

Métodos secuenciales de Monte Carlo aplicados a modelos ocultos de Markov con proceso de estado y de medición correlacionados.

* Pedro Gadze[†] y Bruno Cernuschi-Frías^{†‡}

[†]Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Argentina
[‡]CONICET, Buenos Aires, Argentina

Resumen En el marco del filtrado Bayesiano, se presenta un modelo en el cual el proceso de medición y el estado siguiente son condicionalmente dependientes, dado el conjunto de observaciones pasadas y el estado actual. Además se busca la distribución de predicción para este modelo, y la distribución de filtrado se halla con una simple actualización a partir de la de predicción. La distribución requerida se aproxima utilizando el muestreo secuencial de importancia, y la distribución queda representada por un conjunto de muestras aleatorias, que son obtenidas a partir de una función de importancia, y se le asigna a las mismas un peso de acuerdo a su relevancia.

Key words: Estimación Bayesiana, filtrado óptimo, filtrado estocástico, métodos secuenciales de Monte Carlo

1. Introducción

El filtrado Bayesiano consiste en calcular la función de densidad de probabilidad (FDP) *a posteriori* del estado de un sistema a partir de toda la información disponible, incluido el conjunto de mediciones. En varias aplicaciones en procesamiento de señal y teoría de control se desea estimar de manera recursiva esta distribución. Salvo en casos especiales, como el caso de los modelos de espacio de estados lineales Gaussianos donde es posible aplicar el filtro de Kalman [1] [2], es imposible evaluar analíticamente estas distribuciones.

Para los sistemas que son no lineales y/o no Gaussianos, una solución alternativa son los ya conocidos *filtros de partículas*. Los mismos fueron introducidos por Gordon *et al* [3], y la idea básica es producir una muestra de variables aleatorias independientes, llamadas *partículas*, distribuidas aproximadamente de acuerdo a la FDP *a posteriori* del estado. El sistema es modelado como una cadena discreta de Markov oculta, que consiste en una ecuación de estados que describe la evolución del estado en el tiempo, y una ecuación de medición que conecta

* This work was partially supported by the University of Buenos Aires, CONICET, Argentina, and the Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica, PICT No. 209-2006, Argentina.

la observación con el estado. En el enfoque *clásico* se considera que el proceso de medición y el estado siguiente son condicionalmente independientes dado el estado actual. En [1] Anderson y Moore proponen un modelo lineal Gaussiano donde el ruido del proceso de estados y el de medición están correlacionados.

Por otro lado, en los trabajos realizados por Arnaud, Memin y Cernuschi-Frias [4], y por Arnaud, y Mémin [5] se propone un seguidor puntual en secuencia de imágenes basado en el filtrado de partículas donde todo el modelo, tanto la ecuación del proceso como la de medición se obtienen a partir de la secuencia de imágenes. Por lo tanto, en este contexto, no sería sorprendente que las perturbaciones de las mediciones y del proceso estén correlacionadas.

Alentado por estos trabajos mencionados, se propone estimar la FDP *a posteriori* del estado del sistema predicho para el caso especial donde la medición del proceso y el estado siguiente sean condicionalmente dependientes dado el estado actual y todas las mediciones pasadas. Además, se desea estimar la FDP de filtrado a partir de la FDP de predicción hallada. Se propone también una solución para un sistema en el cual tanto las ecuaciones de estados como la de medición son no lineales con ruidos aditivos Gaussianos correlacionados. Este modelo ha sido introducido en [6], en donde se ha realizado el análisis para un modelo lineal Gaussiano. Se busca en este caso, aplicar el filtro a un modelo genérico, donde tanto la ecuación de estados, como la de medición sean no lineales.

2. Predicción y filtrado Bayesiano para modelos ocultos de Markov con proceso de estados y de medición correlacionados

La señal $\{x_k; k \in \mathbb{N}\}$, $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ es un proceso oculto de Markov con distribución inicial $p(x_0)$. Las observaciones $\{z_k; k \in \mathbb{N}\}$, $z_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ y el estado siguiente x_{k+1} son condicionalmente dependientes dado el proceso x_k y el conjunto de mediciones pasadas $z_{0:k-1}$. Se tiene entonces una ecuación global que conecta la ecuación de transición de los estados con la ecuación de medición, $p(x_{k+1}, z_k | x_k, z_{0:k-1})$. Resumiendo, el modelo oculto de Markov con dependencia condicional (MOMDC) queda descrito por:

$$p(x_0), \quad (1)$$

$$p(x_{k+1}, z_k | x_k, z_{0:k-1}), \quad k \geq 0. \quad (2)$$

Se denota $x_{0:k}^T \triangleq \{x_0, \dots, x_k\}$ y $z_{0:k}^T \triangleq \{z_0, \dots, z_k\}$ la señal y las observaciones hasta el tiempo k respectivamente.

Cabe destacar que si se tiene independencia condicional entre x_{k+1} y z_k , además de independencia del conjunto de mediciones pasadas $z_{0:k-1}$ en la ecuación (2), la ley de evolución del sistema es igual a:

$$p(x_{k+1}, z_k | x_k, z_{0:k-1}) = p(x_{k+1} | x_k) p(z_k | x_k). \quad (3)$$

La solución del filtrado bayesiano para este sistema, ecuación (3), está dada por el filtro de partículas clásico [7].

El objetivo es estimar recursivamente, para un sistema con una ley de evolución de la forma de la ecuación (2), las distribuciones de predicción $p(x_{0:k}|z_{0:k-1})$ y de filtrado $p(x_{0:k}|z_{0:k})$; y las esperanzas de predicción y de filtrado:

$$I_p(f_k) = \int f_k(x_{0:k}) p(x_{0:k}|z_{0:k-1}) dx_{0:k}. \quad (4)$$

$$I_f(f_k) = \int f_k(x_{0:k}) p(x_{0:k}|z_{0:k}) dx_{0:k}, \quad (5)$$

para alguna función de interés $f_k: \mathbb{R}^{(k+1) \times n_x} \rightarrow \mathbb{R}$ integrable respecto a la FDP de predicción $p(x_{0:k}|z_{0:k-1})$, e integrable respecto a la de filtrado $p(x_{0:k}|z_{0:k})$.

Primero, se busca la distribución de predicción $p(x_{0:k}|z_{0:k-1})$, y a partir de la misma, la de filtrado. Se tiene para la distribución de predicción la siguiente recursividad:

$$p(x_{0:k}|z_{0:k-1}) = p(x_{0:k-1}|z_{0:k-2}) \frac{p(x_k, z_{k-1}|x_{k-1}, z_{0:k-2})}{p(z_{k-1}|z_{0:k-2})}. \quad (6)$$

La distribución de filtrado se puede hallar integrando la distribución de predicción $p(x_{0:k+1}|z_{0:k})$ respecto al estado predicho x_{k+1} :

$$p(x_{0:k}|z_{0:k}) = p(x_{0:k}|z_{0:k-1}) \frac{p(z_k|x_{0:k}, z_{0:k-1})}{p(z_k|z_{0:k-1})}. \quad (7)$$

Al igual que en el enfoque clásico del filtro de partículas, ver [7], las ecuaciones recursivas para la distribución de predicción (6) y la de filtrado (7) son solamente teóricas debido a que generalmente no siempre es posible calcular la constante de normalización $p(z_{k-1}|z_{0:k-2})$ y las marginales de $p(x_{0:k}|z_{0:k-1})$ y $p(x_{0:k}|z_{0:k})$. Una solución al problema es realizar una aproximación recursiva de estas FDP.

3. Muestreo Secuencial de Importancia

El muestreo secuencial por importancia (*Sequential Importance Sampling*, SIS) es un método de Monte Carlo (MC) que constituye la base para la mayoría de los filtros MC [8]. Se supone que se posee una muestra aleatoria pesada $\{x_{0:k}^i, \omega_k^i\}_{i=1}^N$ que caracteriza a la FDP de predicción $p(x_{0:k}|z_{0:k-1})$, donde $\{x_{0:k}^i; i = 1, \dots, N\}$ son las N muestras aleatorias independientes idénticamente distribuidas (**i.i.d.**), llamadas "partículas", con sus respectivos pesos asociados $\{\omega_k^i; i = 1, \dots, N\}$. Los pesos son normalizados de manera que $\sum_{i=1}^N \omega_k^i = 1$. Entonces, se puede aproximar la FDP de predicción como:

$$p(x_{0:k}|z_{0:k-1}) \approx \sum_{i=1}^N \delta(x_{0:k} - x_{0:k}^i) \omega_k^i. \quad (8)$$

Se tiene entonces una aproximación discreta pesada de la FDP verdadera $p(x_{0:k}|z_{0:k-1})$. Los pesos son obtenidos utilizando el principio del muestreo por

importancia [9] [8]. Este principio consiste en lo siguiente. Se tiene una densidad de probabilidad llamada *función de importancia* $\pi(x_{0:k}|z_{0:k-1})$ que es similar a la FDP buscada, pero de la cual se pueden obtener muestras de manera más sencilla, de modo tal que una ponderación apropiada de dicho conjunto de muestras hace posible la estimación MC. Si es posible obtener N muestras aleatorias **i.i.d.** $\{x_{0:k}^i\}_{i=1}^N$ de acuerdo a $\pi(x_{0:k}|z_{0:k-1})$. Por lo tanto, una posible estimación de $I_p(f_k)$ puede calcularse como [10]:

$$\widehat{I}_p^N(f_k) = \sum_{i=1}^N f_k(x_{0:k}^i) \omega_k^i, \quad (9)$$

donde $\omega_k^i \propto p(x_{0:k}^i|z_{0:k-1})/\pi(x_{0:k}^i|z_{0:k-1})$ son los *pesos de importancia de predicción* normalizados. Y la distribución de predicción se aproxima de acuerdo a la ecuación (8) [9].

En el caso secuencial, en cada iteración se desea estimar la FDP de predicción $p(x_{0:k+1}|z_{0:k})$ a partir de la aproximación obtenida en el instante de tiempo anterior $p(x_{0:k}|z_{0:k-1})$. Esto puede lograrse utilizando una función de importancia *secuencial* [6]:

$$\pi(x_{0:k+1}|z_{0:k}) = \pi(x_{k+1}|z_{0:k}, x_{0:k}) \pi(x_{0:k}|z_{0:k-1}). \quad (10)$$

Esta función de importancia permite la evaluación recursiva de los pesos de importancia de predicción:

$$\omega_{k+1} = \omega_k \frac{p(x_{k+1}, z_k|x_k, z_{0:k-1})}{\pi(x_{k+1}|x_{0:k}, z_{0:k})}. \quad (11)$$

Ahora, si se reemplaza la distribución de predicción (8) en (7) es posible calcular la distribución de filtrado multiplicando los pesos de importancia de predicción ω_k por $p(z_k|x_{0:k}, z_{0:k-1})$ (no hay que preocuparse de $p(z_k|z_{0:k-1})$ dado que es un factor de normalización). Por lo tanto, es posible obtener una estimación de $I_f(f_k)$:

$$\widehat{I}_f^N(f_k) = \sum_{i=1}^N f_k(x_{0:k}^i) \alpha_k^i, \quad \alpha_k^i = \frac{\omega_k^i p(z_k|x_{0:k}^i, z_{0:k-1})}{\sum_{j=1}^N \omega_k^j p(z_k|x_{0:k}^j, z_{0:k-1})}, \quad (12)$$

donde $\alpha_k^i \propto \omega_k^i p(z_k|x_{0:k}^i, z_{0:k-1})$ son denominados *pesos de importancia de filtrado*.

Por lo tanto, se presenta en el algoritmo 1 el filtrado y la predicción MC de la distribución a posteriori.

Al utilizar una función de importancia de la forma de la ecuación (10), se ha probado que la varianza de los pesos de importancia sólo puede crecer en el tiempo [11]. Como consecuencia, en la práctica el número de partículas decrece dramáticamente con el tiempo. Esto se conoce como *fenómeno de la degeneración* de la muestra. Una medida apropiada de la degeneración del algoritmo es el

Algoritmo 1 Muestreo Secuencial por importancia para MOMDC

para $k \geq 1$:

- para $i = 1, \dots, N$ obtener $x_k^i \sim \pi(x_k | x_{0:k-1}^i, z_{0:k-1})$ y $x_{0:k}^i \triangleq (x_{0:k-1}^i, x_k^i)$.
- para $i = 1, \dots, N$, evaluar los pesos de importancia:

$$\omega_k^{(i)} = \omega_{k-1}^i \frac{p(x_k^i, z_{k-1} | x_{k-1}^i, z_{0:k-2})}{\pi(x_k^i | z_{0:k-1}, x_{0:k-1}^i)}, \quad \alpha_k^i = \omega_k^i p(z_k | x_k^i, z_{0:k-1}).$$

- para $i = 1, \dots, N$, normalizar los pesos de importancia:

$$\omega_k^i = \frac{\omega_k^i}{\sum_{j=1}^N \omega_k^j}, \quad \alpha_k^i = \frac{\alpha_k^i}{\sum_{j=1}^N \alpha_k^j}$$

fin para

“tamaño efectivo de la muestra” [11], que puede estimarse de la siguiente manera [9]:

$$\mathcal{N}_{ef} = \left[\sum_{i=1}^N (\omega_k^i)^2 \right]^{-1}, \quad (13)$$

donde ω_k^i son los pesos normalizados. \mathcal{N}_{ef} puede verse como una estimación del número de partículas “útiles”, entendiéndose como útil aquella partícula que contribuye significativamente al cálculo de los estimados. Un valor pequeño de \mathcal{N}_{ef} indica una degeneración severa. Para limitar esta degeneración se han propuesto dos métodos.

La primer solución consiste en introducir una etapa de remuestreo. Esta etapa fue introducida por primera vez por Gordon *et al.* [3], y la idea básica consiste en remover las partículas con valores de menor peso, para concentrarse en aquellas con valores mayores. Como resultado del remuestreo, a partir de la población $\{x_k^i, \tilde{\omega}_k^i; i = 1, \dots, N\}$ se obtiene el nuevo conjunto $\{x_k^{i*}, 1/N; i = 1, \dots, N\}$ con pesos uniformes. El nuevo conjunto de muestras aleatorias $\{x_k^{i*}; i = 1, \dots, N\}$ se genera remuestrando con reemplazo N veces sobre una representación discreta de $p(x_k | z_{1:k-1}) \approx \sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_k^i \delta(x_k - x_k^i)$, de forma tal que la probabilidad de elegir una partícula está directamente relacionada con el valor de su peso normalizado $p(x_k^{i*}, x_k^j) = \omega_k^i$. En [12] J. D. Hol compara y analiza cuatro diferentes alternativas. El resultado del estudio realizado es que algoritmo más apropiado es el remuestreo sistemático, dado en el algoritmo 2. Estas tres etapas (propagación de las partículas, actualización de los pesos de importancia y remuestreo) constituyen el marco del filtro de partículas.

La segunda solución propuesta para limitar la degeneración del algoritmo es la elección de función de importancia $\pi(x_{k+1} | z_{0:k}, x_{0:k})$ que minimice la varianza de los pesos de importancia ω_{k+1} de modo de maximizar \mathcal{N}_{ef} condicionada a las trayectorias simuladas $x_{0:k}$ y las observaciones $z_{0:k}$. Esta función de importancia se denomina como *óptima*, y Doucet *et al.* en [9] proponen la misma para el

Algoritmo 2 Remuestreo

Generar N números ordenados de acuerdo a:

$$u_k = \frac{(k-1) + \tilde{u}}{N}, \quad \text{con: } \tilde{u} \sim \mathcal{U}[0, 1).$$

Las partículas remuestreadas se obtienen produciendo n_i copias de la partícula x^i , donde:

$$n_i = \text{El número de } u_k \in \left(\sum_{s=1}^{i-1} \tilde{w}_k^s, \sum_{s=1}^i \tilde{w}_k^s \right].$$

filtro de partículas clásico. Siguiendo el mismo criterio, se busca la función de importancia óptima para el filtro de partículas aplicado MOMDC.

Para hallar dicha función de importancia, primero se calcula la esperanza de los pesos de importancia:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\pi(\cdot|x_{0:k}^i, z_{0:k})} [\omega_{k+1}^i] &= \int \omega_k^i \frac{p(x_{k+1}, z_k | x_k^i, z_{0:k-1})}{\pi(x_{k+1} | x_{0:k}^i, z_{0:k})} \pi(x_{k+1} | x_{0:k}^i, z_{0:k}) dx_{k+1}, \\ &= \omega_k^i p(z_k | x_k^i, z_{0:k-1}). \end{aligned} \quad (14)$$

Para la varianza de los pesos se tiene:

$$\begin{aligned} \text{VAR}_{\pi(\cdot|x_{0:k}^i, y_{0:k})} [\omega_{k+1}^i] &= \int (\omega_k^i)^2 \frac{p^2(x_{k+1}, z_k | x_k^i, z_{0:k-1})}{\pi^2(x_{k+1} | x_{0:k}^i, z_{0:k})} \pi(x_{k+1} | x_{0:k}^i, z_{0:k}) dx_{k+1} \\ &\quad - (\omega_k^i)^2 p^2(z_k | x_k^i, z_{0:k-1}), \\ &= (\omega_k^i)^2 \left[\int \frac{p^2(x_{k+1}, z_k | x_k^i, z_{0:k-1})}{\pi(x_{k+1} | x_{0:k}^i, z_{0:k})} dx_{k+1} - p^2(z_k | x_k^i, z_{0:k-1}) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Si se tiene en cuenta que:

$$p(x_{k+1}, z_k | x_k^i, z_{0:k-1}) = p(x_{k+1} | x_k^i, z_{0:k}) p(z_k | x_k^i, z_{0:k-1}), \quad (16)$$

entonces la varianza de los pesos puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \text{VAR}_{\pi(\cdot|x_{0:k}^i, y_{0:k})} [\omega_{k+1}^i] &= (\omega_k^i)^2 \left[\int \frac{p^2(x_{k+1} | x_k^i, z_{0:k})}{\pi(x_{k+1} | x_k^i, z_{0:k})} p^2(z_k | x_k^i, z_{0:k-1}) dx_{k+1} \right. \\ &\quad \left. - p^2(z_k | x_k^i, z_{0:k-1}) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Es fácil ver que si uno elige $\pi(x_{k+1} | x_{0:k}^i, z_{0:k}) = p(x_{k+1} | x_k^i, z_{0:k})$, entonces la integral en la ecuación (17) iguala al segundo término en la expresión, y la varianza

de los pesos de importancia es cero. Si se utiliza la función de importancia óptima, entonces la expresión para el cálculo recursivo de los pesos de importancia de predicción es:

$$\omega_{k+1} = \omega_k p(z_k | x_k, z_{0:k-1}). \quad (18)$$

Es importante observar que la densidad $p(z_k | x_k, z_{0:k-1})$ en la ecuación (18) utilizada para actualizar en el tiempo los pesos de importancia de predicción cuando se utiliza la función de importancia óptima es la misma que se utiliza para actualizar los pesos de importancia de filtrado α_k a partir de los pesos de predicción ω_k .

Ejemplo: Modelos no lineales con ruidos Gaussianos correlacionados

Se considera el siguiente modelo:

$$x_{k+1} = \tilde{f}_k(x_k) + w_k, \quad (19)$$

$$z_k = \tilde{h}_k^T(x_k) + v_k, \quad (20)$$

donde $\tilde{f}_k : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, $\tilde{h}_k : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$, $\tilde{f}_k = f_k^{z_{0:k-1}}$ y $\tilde{h}_k = h_k^{z_{0:k-1}}$ indican una posible dependencia de las funciones del proceso de estados y de medición en el conjunto de observaciones. w_k y v_k son dos ruidos aleatorios Gaussianos conjuntamente distribuidos, con:

$$\mathbb{E} \left\{ \begin{bmatrix} w_k \\ v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_l^T & v_l^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_k & \tilde{S}_k \\ \tilde{S}_k^T & \tilde{R}_k \end{bmatrix} \delta(k, l), \quad (21)$$

donde, nuevamente se ha utilizado la notación: $\tilde{Q}_k = Q_k^{z_{0:k-1}}$, $\tilde{S}_k = S_k^{z_{0:k-1}}$ y $\tilde{R}_k = R_k^{z_{0:k-1}}$ para indicar una posible dependencia de la matriz de covarianza en las observaciones.

La ley de evolución del sistema puede ser escrita en forma probabilística como:

$$p(x_{k+1}, z_k | x_k, z_{0:k-1}) = \mathcal{N}(m_k, \Sigma_k), \quad (22)$$

$$m_k = \begin{bmatrix} \mu_{x_k} \\ \mu_{z_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_k(x_k) \\ \tilde{h}_k(x_k) \end{bmatrix}, \quad \Sigma_k = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_k & \tilde{S}_k \\ \tilde{S}_k^T & \tilde{R}_k \end{bmatrix}.$$

La función de importancia óptima para este modelo está dada por:

$$p(x_{k+1} | x_k, z_{0:k}) \sim \mathcal{N}(\tilde{\mu}_{x_k}, \tilde{\Sigma}_k), \quad (23)$$

$$\tilde{\mu}_{x_k} = \mu_{x_k} + \tilde{S}_k \tilde{R}_k^{-1} (z_k - \mu_{z_k}),$$

$$\tilde{\Sigma}_k = \tilde{Q}_k - \tilde{S}_k \tilde{R}_k^{-1} \tilde{S}_k^T.$$

Y la distribución necesaria para calcular los pesos de predicción es:

$$p(z_k | x_k, z_{0:k-1}) \sim \mathcal{N}(\mu_{z_k}, \tilde{R}_k). \quad (24)$$

4. Simulaciones

Se aplica el método desarrollado en este trabajo a un modelo no lineal clásico. Se proponen dos casos: El primero, con independencia condicional entre el proceso de estados y la medición actual, dado el estado actual, con el propósito de comparar el algoritmo propuesto con el filtro de partículas clásico. En el segundo caso, se supone que existe una correlación entre el estado siguiente y la medición actual, dado el estado actual. Se realizan $M = 1000$ simulaciones de longitud $n = 500$. Para comparar los algoritmos, se evalúa la desviación estándar empírica tanto para la estimación del estado predicho $\hat{x}_{k+1/k} = \mathbf{E}[x_{k+1}|z_{0:k}]$ como para el filtrado $\hat{x}_{k/k} = \mathbf{E}[x_k|z_{0:k}]$, ver [9]. La etapa de remuestreo se aplica cuando $\widehat{N}_{eff} < N_{thres} = N/3$.

Este ejemplo ha sido analizado previamente en varias publicaciones, considerando que los ruidos del proceso de estados y de medición son independientes: [9] [8] [3]. Se tiene el siguiente modelo:

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + w_k; \quad f_k(x_k) = \frac{1}{2}x_k + 25\frac{x_k}{1+(x_k)^2} + 8\cos(1,2k), \quad (25)$$

$$z_k = h_k(x_k) + v_k; \quad h_k(x_k) = \frac{(x_k)^2}{20}, \quad (26)$$

donde $x_0 \sim \mathcal{N}(0, 5)$, w_k y v_k son dos ruidos aleatorios Gaussianos conjuntamente distribuidos, con:

$$\mathbb{E} \left\{ \begin{bmatrix} w_k \\ v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_l^T & v_l^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q_k & S_k \\ S_k^T & R_k \end{bmatrix} \delta(k, l), \quad (27)$$

las covarianzas del ruido del proceso y de medición son $Q = 10$ y $R = 1$ respectivamente. En el primer caso analizado, donde no existe correlación entre ambos ruidos, $S_k = 0$; y en el segundo, donde se supone que existe una dependencia condicional, $S_k = \sqrt{QR}/2$.

Para el filtro de partículas clásico, se aplica el algoritmo SIS con función de importancia obtenida por una linealización local, presentado en [9]. En el caso del filtro de partículas desarrollado se aplica con la función de importancia óptima hallada. La misma es la siguiente:

$$p(x_{k+1}|x_k, z_{0:k}) = \mathcal{N}(\tilde{\mu}_{x_k}, \tilde{\Sigma}_k), \quad (28)$$

$$\tilde{\mu}_{x_k} = f_k(x_k) + S_k R_k [z_k - h_k(x_k)], \quad \tilde{\Sigma}_k = Q_k - S_k R_k^{-1} S_k^T.$$

Y la FDP asociada para actualizar los pesos de importancia de predicción recursivamente, así como también los de filtrado es:

$$p(z_k|x_k, z_{0:k-1}) \sim \mathcal{N}(h(x_k), R_k). \quad (29)$$

Resultados

Los resultados obtenidos para la desviación estándar empírica hallados para el caso donde la correlación de los ruidos es nula, $S = 0$ se muestran en la tabla

1 utilizando diferentes números de partículas. En la tabla 2 se muestran los resultados obtenidos utilizando ambos filtros con diferentes números de partículas par el caso donde los ruidos están correlacionados, $S = \sqrt{QR}/2$.

Partículas	$\sqrt{VAR}(x_{k k})$		$\sqrt{VAR}(x_{k+1 k})$	
	PF clásico	PF propuesto	PF clásico	PF propuesto
1000	4.4006	4.4744	7.1520	7.2083
5000	4.3496	4.3422	7.1266	7.1250
10000	4.3403	4.3282	7.1211	7.1144
50000	4.3281	4.3125	7.1160	7.1058

Cuadro 1. Desviación estándar empírica obtenida para la estimación del estado predicho y filtrado con el filtro de partículas clásico y el propuesto con ruidos descorrelacionados.

Partículas	$\sqrt{VAR}(x_{k k})$		$\sqrt{VAR}(x_{k+1 k})$	
	PF clásico	PF propuesto	PF clásico	PF propuesto
1000	4.4122	4.4312	7.1454	7.1144
5000	4.3473	4.1807	7.1139	6.9597
10000	4.3439	4.1540	7.1160	6.9453
50000	4.3232	4.1299	7.1068	6.9293

Cuadro 2. Desviación estándar empírica obtenida para la estimación del estado predicho y filtrado con el filtro de partículas clásico y el propuesto con ruidos correlacionados.

En el caso en el cual no existe correlación se observa que las desviaciones obtenidas tanto para la estimación del estado predicho como para el filtrado, excepto en el caso en donde se utilizó 1000 partículas son muy cercanas. Se refleja en estos resultados que la performance del algoritmo propuesto es similar al filtro de partículas clásico para el caso en el cual no hay correlación. Se observa además que la desviación de la estimación del estado por el filtro de partículas clásico es levemente menor que la del propuesto, mientras que para el caso de la predicción es levemente mayor. Esto se debe a que en el algoritmo propuesto se busca estimar primero la FDP de predicción y luego, en base a esta, se estima la de filtrado, mientras que en el enfoque clásico a partir de la estimación obtenida de la FDP de filtrado, se propagan las partículas para hallar una estimación de la de predicción.

Para el caso en el cual se tiene correlación entre los ruidos se observa que, excepto para el caso donde se utilizó 1000 partículas, la performance del algoritmo propuesto es mejor que la del filtro clásico. Para el caso donde se ha utilizado 1000 partículas la varianza de los estimados obtenidos es alta, y a medida que se aumenta el número de partículas la misma se reduce.

En (fig. 1) se muestra la estimación y la predicción del estado junto con el estado verdadero, y y la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE) entre los estados estimados y predichos contra el estado verdadero en (fig. 2).

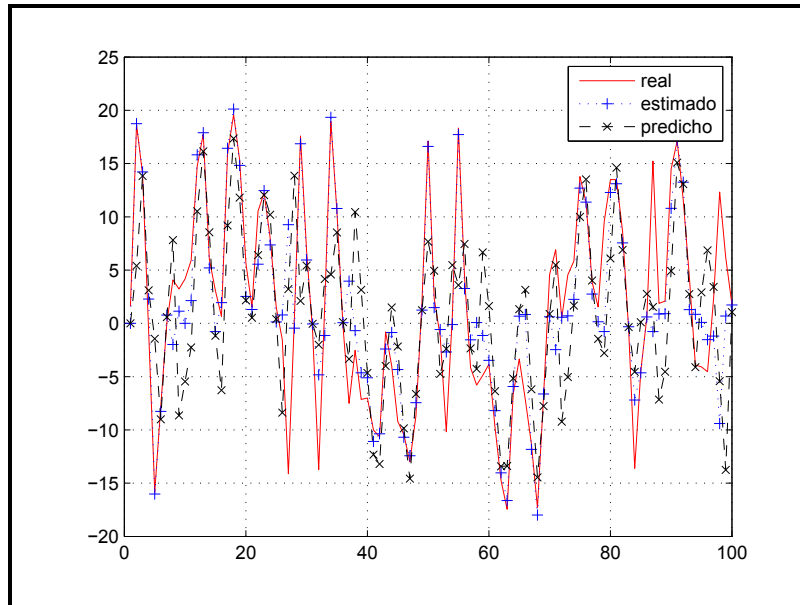


Figura 1. Estado verdadero de x_k , estimado $\hat{x}_{k|k}$ y predicho $\hat{x}_{k|k-1}$ en función de k , obtenidos con el filtro de partículas propuesto con $N = 50,000$ partículas para el modelo con ruidos correlacionados

5. Conclusiones

En base a la teoría del muestreo secuencial se desarrolló un algoritmo recursivo para predecir la distribución de predicción para el modelo introducido, donde se contempla una posible dependencia condicional entre la medición actual y el estado siguiente, dado el estado actual y el conjunto de mediciones pasadas. Y a partir de esta distribución de predicción hallada, se actualiza la misma cuando se posee la medición en ese instante de tiempo y se obtiene la de filtrado.

Para este modelo se presentó la función de importancia óptima que minimiza la varianza de los pesos. Además, se calculó dicha función de importancia para modelos en los cuales tanto la ecuación de medición como la de evolución de estados son posiblemente no lineales, con ruidos aditivos de distribución Gaussiana conjunta. Estos modelos se encuentran en aplicaciones de procesamiento de señales e imágenes, y seguimiento puntual de objetivos entre otros.

Con el fin de evaluar el método propuesto se realizaron simulaciones para un modelo no lineal clásico. Se comprobó que la performance del mismo cuando

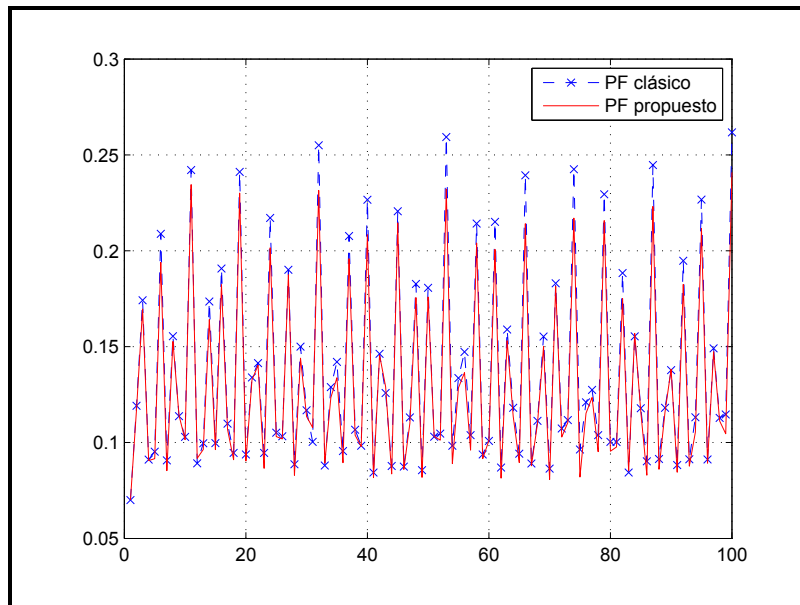


Figura 2. Comparación de L RMSE entre el estado verdadero y el estimado, y el verdadero y el predicho, obtenidos con el filtro de partículas propuesto con $N = 50,000$ partículas para el modelo con ruidos correlacionados

no existe dependencia condicional es comparable con la del enfoque clásico, y cuando los ruidos están conrrelacionados los estimados obtenidos por el método propuesto presentan una varianza menor a los obtenidos por el filtrado clásico. Los resultados obtenidos confirman las expectativas del método propuesto.

Referencias

1. Anderson, B.D.O., Moore, J.B.: Optimal Filtering. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1979)
2. Kalman, R.E.: A new approach to linear filtering and prediction problems. Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering (1960) 35–45
3. Gordon, N., Salmond, D., Smith, A.: Novel approach to nonlinear/non-gaussian bayesian state estimation. Radar and Signal Processing, IEE Proceedings F **140**(2) (Apr 1993) 107–113
4. Arnaud, E., Mémín, E., Cernuschi-Frias, B.: Conditional filters for image sequence-based tracking - application to point tracking. IEEE Transactions on Image Processing **14**(1) (Jan. 2005) 63–79
5. Arnaud, E., Mémín, E.: Partial linear gaussian models for tracking in image sequences using sequential monte carlo methods. International Journal of Computer Vision **74**(1) (2007) 75–102
6. Gadze, P., Cernuschi-Frías, B.: Prediction using particle filters and hmm models with correlated measure and dynamic noises. In: XVIII Reunión de Trabajo en

- Procesamiento de la Información y Control, Rosario, Argentina (Sept. 2009) 547–552
7. Doucet, A., de Freitas, N., Gordon, N.: Sequential Monte Carlo Methods in Practice. Springer-Verlag, New York (2001)
 8. Arulampalam, M., Maskell, S., Gordon, N., Clapp, T.: A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking. *IEEE Trans. on Signal Processing* **50**(2) (Feb 2002) 174–188
 9. Doucet, A., Godsill, S., Andrieu, C.: On sequential monte carlo sampling methods for bayesian filtering. *Statistics and Computing* **10**(3) (2000) 197–208
 10. Geweke, J.: Bayesian inference in econometric models using monte carlo integration. *Econometrica* **57**(6) (1989) 1317–1339
 11. Kong, A., Liu, J., Wong, W.: Sequential imputations and bayesian missing data problems. *American Statistical Association* **89** (1994) 278–288
 12. Hol, J.D.: Resampling in particle filters. Technical Report LiTH-ISY-EX-ET-0283-2004, Linköping University, Department of Electrical Engineering (2004)