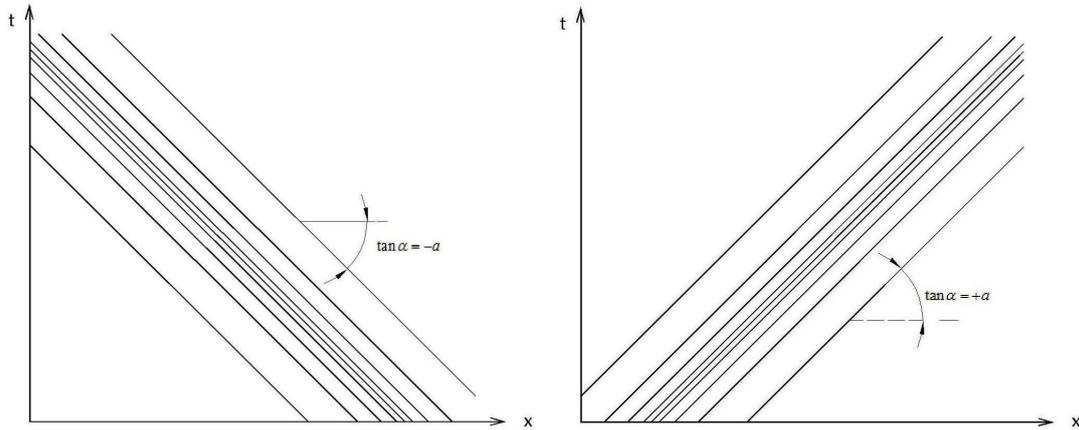


Figura 9.3: Curvas características negativas (izq.) y positivas (der.)

Las primera y tercera ecuaciones del sistema, denominadas ecuaciones de compatibilidad, son válidas a lo largo de haces de las así llamadas curvas características; en rigor, rectas (en tanto que la celeridad de la onda, a , es generalmente constante) en el plano $x - t$ definidas por las segunda y cuarta ecuaciones del sistema (Fig. 9.3).

Ecuaciones en diferencias finitas

Una tubería se divide en N tramos de igual longitud, cada uno Δx , tal como se ve en la Fig. 9.4. Se determina el intervalo de tiempo congruente con esa discretización ($\Delta t = \Delta x/a$) y la segunda ecuación del par 9.24 queda inmediatamente satisfecha por una diagonal positiva en la malla que abarca el continuo bidimensional $x - t$. Si se conocen las variables V y H en el origen de esa diagonal, entonces la primera ecuación de 9.24, que es válida a lo largo de la curva característica positiva C^+ , puede integrarse entre los límites A y P y por lo tanto ser escrita en términos de las variables desconocidas, H y V en el intervalo de tiempo subsiguiente, $t + \Delta t$. La integración a lo largo de la curva característica negativa C^- es en todo sentido análoga, y conduce a una segunda ecuación (la primera de 9.25) en términos de las mismas incógnitas. La resolución simultánea de ambas ecuaciones permite entonces determinar los valores de H y de V para el intervalo $t + \Delta t$ en el nodo en cuestión.

Al reformular la primera ecuación de 9.24 de tal manera que las anteriores relaciones queden expresadas en términos del caudal, Q , en lugar de la velocidad, V , se obtiene:

$$\frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{dQ}{Adt} + \frac{fQ|Q|}{2DA^2} = 0$$

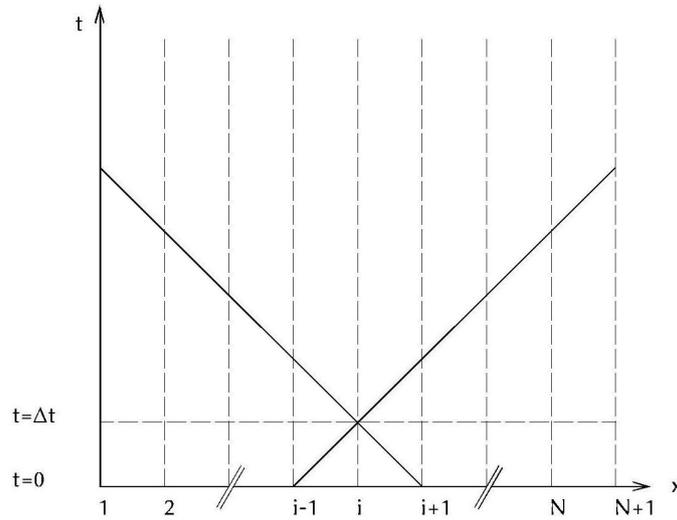


Figura 9.4: Configuración de la malla de diferencias finitas

Multiplicando por dt :

$$dH + \frac{a}{gA}dQ + \frac{f}{2gDA^2}Q|Q| dx = 0$$

E integrando, resulta:

$$\int_{H_{i-1}^t}^{H_i^{t+\Delta t}} dH + \frac{a}{gA} \int_{Q_{i-1}^t}^{Q_i^{t+\Delta t}} dQ + \frac{f}{2gDA^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} Q|Q| dx = 0$$

Donde los límites de integración corresponden a las coordenadas $((i-1)\Delta x, t)$ y $(i\Delta x, t + \Delta t)$ de los nodos por los que queda definida la curva característica positiva C^+ .

Al resolver, se obtiene:

$$H_i^{t+\Delta t} - H_{i-1}^t + \frac{a}{gA} (Q_i^{t+\Delta t} - Q_{i-1}^t) + \frac{f\Delta x}{2gDA^2} Q_{i-1}^t |Q_{i-1}^t| = 0 \quad (9.26)$$

La Ec. 9.26 conforma un sistema de ecuaciones junto con la aportada por la integración a lo largo de la curva característica negativa C^- (Ec. 9.27):

$$H_i^{t+\Delta t} - H_{i+1}^t - \frac{a}{gA} (Q_i^{t+\Delta t} - Q_{i+1}^t) - \frac{f\Delta x}{2gDA^2} Q_{i+1}^t |Q_{i+1}^t| = 0 \quad (9.27)$$

Estas dos ecuaciones de compatibilidad son relaciones algebraicas básicas que describen la propagación impermanente de las fluctuaciones de presión y de velocidad en la tubería.

Reagrupando levemente:

$$\begin{cases} H_i^{t+\Delta t} - H_{i-1}^t + B (Q_i^{t+\Delta t} - Q_{i-1}^t) + RQ_{i-1}^t |Q_{i-1}^t| = 0 \\ H_i^{t+\Delta t} - H_{i+1}^t - B (Q_i^{t+\Delta t} - Q_{i+1}^t) - RQ_{i+1}^t |Q_{i+1}^t| = 0 \end{cases} \quad (9.28)$$

Donde $B = a/gA$ y $R = f\Delta x/2gDA^2$.

Estas ecuaciones deben ser válidas para el escurrimiento en estado permanente, que es un caso particular de escurrimiento impermanente. En tal caso, el caudal de escurrimiento $Q_i^{t+\Delta t}$ es

independiente de t y por tanto equivalente a Q_{i-1}^t y Q_{i+1}^t . El sistema se reduce entonces a la siguiente expresión:

$$H_i = H_{i-1} - RQ_{i-1} |Q_{i-1}^t| \quad (9.29)$$

Donde los superíndices fueron suprimidos en razón de su irrelevancia.

Dado que $RQ_{i-1}^t |Q_{i-1}^t|$ es en efecto la pérdida de energía piezométrica a lo largo de un tramo de longitud Δx , la Ec. 9.29 puede ser interpretada como una forma de la ecuación de Bernoulli formulada entre los puntos considerados, lo cual concluye la corroboración.

La solución al problema que plantea un fenómeno transitorio requiere, naturalmente, de una condición inicial: la impuesta por las condiciones correspondientes al estado permanente. En ese estado, los valores de H y de Q son conocidos para cualquier sección de la tubería, incluyendo aquellas coincidentes con los nodos definidos por la discretización. El procedimiento prosigue por el cálculo sucesivo de las variables H y Q a intervalos equidistantes Δt en todos los nodos definidos.

A tal fin, el sistema puede reformularse se resuelve en términos de las incógnitas $H_i^{t+\Delta t}$ y $Q_i^{t+\Delta t}$:

$$\begin{cases} H_i^{t+\Delta t} = C_P - BQ_i^{t+\Delta t} \\ H_i^{t+\Delta t} = C_M + BQ_i^{t+\Delta t} \end{cases} \quad (9.30)$$

Donde:

$$C_P = H_{i-1}^t + BQ_{i-1}^t - RQ_{i-1}^t |Q_{i-1}^t|$$

$$C_M = H_{i+1}^t - BQ_{i+1}^t + RQ_{i+1}^t |Q_{i+1}^t|$$

La resolución del sistema de ecuaciones es, finalmente:

$$H_i^{t+\Delta t} = 0,5 (C_P + C_M) \quad (9.31)$$

$$Q_i^{t+\Delta t} = 0,5 \frac{C_P - C_M}{B} \quad (9.32)$$

La Fig. 9.5 ilustra de qué manera progresa el procedimiento iterativo que, por aplicación sucesiva del sistema de ecuaciones 9.30 para todos los valores de i (de 1 a $NS = N + 1$), permite obtener los perfiles de H y de Q (este último omitido en el gráfico) para los instantes denotados por $t = \Delta t$ (arriba a la derecha), $t = 2\Delta t$ (abajo a la izquierda) y $t = 3\Delta t$ (abajo a la derecha), una vez calculados los valores correspondientes a $t = 0$ (arriba a la izquierda). Los valores de H y de Q se proyectan perpendicularmente al plano $x - t$ al que pertenecen las curvas características C^+ y C^- .

Desde luego, el problema no está perfectamente determinado hasta tanto no se impongan las condiciones de contorno —ya se ha hecho mención a cómo se aplican las condiciones iniciales—, de manera que queden restringidos todos sus grados de libertad. Dado que las ecuaciones diferenciales que dan origen al presente sistema de ecuaciones algebraicas son de primer grado tanto en H como en V , tal como revela una somera inspección, las condiciones de contorno deben involucrar alternativamente a una (condición de contorno de Dirichlet) como a la otra (con-

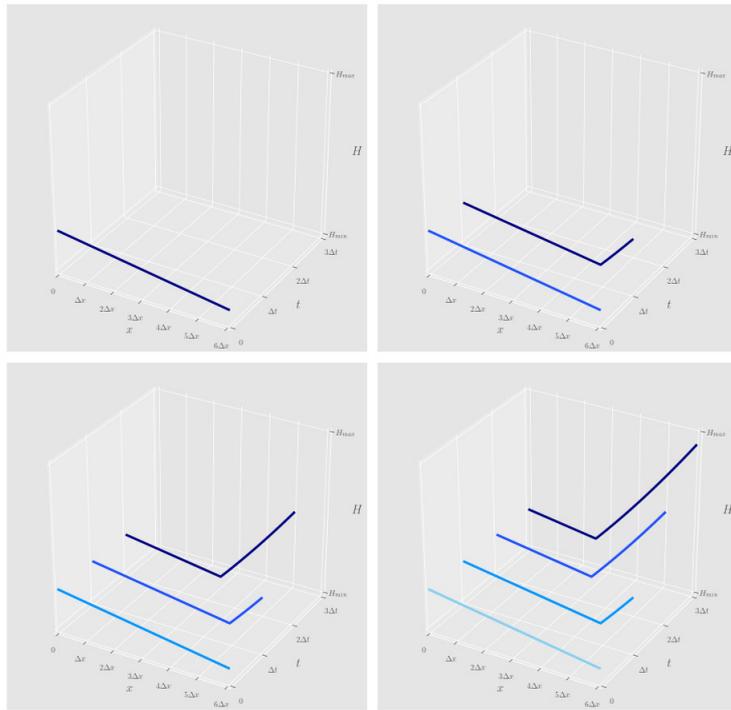


Figura 9.5: Simulación de un fenómeno transitorio por medio del método de las características

dición de contorno de Neumann).

Referencias

Wylie, B., Streeter, V.L. (1978). *Fluid Transients*. New York: McGraw-Hill.