Universidad Nacional de La Plata

Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación

Trabajo Final Integrador

Construcción de apoyos para la enseñanza y el aprendizaje de la división de polinomios usando la regla de Ruffini en un aula de Matemática del nivel secundario en la que participa un alumno ciego

Aspirante: Prof. Jimena Lorenzo
Directora: Esp. Verónica Grimaldi
Co-Directora: Dra. Pilar Cobeñas

Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación
Universidad Nacional de La Plata
- 2023 -

Resumen

En este trabajo presentamos una experiencia de colaboración en la que diseñamos apoyos para la enseñanza y el aprendizaje de la división de polinomios utilizando la regla de Ruffini en un aula de Matemática del nivel secundario en la que participa un alumno con discapacidad visual. El diseño se llevó a cabo a partir del trabajo conjunto entre la autora de este Trabajo Final Integrador y la docente del curso, así como del trabajo colaborativo con el alumno ciego. Para su elaboración, implementación y evaluación nos apoyamos en desarrollos teóricos de la Didáctica de la Matemática Francesa y de la Educación Inclusiva.

Palabras Claves

Enseñanza y aprendizaje de la Matemática - Nivel Secundario - Polinomios - Educación Inclusiva - Personas con discapacidad.

Abstract

In this work we present a collaborative experience in which we design supports for teaching and learning the division of polynomials using Ruffini's rule in a secondary level Mathematics classroom in which a blind student participates. The design was carried out from the co-work between the author of this Comprehensive Final Project and the course teacher, as well as collaborative work with the blind student. For its elaboration, implementation and evaluation we rely on theoretical developments of Didactics of French Mathematics and Inclusive Education.

Keywords

Teaching and learning of Mathematics - Secondary school - Polynomials - Inclusive Education - People with disability.

A mis hijos, Simón y Ciro.

Agradecimientos

A Verónica Grimaldi y Pilar Cobeñas, por acompañarme tan cálidamente en este recorrido y por confiar en mí desde el inicio. Gracias por su generosidad y compromiso con este trabajo.

A mis colegas, amigos y amigas del Departamento de Ciencias Exactas y Naturales de la FaHCE UNLP por el apoyo y acompañamiento. Especialmente un GRACIAS enorme a Leticia Lapasta, Teresa Legarralde, Alfredo Vilches, Natalia Arcaría y Florencia Menconi.

A los colegas de la UNLP que en este largo camino recorrido siempre han brindado palabras de aliento y acompañamiento. Especialmente a mis colegas y amigas Anyelen Di Paolantonio y Cecilia de Cortazar, con quienes compartimos el amor por la enseñanza de la Matemática.

A mi colega y compañera, Romina Herrera, con quienes hemos compartido la cursada de esta hermosa carrera de posgrado. GRACIAS por esas largas charlas de camaradería y "catarsis".

A mis docentes de la Especialización por los conocimientos compartidos y el apoyo para lograr el título de posgrado.

A Fausto Bragagnolo, querido colega y compañero, gracias a quien comenzamos a trabajar conjuntamente con Antonio.

A Antonio por haber estado siempre tan bien dispuesto en participar y colaborar con este trabajo.

A Silvia, colega que nos abrió las puertas de su aula para trabajar conjuntamente.

A los integrantes de la Biblioteca Braille y Parlante de la Provincia de Buenos Aires por colaborar en la accesibilidad de este trabajo, especialmente a Belkys, por sus aportes y sugerencias.

Al Dr. Jean-Philippe Drouhard (qepd), por sus generosos aportes.

A mis viejos, Leonor y Daniel, quienes siempre me acompañaron y alentaron. Sin su apoyo incondicional muchos de mis logros no habrían sido posibles.

A mi hermana Lucía, con quien siempre tenemos largas charlas sobre la inclusión de personas con discapacidad en los ámbitos educativos. Gracias por cada aporte, cada palabra amorosa y de aliento a lo largo de este recorrido.

A mis hijos, Simón y Ciro, quienes han renunciado a tiempos con su mamá apoyándome para lograr concretar este trabajo.

A mi compañero de ruta, Leo, quien siempre ha estado a mi lado apoyándome en cada uno de mis proyectos.

Índice

Índice de figuras

Introducción

Fundamentos de la elección del tema

El tema objeto del presente trabajo está fuertemente vinculado a mis primeros pasos como docente en distintos ámbitos de la Universidad Nacional de La Plata. Si bien no ha sido una experiencia personal como profesora de Matemática contar con un alumno con discapacidad visual en mis clases, he escuchado los relatos de varios colegas que alguna vez se encontraron con esa situación al inicio del ciclo lectivo de la escuela media en la que se desempeñaban. En este sentido, los docentes me han relatado que en ocasiones no son informados previamente sobre la presencia de un estudiante con discapacidad en su aula, reconociendo por sus propios medios la presencia de este estudiante una vez iniciado el período de clases. En otros relatos, si bien reconocen haber sido informados por las autoridades sobre la participación de un estudiante con discapacidad en el curso a su cargo, afirman no encontrar el acompañamiento institucional que necesitan. De sus experiencias, hallaba como punto en común la sensación de incertidumbre y de falta de herramientas para enfrentar esa situación, si bien en la mayoría de ellos se notaba una buena predisposición. Se sentían solos y sin saber qué herramientas buscar o movilizar para afrontar el desafío; parecía que todos iniciaban "desde cero", sin poder apoyarse en algún trayecto propio o experiencias llevadas adelante por otros colegas. En estos relatos aparece cierta idea de que el conocimiento didáctico disponible a partir de toda su experiencia de enseñanza resultaría insuficiente para este nuevo escenario. Además, se nota cierto reclamo hacia los equipos de gestión de las instituciones educativas, así como una búsqueda de ayuda que provenga de otros actores -institucionales o no- con conocimientos que ellos parecen no tener disponibles. Estas inquietudes por parte de mis colegas, vinculadas fuertemente a mi desempeño profesional, nos llevó a plantear la propuesta que se presenta en este Trabajo Final Integrador. En ella, trabajamos de manera conjunta con la docente del curso y construimos un escenario de colaboración con el estudiante en el diseño específico de un dispositivo de enseñanza.

La propuesta se enmarca en el trabajo que realizamos desde la cátedra de Didáctica Específica II y Prácticas Docentes en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional de La Plata (FaHCE, UNLP), en la que es usual que trabajemos articuladamente con colegas de instituciones del nivel medio. En esta oportunidad colaboramos en la puesta en marcha de una propuesta didáctica en un curso de una escuela media de la ciudad de La Plata que incluye a un estudiante ciego.

El contenido matemático considerado es la regla de Ruffini asociada a la división de polinomios, teniendo en cuenta que dentro de la planificación institucional se preveía abordar posteriormente la factorización de polinomios. La decisión de trabajar en torno a estos contenidos fue tomada de manera conjunta con la docente a cargo del curso, a partir de consideraciones didácticas, curriculares e institucionales. Asimismo, asumimos relevante la participación del estudiante con discapacidad en la construcción de apoyos para la enseñanza y el aprendizaje.

Antecedentes vinculados a la propuesta didáctica

Presentamos a continuación dos antecedentes en los que participó la autora del presente Trabajo Final Integrador, ya que consideramos que comenzaron a forjar sus bases en dimensiones diversas.

El primero de ellos, la construcción de un rompecabezas accesible, establece un antecedente en relación con el dispositivo que describiremos más adelante. Este constituye la idea preliminar al material didáctico generado en conjunto con el estudiante con discapacidad en el marco de este trabajo final.

Asimismo, la experiencia que describimos en segundo lugar constituye un antecedente sumamente relevante en relación con los vínculos institucionales, pero fundamentalmente con el lugar central que tuvo la voz del alumno con discapacidad en la experiencia didáctica construida.

El Teorema de Pitágoras y una propuesta didáctica para su estudio

En el marco del trabajo final del Seminario "Teoría y desarrollo curricular en Ciencias Exactas"[1] propusimos el diseño de una propuesta didáctica para analizar una de las demostraciones del teorema de Pitágoras tomando como referencia el Diseño Curricular para la Educación Secundaria de la Provincia de Buenos Aires de 2º año ESB (DGCyE, 2007). En este documento se incluye, dentro de las prácticas del núcleo Geometría y

[1] Materia obligatoria de la Especialización en Educación en Ciencias Exactas y Naturales FaHCE UNLP.

magnitudes, “Comprobar con la ayuda del docente la validez del teorema de Pitágoras” (p.311). En particular se propuso trabajar con la demostración atribuida a Henry Perigal, que se plantea mediante disecciones. Estas consisten en dividir los cuadrados sobre los catetos en piezas tales que con todas ellas pueda construirse el cuadrado de la hipotenusa.

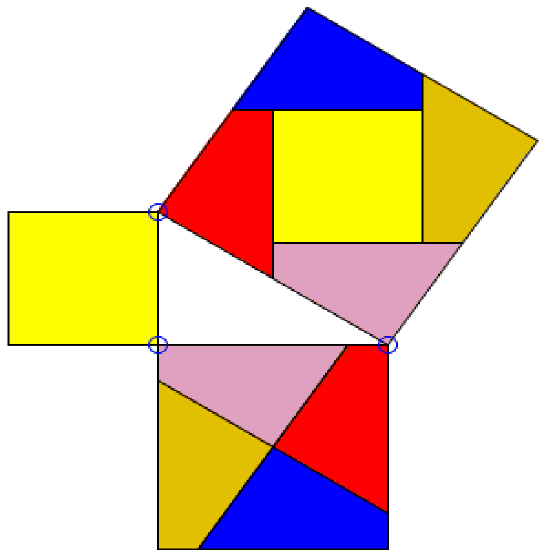


Figura 1: Rompecabezas de Perigal

[En la imagen: Tres cuadrados con cada uno de sus lados apoyados respectivamente en los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Dos de los cuadrados se encuentran divididos en figuras geométricas de distintos colores]

Con el rompecabezas de Perigal los alumnos pueden acomodar las piezas a partir de la observación de estas, y el hecho de que las piezas iguales sean del mismo color favorece el trabajo sobre la comprobación del teorema de Pitágoras a través de la comparación de áreas[2].

En el marco del trabajo final antes mencionado se propuso diseñar un rompecabezas accesible para un

[2] En el siguiente vínculo se accede a una aplicación en la que puede visualizarse este proceso: https://www.geogebra.org/m/fUcB9BQQ

estudiante ciego, bajo la hipótesis de que en el aula de escuela común en la cual el docente a cargo lleve una propuesta didáctica que implique la utilización del rompecabezas, se cuente con un alumno con dicha discapacidad visual. En este sentido, se propuso:

- ✔ realizar las piezas en cartón o madera con diferentes texturas para que el alumno pueda percibirlas y diferenciarlas al tacto;
- ✔ que las piezas iguales tengan el mismo relieve además de distinguirse por los colores;
- ✔ imantar las piezas de manera que los alumnos puedan moverlas sobre una superficie a la que se adhieran; de este modo las piezas se podrán deslizar con suavidad, pero con firmeza.

A continuación mostramos algunas imágenes del "Rompecabezas de Perigal accesible":

Figura 2: Rompecabezas de Perigal accesible

[En la imagen: Tres cuadrados con cada uno de sus lados apoyados respectivamente en los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Dos de los cuadrados se encuentran divididos en figuras geométricas de distintos colores]

La secuencia de problemas que implicaba la utilización de este rompecabezas era la siguiente:

<u>Actividad</u>: Formen grupos de 4 o 5 integrantes y a partir de las piezas que se encuentran en el sobre que recibieron realicen y/o respondan las siguientes consignas:

1) Armen el rompecabezas, considerando que deben quedar definidos un triángulo rectángulo y 3 cuadrados que tengan como lados a la hipotenusa y los catetos del triángulo respectivamente.
2) Comparen las áreas de los cuadrados. ¿Qué conclusiones obtienen?
3) Escriban la fórmula del área de cada uno de los cuadrados indicando con la letra "A" a la hipotenusa, "B" al cateto mayor y "C" al cateto menor.
4) A partir de las conclusiones que escribieron en 2), ¿cómo pueden relacionar las fórmulas de las áreas halladas anteriormente?

Asimismo, se tuvo en cuenta el modo en que el alumno ciego accedería a las consignas, considerando diversas opciones atendiendo a las particularidades de cada estudiante. El alumno podría contar con una transcripción al sistema Braille[3], con un lector digital de consignas, entre varias alternativas.

¿Qué pasa cuando cambiamos de lugar? Construyendo inclusión en un aula de Matemática.

En el marco de la cátedra Didáctica Específica II y Prácticas Docentes en Matemática de la FaHCE, UNLP, llevamos adelante una experiencia de articulación con un docente de Matemática de un colegio de pregrado de la UNLP que contaba con un estudiante ciego en el 4to año de estudios del nivel medio. Tanto la institución educativa como el estudiante con discapacidad son los mismos actores involucrados en el presente Trabajo Final Integrador; es decir que consideramos la experiencia referenciada como un antecedente en relación con los vínculos institucionales, y también del trabajo conjunto con el estudiante con discapacidad.

Un propósito del docente a cargo del curso era la enseñanza de la semejanza de triángulos a través del trabajo con problemas extramatemáticos que lleven a la modelización de las situaciones propuestas. Se presentó la necesidad de que el estudiante ciego pudiera construir representaciones de los triángulos rectángulos semejantes a la par del resto de sus compañeros. En este sentido, se propuso la utilización de un geoplano[4], derribando para el estudiante con discapacidad visual

---

[3] En próximos apartados haremos referencia al sistema Braille.

[4] Tablero generalmente cuadrado, en el que sobresalen clavos alrededor de los cuales se podrán utiliza r bandas elásticas con el fin de representar figuras geométricas.

una barrera de inclusión en relación al tipo de trabajo matemático que podía llevar a cabo: a la posibilidad de interpretar representaciones geométricas realizadas por otros, se agregaba la de producir sus propias representaciones. Esto mismo facilitó su inclusión en instancias de trabajo en parejas o grupales, puesto que ahora disponía de los medios para realizar por sí mismo representaciones que pudieran ser compartidas y discutidas con sus compañeros. (Bragagnolo, Grimaldi y Lorenzo, 2015, p.4)

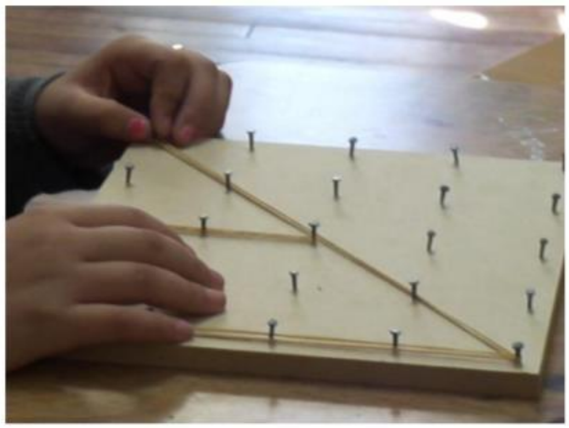


Figura 3: Geoplano

[En la imagen: Las manos de una estudiante construyendo una representación de triángulos rectángulos semejantes utilizando bandas elásticas en un geoplano de madera rectangular con pivotes realizados con clavos]

Asimismo, se organizó una jornada de trabajo en la que los compañeros del alumno con discapacidad pudieran experimentar algunas de las condiciones en las que él elabora sus ideas. Por lo que se planificó una clase en la que todos los alumnos participaran sin ver, para lo cual deberían vendarse los ojos. Los propósitos de esta jornada fueron:

- ✔ que interactúen con el geoplano en la construcción de triángulos semejantes en condiciones similares a las de su compañero con discapacidad;
- ✔ que adviertan ciertas características y diferencias en los modos de trabajo y los tiempos, tanto en relación a los problemas matemáticos como de las interacciones con sus compañeros y con el profesor.

Figura 4: "Clase a ciegas"

[En la imagen: Estudiantes con los ojos vendados utilizando geoplanos en situación de clase escolar, uno de los estudiantes es un alumno ciego]

Algunos antecedentes en el marco de la Especialización en Educación en Ciencias Exactas y Naturales FaHCE UNLP

La Especialización en Educación en Ciencias Exactas y Naturales, carrera de posgrado perteneciente a la FaHCE UNLP, cuenta con varios Trabajos Finales Integradores aprobados. De ellos, dos son afines a la temática objeto de estudio del presente trabajo: "La inclusión de alumnos con discapacidad en aulas de Matemática del Nivel Secundario: Su abordaje en la formación docente inicial" (Grimaldi, 2017) e "Integración del no vidente en la clase de matemática. La clasificación de ángulos, un contenido para la inclusión" (D'Urzo, 2016).

En Grimaldi (2017) se presenta una experiencia en la que se ha buscado generar un espacio formativo en torno a la inclusión educativa en la formación inicial de profesores, articulando con las primeras prácticas docentes en aulas de Matemática del nivel secundario con alumnos con y sin discapacidad. Asimismo, D'Urzo (2016) define que el objetivo de su trabajo es "desarrollar una secuencia didáctica utilizando la metodología de resolución de problemas que favorezca la integración de un alumno ciego en las clases de matemática." (p.3)

Nos resulta interesante subrayar la producción de trabajos finales de esta carrera en torno a esta temática, dado que consideramos que denota un interés peculiar en la formación de posgrado de los profesores de Matemática: la inclusión de estudiantes con discapacidad en las clases de Matemática.

Objetivos

En esta sección presentamos los objetivos generales y específicos del presente Trabajo Final Integrador.

General

- ✔ Construir conocimiento didáctico vinculado a la inclusión de un alumno ciego en un aula de matemática de una escuela media a través de la elaboración e implementación de una propuesta didáctica para la enseñanza de la división de polinomios en el marco del trabajo articulado con el docente a cargo del curso y de un trabajo colaborativo con el estudiante con discapacidad.

Específicos

- ✔ Trabajar de manera articulada con el docente a cargo del curso a los fines de diseñar e implementar la propuesta didáctica en relación con la Regla de Ruffini.
- ✔ Trabajar colaborativamente con el estudiante con discapacidad a los fines de diseñar la propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la Regla de Ruffini.
- ✔ Identificar las posibles barreras para la enseñanza y el aprendizaje de la Regla de Ruffini en aulas con alumnos ciegos.
- ✔ Construir los apoyos necesarios para la enseñanza de la Regla de Ruffini dentro de la enseñanza media obligatoria.
- ✔ Analizar una experiencia didáctica vinculada al diseño de un conjunto de apoyos a la enseñanza que favorezcan el aprendizaje de la división de polinomios, a partir de una construcción compartida de un material didáctico con un estudiante ciego.

Acerca de la matemática escolar y la inclusión de alumnos con discapacidad

La inclusión de alumnos con discapacidad: una mirada desde la didáctica específica

Nuestra propuesta se apoya en desarrollos teóricos de ciertos referentes de la didáctica francesa; fundamentalmente, en la Teoría de las Situaciones de Guy Brousseau (1986, 2007), la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Yves Chevallard (1997, 1999) y la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval (1995, 2006). Tomando este enfoque de trabajo consideramos a la matemática como un producto histórico, social y cultural, en contraposición a una mirada muy instalada en la que las ideas matemáticas son descubiertas. Seguimos a Charlot (1991) cuando propone que:

> A esta idea de una matemática dada, bajo una u otra forma, contrapongo la idea de una matemática construida, diría incluso, utilizando de una manera un poco provocativa el vocabulario de la técnica, una matemática fabricada. La actividad matemática no es mirar y descubrir, es crear, producir, fabricar. Los conceptos matemáticos no son un bien cultural trasmitido hereditariamente como un don o socialmente como un capital, sino el resultado de un trabajo del pensamiento, el trabajo de los matemáticos a través de la historia, el del niño a través de su aprendizaje. (p.3)

A partir de esta perspectiva epistemológica, Guy Brousseau plantea la Teoría de Situaciones Didácticas (1986, 2007), que posiciona en un lugar relevante a las producciones de los estudiantes en la clase de Matemática. Sadovsky (2005) afirma que esta teoría

> toma posición respecto de la necesidad de formar jóvenes con autonomía intelectual y con capacidad crítica. Al ubicar del lado de la escuela la responsabilidad de lograr que los alumnos se posicionen como sujetos teóricos, como sujetos productores, deja sentado que todos los alumnos tienen derecho a construir y ejercer el poder que otorga el conocimiento. (p.64)

Debido a la temática de este Trabajo Final Integrador, resulta importante destacar que desde sus orígenes esta teoría buscó problematizar el modo en que se interpretaban hasta ese momento las producciones de los alumnos. En efecto, frente a respuestas erróneas o a fracasos en las tareas que se les proponían, la interpretación usual asignaba estos fallos a las características de los estudiantes. Brousseau, en cambio, plantea que "las causas de los fracasos tendrían que buscarse en la relación del alumno con el saber y con las situaciones didácticas y no en sus aptitudes o en sus características permanentes generales" (Brousseau, 1999, citado en Broitman y Sancha, 2021, p. 189).

Asimismo, consideramos pertinente destacar que dentro de esta teoría, y en línea con lo que decíamos antes sobre el modo en que esta perspectiva didáctica concibe a la matemática, Brousseau afirma que "el marco cultural de la clase impone restricciones que condicionan el conocimiento que se elabora" (Sadovsky, 2005, p.22). Así, lo que se produzca en la clase depende tanto de los conocimientos de los alumnos de esa aula –las herramientas que tengan disponibles, el tipo de relación que entablen con el saber-, como de aquello que el docente considere relevante, valioso o aceptable respecto del saber de referencia que quiere enseñar. En este sentido, la clase es concebida como una comunidad de producción, en la cual aquello que se produce es

> un aporte a la cultura en la cual esa comunidad está inmersa, y a su vez está condicionada por esa cultura en cuanto al tipo de problemas que enfrenta, los modos de trabajo, el tipo de regulaciones y normas que se van configurando. (Sessa y Giuliani, 2008, p. 17)

Otro marco en el que nos apoyamos es la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Yves Chevallard (1997), que sitúa la actividad matemática, y en consecuencia el estudio de las matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales. Subrayamos que

> la TAD fue uno de los primeros enfoques en considerar como objeto de estudio e investigación, no sólo las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, sino todo el proceso que va desde la creación y utilización del saber matemático hasta su incorporación en la escuela como saber enseñado. (Bosch y Gascón, 2009, p.90)

En esta teoría se considera a la didáctica de la matemática como una actividad humana, y se admite que "toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se denomina aquí con la palabra de praxeología" (Chevallard, 1999, p.222). En este sentido,

> la TAD introduce una conceptualización unitaria sencilla en términos de praxeologías –unión de los términos griegos logos y praxis– para referir a cualquier estructura posible de actividad y conocimiento. Se parte del postulado que toda actividad humana se puede describir como la activación de praxeologías, asumiendo así que, en la perspectiva antropológica adoptada, toda práctica o "saber hacer" (toda praxis) aparece siempre acompañada de un discurso o "saber" (un logos), es decir una

> descripción, explicación o racionalidad mínima sobre lo que se hace, el cómo se hace y el porqué de lo que se hace. (Bosch y Gascón, 2009, p.91)

El concepto de praxeología está vinculado a las tareas, actividades, problemas, ejercicios, que son construcciones institucionales, posicionando desde esta teoría en un rol relevante a las instituciones y las decisiones que en ellas se construyen. Tal como propone Sadovsky (2019), todas las instituciones, "la escuela en particular, funcionan bajo ciertas restricciones que condicionan el modo en que se pueden tratar —producir, utilizar, desarrollar, transmitir— los saberes en su interior" (Sadovsky, 2019, p.101). En efecto, en el análisis que realiza la autora de la obra de Chevallard, distingue dos tipos de relación con los objetos de saber: las relaciones institucionales, vinculadas con el tipo de prácticas sociales que se desarrollan en esa institución, y las relaciones personales que entablan las personas que trabajan en esas instituciones. En este sentido, las ideas de Cheval ard se plantean "en términos del análisis de las prácticas sociales con relación a los saberes, en el marco de la institución escolar" (p.105).Esta dimensión particular de la teoría resulta relevante en nuestro caso ya que para llevar adelante una colaboración situada en una institución resulta necesario comprender los condicionamientos bajo los cuales se plantea la producción de conocimiento matemático. Dado que nuestra intención no es modificar las prácticas de enseñanza de la docente del curso sino colaborar en el diseño de propuestas didácticas que incluyan al alumno con discapacidad, comprender estos condicionamientos resulta un punto de partida ineludible.

Finalmente, consideramos los aportes de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (Duval, 1995, 2006), que aborda la complejidad de las representaciones de los objetos matemáticos, no sólo dentro de las escrituras simbólicas, sino las que se realizan en lenguaje natural, las figuras geométricas, los esquemas y los gráficos.

En torno a la relación entre objetos y representaciones, Duval (2006) afirma que "los contextos de representación usados en la actividad matemática son necesariamente semióticos" (p.145) ya que los objetos matemáticos son ideas que no existen sino a través de sus representaciones. Así, "tener en cuenta la naturaleza semiótica de las mismas implica tener en cuenta tanto las formas en que se utilizan como los requisitos cognitivos que involucran" (p.145).

En esta teoría se distinguen tres actividades cognitivas fundamentales asociadas a los registros de representación semiótica: la formación de representaciones, el tratamiento y la conversión. La formación de una representación semiótica refiere a la utilización de signos propios del sistema particular. Esta actividad implica la selección de símbolos y el uso de reglas de formación, de modo de garantizar la comunicabilidad de la producción, y también de estar en condiciones de utilizar los modos de tratamiento al interior del sistema.

El tratamiento de una representación es la transformación de dicha representación en otra, dentro del mismo registro. Un ejemplo de tratamiento son las sucesivas expresiones equivalentes que se producen para la resolución de una ecuación.

La conversión es "la transformación de la representación de un objeto, situación o información dada en un registro, en una representación del mismo objeto, situación o información, en otro registro" (Duval, 1995, p.14). Por ejemplo, cuando una función representada a través de una expresión algebraica es representada en forma gráfica.

De acuerdo con Duval (2006), la noción central es la de transformación semiótica considerando que el punto fundamental en la actividad matemática no es la utilización necesaria de representaciones semióticas sino la capacidad de pasar de un registro de representación semiótica a otro registro. Pero además, "la actividad matemática requiere una coordinación interna, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados; sin esta coordinación dos representaciones diferentes significarán dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos" (Duval, 2006, p. 145).

Sobre la mirada del estudiantado con discapacidad y el aporte de la Educación Inclusiva

Para abordar una reflexión en relación con la enseñanza de la matemática en aulas con estudiantes con discapacidad consideramos necesario compartir brevemente la mirada de la discapacidad desde la que nos posicionamos: el Modelo Social, que considera a la discapacidad, no como un déficit de un individuo, sino como una construcción social, es decir:

> una relación entre una persona con ciertas características y la sociedad que le presenta diversas barreras que la inhabilitan para participar plenamente de la vida social. Esto no niega las características de las personas, pero sí niega la imposibilidad que se les asigna a priori para ser capaces de hacer algo de manera independiente de las condiciones que se les ofrezcan. (Grimaldi, 2017, p.4)

En este sentido, coincidimos con Cobeñas (2021) en que se parte de considerar que

> no existiría algo así como un cuerpo biológico previo o separado de las concepciones sociales sobre la discapacidad. Es decir, la discapacidad es una producción social y cultural. Esto no implica negar que una persona ciega no ve, por ejemplo, sino que supone problematizar la idea de considerar a las personas ciegas como "no videntes", es decir, desde ciertos valores culturales asociados a la visión y la normalidad, que determinan los modos en los que la discapacidad se nos hace inteligible (Ferrante, 2014; Brogna, 2009; Cobeñas, 2016). Así, desde nuestra perspectiva, la ceguera es una forma de ser y estar en el mundo, una identidad y las personas ciegas son personas completas. (p.58)

Asumimos, además el Modelo de Derechos Humanos, ya que

> Desde la década del´80 se ha venido consolidado una visión diferente hacia las personas con discapacidad que se centra en la mirada de las Personas con Discapacidad como sujetos de derecho, es decir, en su condición de ser humano en igualdad de derechos y dignidad que los demás. La firma y ratificación de la Convención sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad determinó la consolidación de este nuevo paradigma de la discapacidad, el Modelo de Derechos Humanos. (Grimaldi, Cobeñas, Melchior y Battistuzzi, 2015, p.8)

A lo largo del desarrollo del presente trabajo utilizaremos el término "persona con discapacidad", para referirnos a un determinado integrante del colectivo de personas con discapacidad ya que es el término que ha sido aceptado por este colectivo en el marco de la Convención sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad (ONU, 2006). En este mismo sentido, utilizaremos los términos "estudiante con discapacidad" o "alumno con discapacidad".

Asimismo, nos ubicaremos dentro del campo de la Educación Inclusiva que tiene la característica de constituirse no sólo como una perspectiva pedagógica sino también como un derecho humano. Así, el Estudio Temático sobre el derecho de las personas con discapacidad a la educación expresa que:

> En la Convención sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad se señala que, para que estas personas puedan ejercer ese derecho, han de existir sistemas educativos inclusivos; en consecuencia, el derecho a la educación es un derecho a la educación inclusiva. (ONU, 2013, p.3)

Por Educación Inclusiva entendemos la identificación y eliminación de todas las políticas, culturas y prácticas educativas que puedan tener como efecto formas de exclusión educativa de las personas con discapacidad, y el consiguiente desarrollo de apoyos y formas de enseñanza basadas en el supuesto de que todos pueden aprender y que deben hacerlo juntos en espacios inclusivos (Ainscow, 2002; Cobeñas y Grimaldi, 2018). Así, se diferencia de la integración que supone que son los alumnos los que deben adecuarse a la escuela común, que permanece inalterada, y no las instituciones las que deben transformarse para educar a todos los alumnos, incluidos a aquellos con discapacidad. En esta misma línea, Booth y Ainscow (2000) proponen utilizar el término “barreras al aprendizaje y la participación” centrando la mirada en las dificultades y limitaciones impuestas por las escuelas para la educación de los estudiantes y no en las características de estos últimos comprendidas en ocasiones por el sistema educativo como déficits que obstaculizan los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

> En términos pedagógicos, una barrera es cualquier recurso, estructura, concepción, forma de organización del tiempo o del espacio, de enseñanza, de comunicación, o mobiliario escolar, entre otras, que impida o restrinja el pleno ejercicio del derecho a la educación en todo el alumnado. En consecuencia, las barreras no son inherentes a los alumnos con discapacidad, sino que son estructuras, concepciones, recursos propios del sistema educativo que, en interacción con alumnos con discapacidad, actúan vulnerando sus oportunidades de participación y aprendizaje y generando múltiples formas de exclusión educativa. (Cobeñas y Grimaldi, 2021, pg. 138)

Encontramos aquí una perspectiva afín a la que señalamos en relación a la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau. Una de las preguntas que se abordan en el campo de la Educación Inclusiva es “cómo creamos contextos educativos para ´l egar´ a todos los estudiantes” (Ainscow, 2001, p.3). Entre las condiciones que propone Ainscow (2001) se encuentra el tomar como punto de partida las prácticas y los conocimientos existentes en la institución. Dado que en las escuelas se produce mayor conocimiento del que usualmente se reconoce y este debe ser desarrollado para que se haga un mejor uso de él, las investigaciones señalan la necesidad de colaborar con los docentes dentro de las mismas instituciones con el objetivo de que revisen y transformen su propia práctica a la luz del nuevo desafío de enseñanza que enfrentan. En este mismo sentido, revisar las prácticas existentes resulta una oportunidad para analizar si estas de alguna manera se están constituyendo en una barrera a la participación. Así, es necesario acceder a los modos específicos de funcionamiento de la clase para determinar las barreras que pueden estar experimentando algunos estudiantes y apoyar al docente para que pueda abordar este asunto. En este punto, la perspectiva que puede brindar el propio alumno sobre su experiencia en el aula resulta ser una fuente de información ineludible para colaborar con este proceso.

Desde los paradigmas mencionados hasta aquí se postula que todos los alumnos -con y sin discapacidad- no solo tienen derecho a aprender matemática en la escuela secundaria común sino que pueden hacerlo si hay intencionalidad didáctica para que esto suceda y se generan condiciones adecuadas. Seguimos a Grimaldi, Cobeñas, Filardi y otros (2019) en que la construcción de estas condiciones se vincula con ciertas características del trabajo docente dentro de las instituciones educativas, las cuales no están dadas –debido a la historia propia del sistema y del nivel-, sino que han de ser construidas. Tal como señalan las autoras, se consideran los aportes que se vienen produciendo en torno al trabajo colaborativo tanto desde la Didáctica de la Matemática como desde el marco de la Educación Inclusiva.

> Esto es especialmente necesario frente a escenarios de gran complejidad como las aulas inclusivas, para los cuales la formación y la trayectoria laboral de cada uno de los actores resulta insuficiente para abordar individualmente las situaciones que puedan emerger. El trabajo colaborativo supone que un cierto conocimiento nuevo ha de ser construido teniendo en cuenta la experiencia y los saberes de todos los que participan de este trabajo. (Grimaldi et al., 2019, p.4)

En particular, consideramos de relevancia poner en el centro la voz de las personas con discapacidad, y propusimos construir condiciones para trabajar con el alumno con discapacidad visual en el diseño de los materiales y recursos que estén involucrados en la propuesta didáctica. Esta decisión se apoya en la mirada del Modelo Social de la discapacidad que sostiene a este proyecto, uno de cuyos lemas es “Nada sobre nosotros sin nosotros”[5]. Así, para que la propuesta de enseñanza tenga en cuenta los conocimientos disponibles de todos los alumnos, y en particular los del alumno ciego, necesitamos acceder a sus maneras de interactuar con el entorno -los objetos, las representaciones-, así como a sus modos de conocer y de producir conocimiento matemático que ha venido construyendo a lo largo de su trayectoria escolar.

[5] Este lema nació con el movimiento a favor de la vida independiente de las personas con discapacidad en Estados Unidos, durante la década de 1970, en la Universidad de California en Berkeley. Expresa la idea de que ninguna decisión que influya sobre las personas con discapacidad debe hacerse sin su participación plena (Hernández Sánchez y Fernández Vázquez, 2016). Actualmente forma parte de los lemas de muchas organizaciones de personas con discapacidad de la sociedad civil, como por ejemplo la Asociación Azul de la ciudad de La Plata.

En este sentido creemos relevante considerar la escucha atenta de los estudiantes, en particular para este trabajo, del estudiante con discapacidad visual. Arcavi e Isoda (2007) caracterizan a esta actividad considerando que "escuchar a los alumnos implica implementar hábilmente diferentes maneras de sostener conversaciones, cuestionamientos y sondeos, destinados a desempaquetar, y verificar, lo más fielmente posible, la perspectiva del otro." (p.4). Si bien estos referentes de la didáctica específica no proponen sus ideas particularmente en referencia a los estudiantes con discapacidad, recuperamos su posicionamiento para subrayar la relevancia de la escucha del estudiante con discapacidad dentro de la clase de Matemática. Dado que él es quien mejor conoce su propio modo de ser y estar en el mundo como persona ciega, considerar sus producciones, sus aportes, y sus ideas será fundamental en la elaboración de apoyos y en la construcción de conocimiento didáctico en torno al contenido matemático en juego.

Queremos destacar que desde el paradigma de la Educación Inclusiva, el término apoyo alude a

> todas aquellas modificaciones que las escuelas producen en pos de asegurar la plena participación y aprendizaje de todo el alumnado, incluido aquel con discapacidad (Ainscow y Booth, 2002). En palabras de Ferguson: "los apoyos son aque**l** as condiciones que deben estar presentes para que los estudiantes aprendan bien y los maestros deben descubrirlas para cada estudiante" (Ferguson, 2008: 115). (Cobeñas y Grimaldi, 2021, p.149)

Por todo lo expuesto hasta aquí, entendemos de gran importancia la interacción con la docente a cargo del curso, considerando la "escucha atenta" de la voz del estudiante para pensar las consideraciones didácticas de la propuesta de enseñanza a construir.

<u>La Regla de Ruffini y la división de polinomios: algunas consideraciones epistemológicas, curriculares y didácticas</u>

La regla de Ruffini es un algoritmo matemático de división de polinomios que permite dividir un polinomio por un binomio de la forma x-a (siendo a un número real). Es decir, que luego de aplicar la regla es viable hallar el cociente y el resto de la división efectuada. Desde un punto de vista histórico podemos mencionar que la construcción del método se le atribuye al matemático italiano Paolo Ruffini, en el marco de sus estudios llevados adelante a comienzos del siglo XIX en relación con las soluciones de ecuaciones de grado mayor a 3 (Weisstein, 1995).

A continuación, mostramos un ejemplo en el que se representa la aplicación de la regla de Ruffini para resolver la división $(3x^3 - 5x^2 + 2) : (x - 2)$, obteniendo como resultado el cociente y el resto.

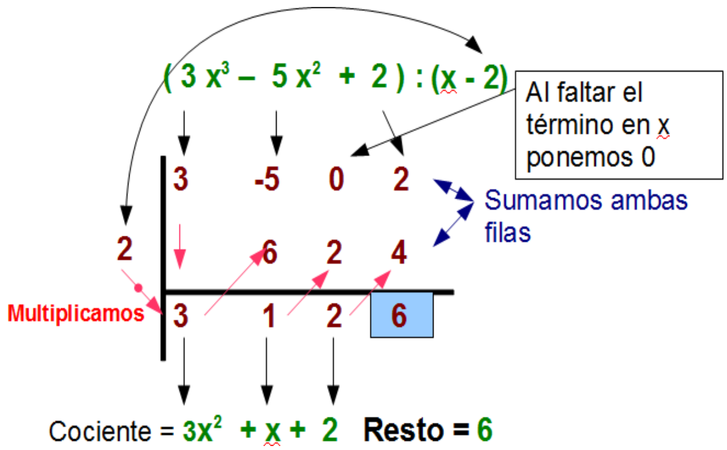


Figura 5: Regla de Ruffini, disposición habitual utilizada en Argentina

Fuente: https://escholarium.educarex.es/coursePlayer/clases2.php?idclase=1329660&idcurso=17064

[En la imagen: Representación de la regla de Ruffini de acuerdo a la disposición utilizada en Argentina. Una tabla cuya primera fila tiene los coeficientes del polinomio dividendo ordenados y completos, la segunda fila tiene el opuesto del término independiente del divisor y los resultados de ciertas operaciones que se realizan en el algoritmo y la tercera fila, los coeficientes del polinomio cociente y el resto. Asimismo, flechas y texto con indicaciones sobre las operaciones realizadas para aplicar la regla.]

Pasos a seguir:

1) Se ubican dentro de la tabla, en la línea superior, los coeficientes del polinomio dividendo, de manera ordenada (en forma descendente) y completa.
2) Se ubica en el extremo inferior izquierdo de la tabla la raíz del polinomio divisor.
3) El primer coeficiente del polinomio dividendo se baja al extremo inferior de la tabla.
4) Se multiplican el primer coeficiente del dividendo con la raíz del divisor y se ubica debajo del segundo coeficiente del dividendo.

5) Se suman los dos números mencionados en el paso anterior.
6) Se repiten los pasos 4 y 5 hasta finalizar con el último coeficiente del polinomio dividendo.
7) En la línea inferior de la tabla quedan determinados los coeficientes del polinomio cociente y del polinomio resto.

Asimismo, la regla de Ruffini permite factorizar un polinomio dado si el polinomio dividendo es divisible por el polinomio divisor, es decir si el resto de la división es cero. En el siguiente ejemplo podemos encontrar la resolución de la división $(5x^4 - 3x^2 + 2x^2 - 7x + 3) : (x - 1)$ utilizando dos procedimientos distintos: el algoritmo de la división entera y la regla de Ruffini.

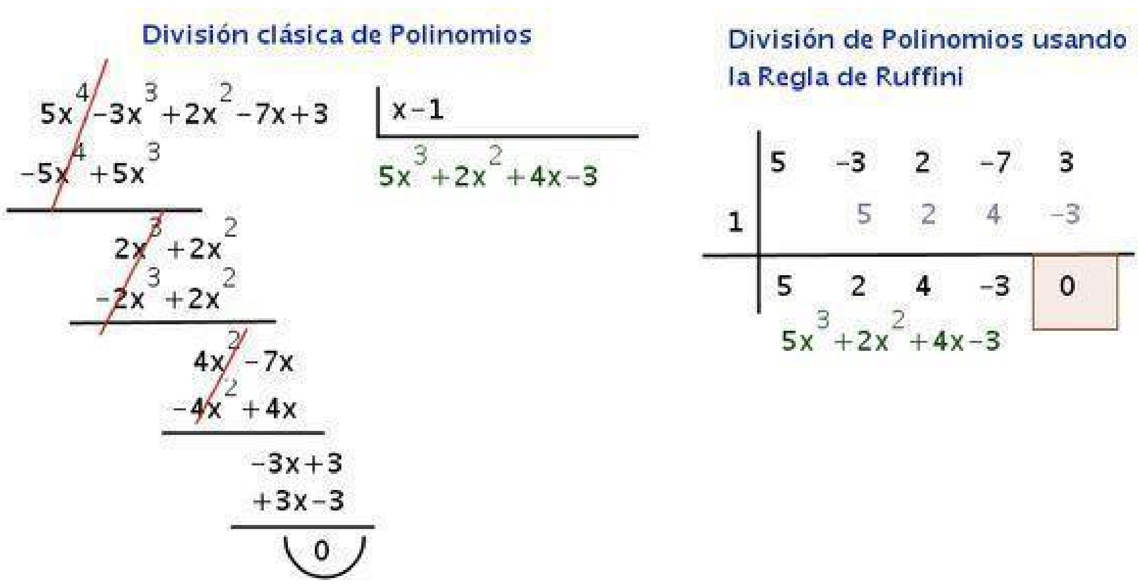


Figura 6: División clásica de polinomios y división aplicando la Regla de Ruffini

Fuente: https://sites.google.com/site/aprendematematicasss/division-por-ruffini

[En la imagen: A la izquierda, representación de la división convencional de polinomios, indicando los polinomios divisor, dividendo y cociente así como los polinomios generados al resolver el procedimiento. A la derecha representación de la regla de Ruffini de acuerdo a la disposición utilizada en Argentina. Una tabla cuya primera fila tiene los coeficientes del polinomio dividendo ordenados y completos, la segunda fila tiene el opuesto del término independiente del divisor y los resultados de ciertas operaciones que se realizan en el algoritmo y la tercera fila, los coeficientes del polinomio cociente y el resto. Cada una de las técnicas de división ejemplificadas están mencionadas sobre cada uno de los procedimientos con un subtítulo.]

En este ejemplo en particular el resto es 0, por lo tanto el polinomio dividendo $5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 3$ puede escribirse en forma factorizada de la siguiente manera: $(5x^3 + 2x^2 + 4x - 3).(x - 1)$

La asociación de la regla de Ruffini con la factorización de polinomios suele estar presente en diversas propuestas curriculares en nuestro país y en distintas partes del mundo. En este sentido Fonseca, Bosch y Gascón (2007) afirman que:

> El uso iterado y sistemático de esta regla para la resolución de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros genera en los alumnos un principio tecnológico "folclórico" y muy robusto según el cual todas las ecuaciones polinómicas de grado mayor que 2 con coeficientes enteros, o tienen alguna raíz entera y ésta se puede calcular "por Ruffini" o no tienen ninguna raíz. (p.4)

En este caso los autores plantean la afirmación anterior al realizar un análisis de las propuestas de enseñanza usuales sobre la división de polinomios y la regla de Ruffini en el sistema educativo español. Asimismo, los autores afirman que:

> La regla de Ruffini es un algoritmo de división de polinomios que se enseña clásicamente en la Secundaria española y que constituye, en esta institución, un ingrediente esencial de las técnicas de resolución de ecuaciones polinómicas. La movilización de esta regla permite realizar de forma "taquigráfica" la división de un polinomio con coeficientes enteros por un monomio (sic) del tipo x – a. (Fonseca, Bosch y Gascón, 2007, p.3)

Los autores caracterizan a la regla como una "forma taquigráfica"; en este sentido, nos parece interesante comparar los dos procedimientos matemáticos para dividir polinomios que presentamos en la Figura 6, y notar de qué manera se ha simplificado la representación en el caso de la regla de Ruffini. Asimismo, destacamos una característica que entendemos que no es menor y que desarrollaremos con mayor profundidad en apartados siguientes: la regla de Ruffini "olvida" o deja de lado momentáneamente las variables y los exponentes. Decimos que es un dato no menor, atendiendo a que el alumno con discapacidad con el cual trabajamos en esta propuesta escribe en Braille; luego retomaremos estas ideas.

Analizaremos el posicionamiento presentado en el Diseño Curricular (DGCyE, 2010) acerca de la enseñanza de los polinomios. Encontramos que se propone para el 4º año del nivel secundario, y textualmente plantea:

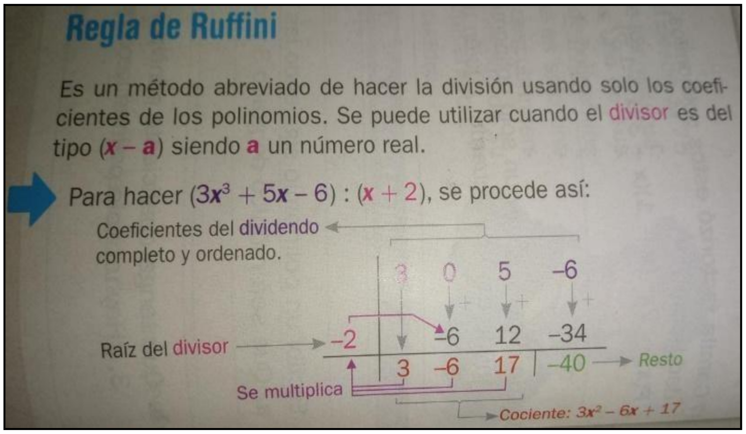
> En el Diseño Curricular de Matemática-Ciclo Superior se trabaja el concepto de indeterminada en una variable. Se prioriza, además de la operatoria elemental, la factorización de los polinomios apelando a los teoremas de Ruffini y de Gauss y las propiedades, pero no desde la mecanización de casos de factoreo. Se promueve que el alumno se aproxime o encuentre alguna raíz por método interactivo y luego divida para bajar el grado. (DGCyE, 2010, p.24)

Podemos afirmar que la propuesta del Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires, al igual que la plantean los programas de la institución en la que inscribimos este trabajo final integrador, o la que describen Foseca, Bosch y Gascón (2007) para la secundaria española, propician un abordaje del contenido "Polinomios" articulando las operaciones básicas con la factorización. En este sentido podemos establecer algunas coincidencias con los estudios epistemológicos e históricos acerca de los Polinomios de las investigadoras argentinas Silvia Caronía y Graciela Sklepek quienes afirman que

> los polinomios aparecen de manera implícita en la resolución de ecuaciones desde la antigüedad, su expresión formal tiene raíces en el álgebra abstracta mucho tiempo después (siglo XVII). Dicha expresión formal, teniendo en cuenta las características de los exponentes, permite distinguirlos como expresiones algebraicas particulares que son elementos de un anillo. (Caronía y Sklepek, 2012, p. 243)

Es decir que en las propuestas didácticas que hemos mencionado, la regla de Ruffini no sólo es un método que permite dividir dos polinomios, sino que posteriormente se la estudia asociada la factorización de estos objetos matemáticos. Conociendo las posibles raíces de un polinomio, la regla de Ruffini es utilizada como un mecanismo que permite reescribir a los polinomios como producto y habilita a que se resuelvan ecuaciones polinómicas.

Siguiendo las propuestas curriculares nacionales y españolas que hemos mencionado anteriormente, en diversos libros de texto dirigidos al nivel medio hal amos el trabajo con la regla de Ruffini como un "método abreviado" para realizar la división entre polinomios y posteriormente su aplicación como una herramienta para la factorización de polinomios asociado al teorema de Gauss.



Regla de Ruffini

Es un método abreviado de hacer la división usando solo los coeficientes de los polinomios. Se puede utilizar cuando el divisor es del tipo $(x - a)$ siendo a un número real.

Para hacer $(3x^3 + 5x - 6) : (x + 2)$, se procede así:

Coeficientes del dividendo completo y ordenado.

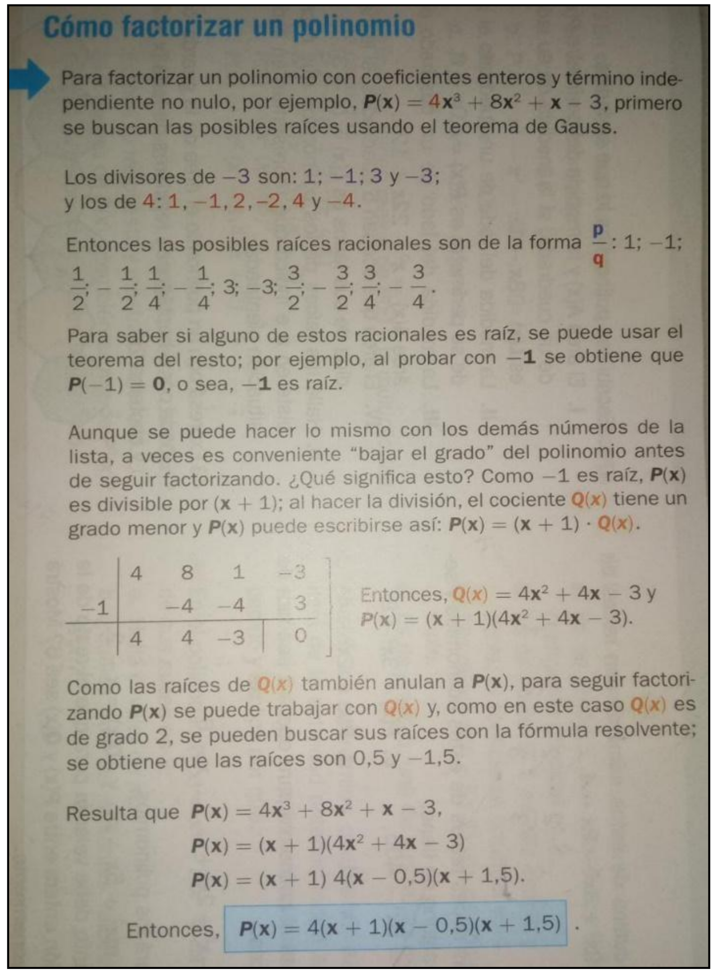
	3	0	5	−6
−2		−6	12	−34
	3	−6	17	−40

Raíz del divisor

Se multiplica

Resto

Cociente: $3x^2 - 6x + 17$



Cómo factorizar un polinomio

Para factorizar un polinomio con coeficientes enteros y término independiente no nulo, por ejemplo, $P(x) = 4x^3 + 8x^2 + x - 3$, primero se buscan las posibles raíces usando el teorema de Gauss.

Los divisores de -3 son: 1; -1; 3 y -3;
y los de 4: $1, -1, 2, -2, 4$ y -4.

Entonces las posibles raíces racionales son de la forma $\frac{p}{q}$: 1; -1; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{4}$; 3; -3; $\frac{3}{2}$; $-\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$; $-\frac{3}{4}$.

Para saber si alguno de estos racionales es raíz, se puede usar el teorema del resto; por ejemplo, al probar con -1 se obtiene que $P(-1) = 0$, o sea, -1 es raíz.

Aunque se puede hacer lo mismo con los demás números de la lista, a veces es conveniente "bajar el grado" del polinomio antes de seguir factorizando. ¿Qué significa esto? Como -1 es raíz, $P(x)$ es divisible por $(x + 1)$; al hacer la división, el cociente $Q(x)$ tiene un grado menor y $P(x)$ puede escribirse así: $P(x) = (x + 1) \cdot Q(x)$.

	4	8	1	−3
−1		−4	−4	3
	4	4	−3	0

Entonces, $Q(x) = 4x^2 + 4x - 3$ y $P(x) = (x + 1)(4x^2 + 4x - 3)$.

Como las raíces de $Q(x)$ también anulan a $P(x)$, para seguir factorizando $P(x)$ se puede trabajar con $Q(x)$ y, como en este caso $Q(x)$ es de grado 2, se pueden buscar sus raíces con la fórmula resolvente; se obtiene que las raíces son $0{,}5$ y $-1{,}5$.

Resulta que $P(x) = 4x^3 + 8x^2 + x - 3$,

$P(x) = (x + 1)(4x^2 + 4x - 3)$

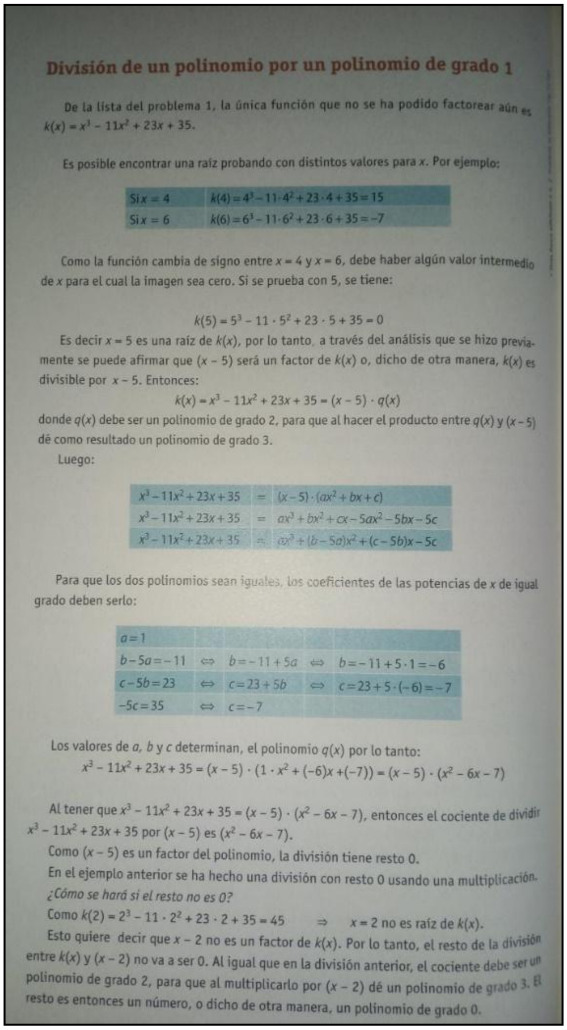
$P(x) = (x + 1)\, 4(x - 0{,}5)(x + 1{,}5)$.

Entonces, $\boxed{P(x) = 4(x + 1)(x - 0{,}5)(x + 1{,}5)}$.

Figura 7: Propuesta Editorial Santillana para 4to año de la Educación Secundaria (2011)

[En la imagen: Copia de dos páginas de uno de los libros de texto referenciados, a la izquierda explicación y ejemplificación de la regla de Ruffini y a la derecha la factorización de polinomios utilizando dicha regla.]

Asimismo, hemos encontrado propuestas que trabajan la factorización de polinomios asociada a las funciones polinómicas, proponiendo la regla de Paolo Ruffini como una "manera práctica de escribir y calcular la división" (Fernández del Campo, 2004). En este caso, planteando la división como una herramienta para factorizar la ecuación de la función polinómica en juego y encontrar sus raíces.



División de un polinomio por un polinomio de grado 1

De la lista del problema 1, la única función que no se ha podido factorear aún es $k(x) = x^3 - 11x^2 + 23x + 35$.

Es posible encontrar una raíz probando con distintos valores para x. Por ejemplo:

Si $x = 4$	$k(4) = 4^3 - 11 \cdot 4^2 + 23 \cdot 4 + 35 = 15$
Si $x = 6$	$k(6) = 6^3 - 11 \cdot 6^2 + 23 \cdot 6 + 35 = -7$

Como la función cambia de signo entre $x = 4$ y $x = 6$, debe haber algún valor intermedio de x para el cual la imagen sea cero. Si se prueba con 5, se tiene:

$$k(5) = 5^3 - 11 \cdot 5^2 + 23 \cdot 5 + 35 = 0$$

Es decir $x = 5$ es una raíz de $k(x)$, por lo tanto, a través del análisis que se hizo previamente se puede afirmar que $(x - 5)$ será un factor de $k(x)$ o, dicho de otra manera, $k(x)$ es divisible por $x - 5$. Entonces:

$$k(x) = x^3 - 11x^2 + 23x + 35 = (x - 5) \cdot q(x)$$

donde $q(x)$ debe ser un polinomio de grado 2, para que al hacer el producto entre $q(x)$ y $(x - 5)$ dé como resultado un polinomio de grado 3.

Luego:

$x^3 - 11x^2 + 23x + 35$	$=$	$(x-5) \cdot (ax^2 + bx + c)$
$x^3 - 11x^2 + 23x + 35$	$=$	$ax^3 + bx^2 + cx - 5ax^2 - 5bx - 5c$
$x^3 - 11x^2 + 23x + 35$	$=$	$ax^3 + (b - 5a)x^2 + (c - 5b)x - 5c$

Para que los dos polinomios sean iguales, los coeficientes de las potencias de x de igual grado deben serlo:

$a = 1$				
$b - 5a = -11$	$\Leftrightarrow$	$b = -11 + 5a$	$\Leftrightarrow$	$b = -11 + 5 \cdot 1 = -6$
$c - 5b = 23$	$\Leftrightarrow$	$c = 23 + 5b$	$\Leftrightarrow$	$c = 23 + 5 \cdot (-6) = -7$
$-5c = 35$	$\Leftrightarrow$	$c = -7$		

Los valores de a, b y c determinan, el polinomio $q(x)$ por lo tanto:

$$x^3 - 11x^2 + 23x + 35 = (x - 5) \cdot (1 \cdot x^2 + (-6)x + (-7)) = (x - 5) \cdot (x^2 - 6x - 7)$$

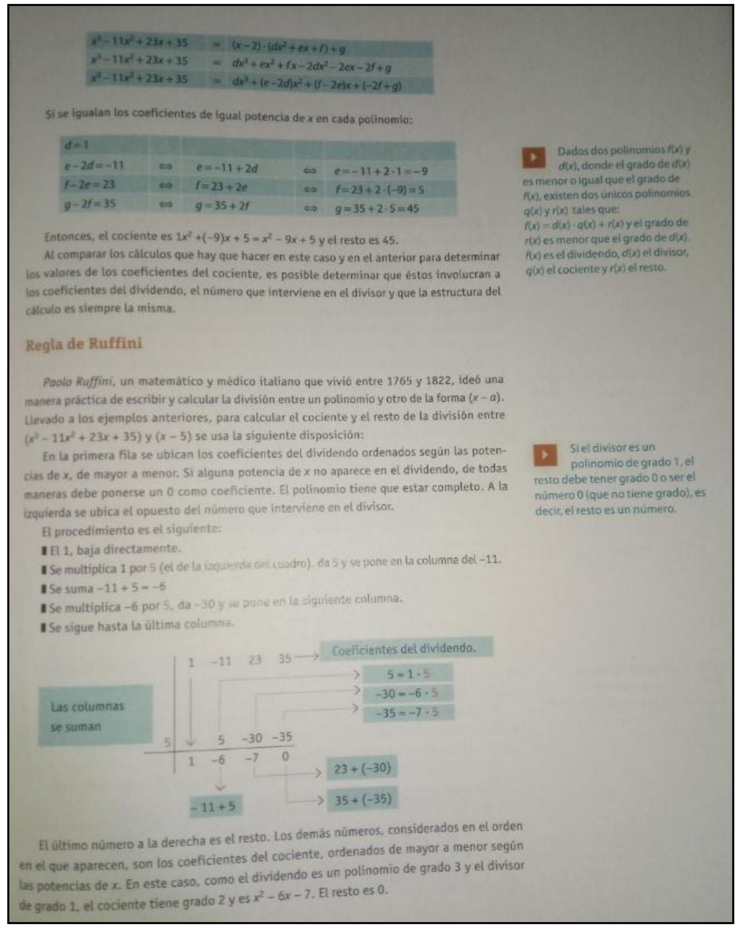
Al tener que $x^3 - 11x^2 + 23x + 35 = (x - 5) \cdot (x^2 - 6x - 7)$, entonces el cociente de dividir $x^3 - 11x^2 + 23x + 35$ por $(x - 5)$ es $(x^2 - 6x - 7)$.

Como $(x - 5)$ es un factor del polinomio, la división tiene resto 0.

En el ejemplo anterior se ha hecho una división con resto 0 usando una multiplicación. *¿Cómo se hará si el resto no es 0?*

Como $k(2) = 2^3 - 11 \cdot 2^2 + 23 \cdot 2 + 35 = 45 \quad \Rightarrow \quad x = 2$ no es raíz de $k(x)$.

Esto quiere decir que $x - 2$ no es un factor de $k(x)$. Por lo tanto, el resto de la división entre $k(x)$ y $(x - 2)$ no va a ser 0. Al igual que en la división anterior, el cociente debe ser un polinomio de grado 2, para que al multiplicarlo por $(x - 2)$ dé un polinomio de grado 3. El resto es entonces un número, o dicho de otra manera, un polinomio de grado 0.



$x^3 - 11x^2 + 23x + 35$	$=$	$(x-2) \cdot (dx^2 + ex + f) + g$
$x^3 - 11x^2 + 23x + 35$	$=$	$dx^3 + ex^2 + fx - 2dx^2 - 2ex - 2f + g$
$x^3 - 11x^2 + 23x + 35$	$=$	$dx^3 + (e - 2d)x^2 + (f - 2e)x + (-2f + g)$

Si se igualan los coeficientes de igual potencia de x en cada polinomio:

$d = 1$				
$e - 2d = -11$	$\Leftrightarrow$	$e = -11 + 2d$	$\Leftrightarrow$	$e = -11 + 2 \cdot 1 = -9$
$f - 2e = 23$	$\Leftrightarrow$	$f = 23 + 2e$	$\Leftrightarrow$	$f = 23 + 2 \cdot (-9) = 5$
$g - 2f = 35$	$\Leftrightarrow$	$g = 35 + 2f$	$\Leftrightarrow$	$g = 35 + 2 \cdot 5 = 45$

Entonces, el cociente es $1x^2 + (-9)x + 5 = x^2 - 9x + 5$ y el resto es 45.

Al comparar los cálculos que hay que hacer en este caso y en el anterior para determinar los valores de los coeficientes del cociente, es posible determinar que éstos involucran a los coeficientes del dividendo, el número que interviene en el divisor y que la estructura del cálculo es siempre la misma.

Dados dos polinomios $f(x)$ y $d(x)$, donde el grado de $d(x)$ es menor o igual que el grado de $f(x)$, existen dos únicos polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que: $f(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$ y el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $d(x)$. $f(x)$ es el dividendo, $d(x)$ el divisor, $q(x)$ el cociente y $r(x)$ el resto.

Regla de Ruffini

Paolo Ruffini, un matemático y médico italiano que vivió entre 1765 y 1822, ideó una manera práctica de escribir y calcular la división entre un polinomio y otro de la forma $(x - a)$. Llevado a los ejemplos anteriores, para calcular el cociente y el resto de la división entre $(x^3 - 11x^2 + 23x + 35)$ y $(x - 5)$ se usa la siguiente disposición:

En la primera fila se ubican los coeficientes del dividendo ordenados según las potencias de x, de mayor a menor. Si alguna potencia de x no aparece en el dividendo, de todas maneras debe ponerse un 0 como coeficiente. El polinomio tiene que estar completo. A la izquierda se ubica el opuesto del número que interviene en el divisor.

Si el divisor es un polinomio de grado 1, el resto debe tener grado 0 o ser el número 0 (que no tiene grado), es decir, el resto es un número.

El procedimiento es el siguiente:

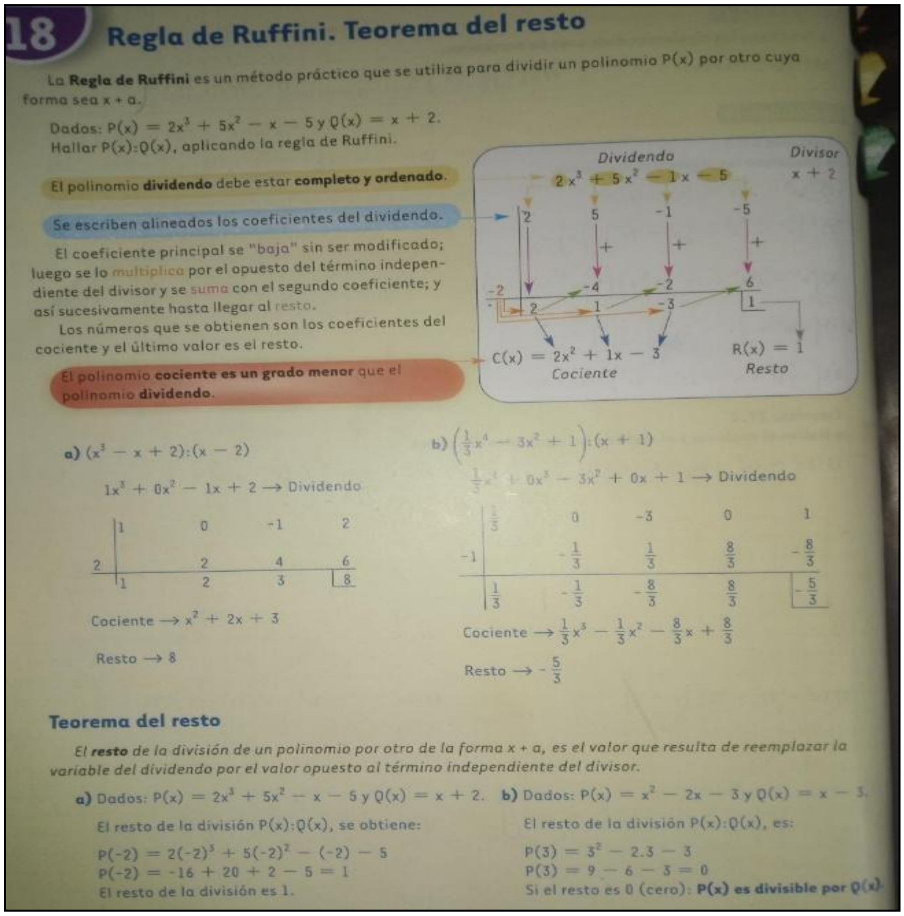
- El 1, baja directamente.
- Se multiplica 1 por 5 (el de la izquierda del cuadro), da 5 y se pone en la columna del −11.
- Se suma $-11 + 5 = -6$
- Se multiplica −6 por 5, da −30 y se pone en la siguiente columna.
- Se sigue hasta la última columna.

El último número a la derecha es el resto. Los demás números, considerados en el orden en el que aparecen, son los coeficientes del cociente, ordenados de mayor a menor según las potencias de x. En este caso, como el dividendo es un polinomio de grado 3 y el divisor de grado 1, el cociente tiene grado 2 y es $x^2 - 6x - 7$. El resto es 0.

Figura 8: Propuesta Editorial Tinta fresca para 2do año de la Educación Polimodal (2008)

[En la imagen: Copia de dos páginas de uno de los libros de texto referenciados, a la izquierda explicación y ejemplificación de la división de polinomios cuyo divisor es de grado uno y a la derecha continúa la explicación y se define la regla de Ruffini].

En algunos libros de texto dirigidos al nivel medio, la regla de Ruffini y el teorema del resto se proponen como dos mecanismos o técnicas que posibilitan hallar cociente y resto, o sólo el resto, en el caso de este último, siempre que el polinomio divisor sea de la forma x-a (siendo a un número real).



18 **Regla de Ruffini. Teorema del resto**

La **Regla de Ruffini** es un método práctico que se utiliza para dividir un polinomio $P(x)$ por otro cuya forma sea $x + a$.

Dados: $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 5$ y $Q(x) = x + 2$.
Hallar $P(x):Q(x)$, aplicando la regla de Ruffini.

El polinomio **dividendo** debe estar **completo y ordenado**.

Se escriben alineados los coeficientes del dividendo.

El coeficiente principal se "baja" sin ser modificado; luego se lo multiplica por el opuesto del término independiente del divisor y se suma con el segundo coeficiente; y así sucesivamente hasta llegar al resto.

Los números que se obtienen son los coeficientes del cociente y el último valor es el resto.

El polinomio **cociente es un grado menor** que el polinomio **dividendo**.

Dividendo: $2x^3 + 5x^2 - 1x - 5$ — Divisor: $x + 2$

	2	5	-1	-5
-2		-4	-2	6
	2	1	-3	$\boxed{1}$

$C(x) = 2x^2 + 1x - 3$ Cociente — $R(x) = 1$ Resto

a) $(x^3 - x + 2):(x - 2)$

$1x^3 + 0x^2 - 1x + 2 \longrightarrow$ Dividendo

	1	0	-1	2
2		2	4	6
	1	2	3	$\boxed{8}$

Cociente $\longrightarrow x^2 + 2x + 3$

Resto $\longrightarrow 8$

b) $\left(\frac{1}{3}x^4 - 3x^2 + 1\right):(x + 1)$

$\frac{1}{3}x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 1 \longrightarrow$ Dividendo

	$\frac{1}{3}$	0	-3	0	1
-1		$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{8}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\boxed{-\frac{5}{3}}$

Cociente $\longrightarrow \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}$

Resto $\longrightarrow -\frac{5}{3}$

Teorema del resto

*El **resto** de la división de un polinomio por otro de la forma $x + a$, es el valor que resulta de reemplazar la variable del dividendo por el valor opuesto al término independiente del divisor.*

a) Dados: $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 5$ y $Q(x) = x + 2$.
El resto de la división $P(x):Q(x)$, se obtiene:
$P(-2) = 2(-2)^3 + 5(-2)^2 - (-2) - 5$
$P(-2) = -16 + 20 + 2 - 5 = 1$
El resto de la división es 1.

b) Dados: $P(x) = x^2 - 2x - 3$ y $Q(x) = x - 3$.
El resto de la división $P(x):Q(x)$, es:
$P(3) = 3^2 - 2.3 - 3$
$P(3) = 9 - 6 - 3 = 0$
Si el resto es 0 (cero): **$P(x)$ es divisible por $Q(x)$**

Figura 9: Propuesta Editorial Puerto de Palos para 1er año de la Educación Polimodal (2001)

[En la imagen: Copia de una página de uno de los libros de texto referenciados, en la misma se explica y ejemplifica la regla de Ruffini y el Teorema del Resto.]

En las tres propuestas referenciadas podemos notar en común la disposición de los coeficientes para aplicar la regla, tanto en el polinomio dividendo como en el término independiente del polinomio divisor. La utilización de flechas para indicar el "movimiento" de los números involucrados y la indicación de las operaciones a realizar entre ellos. Además, en dos de las propuestas se indica al resto en un sector que lo separa de los otros coeficientes -correspondientes al polinomio cociente-.

<u>El sistema Braille y la escritura matemática</u>

Dado que el alumno ciego con quien trabajamos utiliza el sistema Braille, resulta ineludible dedicar un apartado a su descripción y análisis, particularmente en relación a las escrituras matemáticas.

El Braille es un sistema de lectura y escritura táctil ideado a mediados del siglo XIX por el francés Louis Braille. No se trata de un idioma, sino que es un código con el que pueden representarse las letras, los signos de puntuación, los números, los símbolos matemáticos, la música, etc.

El Braille suele consistir en celdas de seis puntos en relieve, organizados como una matriz de tres filas por dos columnas.

> La combinación de los seis puntos permite obtener 64 combinaciones diferentes, incluyendo la que no tiene ningún punto, que se utiliza como espacio en blanco para separar palabras, números, etc. La presencia o ausencia de puntos determina de qué letra se trata. (ONCE, s.f., párr. 3)

Para indicar los números se antepone un prefijo -siempre el mismo- delante de las diez primeras letras del abecedario (a-j). De este modo se indica que se trata de un número y no de una letra, como se ilustra en la Figura 10.

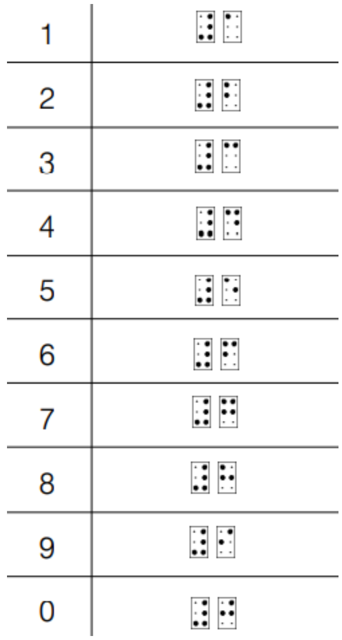


Figura 10: Primeros diez dígitos en Braille.

[En la imagen: Tabla de dos columnas. La columna de la izquierda contiene las escrituras en tinta de cada uno de los diez dígitos. La columna de la derecha contiene las escrituras de estos mismos dígitos en Braille]

Fuente: Fernández del Campo, J.E. (2004), p.21.

A continuación, presentamos la transcripción al Braille de algunos signos operatorios matemáticos, a los fines de analizarlos en el marco de escrituras algebraicas.

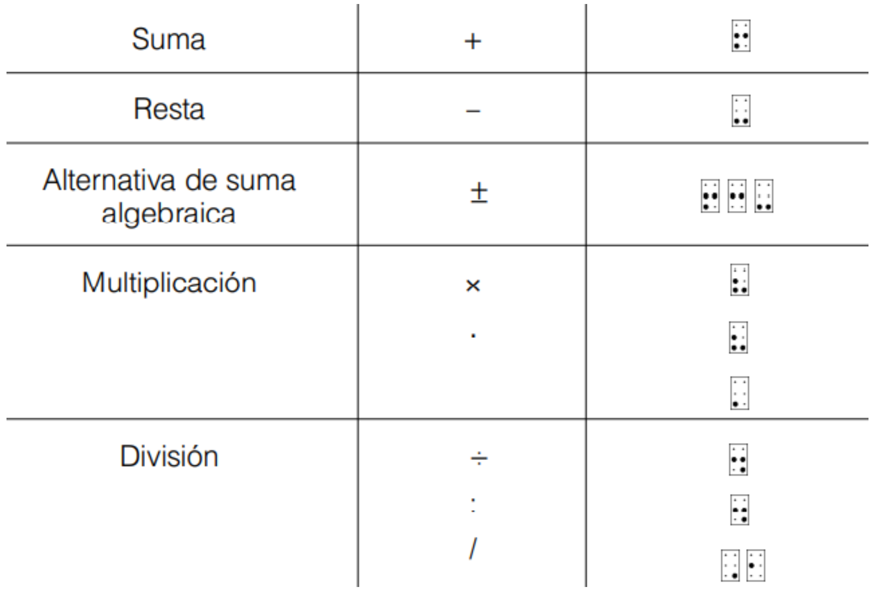


Figura 11: Algunos símbolos matemáticos en Braille.

Fuente: Fernández del Campo, J.E. (2004), p.28.

[En la imagen: Tabla de tres columnas. La columna de la izquierda contiene los nombres en tinta de algunas operaciones básicas -suma, resta, multiplicación y división-. La columna central contiene las escrituras en tinta de cada una de los símbolos de las operaciones mencionadas. La columna de la derecha contiene las escrituras de estos mismos símbolos en Braille]

En el caso de las transcripciones algebraicas, nos parece importante analizar algunos ejemplos de escrituras que implican la utilización de superíndices para indicar exponentes. Esto implica el manejo de escrituras no lineales, las cuales deben ser transcriptas de algún modo en el sistema Braille, que es un sistema lineal.

Figura 12: Escritura algebraica y el sistema Braille

Fuente: Fernández del Campo, J.E. (2004), p.66.

[En la imagen: Tabla de dos columnas. La columna de la izquierda contiene las escrituras en tinta de dos polinomios -uno por fila-. La columna de la derecha contiene las escrituras de estos mismos polinomios en Braille -uno por fila-.]

Analicemos la primera fila de la Figura 12 que contiene la representación en tinta y en Braille de la potencia de base "x" y exponente "n". A la izquierda está representada en escritura en tinta dicha potencia, primero la "x" y a su derecha más arriba, la "n". A la derecha se representa en sistema Braille presentando el símbolo de la letra "x", a continuación, el símbolo que indica que lo que se escriba contiguamente constituye un superíndice, y finalmente el símbolo de la letra "n" –que en este contexto representará un exponente-.

En la figura 13 mostramos, a modo de ejemplo, la transcripción a Braille de un polinomio de 4 términos.

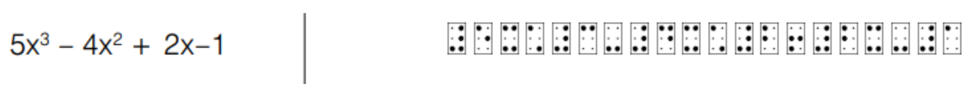


Figura 13: Polinomio de grado tres y escritura Braille

Fuente: Fernández del Campo, J.E. (2004), p.70.

[En la imagen: Tabla de dos columnas. La columna de la izquierda contiene las escrituras en tinta de cuatrinomio de grado 3, coeficiente principal 5 y término independiente -1. La columna de la derecha contiene las escrituras de este mismo polinomio en Braille]

Entendemos que el carácter lineal del sistema Braille implica una representación que puede resultar más extensa que la escritura en tinta de polinomios, cuestión que podría interferir con el foco que se quiere proponer desde la enseñanza en el establecimiento de relaciones y en el desarrollo de operaciones entre estos objetos matemáticos. En este sentido, indicábamos en el apartado anterior que la aplicación de un algoritmo que permita “liberarse” de las variables y sus exponentes podría favorecer una mejor interacción del estudiante ciego con las escrituras polinómicas en el contexto del aprendizaje de la división de polinomios. Particularmente, la regla de Ruffini implica ordenar y operar sólo con los coeficientes de los polinomios dividendo y divisor para hallar los coeficientes de los polinomios cociente y resto. En relación con la enseñanza de esta regla al estudiante con discapacidad, entendíamos que era necesario resolver la comunicación y lectura de la disposición que deben tener los coeficientes involucrados para aplicar el algoritmo.

Análisis metodológico: recorrido de las etapas de trabajo

El trabajo se llevó a cabo en distintas etapas, cada una de las cuales contaba con objetivos diversos fundamentados en la Educación Inclusiva y en la Didáctica de la Matemática Francesa.

En la etapa inicial se propuso realizar un rastreo de las instituciones educativas que posiblemente pondrían a disposición un aula de Matemática en la que participara un estudiante ciego. Asimismo, también precisábamos contar con un docente para quien fuera necesario pensar con otros algunas estrategias didácticas para la enseñanza de un contenido determinado, contemplando a todos los estudiantes a su cargo con la heterogeneidad que ello implica. Finalmente se decide trabajar con una institución con la cual ya teníamos contacto desde la cátedra de Didáctica específica II y prácticas docentes en Matemática en relación con la trayectoria de un alumno con discapacidad visual, el mismo que colaboró en el presente trabajo. En esta escuela nos encontramos con una docente a cargo del curso, que valoró la ayuda que le podíamos brindar desde la cátedra para pensar conjuntamente la enseñanza de la división de polinomios usando la regla de Ruffini. La docente nos abrió las puertas del aula a cargo suyo, obviamente contando con el respaldo y el aval institucional correspondiente.

Una vez seleccionada la institución y el curso con el que se trabajaría, se decidió realizar algunas indagaciones preliminares acerca de las realidades institucionales, áulicas y particularmente en relación con la enseñanza de la Matemática al alumno con discapacidad visual. Así, se llevaron adelante diversas entrevistas con ciertos actores involucrados en las caracterizaciones de las realidades antes mencionadas. Por otro lado, era de particular relevancia poder registrar algunas clases de Matemática a los fines de conocer, principalmente, dinámicas de funcionamiento dentro del aula; por ello se llevaron adelante algunas observaciones de clases. Posteriormente, se trabajó para determinar el contenido matemático objeto de la propuesta didáctica en la que participaríamos; nuestra prioridad era que esta fuera un emergente de la propuesta de enseñanza planificada por la docente responsable. Es decir, considerábamos relevante no definirla a priori sin considerar la realidad institucional, de esa aula y de esa docente en particular.

Posteriormente, se propuso construir apoyos para la enseñanza y el aprendizaje de la regla de Ruffini junto con el estudiante con discapacidad, poniendo en el centro su voz y sus ideas.

Finalmente, se llevaron a cabo las instancias de implementación y evaluación de los apoyos construidos en el marco de la propuesta de enseñanza.

Acerca de la accesibilidad del Trabajo Final Integrador

Nos propusimos que el presente trabajo sea accesible para personas ciegas o con disminución visual; es por ello que las imágenes del mismo cuentan con un texto alternativo entre corchetes en el cual se describe la imagen. En este sentido, también propusimos que la accesibilidad del trabajo sea evaluada por personas con discapacidad visual, continuando con el posicionamiento inclusivo en relación con los derechos de las personas con discapacidad y el lema “nada sobre nosotros sin nosotros”. La accesibilidad del trabajo fue revisada y evaluada por trabajadores con discapacidad visual de la Biblioteca Braille Parlante de la Provincia de Buenos Aires, quienes colaboraron con la autora a los fines de garantizar la posibilidad de lectura para personas ciegas o con disminución visual. Esta decisión la tomamos considerando que las personas con discapacidad visual son expertas en la evaluación de la accesibilidad de la que son usuarias.

Acerca de los marcos normativos de la Institución y los contenidos matemáticos seleccionados

El curso en el que llevamos adelante este TFI fue un 5to año en un Colegio de Pregrado de la Universidad Nacional de La Plata. Nos resulta oportuno aclarar que los programas de cada una de las materias están enmarcados en dos normativas generales: el Reglamento de los Colegios de Pregrado de la Universidad Nacional de La Plata y el Proyecto de Gestión Institucional de cada Institución.

Particularmente, el Programa de Matemática de 5to año (CNRH UNLP, 2019) se encuentra organizado en cuatro unidades temáticas:

Unidad 1: Función cuadrática.

Unidad 2: Polinomios.

Unidad 3: Divisibilidad y factoreo de polinomios.

Unidad 4: Expresiones algebraicas fraccionarias.

La propuesta del presente trabajo se posiciona en la Unidad 2: "Polinomios", la cual indica lo siguiente:

Contenidos: Polinomios: expresión general, notación y generalidades. Operaciones: suma, resta, multiplicación, cuadrado y cubo de un binomio, binomios conjugados. División. Regla de Ruffini. Teorema del resto.

Objetivos de aprendizaje:

✓ Reconocer expresiones algebraicas enteras.

✓ Realizar sumas, restas y multiplicaciones con polinomios en una indeterminada.

✓ Resolver situaciones problemáticas que requieren la implementación del cuadrado o cubo de un binomio, o del producto de binomios conjugados.

✓ Apreciar las ventajas de la regla de Ruffini y del Teorema del Resto.

Al realizar un análisis de las unidades siguientes, podemos hipotetizar que la propuesta de factorización de polinomios se apoya en el trabajo con la regla de Ruffini ya que textualmente en la Unidad 3: "Divisibilidad y factoreo de polinomios" se indica como contenidos:

✔ *Encontrar las raíces de un polinomio.*

✔ *Factorizar polinomios usando el concepto de raíz.*

Es decir que la propuesta de factorización no parece estar centrada en trabajar con los "casos de factoreo", sino que se indica dentro de los contenidos: *"Factorizar polinomios usando el concepto de raíz"*. Al proponer la factorización apoyada en las raíces de los polinomios, entendemos que se espera que esta se realice buscando inicialmente las posibles raíces del polinomio, para luego aplicar la regla de Ruffini; esto permitirá encontrar las expresiones factorizadas una vez halladas las raíces reales del polinomio.

Esta propuesta didáctica para la factorización de polinomios nos permite resignificar el segundo objetivo de la unidad 2 del programa: "*Apreciar las ventajas de la regla de Ruffini y del Teorema del Resto"*. Es decir, podemos advertir, que desde la propuesta institucional se le otorga relevancia a la enseñanza y el aprendizaje de la regla de Ruffini como técnica para dividir dos polinomios; no sólo con el propósito de que los estudiantes conozcan ese mecanismo para resolver la operación matemática, sino considerándola una herramienta que deberá estar disponible para trabajar los contenidos de la unidad siguiente, *"Divisibilidad y Factoreo de Polinomios"*.

A partir de este análisis del programa de 5to año, intentamos interpretar algunas decisiones institucionales en relación con los contenidos a enseñar, la relevancia de cada uno de ellos, su secuenciación y objetivos. De esta manera, estaríamos en mejores condiciones de colaborar con la docente en el diseño de su propuesta didáctica.

Desarrollo de la experiencia

Algunas indagaciones preliminares a los fines de organizar el trabajo

En la planificación del trabajo nos habíamos propuesto realizar algunos encuentros previos con la docente a cargo del curso a los fines de indagar aspectos didácticos y de funcionamiento institucionales. En el caso de intervenir otros docentes también habíamos considerado posibles entrevistas para indagar las dinámicas de trabajo que han estado sosteniendo.

La entrevista inicial a la docente a cargo del curso que contaba con un alumno ciego y la decisión del tema a trabajar

Acordamos este primer encuentro con la docente a cargo del curso con la intención de conocer algunas características vinculadas a la institución, así como también de la dinámica de trabajo, tales como días y horarios de cursada, lugares donde se llevan adelante las clases, recursos disponibles, características del grupo, entre otros. La docente también nos comentó que la institución cuenta con dos ayudantes de laboratorio que en algunas oportunidades trabajaban con Antonio[6], el estudiante con discapacidad. Es por ello que consideramos conveniente realizar una entrevista a estos ayudantes de laboratorio de modo de conocer más detalladamente esa dinámica de trabajo.

[6] Nombramos a Antonio con su nombre de pila real ya que la autora de este trabajo ha sido autorizada por él.

A raíz de este encuentro inicial con la docente obtuvimos un relevamiento respecto de la organización y gestión de las clases de Matemática, así como algunos aspectos de la organización institucional que describiremos a continuación.

Antonio junto con sus compañeros tenían clase de Matemática dos veces a la semana, un encuentro de 40 minutos y otro de 1 hora 20 minutos. El alumno solía utilizar dentro del aula una máquina para escribir en Braille y una calculadora con audio. La escuela articulaba con una Escuela de Educación Especial, de modo que una maestra integradora[7] asistía a la institución una vez a la semana. Generalmente la docente de Matemática le entregaba con cierta anticipación los trabajos prácticos que iban a utilizar para que la maestra realice la correspondiente transcripción a Braille. Con esta modalidad, Antonio contaba con el material disponible al momento de necesitarlo.

Asimismo, la profesora a cargo del curso nos contó que ya había avanzado con la enseñanza de la suma y la resta de polinomios, así como con algunas cuestiones vinculadas a la multiplicación. Nos comentó que, para estudiar estos temas, Antonio participó de las mismas clases que sus compañeros, tomando notas y resolviendo las actividades en Braille. También afirmó que había decidido trabajar muy brevemente el tema de la *"división tradicional"* entre polinomios a través de ejercicios que caracteriza como "*muy simples*", pero que había eximido a Antonio de estas actividades. Asimismo, argumentó que le resultaba complejo poder comunicarle a Antonio la organización de los polinomios para llevar a cabo la división tradicional, así como indicar la disposición de los polinomios a medida que se avanza en el procedimiento. Sumando a esto, consideramos la complejidad que implicaba para el alumno escribir los polinomios de manera completa en Braille y organizar la disposición para poder operar. La docente agregó que la división tradicional de polinomios no era un tema que consideraba de mayor relevancia, y que había decidido destinar pocas clases. Esta decisión la había tomado teniendo en consideración la variable tiempo y la ponderación del tema de acuerdo con las decisiones institucionales.

En cambio, había tomado la decisión de trabajar con mayor profundidad la regla de Ruffini, dado que a continuación el tema que indicaba el programa era Factorización de Polinomios. La docente aclaró que su intención para profundizar en el estudio de la división con la regla de Ruffini *"tiene como mira el posterior estudio de la factorización de polinomios, utilizándola".* Decidimos entonces que este sería el contenido con

[7] Si bien este es el nombre con el que la profesora nombraba a la docente de Educación Especial, en la actualidad esta figura educativa se denomina "Maestra de Apoyo a la Inclusión".

el que trabajaríamos conjuntamente, motivo por el cual comenzamos a hacernos algunas preguntas: ¿Cómo trabajar con Antonio la regla de Ruffini? ¿De qué manera comunicar los pasos a seguir considerando que las docentes no manejábamos el sistema Braille y él no podía ver la disposición de los coeficientes de los polinomios en nuestras escrituras? ¿Qué apoyos necesitábamos para poder plantear su enseñanza?

En este sentido, comenzamos a considerar que la enseñanza de la regla de Ruffini pone en juego unas ciertas representaciones de los objetos matemáticos involucrados. Los coeficientes de los polinomios se ordenan y se agrupan en el espacio bajo ciertas reglas, las operaciones que entre ellos se realizan suelen ser explicitadas de manera oral por los docentes al momento de explicar la regla a partir de la disposición de los coeficientes sobre las escrituras en tinta que se van produciendo en simultáneo a dicha explicación. Es usual que en las escuelas los docentes no ciegos nos apoyemos en representaciones visuales de estos objetos matemáticos. En términos de Duval (1995, 2006), la representación semiótica del objeto matemático polinomio puesta en juego para trabajar la regla de Ruffini nos permite llevar a cabo el tratamiento a los fines encontrar el cociente y el resto. En el intercambio comunicacional que se genera al explicar la regla, tanto docente como estudiante, se apoyan en las representaciones del objeto matemático. Comenzamos a hacernos algunas preguntas que necesitaríamos abordar si queríamos construir apoyos para la enseñanza: ¿Cómo registrar la disposición de los coeficientes a los fines de que Antonio también pueda leerla? ¿Cómo lograr que la propuesta resulte accesible para Antonio y a la vez dialogue con ciertas características del trabajo matemático que la docente quería llevar adelante en el aula?

Si bien teníamos muchos interrogantes, sabíamos que el trabajo con la regla tenía algunas ventajas. De acuerdo con lo mencionado en apartados anteriores, nos "libera" de las variables y sus exponentes, por lo menos a lo largo de su aplicación ya que al implementar la técnica sólo se trabaja con los coeficientes de los polinomios dividendo y divisor. Como ya hemos dicho, consideramos este aspecto beneficioso para trabajar con alumnos que utilizan Braille debido a algunas barreras que podrían emerger a raíz de la linealidad de este sistema -por ejemplo, el tiempo de escritura que implican ciertas notaciones matemáticas-.

La reunión con uno de los ayudantes de laboratorio

Luego de la entrevista inicial con la docente a cargo del curso, concretamos un encuentro con el ayudante de laboratorio (AL) que solía trabajar con Antonio. La reunión la llevamos a cabo en la escuela, unos días después al encuentro con la docente. Si bien convocamos a los 2 ayudantes de laboratorio, sólo participó uno de ellos en esta reunión.

Los AL eran profesores de Matemática, muchos de ellos con cursos a cargo dentro de la escuela, que contaban con horas extras destinadas a realizar distintas actividades académicas dentro de los departamentos correspondientes.

Durante la reunión, el AL nos contó que se reunía a trabajar con Antonio en diversas oportunidades, por ejemplo, cuando no lograba terminar de tomar nota en clase. Nos comentó que esto generalmente estaba vinculado al "murmul o de fondo" que no le permitía escuchar claramente todo lo que se decía en clase. También nos contó que alguno de los AL acompañaban a Antonio en las evaluaciones escritas que se tomaban, y cómo era generalmente la dinámica que llevan adelante. Si bien el instrumento de evaluación lo realizaba la profesora a cargo del curso, los ayudantes le dictaban las consignas a Antonio para que las escriba en Braille, le daban un margen de tiempo para que piense las actividades y luego él les relataba cómo resolvería las actividades. Otro modo de trabajar en estas instancias ha sido que Antonio resuelva y escriba en Braille la resolución y luego les cuente lo que escribió.

Las observaciones de clase

Fueron pautadas algunas observaciones de clase a los fines de registrar la dinámica de trabajo en el aula e indagar el modo de trabajo del alumno con discapacidad, el vínculo con sus pares y con el docente a cargo del curso. Las observaciones se llevaron a cabo luego de las entrevistas con el docente a cargo del curso y con el ayudante de laboratorio.

Asimismo, en el marco de las observaciones reservamos algunos momentos de intercambio con Antonio para validar con él algunas de las ideas que íbamos proponiendo para el diseño de la propuesta. También, para que con su ayuda comprendiéramos mejor las posibilidades que podrían brindar algunas herramientas con las que él trabajaba: la máquina de escritura Braille, notebooks, calculadoras con sonidos, etc.

En las clases de Matemática los estudiantes se sentaban de manera individual mirando el pizarrón, en un aula cuya capacidad no estaba completa por el grupo de alumnos, que no superaba los 25 estudiantes. Antonio se encontraba sentado cerca del pizarrón y de la docente a cargo del curso, utilizaba para tomar nota su máquina para escritura Braille -que siempre quedaba en la escuela por si la necesitaba-. Tomaba nota a la par de sus compañeros, tanto de lo que se copiaba en el pizarrón como de lo que la docente dictaba. En cuanto a la copia de aquello que se registraba en el pizarrón, la docente continuamente decía en voz alta lo que iba copiando en el mismo y, en algunas oportunidades, Antonio repreguntaba o ella se acercaba para chequear lo que anotaba. En relación con las guías de trabajos prácticos que se utilizaban en clase, Antonio las llevaba escritas en Braille –este aspecto ya había sido adelantado por la docente a cargo del curso en la entrevista inicial-.

En una de las clases observadas, la docente se encontraba explicando la "regla de Ruffini" para dividir dos polinomios. En el inicio explicó las condiciones necesarias que deben cumplir los polinomios dividendo y divisor para que esta regla pueda ser utilizada. Coincidiendo con los comentarios de la docente en la entrevista inicial, los estudiantes venían trabajando con el tema Polinomios y particularmente con las operaciones básicas –suma, resta, multiplicación y división-. Asimismo, la docente presentó el tema "La Regla de Ruffini" como una forma distinta de dividir polinomios, diferente a la división convencional que habían trabajado en clases anteriores. En este sentido, recordamos lo relatado por la docente en la entrevista: Antonio no había trabajado con la división convencional de polinomios.

Durante la explicación de esta regla, Antonio escuchaba y tomaba notas con su máquina para escritura Braille. En el momento en que la profesora explicó en el pizarrón el procedimiento para implementar la regla, notamos que Antonio no lograba copiar los coeficientes de los polinomios dividendo y divisor según la disposición espacial clásicamente utilizada para implementar la "regla Ruffini" -que hemos descripto en apartados anteriores-. Dado que la ejecución de la regla está sumamente arraigada al registro de los coeficientes en una disposición espacial determinada, consideramos que resultaba muy importante construir los apoyos necesarios para poder enseñarle la regla a Antonio de manera tal que él pudiera dar cuenta del modo en que se ordena la información para aplicarla.

<u>La construcción de apoyos para la enseñanza de la Regla de Ruffini: consideraciones didácticas y de accesibilidad</u>

Queremos iniciar este apartado reconociendo la existencia de propuestas de enseñanza de la regla de Ruffini utilizando el sistema Braille. Intentaremos mostrar en qué sentido no nos resultaban adecuadas desde el punto de vista didáctico.

Analicemos, por ejemplo, la propuesta de Fernández del Campo (2004). El autor señala que, al igual que con muchos otros procedimientos algebraicos, la regla de Ruffini permite reducir la "división de polinomios en una variable a un algoritmo aritmético con sus coeficientes" (p.89). Y agrega:

> Salvo la división, el cálculo con polinomios no resulta dificultoso al trabajar en tinta: la vista localiza con rapidez los términos deseados, que pueden a su vez marcarse y despreciarse en lo sucesivo. Pero el trabajo en Braille reclama un intento de estructuración de la operación, en busca de técnicas que faciliten la tarea. (p.89)

Para resolver la división $(2x^5 - 2x^4 - 6x^2 - 5x + 6) : (x - 2)$, Fernández del Campo propone la siguiente disposición para la escritura en tinta, que luego transcribe a escritura Braille:

2	− 4	0	− 6	− 5	− 6	+ 2
2	0	0	− 6	− 17		− 40

Figura 14: Ejemplo de división resuelto con la regla de Ruffini en escritura en tinta.

Fuente: Fernández del Campo, J.E. (2004), p.89.

[En la imágen:Dos filas de números en tinta que contienen, en la primera los coeficientes del polinomio dividendo y el término independiente del polinomio divisor dentro de una "caja", en la segunda fila los coeficientes del polinomio cociente y el resto.]

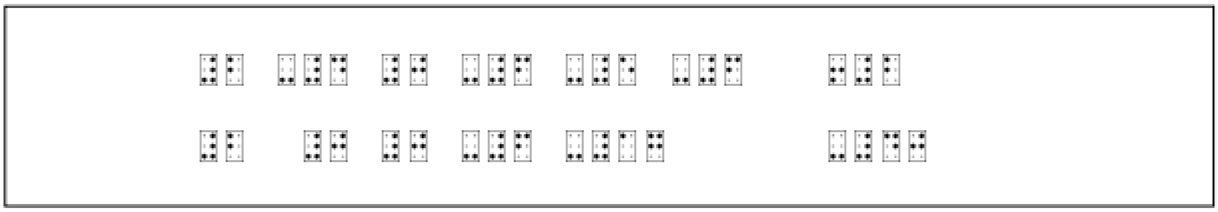


Figura 15: El mismo ejemplo de división resuelto con la regla de Ruffini en Braille.

[En la imágen:Dos filas de números en Braille que contienen, en la primera los coeficientes del polinomio dividendo y el término independiente del polinomio divisor dentro de una "caja", en la segunda fila los coeficientes del polinomio cociente y el resto.]

Fuente: Fernández del Campo, J.E. (2004), p.90.

El autor no explicita las razones por las cuales propone esta disposición, que presenta algunas diferencias con la regla usual de Ruffini que hemos analizado en apartados anteriores y que es la que se suele trabajar en el nivel secundario -tanto en el sistema educativo español como en el argentino-. Podemos suponer que la ubicación de la caja con la raíz del polinomio divisor a la derecha de los coeficientes del polinomio dividendo intenta sostener la disposición del algoritmo de división tradicional. Esto podría ser ventajoso en términos del establecimiento de relaciones entre uno y otro, cuestión que la docente del curso en el que realizamos la experiencia no tenía previsto trabajar. Además, recordemos que a Antonio se lo había eximido de resolver problemas vinculados al algoritmo tradicional de división de polinomios, por lo cual no tenía disponible este procedimiento como referencia para elaborar otro.

Notemos también que en este procedimiento no se escribe la "línea intermedia" de los productos entre la raíz del divisor y cada coeficiente del dividendo; esto implica que las restas para obtener los coeficientes del cociente son realizadas "en la cabeza". En términos de la producción de la escritura Brail e, el ahorro de estas representaciones intermedias podría significar una ventaja en cuanto a tiempo y esfuerzo de escritura, y esta podría ser una razón por la que se elige no escribirlas.

Si bien Antonio escribía en Braille perfectamente y podría haber aprendido este procedimiento para utilizar su máquina en la resolución de operaciones, encontramos en esta opción algunos problemas didácticos. Por un lado, las docentes del aula no sabíamos Braille y la disposición espacial del procedimiento es diferente de la que conocíamos. Esto podría haber generado barreras didácticas[8] (Cobeñas y Grimaldi, 2021), obstaculizando nuestras posibilidades de intervenir en relación a las producciones de Antonio. Pero también, al tratarse de un procedimiento diferente del que estaría circulando en el aula entre el resto de los alumnos. podría haber generado barreras a la interacción[9] con las producciones de sus compañeros.

No estamos afirmando que no se podría diseñar una propuesta que incluya el estudio de este otro procedimiento y que implique la circulación y el análisis de algoritmos diversos en el aula. Numerosas propuestas de enseñanza impulsan este tipo de prácticas y existe una amplia tradición didáctica en este sentido en nuestro país (Grimaldi, 2010). Sin embargo, este no era un tipo de tarea que articularía con los propósitos de la profesora del curso.

Nuestra intención, entonces, era elaborar un tipo y un modo de representación que fuera accesible para Antonio en términos de las escrituras en juego, pero conservando ciertas características de la representación que conocíamos como docentes y que estaría circulando para los demás alumnos del aula. Esto favorecería nuestra posibilidad de realizar intervenciones docentes y generaría mejores condiciones para que Antonio pueda interactuar con lo que circulara en las conversaciones y explicaciones colectivas.

La construcción de apoyos para la enseñanza de la Regla de Ruffini: los aportes de Antonio y el trabajo conjunto.

Primer Encuentro

Luego de las entrevistas con la docente y con el ayudante de laboratorio, y de las observaciones de clase, comenzamos a pensar algunas ideas para la construcción de un apoyo para la enseñanza de la regla de Ruffini a Antonio.

8 "Barreras didácticas: son aquellas provenientes de los procesos de enseñanza; ya sean ciertos enfoques didácticos, intervenciones docentes, proyectos pedagógicos, modos de enseñar, de evaluar, tipos de actividades, de recursos o materiales, modos de enten der —como deficitario— al sujeto de educación, que actúen restringiendo o impidiendo el aprendizaje del alumnado con discapacidad" (Cobeñas y Grimaldi, 2021, p.141).

9 "Barreras a la interacción: involucra todos los recursos humanos, situaciones, mobiliario, intervenciones docentes, etc., que actúen impidiendo o restringiendo la interacción de los estudiantes con discapacidad con sus compañeros, con la docente, entre otros y promuevan su aislamiento, segregación e individualización" (Cobeñas y Grimaldi, 2021, p.141).

Tomando como punto de partida la propuesta didáctica que habíamos diseñado algunos años antes, la tabla metálica con imanes para la enseñanza de una de las demostraciones del Teorema de Pitágoras -ver apartado Antecedentes de la propuesta-, llevamos al aula una tabla de metal como la que se muestra en la Figura 16, con la idea de luego poder adherir imanes.

Figura 16: Ambas caras de la tabla metálica.

[Dos imágenes: la de la izquierda corresponde a la foto de una cara de la tabla en color gris galvanizado y la de la derecha, una foto de la otra cara de la misma tabla en color blanco]

El diseño de la tabla fue pensado y llevado a cabo de manera conjunta con un estudiante de diseño industrial. Esto permitió garantizar algunas características con las que debíamos contar teniendo en cuenta no sólo las dimensiones pedagógico-didácticas, sino también las consideraciones ergonómicas[10] de un objeto de diseño.

La tabla fue construida a partir de una lámina metálica galvanizada de 1,5 mm de espesor. Su tamaño era de 30 cm de ancho por 20 cm de alto, dimensiones que permiten garantizar la portabilidad de la tabla por parte del usuario, así como la posibilidad de ser manipulada sobre los bancos individuales con los que contaba el aula en la que estudiaba Antonio y sus compañeros. Asimismo, decidimos redondear los extremos a los fines

[10] Ergonomía: estudio de la adaptación de las máquinas, muebles y utensilios a la persona que los emplea h abitualmente, para lograr una mayor comodidad y eficacia (RAE).

de evitar bordes filosos que pudieran lastimar a quienes la manipulen. Tal como se evidencia en las imágenes, una de las caras estaba pintada de blanco y la otra se conservó en color y textura original.

En el marco de una de las clases de Matemática, posteriores a las instancias de observación, le entregamos la tabla a Antonio y le contamos que nuestra idea era que él pueda trabajar con la regla de Ruffini sobre la misma. Antonio tomó la tabla y comenzó a explorarla, tocando ambas caras y recorriendo los bordes con las palmas de sus manos y las yemas de los dedos. Como aclaramos anteriormente, la tabla había sido pintada de blanco en una de sus caras, pero luego de la exploración inicial Antonio la apoyó sobre la mesa dejando visible el lado no pintado. Ante esta situación le preguntamos de qué lado prefería utilizarla a los fines de trabajar sobre ella. Él nos comentó que prefería trabajar sobre la cara no pintada, dado que su textura le parecía más rugosa. Entendemos que, desde su perspectiva, esto generaba mejores condiciones para su interacción con el material.

La idea preliminar con la que llegamos al encuentro con Antonio era poder adherir imanes a la tabla. Estos contarían con los números escritos en el sistema Braille, y representarían los coeficientes de los polinomios dividendo, divisor, cociente y resto en la implementación de la regla de Ruffini. Al comentarle estas ideas a Antonio, propuso que podía ocuparse de escribir en Braille varios renglones de cada uno de los dígitos del 0 al 9 y del signo “-“, a los fines de necesitar representar algún coeficiente negativo. Esto nos permitiría construir una colección de tarjetas imantadas con varias copias de los dígitos en Braille.

En la Figura 17 mostramos algunos de los renglones numéricos escritos por Antonio junto con los imanes sobre los que posteriormente serían pegados y recortados para construir las tarjetas imantadas.

Figura 17: Tabla metálica, imanes y números en Braille.

[En la imagen: Tabla metálica, tres imanes rectangulares sobre la tabla, tres tiras de papel con números escritos en Braille]

En la Figura 18 se muestran las tarjetas imantadas finalizadas -pegadas sobre los imanes y recortadas-:

Figura 18: Colección de tarjetas imantadas.

[En la imagen: Once tarjetas de papel con números y símbolos matemáticos escritos en Braille]

Segundo encuentro

En esta nueva instancia de trabajo con Antonio retomamos la tabla y la colección de tarjetas imantadas que habíamos construido de manera conjunta en la clase anterior. Antonio volvió sobre sus apuntes en relación con la explicación realizada por la profesora respecto de la división de polinomios utilizando la regla de Ruffini. En estos apuntes había quedado planteada una tarea qué él no había realizado debido a que no había podido terminar de copiar los pasos a seguir para implementar la regla.

Habíamos tomado la decisión didáctica de indagar, previo a la implementación de la regla de Ruffini, si Antonio conocía cuáles eran las hipótesis de trabajo bajo las cuales la regla era llevada a cabo, así como los objetivos que la misma persigue. Para ello fuimos realizando algunas preguntas a medida que Antonio iba avanzando en la lectura de sus apuntes que nos permitieran dar cuenta si él había comprendido: ¿Con qué objetivos aplicamos la regla de Ruffini? ¿Cuáles son los polinomios involucrados? ¿Qué características tienen estos polinomios? ¿Qué polinomios nos permite obtener la regla? El estudiante parecía conocer que la regla de Ruffini permitía dividir dos polinomios, caracterizó al polinomio divisor de acuerdo con las hipótesis que plantea el algoritmo, y finalmente indicó que la regla permite obtener tanto el cociente como el resto de la división. En consecuencia, decidimos utilizar la tabla y la colección de tarjetas imantadas a los fines de resolver la actividad que había quedado planteada en los apuntes de clase. A continuación, detallamos la consigna:

Usá la regla de Ruffini y determiná el cociente y el resto de la siguiente división:

$(3x^3+5x-6) : (x+2)$

Al explicarle a Antonio que debía buscar entre las tarjetas imantadas los coeficientes del polinomio dividendo y el opuesto del término independiente del divisor para luego poder ordenarlos, él sugiere que sería importante contar con un sector específico de la tabla en el que se encontrara la colección de tarjetas; de esta manera, las tendría disponibles para seleccionar las que necesitara.

Asimismo, decidimos que la tabla debía incluir la tradicional “caja” que se utiliza al aplicar la regla de Ruffini para disponer los coeficientes involucrados y realizar las operaciones necesarias. En el apartado “La regla de Ruffini: análisis epistemológico, curricular y didáctico” hemos indicado cuál es la clásica disposición que se suele realizar en las propuestas de enseñanza de esta regla en nuestro país. Finalmente, atendiendo a la propuesta de Antonio y a la necesidad de contar con sectores delimitados, la tabla fue sectorizada con líneas en relieve, siendo la versión final utilizada la que se muestra en la Figura 19.

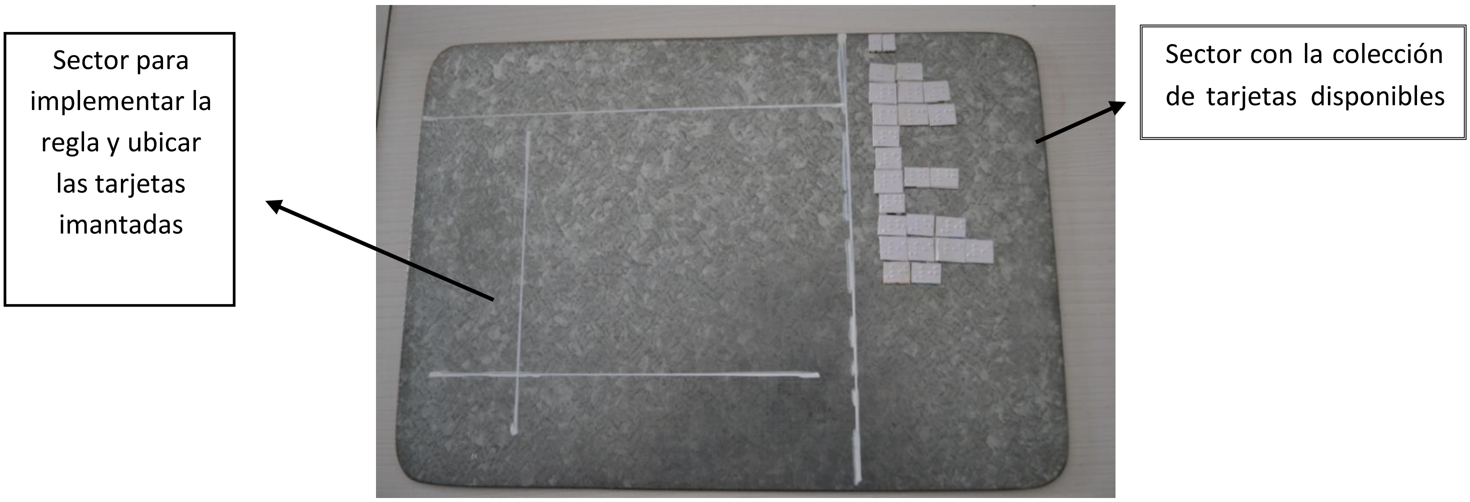


Figura 19: Tabla metálica terminada y colección de tarjetas en Braille.

[En la imagen: Tabla metálica dividida en tres sectores a través de segmentos marcados en relieve, sector derecho con tarjetas imantadas con números y símbolos matemáticos en braille, sector izquierdo con una tabla en relieve para aplicar la regla de Ruffini]

Tal como se observa en la imagen, dejamos disponible un sector bastante amplio para poder ubicar la colección de tarjetas. Nos parecía importante poder contar con un espacio para poder dejar a disposición del estudiante cantidades diversas de tarjetas. Entendíamos que la cantidad de tarjetas a necesitar estaría condicionada por el número de términos del polinomio dividendo, los resultados de las operaciones a realizar y la cantidad de términos del cociente. Asimismo, entendemos que la cantidad de tarjetas disponibles y la coincidencia o no de las mismas con los coeficientes a armar para poder aplicar la regla de Ruffini, podían variar de una actividad a otra. Es decir, en una actividad Antonio podía contar con las tarjetas que necesariamente iba a utilizar, y en otra con tarjetas de más. Esta diferencia en la colección de tarjetas disponibles constituye una variable didáctica[11] de acuerdo con la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy

[11] Se llama así a aquellas variables cuya modificación por parte del docente busca exigir que el alumno cambie las relaciones matemáticas que pone en juego al interactuar con la situación.

Brousseau (1986, 2007). En este sentido, el docente podría definir qué tarjetas deja a disposición del alumno en función de las relaciones matemáticas que quiera que movilice.

A continuación, resolvimos la actividad planteada aplicando la regla de Ruffini, de acuerdo a lo indicado en la consigna. En primera instancia Antonio tomó las tarjetas imantadas que contenían los coeficientes del polinomio dividendo –ordenados y completos-. En este caso fue preciso recordar que el polinomio dividendo cuenta con un término nulo –el de índice 2-, y que el término independiente del polinomio divisor es negativo, por lo tanto tuvimos que utilizar la tarjeta con el signo "-". Luego recuperó las tarjetas imantadas para indicar "-2" correspondiente al opuesto del término independiente del divisor.

Una vez ordenados los coeficientes, fuimos recordando las operaciones que se deben realizar entre los coeficientes a los fines de aplicar los pasos a seguir que indica la regla. Antonio iba tomando las tarjetas imantadas que necesitaba del sector en el cual habíamos dejado la colección.

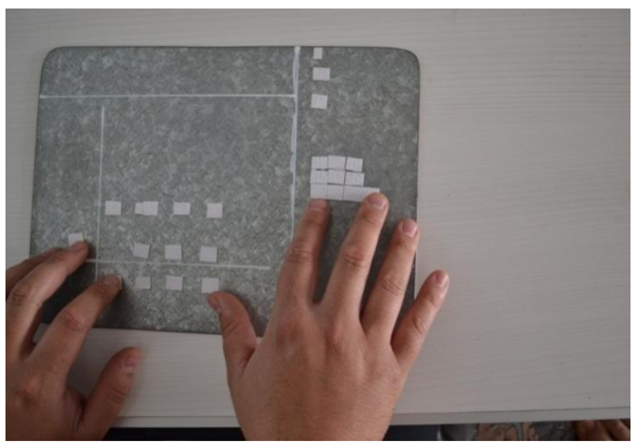


Figura 20: Uso de la tabla metálica con la colección de tarjetas imantadas.

[En la imagen: Las manos de una persona utilizado la tabla metálica descripta en la Figura 19]

Una vez obtenidos los coeficientes de los polinomios cociente y resto, Antonio escribió –en Braille- en su carpeta la respuesta a la consigna:

Cociente: $3x^2-6x+17$
Resto: -40

Respecto de estos resultados, habíamos anticipado algunas intervenciones con la finalidad de poder concluir qué grado debía tener el polinomio cociente y el polinomio resto atendiendo el grado del polinomio dividendo y divisor. En este sentido, Antonio pudo identificar cuáles debían ser los grados de ambos polinomios apoyándose en conocimientos disponibles sobre la multiplicación y división de polinomios.

Resultados y conclusiones

<u>Acerca de la experiencia</u>

Al acercarnos a trabajar de manera conjunta con una docente de Matemática en un aula de escuela común en la que participaba un estudiante con discapacidad, consideramos como primer paso fundamental contar con los avales y apoyos institucionales. En el caso de la experiencia objeto del presente trabajo contamos con las articulaciones institucionales necesarias para poder llevarla adelante. Esta primera instancia de acuerdo puso en evidencia uno de los principales pilares de la Educación Inclusiva: la flexibilización de estructuras y el trabajo conjunto de los distintos actores involucrados.

En relación con el trabajo con la docente a cargo del curso podemos considerar que, para llevar adelante la propuesta, era necesario contar con un docente que abra las puertas de su aula, dispuesto a compartir con otros sus propuestas de enseñanza. En ese sentido, nos encontramos con una docente que estaba abierta a estas condiciones de trabajo. Es decir, dispuesta a flexibilizar estructuras y modalidades de trabajo, en este caso desarraigar la idea de un docente trabajando puertas adentro en su curso sin compartir e intercambiar sus ideas con otros. Formas de trabajo que entendemos que aún viven en muchas aulas del nivel medio, en relación con la falta de trabajo conjunto, en muchas ocasiones no por falta de predisposiciones de los docentes sino por estructuras arraigadas del sistema educativo.

Asimismo, en el presente trabajo nos propusimos darle especial relevancia a la voz del estudiante con discapacidad, atendiendo al lema proveniente del activismo por las personas con discapacidad “nada sobre nosotros sin nosotros”, por ello también fue importante contar con el acuerdo y la buena predisposición del alumno de participar y colaborar. En este sentido, si bien la docente a cargo del curso y la docente responsable del presente trabajo contaban con conocimientos didácticos y matemáticos, el estudiante podía aportar ideas en relación con el sistema Braille y con sus propias experiencias como estudiante de Matemática ciego. Entendemos que sus aportes resultaron fundamentales para la elaboración de la tabla metálica y la colección de tarjetas imantadas utilizadas como apoyo para la enseñanza y el aprendizaje de la regla de Ruffini.

En efecto, Antonio colaboró en la confección de las tarjetas imantadas realizando la escritura en Braille de las mismas, realizó sugerencias relevantes respecto a la disposición de las tarjetas en la tabla metálica, instaló la necesidad de sectorizar la tabla para mejorar el uso de la misma y utilizó el dispositivo para resolver actividades atendiendo a las consignas dadas y a las intervenciones docentes.

En relación con el dispositivo construido en el marco de este trabajo, nos parece importante dedicar un apartado a continuación para evaluar su funcionamiento.

Sobre el apoyo construido para la enseñanza de la regla de Ruffini

Consideramos que la tabla imantada constituyó un pilar fundamental para propiciar la enseñanza a Antonio de las técnicas involucradas en la aplicación de la regla de Ruffini. Si bien él había comprendido las hipótesis de trabajo para aplicar la regla así como los objetivos de la implementación de la misma, resultaba necesario generar condiciones que favorezcan los intercambios en relación con los pasos a seguir para llevar a cabo la división de polinomios con los mecanismos que la regla pone en juego. Entendemos que la construcción de la tabla metálica con imanes otorga un carácter dinámico a las representaciones de los objetos matemáticos, así como también favorece el intercambio entre docentes que no dominan la escritura Braille y un estudiante que sí lo hace. Es decir que no sólo permite la accesibilidad de Antonio a la representación de la regla de Ruffini, sino que consolida el intercambio y la interacción con la misma tanto para las docentes como para el estudiante.

En términos matemático-didácticos, nos resulta interesante destacar que el trabajo que desplegamos con Antonio en el marco de esta experiencia implicó un único tipo de tarea -resolver para producir una solución-, e inicialmente no consideramos otros tipos de tarea que suelen proponerse en el aula del nivel medio. Sin embargo, una vez que se puso en marcha el uso de la tabla imantada, notamos que resulta viable proponer otros tipos de tareas y de prácticas matemáticas tales como validar resoluciones hechas por otros o completar resoluciones incompletas. Creemos que una de las potencias del dispositivo diseñado es que habilita distintas posibilidades de trabajo en torno a consignas que impliquen una diversidad de tipos de tarea y tipos de prácticas matemáticas.

Revisando la puesta en aula de la tabla y los intercambios con Antonio en relación con su uso, consideramos necesario hacer un ajuste en la colección de tarjetas en Braille. Dado que generalmente el profesor de Matemática de nivel medio y los compañeros de los estudiantes con discapacidad no manejan, al menos fluidamente, el sistema Braille, sería importante que las tarjetas estén tanto en Braille como en el sistema de escritura en tinta. Creemos que este agregado sería un apoyo a la interacción entre el alumno y el docente, dado que ambos tendrían a disposición los números y los símbolos indicados en cada tarjeta en el sistema de escritura que cada uno domina. Del mismo modo que en el rompecabezas de Perigal accesible las piezas iguales tenían el mismo color y la misma textura, es decir, accesible a través de la vista y el tacto, considerando personas con y sin discapacidad visual.

Por todo lo expuesto en este apartado, consideramos que, con la elaboración e implementación de la propuesta presentada en el presente trabajo final, intentamos dejar en evidencia la necesidad de:

- ✔ generar espacios de colaboración entre distintos actores del sistema educativo;
- ✔ propiciar la construcción de espacios de trabajo conjunto y articulado como una condición fundamental para consolidar la educación inclusiva;
- ✔ construir conocimiento didáctico vinculado a la inclusión de un alumno ciego en un aula de matemática de una escuela media;

- ✔ valorar, escuchar y dar un lugar privilegiado a la participación y la voz de los estudiantes con discapacidad en la construcción de propuestas didácticas que los incluyan.

Conclusiones

Consideramos necesario que el Sistema Educativo y el Estado en general lleven adelante gestiones en pos de la Educación Inclusiva, tendientes a mejorar las condiciones de trabajo en las escuelas con la finalidad de lograr escenarios más inclusivos para todos, incluyendo a las personas con discapacidad.

En esta experiencia se muestra como es el saber didáctico común, que, dialogando con la voz del estudiante y saberes específicos sobre el Braille, permitieron identificar y eliminar barreras además de construir apoyos para la enseñanza y el aprendizaje de polinomios en aulas con estudiantes con y sin discapacidad.

Como docentes somos responsables de continuar pensando en la enseñanza para “todos”, contemplando la “escucha atenta” de nuestros estudiantes con y sin discapacidad. En este sentido, consideramos que cobra particular relevancia el trabajo colaborativo entre los docentes, poniendo en juego la diversidad de conocimientos. Nos parece relevante que este tipo de prácticas se lleven a cabo de manera progresiva y paralela a que las políticas de Estado sean implementadas. Entendemos que dentro de esta línea se encuentra enmarcada la propuesta presentada en este trabajo final de integración.

Referencias Bibliográficas

- Ainscow, M. (2002). Rutas para el desarrollo de prácticas inclusivas en los sistemas educativos. *Revista de Educación*, 327, 69-82.
- Ainscow, M. (2001). *Understanding the Development of Inclusive Schools Some notes and further reading*. The University of Manchester.
- Arcavi, A. e Isoda, M. (2007). Aprender a escuchar: de las fuentes históricas a la práctica del aula. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 111–129. Traducción: Daniela Pagés. Correcciones y comentarios: Mónica Olave, Fernando Bifano, Abraham Arcavi.
- Booth, T. y Ainscow, M. (2000). *Índice para la Inclusión. Desarrollando el aprendizaje y la participación en las escuelas*. Bristol: Centre for Studies on Inclusive Education (CSIE), UK.
- Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En González, M.J., Murillo, J. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp.89-113). Santander: SEIEM.
- Bragagnolo, F., Grimaldi, V., y Lorenzo, J. (28-30 de octubre de 2015). *¿Qué nos pasa cuando cambiamos de lugar? Construyendo inclusión en un aula de matemática*. [Poster]. IV Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Universidad Nacional de La Plata.
- Broitman, C. y Sancha, I. (2021). Diálogos ineludibles entre Didáctica de la Matemática y Educación Inclusiva. En Cobeñas, P., Grimaldi, V., Broitman, C., Sancha I. y Escobar, M. (coords.), *La enseñanza de las matemáticas a alumnos con discapacidad* (pp.163-206). La Plata: EDULP.
- Brousseau, G. (2007). *Introducción a la Teoría de las Situaciones Didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 33-112. Traducción de la UNC.
- Caronía, S. , Sklepek, G. y otros (2012) Los polinomios, una aproximación a través de libros de texto. *Propuestas para la enseñanza de las Matemáticas* (pp. 243-250)
- Colegio Nacional Rafael Hernández, Universidad Nacional de La Plata [CNRH UNLP] (2019). *Programa de Matemática 5to año*.

- Cobeñas, P. (2021). Pensar la discapacidad para (re) pensar las escuelas. En Cobeñas, P., Grimaldi, V., Broitman, C., Sancha I. y Escobar, M. (coords.), *La enseñanza de las matemáticas a alumnos con discapacidad* (pp.28-103). La Plata: EDULP.
- Cobeñas, P. y Grimaldi, V. (2021). Discusiones sobre inclusión educativa: una perspectiva desde la Educación Inclusiva. En Cobeñas, P., Grimaldi, V., Broitman, C., Sancha I. y Escobar, M. (coords.), *La enseñanza de las matemáticas a alumnos con discapacidad* (pp.104-162). La Plata: EDULP.
- Cobeñas, P. y Grimaldi, V. (2018). *Construyendo una educación inclusiva II. Aportes para repensar la enseñanza en escuelas para todos.* La Plata: Asociación Azul.
- Charlot, B. (1991). La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas. En Bkouche, R.; Charlot, B.; Rouche, N., *Faire des mathematiques: le plaisir du sens*. Paris, Armand Colin.
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (1997). *La Transposición Didáctica*. Buenos Aires: Aique.
- Dirección General de Cultura y Educación [DGCyE] (2010). *Diseño Curricular para la Educación Secundaria. Matemática Ciclo Superior, 4º año*. Provincia de Buenos Aires, Argentina.
- Dirección General de Cultura y Educación [DGCyE] (2007). *Diseño Curricular para la Educación Secundaria. Matemática, 2º año (SB)*. Provincia de Buenos Aires, Argentina.
- D'Urzo, P. (2016). *Integración del no vidente en la clase de matemática. La clasificación de ángulos, un contenido para la inclusión*. [Trabajo final de Especialización, Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, Universidad Nacional de La Plata]. Memoria Académica, repositorio institucional FaHCE-UNLP.
- Duval. R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, (9.1) 143–168.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne: Peter Lang (disponible en castellano bajo el título: *Semiosis y Pensamiento Humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, 1996, México).
- Fernández del Campo, J.E. (2004). *Braille y Matemática*. Madrid: ONCE.

- Fonseca, C., Bosch, M. y Gascón, J. (2007). El momento del trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas: el caso de la “regla de Ruffini”. En Ruiz Higueras, L., Estepa Castro, A. y García García, F.J. (coords.), *Sociedad, escuela y matemáticas: aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp.139-158). Universidad de Jaén, España.
- Grimaldi, V., Cobeñas, P., Filardi, M., Herrero, G., Murúa, L., Villanueva, A., Broitman, C., Escobar, M. y Sancha, I. (8-10 de mayo de 2019). *Enseñar y aprender matemática en aulas de educación primaria con alumnos con y sin discapacidad*. [Comunicación oral]. V Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Universidad Nacional de La Plata.
- Grimaldi, V. (2017). *La inclusión de alumnos con discapacidad en aulas de Matemática del Nivel Secundario : Su abordaje en la formación docente inicial*. [Trabajo final de Especialización, Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, Universidad Nacional de La Plata]. Memoria Académica, repositorio institucional FaHCE-UNLP.
- Grimaldi, V., Cobeñas, P., Melchior, M. y Battistuzzi, L. (2015): *Construyendo una educación inclusiva. Algunas ideas y reflexiones para la transformación de las escuelas y las prácticas.* La Plata: Asociación Azul.
- Grimaldi, V. (2010). Los algoritmos de cálculo en la historia de la matemática y en la escuela. *Papel y Tinta, 12ntes*, 33, 11 - 15.
- Hernández Sánchez, M. A. y Fernández Vázquez, M. T. (2016). *Nada sobre nosotros sin nosotros. La Convención de Naciones Unidas sobre discapacidad y la gestión civil de derecho*s. Consejo Nacional para prevenir la discriminación, México.
- Lorenzo J. (2012). *Trabajo final de Seminario Teoría y desarrollo curricular en Ciencias Exactas.* Maestría en Educación en Ciencias Exactas y Naturales. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, Universidad Nacional de La Plata.
- ONCE (s.f). *El Braille: lectura, aprendizaje, alfabeto y signos*. https://www.once.es/servicios-sociales/braille
- Organización de las Naciones Unidas [ONU] (2013). *Estudio temático sobre el derecho de las personas con discapacidad a la educación,* A/HRC/25/29. Informe de la Oficina del Alto Comisionado de las Naciones Unidas para los Derechos Humanos.

- Organización de las Naciones Unidas [ONU] (2006). *Convención sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad*. https://www.un.org/esa/socdev/enable/documents/tccconvs.pdf
- Sadovsky, P. (2019). La Teoría de la Transposición Didáctica como marco para pensar la vida de los saberes en las instituciones. En AAVV, *Bitácoras de la innovación educativa*. Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe, Argentina.
- Sadovsky, P. (2005). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En Alagia, H., Bressan, A. y Sadovsky, P., *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática* (pp.13-68). Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Sessa, C. y Giuliani, D. (2008). Mirar la historia de la matemática para pensar en el aprendizaje y la enseñanza. En Broitman, C. (comp.), *Enseñar matemática. Nivel Inicial y Primario # 4* (pp.17-40). Buenos Aires: 12ntes.
- Weisstein, E.W. (1995). Wolfram MathWorld: the Web's Most Extensive Mathematics. Wolfram Research. Universidad de Illinois en Urbana-Champaign, EE UU.