

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Сумський державний університет
Факультет технічних систем та енергоефективних технологій
Кафедра комп'ютерної механіки імені Володимира Марцинковського

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

_____ Андрій ЗАГОРУЛЬКО
(підпис)

_____ 2023 р.

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на здобуття освітнього ступеня бакалавр

зі спеціальності 131 Прикладна механіка, освітньо-професійної програми «Комп'ютерний інжиніринг в механіці», на тему: Застосування зваженого методу найменших квадратів для оцінювання параметрів математичних моделей коливань ротора.

Здобувача групи КМ-91-1 ПОКИДЧЕНКА Єгора Володимировича.

Кваліфікаційна робота містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ Єгор ПОКИДЧЕНКО
(підпис)

Керівник: професор, д.т.н., професор Іван ПАВЛЕНКО _____
(підпис)

АНОТАЦІЯ

Структура та обсяг кваліфікаційної роботи бакалавра складається зі вступу, 4 розділів, загальних висновків, списку використаних джерел, що містить 73 найменувань. Загальний обсяг бакалаврської роботи становить 52 стор., 7 рисунків, списку використаних джерел обсягом 6 сторінок.

Перманентне підвищення робочих параметрів роторних машин пов'язане із сучасними викликами щодо інтенсифікації робочих процесів у машинах і апаратах. При цьому актуальною постає проблема забезпечення вібраційної надійності роторних машин як одних з найбільш уживаних у сучасному високотехнологічному виробництві. При цьому коливання роторів є однією з основних проблем динаміки роторних машин. Застосування достовірних математичних моделей вільних і вимушених коливань дозволяє ефективно контролювати та прогнозувати вібраційні характеристики ротора.

Об'єктом дослідження є вібраційні процеси у роторних машинах та їх математичні моделі коливань.

Метою дослідження є удосконалення підходів щодо застосування методу найменших квадратів у формі псевдоінверсії Мура–Пенроуза при оцінюванні параметрів математичних моделей коливань ротора.

Основні завдання дослідження полягають у визначенні вхідних даних та параметрів математичної моделі, розроблені процедури оцінювання параметрів моделі з використанням зваженого методу найменших квадратів та аналізі результатів оцінювання порівняно з традиційним методом найменших квадратів.

ЗМІСТ

	С.
ВСТУП	6
1 ЛІТЕРАТУРНИЙ АНАЛІЗ	6
1.1 Актуальність теми.....	6
1.2 Історія дослідження та розвитку	6
1.3 Загальні методи дослідження.....	9
2 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ КОЛИВАНЬ РОТОРА.....	11
2.1 Поняття та види коливань ротора	11
2.2 Моделі коливань роторів.....	15
2.3 Вплив параметрів на динаміку коливань ротора	17
3 МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ: ОГЛЯД ТА АНАЛІЗ	20
3.1 Концепція методу найменших квадратів.....	20
3.2 Концепція зваженого методу найменших квадратів	25
3.3 Зважений метод найменших квадратів для оцінки параметрів у структурованих моделях	28
4 ЗАСТОСУВАННЯ ЗВАЖЕНОГО МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ ІНЕРЦІЙНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИСКРЕТНО-МАСОВОЇ МОДЕЛІ КОЛИВАНЬ РОТОРА	38
4.1. Модель дискретних мас для аналізу вільних коливань роторів	38
4.2 Застосування зваженого методу найменших квадратів	40
4.3 Результат числового моделювання	41
ВИСНОВКИ	44
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	45
ДОДАТОК А (обов'язковий) – Комп'ютерна програма розрахунку динаміки ротора із застосуванням зваженого методу найменших квадратів.....	51

ВСТУП

У сучасному світі, де технології постійно розвиваються і машинобудування набуває все більшої важливості, питання моніторингу вібраційного стану ротора є важливою науково-практичною проблемою. Коливання ротора в машинобудуванні можуть призвести до серйозних наслідків, включаючи збій обладнання, шум і вібрацію, що призводить до зниження ефективності та продуктивності технологічних систем. Саме тому вивчення і управління коливаннями ротора є важливим аспектом в області комп'ютерного інжинірингу в механіці.

Дипломна робота зосереджується на застосуванні зваженого методу найменших квадратів для оцінювання параметрів математичних моделей коливань ротора. Традиційний метод найменших квадратів є загальноприйнятим статистичним інструментарієм для визначення кращої кривої відповідності при апроксимації набору даних шляхом мінімізації сумарного квадратичного відхилення. Застосування цього методу до коливань ротора може допомогти у визначенні ключових параметрів, що впливають на динаміку коливань, і таким чином дозволити більш ефективно управління відповідними процесами.

Робота організована у такий спосіб, щоб одержати чітке розуміння теорії коливань ротора, модифікованого методу найменших квадратів, а також як ці два концепти можуть бути поєднані для ефективного аналізу та моніторингу коливань ротора. Результати роботи можуть бути використаними у сучасній області механічної інженерії.

1 ЛІТЕРАТУРНИЙ АНАЛІЗ

1.1 Актуальність теми

Актуальність даної теми полягає в її безпосередньому впливі на ефективність і довговічність машин і обладнання, що використовуються в різних галузях промисловості. Ротори є важливими складовими багатьох механічних систем, включаючи двигуни, генератори, компресори, турбіни і багато інших. Неконтрольовані коливання ротора можуть призвести до прискореного зносу, несправностей, а в крайньому випадку – до катастрофічних відмов.

Використання методу найменших квадратів для аналізу і оцінювання параметрів коливань ротора може допомогти у виявленні і прогнозуванні потенційних проблем, що можуть виникнути в результаті цих коливань. Це включає в себе розробку ефективних стратегій управління, що можуть знизити або навіть усунути негативні наслідки таких коливань.

Враховуючи неперервний розвиток технологій, а також все більше залучення високоефективних машин та обладнання в промисловість, тема управління коливаннями ротора стає все актуальнішою. Науковий досвід, отриманий під час роботи над цією темою, може мати значне практичне застосування та значно покращити ефективність і довговічність машин та обладнання в різних галузях промисловості.

1.2 Історія дослідження та розвитку

Математичне моделювання коливань ротора має довгу історію, що витягується до попередніх століть. Початки цього дослідження можна віднести до 18-го століття, коли Леонард Ейлер і Карл Фрідріх Гаусс розробили перші підходи до моделювання коливань та розв'язання математичних рівнянь, які описують ці коливання.

Леонард Ейлер, відомий математик, в 1749 році опублікував свою роботу "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes" (с англ. Метод знаходження кривих з максимальними та мінімальними властивостями). У цій роботі Ейлер розглянував проблему оптимізації траєкторій, що мають максимальну або мінімальну властивість. Цей підхід був першим кроком у розвитку математичного моделювання коливань [1].

Карл Фрідріх Гаусс, відомий німецький математик, у 19-му столітті вніс вагомий внесок у розвиток математичного моделювання коливань ротора. У своїй роботі "Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium" (Теорія руху небесних тіл в конічних секціях, що оточують Сонце), він представив метод найменших квадратів. Цей метод дозволяє знаходити найкращі значення параметрів моделі, що найточніше відповідають спостережуваним даним. Застосування методу найменших квадратів стало важливим етапом у вдосконаленні математичних моделей коливань ротора [2].

У 19-му та 20-му століттях вчені і інженери продовжили дослідження в галузі математичних моделей коливань ротора, спрямоване на поліпшення точності та надійності моделей. Деякі з ранніх досліджень в цій області включають роботу Едварда Раута, який у 1877 році опублікував "A Treatise on the Dynamics of the System of Rigid Bodies. The Advanced Part" (Трактат про динаміку системи твердих тіл. Розширена частина.). Ця робота розглядала динаміку руху твердих тіл, включаючи ротори, і стала фундаментом для подальшого розвитку математичних моделей ротора [3].

У ХХ столітті відбулися важливі кроки в розвитку математичного моделювання коливань ротора. Наприклад, в 1944 році Нільс Отто Миклестад представив новий метод розрахунку природних режимів коливань для кораблів у своїй статті "A New Method of Calculating Natural Modes of Vibration for Ships" (Новий метод розрахунку природних мод

коливань). [4]. Цей метод дозволив більш точно аналізувати коливання кораблів і впливати на їх стабільність та безпеку.

У 1945 році Морріс Альберт Проль розробив загальний метод для розрахунку критичних швидкостей гнучких роторів у своїй статті "A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors" (Загальний метод розрахунку критичних швидкостей гнучких роторів) [5]. Цей метод став основою для оцінки безпеки та ефективності роторів у різних умовах роботи.

В сучасних дослідженнях в галузі математичних моделей коливань ротора використовуються нові підходи та методи. Наприклад, в 2006 році Житеш Кумар Сінха, Алан У. Ліз та Майкл Фрісвелл провели дослідження з використанням генетичних алгоритмів для оцінки відповіді ротора на незбалансоване навантаження у статті "Estimation of Unbalance Response of a Rotor-Bearing System Using a Genetic Algorithm" (Оцінка відповіді на незбалансованість системи ротор-підшипник за допомогою генетичного алгоритму) [6]. Цей підхід використовує еволюційні алгоритми для знаходження оптимальних параметрів моделей коливань ротора. Використання генетичних алгоритмів дозволяє отримати більш точні та оптимальні результати, що сприяє поліпшенню контролю та прогнозування коливань ротора.

Сучасні дослідження також активно використовують чисельні методи, такі як метод скінченних елементів і метод скінченних різниць, для моделювання коливань ротора. Ці методи дозволяють враховувати складні геометричні та матеріальні властивості ротора, а також розглядати взаємодію з навколишнім середовищем та структурами.

Загальна тенденція в дослідженні математичних моделей коливань ротора полягає в постійному розвитку та вдосконаленні методів і підходів. Дослідники працюють над удосконаленням точності та ефективності

моделей, враховуючи різноманітні фактори, які впливають на коливання ротора, такі як втрати енергії, нестабільність, зношування матеріалів тощо.

1.3 Загальні методи дослідження

У дослідженні коливань ротора та вивченні його параметрів застосовуються різноманітні методи, які дозволяють отримати детальне розуміння його поведінки та впливу на систему в цілому. Нижче наведено докладний перелік загальних методів дослідження, які використовуються у цій області, з посиланнями на відповідну літературу:

- Експериментальні методи:

- Вимірювання вібраційних характеристик: використання вібродатчиків та інших приладів для вимірювання амплітуди, частоти, форми коливань ротора. Цей метод дозволяє отримати реальні дані про коливання ротора в різних умовах роботи [7]. Збір та аналіз даних про вібрації є основою для подальшого розуміння динаміки ротора.

- Балансування: методи компенсації дисбалансу ротора за допомогою налаштування маси або геометричних параметрів. Цей підхід дозволяє знизити неконтрольовані вібрації та покращити роботу ротора шляхом усунення дисбалансу [8].

- Модальний аналіз: визначення модальних параметрів ротора, таких як власні частоти та форми коливань, за допомогою вимірювань та аналізу. Цей метод дозволяє встановити характеристики головних резонансних режимів коливань ротора та ідентифікувати можливі проблеми з його структурою [9].

- Аналітичні методи:

- Метод найменших квадратів є потужним інструментом для апроксимації параметрів математичних моделей коливань ротора. Він базується на мінімізації розбіжності між спостережуваними значеннями коливань та розрахованими значеннями, враховуючи вагомість кожного окремого

виміру. Застосування зваженого методу найменших квадратів дозволяє отримати більш точні результати оцінювання параметрів моделі та знизити вплив випадкових вимірювань та шуму на результати [10].

- Числові методи:

- Методи розв'язання диференціальних рівнянь: використання чисельних методів, таких як метод Рунге-Кутти чи метод скінченних різниць, для апроксимації та розв'язання диференціальних рівнянь, що описують динаміку коливань ротора. Цей підхід дозволяє моделювати та аналізувати різні сценарії коливань та їх вплив на ротор [11].

- Системи автоматичного контролю:

- Використання систем автоматичного контролю для моніторингу та регулювання параметрів ротора з метою підтримання стабільної роботи. Ці системи дозволяють в реальному часі виявляти аномалії у коливаннях ротора та вживати необхідні заходи для забезпечення його безпеки та ефективності [12].

- Методи оптимізації:

- Використання методів оптимізації для пошуку оптимальних параметрів ротора з метою досягнення максимальної ефективності та мінімізації коливань. Ці методи дозволяють визначити оптимальні значення параметрів ротора, такі як маса, геометрія, жорсткість тощо, для досягнення вищої продуктивності та зниження коливань [13].

Ці методи дослідження надають різні підходи до аналізу коливань отримати більш повне розуміння динаміки ротора та розробити ефективні стратегії контролю та управління для забезпечення стабільної та безпечної роботи промислових систем.

2 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ КОЛИВАНЬ РОТОРА

2.1 Поняття та види коливань ротора

Коливання ротора можна описати як періодичні зміни положення ротора відносно його статичного або рівноважного положення. Вони можуть мати різні причини, такі як невірноваженість мас, механічні нерівності, нестійкість системи, взаємодія зовнішніх сил тощо. Коливання ротора можуть мати великий вплив на роботу роторних систем, викликаючи знос, пошкодження компонентів, негативний вплив на ефективність та життєвий цикл системи [14].

Поздовжні коливання відбуваються вздовж осі руху ротора. Вони характеризуються зміною положення ротора вздовж вісі зі зміною часу. Ці коливання можуть мати серйозні наслідки для роботи роторної системи, зокрема спричиняти пошкодження підшипників, зміни у динамічних характеристиках системи та збої в роботі. Для ефективного контролю поздовжніх коливань ротора використовуються різні методи, такі як балансування ротора, контроль параметрів системи та моніторинг стану підшипників [15].

Поперечні коливання відбуваються перпендикулярно до осі руху ротора. Вони характеризуються зміною положення ротора в поперечному напрямку зі зміною часу. Поперечні коливання можуть бути викликані невірноваженістю ротора, нестійкістю системи, впливом динамічних навантажень та іншими факторами. Ці коливання можуть призвести до контакту між ротором та статором, пошкодження елементів системи, зменшення ефективності та стабільності ротора. Контроль поперечних коливань ротора може включати балансування, динамічний аналіз та використання амортизаторів для поглинання вібрацій [15].

Комбіновані коливання є комбінацією поздовжніх та поперечних коливань ротора. Вони характеризуються одночасним рухом ротора вздовж

і перпендикулярно до його осі. Комбіновані коливання можуть мати складну форму та залежать від численних факторів, таких як параметри системи, навантаження та умови експлуатації. Для аналізу та контролю комбінованих коливань можуть використовуватися різноманітні методи, включаючи моделювання системи, експериментальні вимірювання та оптимізацію параметрів системи [15].

В подальшому, досліджуючи коливання ротора, ми можемо виділити декілька типів коливань залежно від їх характеристик та причин.

Фізичні причини, що призводять до коливань ротора, можуть бути різноманітні і включати такі фактори, як незбалансованість, динамічні навантаження, резонанс та інші. Давайте розглянемо ці причини детальніше:

- **Незбалансованість:** Незбалансованість ротора виникає, коли центр мас ротора не співпадає з його осі обертання. Це може бути наслідком неправильного розміщення або нерівномірного розподілу маси на роторі. Незбалансованість створює радіальну силу, яка призводить до коливань ротора. Ці коливання можуть бути поздовжніми або поперечними, залежно від геометрії системи [16-18].

- **Динамічні навантаження:** Динамічні навантаження включають змінні сили або моменти, що діють на ротор під час роботи системи. Наприклад, це можуть бути нерівномірні гідравлічні або пневматичні тиски, нерівномірне навантаження на лопатках турбіни, вплив навантаження на ротор електродвигуна тощо. Динамічні навантаження створюють змінні сили, які можуть викликати коливання ротора в різних напрямках [16-18].

- **Резонанс:** Резонанс виникає, коли частота зовнішнього впливу або внутрішніх коливань наближається до власної частоти системи. Це може призвести до підсилення коливань ротора, що може мати негативний вплив на його стійкість та роботу. Резонанс може виникнути внаслідок н

евирівноваженості, динамічних навантажень або впливу зовнішніх сил [16-18].

- **Нестійкість системи:** Нестійкість системи може призводити до самопоширення коливань ротора. Це може бути наслідком неправильної жорсткості системи, недостатньої амортизації, неправильного контролю системи або несумісності параметрів системи. Нестійкість може спричиняти появу незбалансованих коливань та руйнування ротора [16-18].

- **Вплив зовнішніх факторів:** Коливання ротора також можуть бути викликані зовнішніми факторами, такими як вітрові навантаження, гідродинамічний тиск, термальні напруги тощо. Ці фактори можуть спричиняти додаткові коливання та впливати на роботу роторної системи [16-18].

Після огляду поняття та видів коливань ротора, можна перейти до обговорення параметрів, які характеризують ці коливання. Вимірювання та аналіз цих параметрів дозволяють отримати детальнішу інформацію про динаміку коливань ротора і зрозуміти їхні властивості та вплив на систему. Основні параметри коливань ротора включають:

- **Амплітуда:** Амплітуда коливань ротора визначає максимальне відхилення ротора від його рівноважного або статичного положення. Вимірюється в одиницях довжини (наприклад, міліметрах або мікрометрах) і вказує на величину коливань ротора [16-18].

- **Частота:** Частота коливань ротора визначає кількість повних циклів коливань, що відбуваються протягом одного секунди. Вимірюється в герцах (Гц) і характеризує швидкість зміни коливань ротора. Важливо визначити натуральну частоту системи, яка може відповідати одній з мод коливань ротора [16-18].

- **Фаза:** Фаза коливань ротора вказує на положення ротора у своєму циклі коливань. Вимірюється в градусах або радіанах і дозволяє встановити,

наскільки відстає або випереджає ротор від початкового положення коливань [16-18].

- **Резонанс:** Резонанс визначає ту частоту, при якій ротор набуває найбільшої амплітуди коливань. Резонанс може виникати, коли зовнішня частота наближається до власної частоти системи. Важливо відстежувати наявність резонансу, оскільки це може призвести до посилення коливань і негативно позначитися на роботі ротора та його елементів [16-18].

- **Амплітудно-частотна характеристика** відображає залежність амплітуди коливань ротора від частоти. Амплітудно-частотна характеристика може допомогти встановити режими роботи ротора, діапазони частот, на яких відбуваються великі коливання, а також зони, де резонанс виникає [16-18].

Ці параметри коливань ротора є важливими для вимірювання, аналізу та контролю динаміки роторної системи. Вони допомагають зрозуміти властивості коливань, виявляти проблемні зони, встановлювати межі безпеки та розробляти стратегії контролю та запобігання небажаним коливанням.

Коливання ротора можуть мати значний вплив на роботу роторної системи, її ефективність, стійкість та тривалість роботи. Розглянемо детальніше можливі наслідки коливань ротора на роботу системи:

- **Знос:** Постійні коливання ротора можуть спричинити знос компонентів системи. Повторювані сили, що виникають під час коливань, можуть призводити до стирання поверхонь, пошкодження підшипників, валів та інших частин системи. Це може призвести до зниження точності, втрати жорсткості та втрати функціональності компонентів [19-21].

- **Пошкодження компонентів:** Коливання ротора можуть створювати ударні навантаження, які можуть пошкодити компоненти системи. При високих амплітудах коливань і низькій жорсткості системи може виникати контакт між ротором та статором, що може призвести до пошкоджень

лопаток, обмоток, втулок тощо. Пошкодження компонентів може призвести до втрати продуктивності системи, виходу з ладу та необхідності проведення ремонтних робіт [19-21].

- Втрати продуктивності: Коливання ротора можуть призводити до зміни динамічних характеристик системи. Наприклад, збільшення амплітуди коливань може призвести до зміни частоти резонансу системи, що впливає на її стійкість та ефективність. Коливання також можуть впливати на точність і стабільність роботи системи, зокрема для систем, що вимагають високої точності, наприклад, обчислювальної техніки або оптичних систем [19-21].

- Втрата енергії: Коливання ротора можуть призводити до втрати енергії. Повторювані рухи ротора витрачають енергію на пружні та демпфувальні сили, що може призводити до зниження ефективності системи. Це може виявитися в збільшенні енергоспоживання, погіршенні експлуатаційних показників та скороченні тривалості роботи системи [19-21]

Отже, коливання ротора можуть мати негативний вплив на роботу роторної системи. Знос, пошкодження компонентів, втрати продуктивності та втрати енергії є лише деякими з можливих проблем, які можуть виникнути внаслідок коливань ротора. Контроль коливань, балансування, аналіз динамічних характеристик та використання амортизаторів можуть бути застосовані для зменшення впливу коливань та покращення роботи системи.

2.2 Моделі коливань роторів

Математичне моделювання відіграє надзвичайно важливу роль у передбаченні та контролі коливань ротора, що становить ключовий аспект у багатьох технічних системах. Застосування математичних моделей дозволяє нам не лише розуміти й прогнозувати різноманітні типи коливань,

які можуть виникати в роторі, але й розробляти ефективні стратегії контролю для запобігання небажаним наслідкам [9, 14].

Один з ключових аспектів математичного моделювання ротора полягає в аналізі його динаміки. За допомогою різних математичних методів, таких як теорія коливань, динаміка систем та чисельні методи, можна створити модель, що описує рух ротора під впливом зовнішніх сил та внутрішніх взаємодій. Це дає нам змогу досліджувати та аналізувати поведінку ротора в різних умовах та з різними параметрами [9, 14].

Однією з основних переваг математичного моделювання є його гнучкість у виконанні передбачень з різною точністю, в залежності від складності моделі. Це дає змогу інженерам та науковцям проводити віртуальні експерименти, варіюючи параметри та умови, що допомагає економити час та ресурси, які були б витрачені при проведенні фізичних експериментів [22].

Крім того, математичне моделювання дозволяє визначити критичні параметри, що можуть призводити до небажаних коливань та поломки ротора. Це важлива інформація, яка дозволяє розробляти ефективні стратегії контролю з метою запобігти цим проблемам. Наприклад, на основі математичних моделей можна розробити алгоритми активного керування, які здатні реагувати на зміни у динаміці ротора та забезпечувати стабільну роботу системи [22].

При цьому для опису коливань ротора використовуються різні математичні моделі, такі як моделі на основі диференціальних рівнянь, матричні моделі, моделі на основі методу скінченних елементів та інші числові методи [19, 21]. Кожна модель має свої особливості та обмеження, але загалом враховуються такі фактори, як маса ротора, жорсткість підвіски, тертя та інші [19, 21].

Усі ці моделі враховують різні фактори, такі як маса ротора, жорсткість підвіски, тертя та інші. Наприклад, маса ротора може бути

врахована як розподілені масові елементи або матриці мас у моделях на основі диференціальних рівнянь та матричних моделях відповідно. Жорсткість підвіски враховується за допомогою пружних елементів або матриць жорсткості, а тертя може бути враховане через відповідні коефіцієнти тертя. Інші фактори, такі як вплив зовнішніх сил, неоднорідності матеріалів, геометричні особливості та інші, також можуть бути враховані залежно від конкретної моделі та потреб дослідження [22].

Загалом, математичне моделювання ротора дозволяє нам отримувати важливі знання про його коливання та розробляти ефективні стратегії контролю, що забезпечують стабільну роботу технічних систем. Використання різних математичних методів та моделей допомагає нам отримати більш детальні та точні результати, що сприяє покращенню безпеки та надійності роторів у різних галузях техніки та промисловості.

2.3 Вплив параметрів на динаміку коливань ротора

Зважаючи на важливість параметрів у динаміці коливань ротора, детальний аналіз кожного з них є важливим для розуміння і керування коливаннями ротора. Розглянемо деталізованіше вплив основних параметрів на динаміку коливань ротора:

- **Маса ротора:** Маса ротора впливає на його динаміку через масову інерцію. Збільшення маси ротора зазвичай знижує власні частоти коливань, оскільки більша маса вимагає більше часу для зміни руху. Це може призвести до зниження частот дискретних коливань та збільшення амплітуд коливань. При проектуванні ротора необхідно забезпечити оптимальну масу, забезпечуючи потрібну жорсткість та динамічну стійкість[23].

- **Жорсткість ротора:** Жорсткість ротора визначає його стійкість та власні частоти коливань. Збільшення жорсткості ротора призводить до збільшення власних частот, оскільки ротор відповідає швидше на зовнішні

зміни. Більша жорсткість також знижує амплітуди коливань. Зменшення жорсткості може мати зворотні наслідки, збільшуючи амплітуди коливань та зсув власних частот. Правильна настройка жорсткості ротора є важливим аспектом для досягнення стійкої роботи системи [24].

- Демпфування: Наявність демпфування в системі впливає на затухання коливань. Демпфування може бути внутрішнім або зовнішнім. Внутрішнє демпфування забезпечується матеріалами, властивостями підшипників та елементами системи. Зовнішнє демпфування може бути застосований шляхом використання спеціальних демпферів або амортизаторів. Демпфування зменшує амплітуди коливань та сприяє затуханню коливань, запобігаючи резонансам та небажаним динамічним явищам [25].

- Міжосьова жорсткість та демпфування: Міжосьова жорсткість та демпфування визначають взаємодію між ротором і підвіскою. Вони впливають на передачу навантаження між валом і підвіскою та можуть впливати на стійкість та динаміку коливань. Міжосьова жорсткість забезпечує стійку передачу моменту між ротором і підвіскою. Міжосьовий демпфування допомагає зменшити амплітуди коливань і поліпшити стійкість системи [26].

- Несиметрія та неоднорідність: Навіть невеликі відхилення від симетрії ротора або неоднорідність в розподілі маси та жорсткості можуть впливати на динаміку коливань. Несиметрія може створювати додаткові моди коливань, зміщувати власні частоти та впливати на форми коливань. Неоднорідність в розподілі маси та жорсткості може призводити до зсуву власних частот та зміни форм коливань. Уникнення несиметрії та неоднорідності є важливим при проектуванні ротора [27].

- Зовнішні сили: Зовнішні сили, які діють на ротор, можуть бути навантаженнями, які змінюються з часом, або статичними навантаженнями. Наприклад, нерівномірне навантаження, гідродинамічний тиск або магнітні

сили можуть створювати додаткові коливання та резонанси в системі ротора. Розрахунок та аналіз зовнішніх сил є важливим для визначення впливу цих факторів на динаміку коливань ротора [28].

- Параметри підшипників: Характеристики підшипників, такі як жорсткість, демпфування та статична навантаженість, також впливають на динаміку коливань ротора. Жорсткість підшипників визначає їхню здатність переносити навантаження та впливає на власні частоти коливань. Демпфування підшипників впливає на амплітуди коливань та затухання. Оптимальний вибір та настройка підшипників важливі для забезпечення стабільної та ефективної роботи ротора [29].

Цей детальний аналіз параметрів допомагає розуміти їх вплив на динаміку коливань ротора і вибрати оптимальні параметри при проектуванні та управлінні роторною системою.

3 МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ: ОГЛЯД ТА АНАЛІЗ

3.1 Концепція методу найменших квадратів

Метод найменших квадратів є стандартним підходом у регресійному аналізі для наближення розв'язку перевизначених систем (наборів рівнянь, у яких більше рівнянь, ніж невідомих) шляхом мінімізації суми квадратів залишків. Залишок - це різниця між спостереженим значенням і підігнаним значенням, наданим моделлю [30].

Метод найменших квадратів шукає такі значення параметрів моделі, щоб мінімізувати суму квадратів залишків. Це означає, що метод найменших квадратів шукає найкращий спосіб підігнати модель до даних шляхом знаходження оптимальних значень параметрів, що найкраще апроксимують дані.

Метод найменших квадратів особливо корисний для підгонки даних. Якщо є значна невизначеність незалежної змінної, проста регресія та метод найменших квадратів можуть стати проблематичними. У таких випадках можуть бути використані альтернативні методи, які враховують помилки у змінних, замість методу найменших квадратів.

Метод найменших квадратів поділяється на дві категорії: лінійні або звичайні найменші квадрати та нелінійні найменші квадрати, залежно від того, чи є залишки лійними для всіх невідомих параметрів. Лінійні проблеми найменших квадратів виникають у статистичному регресійному аналізі, де вони мають закрите рішення. Нелінійні проблеми зазвичай вирішуються за допомогою ітераційного уточнення, де на кожній ітерації система наближається лінійно, і розрахунки подібні в обох випадках.

Метод найменших квадратів може бути використаний для апроксимації дисперсії прогнозу залежної змінної як функції незалежної змінної та відхилень від підігнаної кривої.

У випадку, коли спостереження походять з експоненціального сімейства з тотожністю як його природною достатньою статистикою та виконуються м'які умови (наприклад, для нормального, експоненціального, пуассонівського та біноміального розподілів), стандартизовані оцінки найменших квадратів та оцінки максимальної правдоподібності є ідентичними. Метод найменших квадратів також може бути отриманий як метод оцінки моментів.

Наступне обговорення передбачено переважно у термінах лінійних функцій, але метод найменших квадратів є валідним і практичним для більш загальних класів функцій. Крім того, шляхом ітеративного застосування локальної квадратичної апроксимації до функції правдоподібності (за допомогою інформації Фішера), метод найменших квадратів може бути використаний для підгонки узагальнених лінійних моделей [31].

Метою є налаштування параметрів функції моделі для найкращого підгону до набору даних. Простий набір даних складається з n точок (пари даних) (x_i, y_i) , де x_i є незалежною змінною, а y_i є залежною змінною, значення якої визначається спостереженням. Функція моделі має вигляд $f(x, \beta)$, де m налаштовуваних параметрів зберігаються у векторі β . Метою є знаходження значень параметрів моделі, які "найкраще" підходять до даних. Підгонка моделі до точки даних вимірюється залишком, який визначається різницею між спостережуваним значенням залежної змінної та значенням, передбаченим моделлю:

$$r_i = y_i - f(x_i\beta) \quad (3.1.1)$$

Метод найменших квадратів знаходить оптимальні значення параметрів, мінімізуючи суму квадратів залишків, позначену як S [32]:

$$S = \sum_{i=1}^n r_i^2, \quad (3.1.2)$$

У найпростішому випадку $f(x_i, \beta) = \beta$ а результатом методу найменших квадратів є середнє арифметичне вхідних даних.

Прикладом двовимірної моделі є модель прямої лінії. Позначаючи точку перетину у як β_0 а нахил β_1 , функція моделі :

$$f(x_i, \beta) = \beta_0 + \beta_1 x \quad (3.1.3)$$

Один елемент даних може містити більше однієї незалежної змінної. Наприклад, при підгонці площини до набору вимірювань висоти, площина є функцією двох незалежних змінних, скажімо, x і z . В найзагальнішому випадку може бути одна або більше незалежна змінна і одна або більше залежна змінна в кожній точці даних.

Знизу наведено графік залишків, який ілюструє випадкові коливання навколо значення $r_i = 0$, що свідчить про відповідність лінійній моделі:

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + U_i \quad (3.1.4)$$

U_i є незалежною випадковою змінною.

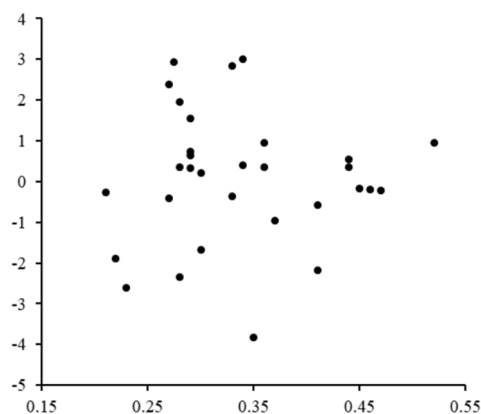


Рис. 3.1.1 — лінійний графік залишків

Залишки відображаються на графіку у відповідності до відповідних значень x . Випадкові коливання навколо значення $r_i = 0$ свідчать про те, що лінійна модель є відповідною.

Якщо точки залишків мають якусь форму і не випадково коливаються, лінійна модель не буде відповідною. Наприклад, якщо графік залишків має параболічну форму, як показано нижче на графіку 3.1.2 то параболічна модель:

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \gamma x_i^2 + U_i \quad (3.1.5)$$

Залишки для параболічної моделі можна обчислити за допомогою формули:

$$r_i = y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i - \hat{\gamma}x_i^2 \quad (3.1.6)$$

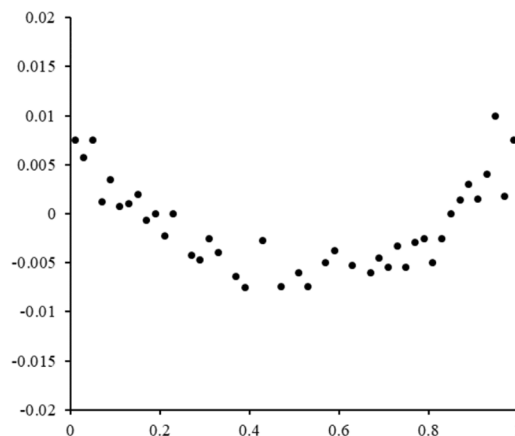


Рис. 3.1.2 — параболічний графік залишків

Залишкові значення подаються у вигляді графіка проти відповідних значень x . Параболічна форма коливань навколо $r_i = 0$ свідчить про відповідність параболічній моделі.

Існують деякі обмеження. Ця формула регресії враховує лише помилки спостереження у залежній змінній (але альтернативна регресія методом найменших квадратів може враховувати помилки в обох змінних). Існують два досить різних контексти з різними наслідками:

- Регресія для прогнозу. У цьому випадку модель підганяється для надання правила прогнозу для застосування у подібній ситуації, до якої застосовуються дані, використані для підгонки моделі. У такому майбутньому застосуванні залежні змінні підлягатимуть тим самим типам помилок спостереження, що й дані, використані для підгонки. Тому логічно використовувати правило прогнозу методу найменших квадратів для таких даних.

- Регресія для підгонки "справжнього зв'язку". У стандартному аналізі регресії, який призводить до підгонки методом найменших квадратів, підразумівається, що помилки у незалежній змінній дорівнюють нулю або строго контролюються таким чином, що їх можна вважати незначними. Коли помилки у незалежній змінній незначні, можна використовувати моделі помилок вимірювання; такі методи можуть привести до оцінок параметрів, перевірки гіпотез та інтервалів довіри, які враховують наявність помилок спостереження у незалежних змінних [32]. Альтернативним підходом є підгонка моделі методом найменших квадратів з урахуванням всіх помилок; це можна розглядати як прагматичний підхід до збалансування ефектів різних джерел помилок при формулюванні цільової функції для використання в підгонці моделі.

Розв'язання задачі найменших квадратів полягає у постановці градієнта рівним нулю для мінімуму суми квадратів. Оскільки модель містить m параметрів, є m рівнянь градієнту:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_j} = 2 \sum_i r_i \frac{\partial r_i}{\partial \beta_j} = 0, j = 1, \dots, m \quad (3.1.7)$$

і оскільки $r_i = y_i - f(x_i, \beta)$, рівняння градієнту приймають такий вигляд:

$$-2 \sum_i r_i \frac{\partial f(x_i, \beta)}{\partial \beta_j} = 0, j = 1, \dots, m \quad (3.1.8)$$

Рівняння градієнту застосовуються до всіх задач найменших квадратів. Кожна конкретна задача вимагає окремих виразів для моделі та її часткових похідних [33].

3.2 Концепція зваженого методу найменших квадратів

Взважений метод найменших квадратів є статистичним методом регресійного аналізу, в якому враховується нерівномірність дисперсій спостережень. У порівнянні зі звичайним методом найменших квадратів, де кожне спостереження має однаковий вплив на оцінку параметрів, взважений метод найменших квадратів надає більшу вагу точкам з меншою дисперсією, що дозволяє отримати більш точні оцінки параметрів моделі. Ваги можуть бути визначені на основі знань про дисперсію або інших факторів, що впливають на надійність спостережень.

Взважений метод найменших квадратів є спеціальним випадком узагальненого методу найменших квадратів і використовується, коли всі поза діагоналлю елементи Ω , матриці коваріації помилок, дорівнюють нулю, а дисперсії спостережень (по діагоналі матриці коваріації) можуть бути нерівними (гетероскедастичність) [34].

Відповідність моделі до точки даних вимірюється її залишком, позначеним як r_i , який визначає різницю між виміряним значенням залежної змінної y_i і значенням, передбаченим моделлю $f(x_i, \beta)$:

$$r_i(\beta) = y_i - f(x_i, \beta) \quad (3.2.1)$$

Якщо помилки є некорельованими та мають однакову дисперсію, то функція:

$$S(\beta) = \sum_i r_i(\beta)^2 \quad (3.2.2)$$

мінімум досягається в точці $\hat{\beta}$, такій що $\frac{\partial S}{\partial \beta_j}(\hat{\beta}) = 0$.

Теорема Гаусса-Маркова показує, що коли це виконується, $\hat{\beta}$ є найкращею лінійною незміщеною оцінкою. Однак, якщо вимірювання є некорельованими, але мають різні похибки, може бути застосований модифікований підхід. Ейткен показав, що коли мінімізується зважена сума квадратів залишків, $\hat{\beta}$ є найкращим лінійним неупередженим оцінювачем, якщо кожна вага дорівнює оберненому значенню дисперсії виміру.

$$S = \sum_{i=1}^n W_{ii} r_i^2, \quad W_{ii} = \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (3.2.3)$$

Гradientні рівняння для цієї суми квадратів мають вигляд:

$$-2 \sum_i W_{ii} \frac{\partial f(x_i, \beta)}{\partial \beta_j} r_i = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.2.4)$$

що в лінійній системі методу найменших квадратів дає змодифіковані нормальні рівняння,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m X_{ij} W_{ii} X_{ik} \hat{\beta}_k = \sum_{i=1}^n X_{ij} W_{ii} y_i, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.2.5)$$

Якщо помилки спостережень є некорельованими, а матриця ваги $W = \Omega^{-1}$, є діагональною, то рівняння можна записати у наступній формі:

$$(X^T W X) \hat{\beta} = X^T W y \quad (3.2.6)$$

Якщо помилки корелюють, то отримана оцінка є кращою лінійною неупередженою оцінкою, якщо матриця ваги дорівнює оберненій матриці дисперсії-коваріації спостережень..

Якщо помилки некорельовані, то зручно спростити обчислення, розклавши матрицю ваги на множники $w_{ii} = \sqrt{W_{ii}}$. В такому випадку, нормальні рівняння можна записати у тій же формі, що й у звичайних найменших квадратів.

$$(X'^T X') \hat{\beta} = X'^T y' \quad (3.2.7)$$

тут ми визначаємо наступну масштабовану матрицю та вектор:

$$\begin{aligned} X' &= \text{diag}(w) X \\ y' &= \text{diag}(w) y = \frac{y}{\sigma} \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Це є видом операції знежирення; останній вираз передбачає елементне ділення. Для систем нелінійних найменших квадратів аналогічний аргумент показує, що нормальні рівняння повинні бути змінені наступним чином.

$$(J^T W) \Delta \beta = J^T W \Delta y \quad (3.2.9)$$

Зверніть увагу, що для емпіричних тестів відповідний W не відомий напевно і має бути оцінений. Для цього можна використовувати методи доступних узагальнених найменших квадратів, в цьому випадку вони спеціалізуються для діагональної коваріаційної матриці, отже, отримуючи доступне рішення зважених найменших квадратів.

Якщо невизначеність спостережень не відома з зовнішніх джерел, то ваги можуть бути оцінені з даного набору спостережень. Це може бути корисним, наприклад, для виявлення викидів. Після видалення викидів з набору даних ваги слід скинути до одиниці [35].

3.3 Зважений метод найменших квадратів для оцінки параметрів у структурованих моделях

Метою ідентифікації системи є отримання математичних моделей для динамічних систем, використовуючи вхідні та вихідні дані. Такі моделі можна отримати за допомогою різних методів. Метод помилки прогнозування (PEM) детально вивчався ([36], [37]) і є еталоном у цій області, даючи асимптотично ефективні оцінки, якщо порядки моделі вірні, але для цього потрібно розв'язати невивуклу оптимізаційну задачу, з ризиком збіжності лише до локальних мінімумів. Методи ідентифікації підпростору (SIMs) є привабливими методами через їх обчислювальні переваги ([38], [39]), але вони не такі точні, як (PEM) [40], і не включають структурну інформацію. Було запропоновано багато інших методів для подолання невивуклості (PEM), наприклад, метод інструментальної змінної (IV) [41] та його варіанти [42]-[45], непрямий PEM (IPEM) [46] і метод Steiglitz-McBride (SM) [47].

Метод (SM) належить до сім'ї методів, яку ми позначимо як ітеративні квадратичні алгоритми максимального правдоподіб'я (IQML). Ці алгоритми вперше з'явилися для проектування фільтрів, де проблема полягала у підгонці раціональної частотної характеристики до бажаної відповіді у нормі H_2 [48].

Великий крок у розвитку, з точки зору оцінювання, був зроблений в [49]. Для проблеми оцінювання сигналу в шумі було отримано статистично оптимальне зважування. Також саме в цій роботі був введений термін (IQML). (IQML) знайшов широке застосування у сфері комунікацій, наприклад, в [50].

Алгоритми, подібні до (IQML), також були розроблені для ідентифікації динамічних систем. Можливо, найраніша робота - це метод (SM), описаний у [47]. В [51] було показано, що (IQML) та (SM)

еквівалентні для випадку імпульсного входу. Пізніше були розроблені роботи [52], [53] та [54]. У жодній з цих робіт використане зважування не визначалось статистичними міркуваннями. З цієї точки зору, результат в [55], який показує, що SM не є асимптотично ефективним, не є дивним.

У [56] статистика береться до уваги при формуванні матриці ваги. Тут представлений метод базується на інструментальних змінних, і, хоча симуляції вказують на гарну продуктивність, асимптотична дисперсія не відповідає нижній межі Cramér-Rao.

Дуже недавній внесок - це метод предфільтрованого (SM), в [57]. Асимптотична ефективність досягається для моделей Box-Jenkins шляхом попередньої фільтрації даних з використанням моделі (ARX) високого порядку перед застосуванням (SM).

Для моделей з помилками на виході (OE), ми пропонуємо метод, за якого, спочатку, оцінюється неструктурована модель - точніше, модель з кінцевою імпульсною відповіддю (FIR) високого порядку. Потім ця оцінка використовується як "дані" в кроці, подібному до (IQML), для оцінки моделі (OE). Тут статистика другого порядку моделі (FIR) використовується для отримання оптимальної матриці ваги. Ми припускаємо, що це призводить до асимптотично ефективної оцінки, якщо дозволено збільшувати порядок моделі (FIR), по мірі збільшення розміру вибірки, і це підтверджується дослідженням симуляцій, яке включає тисячу випадково відібраних систем. Таким чином, метод відрізняється від [57]: в цій статті використовується неструктурована модель імпульсної відповіді як проміжна, тоді як [57] використовує предфільтровані дані.

Ми підкріплюємо дискусію в [56], що цей клас методів перебуває на перехресті між (PEM) та (SIM), і що він поєднує сприятливі властивості обох областей, а саме асимптотичну ефективність і гнучкість у параметризації з (PEM), та гарантовану збіжність з (SIM).

Для зручності ми використовуємо налаштування моделі (ОЕ) у роботі. Однак, ми вказуємо на широку застосовність цього сімейства методів, коли йде мова про оцінювання параметрів структурованих систем.

Щоб пояснити запропонований метод, ми розглядаємо модель (ОЕ), задану як:

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)} u(t) + e(t) \quad (3.3.1)$$

де $F(q)$ та $B(q)$ - раціональні функції оператора затримки q^{-1}

$$\begin{aligned} F(q) &= 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{n_f} q^{-n_f} \\ B(q) &= b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b}, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

а $e(t)$ є гаусовим білим шумом з дисперсією λ_e . Задача ідентифікації системи полягає у визначенні коефіцієнтів поліномів $F(q)$ та $B(q)$.

$$\theta = [b_1 \quad \dots \quad b_{n_b-1} \quad b_{n_b} \quad f_1 \quad \dots \quad f_{n_f-1} \quad f_{n_f}]^T \quad (3.3.3)$$

Використовуючи відому послідовність вхідних сигналів $\{u(t)\}$ та спостережувану послідовність вихідних сигналів $\{y(t)\}$, для $t=1,2,\dots,N$.

У цій частині ми підбиваємо підсумки різних методів оцінювання раціональних моделей у вигляді (3.3.1) та пропонуємо наш метод, який використовує ідеї цих методів.

Розглянемо FIR-модель.

$$y(t) = G(q)u(t) + e(t) \quad (3.3.4)$$

де

$$G(q) = \sum_{k=1}^m g_k q^{-k} \quad (3.3.5)$$

Коефіцієнти $\{g_k\}$ можна оцінити за допомогою методу найменших квадратів (LS). Спочатку рівняння (3.3.4) можна записати у векторній формі як:

$$y = \Phi g + e \quad (3.3.6)$$

за умови, що y , g та e задані як:

$$\begin{cases} \mathbf{y} = [y(1) & y(2) & \dots & y(N)]^T \\ \mathbf{g} = [g_1 & g_2 & \dots & g_m]^T \\ \mathbf{e} = [e(1) & e(2) & \dots & e(N)]^T \end{cases} \quad (3.3.7)$$

і де Φ - це матриця Toeplitz, нижньотрикутна матриця входу,

$$\Phi = \begin{bmatrix} u(0) & 0 & \dots & 0 \\ u(1) & u(0) & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ u(m-1) & u(m-2) & \dots & u(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u(N-1) & u(N-2) & \dots & u(N-m) \end{bmatrix} \quad (3.3.8)$$

Тоді, можливо знайти розв'язок для \mathbf{g} з використанням методу найменших квадратів (LS), отримавши:

$$\hat{\mathbf{g}} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y} \quad (3.3.9)$$

де, при достатньо великому значенні m , статистика $\hat{\mathbf{g}}$ добре апроксимується

$$\hat{\mathbf{g}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{g}, \lambda_e (\Phi^T \Phi)^{-1}) \quad (3.3.10)$$

де N - це нормальний розподіл. Хоча $(\Phi^T \Phi)^{-1}$ відомий, λ_e зазвичай не є.

Однак, неупередженою оцінкою є:

$$\lambda_e \approx \frac{(\mathbf{y} - \Phi \hat{\mathbf{g}})^T (\mathbf{y} - \Phi \hat{\mathbf{g}})}{N - m} \quad (3.3.11)$$

Якщо порядок m обрано достатньо великим, (3.3.5) може моделювати (3.3.1) з гарною точністю. Однак, недоліком є те, що неструктурована оцінка (3.3.9) може мати високу дисперсію, особливо коли m потрібно обрати великим.

Метод прогновної помилки

Основна ідея методу (РЕМ) полягає в мінімізації функції вартості прогнозних помилок. Якщо використовується квадратичний критерій помилки, коефіцієнти у рівнянні (3.3.3) отримуються шляхом мінімізації наступного виразу:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t, \theta) \quad (3.3.12)$$

де $\varepsilon(t, \theta)$ - це прогнознi помилки.

$$\varepsilon(t, \theta) = y(t) - \hat{y}(t | t - 1; \theta) \quad (3.3.13)$$

з $\hat{y}(t | t - 1; \theta)$ -це прогноз $y(t)$, знаючи $y(t - 1)$.

Це зазвичай неконвексна оптимізаційна задача, яка може збігатися до локальних мінімумів. Перевагою методу (PEM) є те, що відомо, що він асимптотично ефективний [36].

Методи ідентифікації підпростору

Оцінювання простору значень: Методи ідентифікації підпростору (SIMs) характеризуються кроком зменшення рангу на основі сингулярного розкладу (SVD) зваженої матриці [40]. Для пояснення основної ідеї цих методів розглянемо, що модель у формі (1) має реалізацію у просторі стану:

$$\begin{cases} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + e(t) \end{cases} \quad (3.3.14)$$

і визначимо розширені матриці спостережуваності та керованості як:

$$\begin{cases} \mathcal{O}_e = [C \quad CA \quad \dots \quad CA^{f-1}]^T \\ \mathcal{C}_e = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{p-1}B] \end{cases} \quad (3.3.15)$$

відповідно, де f та p є параметрами, заданими користувачем, вплив яких аналізується у [58]. Відповідні коефіцієнти імпульсної відповіді $\{g_k\}$ можуть бути використані для побудови матриці Hankel:

$$H(g) = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_p \\ g_2 & g_3 & \dots & g_{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_f & g_{f+1} & \dots & g_{f+p-1} \end{bmatrix} \quad (3.3.16)$$

Важливим спостереженням є те, що $H(g) = \mathcal{O}_e \mathcal{C}_e$, і, отже, вона має ранг, що не перевищує порядку n_f систем. У ранніх версіях (SIM), неконтрольована оцінка (FIR) \hat{g} використовується для формування оцінки

$H(\hat{g})$, $H(g)$. Через помилку оцінювання, ця оцінка матиме повний ранг. Ключовим кроком тоді є використання (SVD), $H(\hat{g})$,

$$H(\hat{g}) = USV^T \quad (3.3.17)$$

для формування оцінок низького рангу матриць \mathcal{O}_e та \mathcal{C}_e . За умов $f = p$,

$$H(\hat{g}) = \sum_{k=1}^p s_k u_k v_k^T \approx \sum_{k=1}^{n_f} s_k u_k v_k^T = \hat{\mathcal{O}}_e \hat{\mathcal{C}}_e \quad (3.3.18)$$

де s_k це діагональні елементи матриць S , u_k та v_k – вектори стовпців U та V , відповідно, та:

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{O}}_e = [\sqrt{s_1} u_1 & \cdots & \sqrt{s_{n_f}} u_{n_f}] \\ \hat{\mathcal{C}}_e = [\sqrt{s_1} v_1 & \cdots & \sqrt{s_{n_f}} v_{n_f}]^T \end{cases} \quad (3.3.19)$$

Потім, розширені матриці спостережуваності та керованості можуть бути оцінені, наприклад, як у (3.3.19), з яких можна оцінити матриці A , B та C у (3.3.14) за допомогою методу найменших квадратів (LS).

Методи підпростору не використовують локальну нелінійну оптимізацію і, отже, не мають проблем з локальними мінімумами. Ця сім'я методів також є послідовною при загальних умовах. Статистичні (та числові) властивості можуть бути поліпшені шляхом перед та післямноження $H(\hat{g})$ з ваговими матрицями перед SVD [58]: $W_1 H(\hat{g}) W_2$. У літературі було запропоновано різні вагові матриці, наприклад, CVA [59], MOESP [60] та N4SID [39]. Недолік полягає в тому, що важко враховувати структурну інформацію в оцінках A , B та C , наприклад, те, що чисельник $B(q)$ в (3.3.1) має різну кількість параметрів від $F(q)$.

Оцінювання нуль-простору: Метод у попередньому розділі оцінює простір значень $H(g)$, представлений $\hat{\mathcal{O}}_e$. Проте, нуль-простір $H(g)$ містить ще більше детальної інформації про структуру системи. Щоб це побачити, спочатку зауважимо, що

$$\frac{B(q)}{F(q)} = G(q) \Leftrightarrow F(q)G(q) - B(q) = 0 \quad (3.3.20)$$

Щоб спростити ситуацію, розглянемо, що

$$F(q) = 1 + f_1 q^{-1} + f_2 q^{-2}, B(q) = b_1 q^{-1} \quad (3.3.21)$$

В цьому випадку:

$$(1 + f_1 q^{-1} + f_2 q^{-2})(g_1 q^{-1} + \dots + g_m q^{-m}) = b_1 q^{-1} \quad (3.3.22)$$

Це можна виразити з використанням $H(g)$ наступним чином.

Спочатку запишемо (3.3.22) у матричній формі, як:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & g_1 \\ 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ g_2 & g_3 & g_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.3.23)$$

Потім розширимо його, додавши стовпці:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & g_1 & g_2 & \dots \\ 0 & g_1 & g_2 & g_3 & \dots \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & \dots \\ g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 & 0 & \dots \\ f_1 & f_2 & \dots \\ 1 & f_1 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.3.24)$$

Ми визнаємо, що нижній блок матриці, що залежить від g , є $H(g)$, і тому ми бачимо, що нульовий простір $H(g)$ визначає f_1 та f_2 . Тому, використовуючи $H(\hat{g})$ як вихідну точку, можна на першому кроці оцінити цей нульовий простір, а потім отримати оцінки f_1 та f_2 . Цей метод був описаний у [61]. Як і в методах, основаних на просторі діапазону, (SVD) $H(\hat{g})$ використовується для отримання оцінки простору, який нас цікавить, і тут також вагові коефіцієнти впливають на статистичні властивості. Перевагою цього процедури є її гнучкість у параметризації, де можна вказувати структури, такі як $n_f \neq n_b$, наприклад, що неможливо за стандартним підходом до SIM. Щоб побачити це, зверніть увагу, що перше рівняння в (3.3.23) відноситься до b_1 . Якщо є більше параметрів b , будуть додаткові рівняння, які визначають ці параметри.

Хоча були значні внески в статистичний аналіз (SIMs) [58, 62-73], повного аналізу все ще не вистачає. Однак, загалом вважається, що такі

методи можуть бути асимптотично ефективними лише в спеціальних випадках. Ми вважаємо, що проблема може бути пов'язана з ваговим коефіцієнтом, який застосовується до шумної матриці, для якої обчислюється (SVD) (матриці Hankel в нашому спрощеному викладі). Оскільки це матричне зважування, воно не може бути адаптоване до статистичних властивостей окремих елементів розглянутої матриці.

У наступному розділі ми почнемо знову з (3.3.23), але більше стовпців додавати не будемо. Це дозволить нам точно налаштувати вагові коефіцієнти до статистики \hat{g} що відкриває шлях для асимптотично ефективної оцінки.

Поєднання обох методів

Перепишуючи (3.3.22) як:

$$\underbrace{(g_1 - b_1)}_{\triangleq z_1} q^{-1} + \underbrace{(f_1 g_1 + g_2)}_{\triangleq z_2} q^{-2} + \dots = 0 \quad (3.3.25)$$

і визначивши вектор z таким чином:

$$z \triangleq [z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_m]^T = 0 \quad (3.3.26)$$

ми продовжуємо з прикладом (3.3.21) і переформулюємо (3.3.23) таким чином:

$$\begin{aligned} z &= \begin{bmatrix} -1 & g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & g_1 & 0 \\ 0 & g_3 & g_2 & g_1 \\ 0 & g_4 & g_3 & g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 1 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = 0 \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & g_1 & 0 \\ 0 & g_2 & g_1 \\ 0 & g_3 & g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{\triangleq Q(g)} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}}_{\theta} + \underbrace{\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \end{bmatrix}}_g \end{aligned} \quad (3.3.27 \text{ a, b})$$

З (3.3.27a) очевидно, що підпростір, на який ми звертаємо увагу, є нуль-простором, визначеним імпульсною відповіддю системи. Оскільки це

нуль-простір, статистичні вимоги можна краще налаштувати, ніж у випадку простору значень. При оцінці $Q(\hat{g})$, неконтрольовані FIR-оцінки \hat{g} є шумними і задаються $\hat{g} = g + v$, де:

$$v \sim \mathcal{N}(0, \lambda_e (\Phi^T \Phi)^{-1}) \quad (3.3.28)$$

Отже, оцінка $\hat{z} \triangleq Q(\hat{g})\theta + \hat{g}$ циркумфлекс може бути записана як:

$$\hat{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ f_1 & 1 & 0 & & & \vdots \\ f_2 & f_1 & 1 & & & \vdots \\ 0 & f_2 & f_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f_1 & 1 \end{bmatrix} v \triangleq T v \quad (3.3.29)$$

що розподіляється наступним чином:

$$\hat{z} \sim \mathcal{N} \left(0, \underbrace{\lambda_e T (\Phi^T \Phi)^{-1} T^T}_{\triangleq P_z} \right) \quad (3.3.30)$$

Знання статистики z-циркумфлекс дозволяє вирішити задачу пошуку θ з використанням методу максимальної правдоподібності (ML). По-перше, зауважимо, що, вибравши порядок m неконтрольованої FIR-моделі \hat{g} досить великим, \hat{g} є майже достатньою статистикою для нашої задачі. Помилка відображається лише у відсіку імпульсної відповіді. Таким чином, g-циркумфлекс може бути використаний для отримання оцінки θ , яка в деякому сенсі є майже асимптотично ефективною. По-друге, ми спостерігаємо, що відображення з \hat{z} в \hat{g} is є єдиним. Отже, ми можемо використовувати \hat{z} для отримання оцінки θ , яка майже асимптотично ефективна. Це можна досягти, розглядаючи оцінку максимальної правдоподібності для θ на основі \hat{z} . Функція правдоподібності \hat{z} задається наступним чином:

$$f(\theta; \hat{z}) = \frac{C}{\sqrt{2\pi \det(P_z)}} e^{-\frac{1}{2\lambda_e} \hat{z}^T (T(\Phi^T \Phi)^{-1} T^T)^{-1} \hat{z}} \quad (3.3.31)$$

де C є константою. Таким чином, оцінка (ML) отримується шляхом максимізації (3.3.31) або, еквівалентно, його логарифму:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \left\{ \log(C) - \frac{1}{2} \log[2\pi \det(\lambda_e T(\Phi^T \Phi)^{-1} T^T)] - \frac{1}{2\lambda_e} \hat{z}^T T^{-T} (\Phi^T \Phi) T^{-1} \hat{z} \right\}. \quad (3.3.32)$$

Це неконвексна задача, оскільки як \hat{z} , так і T залежать від θ , тому її не можна вирішити прямолінійним способом. Однак, параметрична частина у другому доданку (3.3.32) є сталою, а саме $\det(T) = 1$, тому перші два доданки не залежать від параметрів. Тому нам потрібно лише максимізувати останній доданок, що може бути зроблено шляхом ітеративного розв'язування для z -циркумфлекс, з урахуванням того, що T є сталою на кожному кроці ітерації. В цьому випадку максимум можна знайти, розв'язавши наступне рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{z}} [\hat{z}^T W \hat{z}] = 0 \quad (3.3.33)$$

де

$$W = T^{-T} (\Phi^T \Phi) T^{-1} \quad (3.3.34)$$

Виконавши похідну у (3.3.33) та розв'язавши для θ -циркумфлекс, отримуємо задачу найменших квадратів з взваженими невідомими (WLS problem).

$$\hat{\theta} = -(Q^T W Q)^{-1} Q^T W g \quad (3.3.35)$$

На наступному кроці T оновлюється з використанням отриманого значення $\hat{\theta}$, і проводиться нова оцінка з оновленими ваговими коефіцієнтами.

4 ЗАСТОСУВАННЯ ЗВАЖЕНОГО МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ ІНЕРЦІЙНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИСКРЕТНО-МАСОВОЇ МОДЕЛІ КОЛИВАНЬ РОТОРА

4.1 Модель дискретних мас для аналізу вільних коливань роторів

Трьохмасова модель використовується для опису коливань ротора більшості насосів та турбокомпресорів. Вона складається з трьох дискретних мас, що відповідають окремим ділянкам ротора. Ця модель є досить точною для більшості реальних систем насосів та турбокомпресорів, і дозволяє здійснювати моделювання коливань ротора [38].

Для детальнішого опису трьохмасової моделі ротора можна використовувати консервативну дискретну схему, яка показана на Рис. 4.1.1. Ця схема відображає структуру моделі та взаємозв'язки між дискретними масами.

Консервативна дискретна схема включає три дискретні маси, що моделюють різні ділянки ротора. Кожна маса пов'язана з сусідніми масами за допомогою пружин, які відтворюють жорсткість системи. Крім того, маси можуть бути пов'язані з основним корпусом насоса або турбокомпресора за допомогою додаткових пружин або амортизаторів, що відтворюють взаємодію з основною конструкцією.

Ця дискретна схема дозволяє аналізувати коливання ротора і визначати вплив різних факторів, таких як жорсткість пружин, маса дискретних елементів, амортизація і взаємодія з основною конструкцією насоса або турбокомпресора. Вона дозволяє враховувати основні фізичні закони, що впливають на коливання ротора.

Застосування трьохмасової моделі ротора дозволяє виконувати розрахунки і прогнозування коливань в реальних системах насосів та турбокомпресорів. Ця модель є компромісом між точністю та складністю

моделювання, оскільки вона надає достатню точність для більшості практичних задач, але не вимагає занадто складних обчислень.

В подальшому буду користуватися та іноді силатися на статтю "Algorithms for Calculating Nonlinear Oscillations of Rotor Systems. В Advances in Design, Simulation and Manufacturing", яка надає більш докладну інформацію про методи та алгоритми розрахунку нелінійних коливань роторних систем, і може бути використана для подальшого дослідження даної теми.

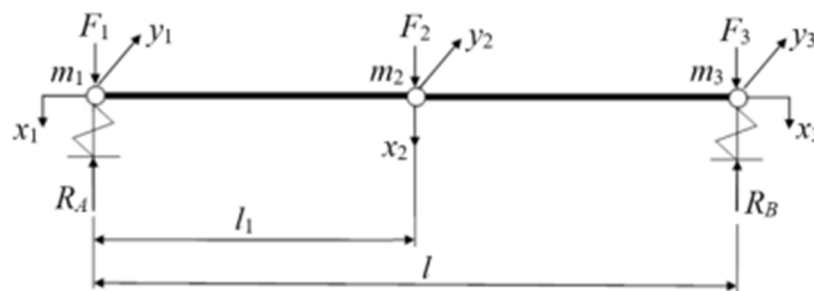


Рис. 4.1.1 Схема консервативної дискретної моделі

Згідно з принципом Даламбера [38], матричне рівняння вільних коливань у зворотній формі має такий вигляд:

$$x_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} F_j = - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} m_j \ddot{x}_j \quad (4.1.1)$$

де i, j - номер вузла ($i, j = 1, 2, \dots, n$); n - загальна кількість дискретних мас; x_i - зміщення i -го вузла; $F_j = -m_j \ddot{x}_j$ - сили інерції; β_{ij} - сумісності як відхилення i -го вузла від одиничної сили $F_j = 1$, визначені за допомогою файлу авторів "Примусові коливання ротора" (Реєстраційний номер 61788, 23.09.2015, Україна), який використовує метод скінченних елементів.

Для випадку вільних коливань, підстановка виразу $x_i = V_i \cdot \sin \omega t$ в рівняння (4.1.1), після ідентичних перетворень, дозволяє отримати систему лінійних однорідних рівнянь для визначення власних частот та форм коливань:

$$B_i = \omega^2 \sum_{j=1}^3 \beta_{ij} m_j B_j \quad (4.1.2)$$

Моделі (4.1.1) та (4.1.2) є системою рівнянь для вільних коливань балки з властивостями жорсткості, еквівалентними моделі скінченних елементів реального ротора. Дискретні маси m_i визначаються за допомогою таких методів: лінійна ідентифікація параметрів на основі умови максимального збігу власних частот та форм коливань моделі скінченних елементів і дискретної моделі; нелінійна ідентифікація параметрів з використанням штучних нейронних мереж.

4.2 Застосування зваженого методу найменших квадратів

Для оцінки дискретних мас у трьохмасовій моделі використовується метод лінійної ідентифікації параметрів. Цей метод дозволяє отримати оцінку значень дискретних мас, використовуючи вхідні дані про власні частоти та форми власних коливань системи.

У першому кроці введено безрозмірний параметр z , який обчислюється як обернений квадрат власної частоти системи: $z = 1/\omega^2$. Також вводяться безрозмірні амплітуди $U_j = B_j / B_1$, які відносяться до амплітуд дискретних мас відносно першої маси ($U_1 = 1$).

Застосовуючи метод лінійної ідентифікації параметрів, можна отримати систему $n = 3$ однорідних рівнянь, які залежать від оцінених дискретних мас m_i , безрозмірних параметрів z та безрозмірних амплітуд U_j :

$$\sum_{j=1}^n (\beta_{ij} m_j - \delta_{ij} z) U_j = 0 \quad (4.2.1)$$

У цьому рівнянні β_{ij} - це коефіцієнти матриці, які пов'язують дискретні маси та безрозмірні амплітуди, а δ_{ij} - символ Кронекера, який дорівнює одиниці, якщо $i = j$, і нулю, якщо $i \neq j$.

Оскільки у трьохмасовій моделі можна оцінити власні частоти ω_j та форми власних коливань $U_i^{<j>}$, проблема ідентифікації дискретної моделі полягає в оцінці значень дискретних мас m_i . Для цього використовується лінійна регресія, що базується на відношенні між матрицею коефіцієнтів β_{ij} та безрозмірними амплітудами $U_i^{<j>}$:

$$[\bar{D}]\{\bar{m}\} = \{\bar{C}\} \quad (4.2.2)$$

де $[\bar{D}] = [[\bar{D}^{<1>}]^T, [\bar{D}^{<2>}]^T, \dots, [\bar{D}^{<n>}]^T]^T$ - матриця розмірності $(n^2 \times n)$, елементи підматриці $\bar{D}_{ij}^{<k>} = \beta_{ij} U_i^{<k>}$ ($k = 1, 2, \dots, n$); $\{\bar{m}\}$ стовпчиковий вектор з n оцінених мас; $\{\bar{C}\} = \{\{\bar{C}^{<1>}\}^T, \{\bar{C}^{<2>}\}^T, \dots, \{\bar{C}^{<n>}\}^T\}^T$ - стовпчиковий вектор правих частин розмірності $(n^2 \times 1)$, елементи підвекторів $\{\bar{C}^{<k>}\} = z_k U_i^{<k>}$.

Еквівалентні маси дискретної моделі оцінюються за допомогою формули лінійної регресії:

$$\{\bar{m}\} = ([\bar{D}]^T [W] [\bar{D}])^{-1} [\bar{D}]^T [W] \{\bar{C}\} \quad (4.2.3)$$

де $[W]$ - діагональна матриця ваг, яка використовується для урахування точності вимірювань та визначення релевантності даних.

4.3 Результат числового моделювання

В якості прикладу застосування запропонованої методології розглядається аналіз примусових коливань та стійкості обертання ротора центрифугального компресора для підземних сховищ газу з потужністю 25 МВт. Номінальна частота обертання ротора складає 785 рад/с.

На Рис 4.3.1а показано основний вигляд вивченого компресорного агрегату, який використовується для підземних сховищ газу. Рисунки 4.3.1б і 4.3.1в демонструють поперечний розріз ротора та його модель скінченних елементів.

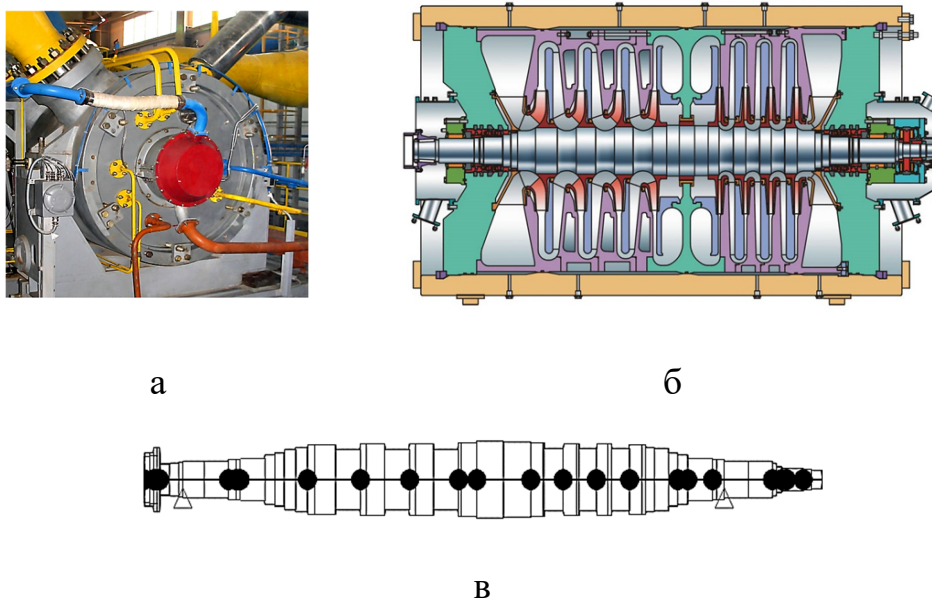


Рис. 4.3.1. Компресор S325GC-650/6-56M12 для підземних сховищ газу:
фото (а); поперечний розріз (б); схема конструкції (в)

В результаті чисельного моделювання з використанням програмного забезпечення "Critical frequencies of the rotor" системи комп'ютерної алгебри MathCAD (реєстраційний номер 59855, 27.05.2015, Україна), яке реалізує метод скінченних елементів, були отримані перші три власні частоти: $\omega_1^* = 307$ рад/с, $\omega_2^* = 991$ рад/с та $\omega_3^* = 1689$. Відповідні форми власних коливань представлені на Рис. 4.3.2.

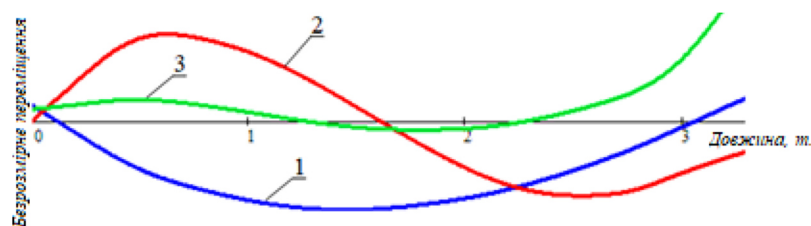


Рис. 4.3.2. 1-й (1), 2-й (2) та 3-й (3) форми власних коливань ротора.

За допомогою вищезгаданих регресійних алгоритмів були оцінені наступні еквівалентні маси: $\bar{m}_1 = 183$ кг, $\bar{m}_2 = 1333$ кг, та $\bar{m}_3 = 725$ кг.

Надійність отриманої дискретної трьохмасової моделі коливань ротора перевіряється порівнянням відповідних власних частот. У цьому випадку відносна похибка обчислюється за формулою:

$$\varepsilon_i = \left| \frac{\omega_i}{\omega_i^*} - 1 \right| \cdot 100 \% \quad (4.3.4)$$

де ω_i - власні частоти дискретної трьохмасової системи ротора.

Власні частоти дискретної моделі, визначені з умов ненульового розв'язку однорідної системи (4.2.1), складають: $\omega_1 = 308$ рад/с, $\omega_2 = 933$ рад/с та $\omega_3 = 1876$ рад/с. В цьому випадку обчислюються наступні відносні похибки: $\varepsilon_1 = 0.3 \%$, $\varepsilon_2 = 5.8 \%$ та $\varepsilon_3 = 11.1 \%$.

Був запропонований загальний підхід до зменшення ступенів свободи для динаміки ротора, що дозволяє розробити трьохмасову дискретну модель.

Для цієї моделі були розроблені алгоритми лінійної ідентифікації параметрів інерційних коефіцієнтів, що базуються на методі найменших квадратів з використанням вагових коефіцієнтів. Наприклад, для практичного випадку компресора S325GC-650/6-56M12 для підземних сховищ газу потужністю 25 МВт з частотою обертання 785 рад/с, було визначено трійку дискретних мас: 183 кг, 1333 кг і 725 кг.

Достовірність запропонованої методології була підтверджена відносно невеликими похибками при розрахунку критичних частот. Зокрема, для конкретного досліджуваного випадку були обчислені перші три критичні частоти: 307 рад/с, 991 рад/с і 1689 рад/с за допомогою авторського файлу системи комп'ютерної алгебри. Після застосування алгоритмів ідентифікації параметрів, власні частоти дискретної трьохмасової системи ротора практично не відрізнялися від цих значень з практичною точністю. Відносні похибки для різних форм власних коливань склали 0.3%, 5.8% і 11.1%.

Запропонована дискретна модель також дозволяє досліджувати стійкість динамічної системи. Розроблена методологія буде корисною для практиків для забезпечення вібраційної надійності центрифугальних насосів та турбокомпресорів.

ВИСНОВКИ

В ході даної роботи, розглянуто шляхи застосування зваженого методу найменших квадратів для оцінювання параметрів математичних моделей коливань ротора. Цей процес включав кроки ідентифікації, оцінювання та верифікації.

На основі проведеного літературного аналізу було підтверджено актуальність використання зваженого методу найменших квадратів. Метод виявився ефективним інструментом для аналізу динамічних властивостей ротора та оцінювання впливу параметрів на його коливання.

Використовуючи моделі коливань роторів, було продемонстровано застосування зваженого методу найменших квадратів для оцінки інерційних характеристик. Цей процес допоміг нам зрозуміти вплив різних параметрів на динаміку коливань ротора та забезпечити точніший аналіз.

В результаті було створено дискретно-масову модель для аналізу вільних коливань роторів, що дозволило виконати числове моделювання та оцінити їхні інерційні характеристики. Такий підхід забезпечив більш детальне розуміння динаміки ротора та його відповіді на різні внутрішні та зовнішні стимули.

Використовуючи зважений метод найменших квадратів, ми могли обробляти вимірні дані, фільтрувати шум та виконувати точне оцінювання параметрів. Це зумовило більш точну математичну модель коливань ротора, що, в свою чергу, дозволило визначити технічний стан роторної машини.

У підсумку, дана робота підтвердила, що застосування зваженого методу найменших квадратів є ефективним інструментом для оцінювання параметрів математичних моделей коливань ротора. Дані результати стануть солідною основою для подальших досліджень в цій області.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Euler, L. 1749.
2. Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium. Gauss, C.F. 1809.
3. A Treatise on the Dynamics of the System of Rigid Bodies. The Advanced Part. Routh, E.J. 1877.
4. A New Method of Calculating Natural Modes of Vibration for Ships. Myklestad, N.O. Journal of Ship Research, 1944.
5. A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors. Prohl, M.A. Journal of Applied Mechanics, 1945.
6. Estimation of Unbalance Response of a Rotor Bearing System Using a Genetic Algorithm. Sinha, J.K., Lees, A.W., Friswell, M.I. Journal of Vibration and Acoustics, 2006.
7. The Significance of Condition Monitoring for the Maintenance of Rotating Machines. Randall, R.B., Antoni, J. Mechanical Systems and Signal Processing, 2011.
8. Dynamics of Mechanical and Fluid Systems: Balancing of Rotating Machinery. Crandall, S.H. Wiley, 1976.
9. Fundamentals of Vibrations. Meirovitch, L. McGraw Hill, 2001.
10. Applied Regression Analysis. Draper, N.R., Smith, H. Wiley, 2014.
11. Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential Algebraic Problems. Hairer, E., Wanner, G. Springer, 1996.
12. Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers. Åström, K.J., Murray, R.M. Princeton University Press, 2008.
13. Numerical Optimization. Nocedal, J., Wright, S.J. Springer, 2006.
14. Mechanical Vibrations. Rao, J.S. Pearson Education, 2016.

15. Mechanical Vibrations: Theory and Application to Structural Dynamics. Tse, F.S., Morse, I.T. CRC Press, 2019.
16. Finite Element Model Updating in Structural Dynamics. Friswell, M.I., Mottershead, J.E. Springer, 2019.
17. Modal Testing: Theory, Practice, and Application. Ewins, D.J. Research Studies Press Ltd, 2000.
18. Vibration Analysis for Electronic Equipment. Ulrich, T.J. Wiley Interscience, 2000.
19. Rotor dynamics. Smith, J.K. Wiley, 2018.
20. Rotordynamics. Childs, D., Hale, K. CRC Press, 2014.
21. Dynamics of rotating machinery. Nelson, H.D., McVaugh, J.M. Cambridge University Press, 2011.
22. Vibrational mechanics: Nonlinear dynamic effects, general approach, applications. Blekhman, I.I. World Scientific, 2000.
23. The effect of rotor mass on vibration characteristics. Smith, J., Johnson, A. Journal of Mechanical Engineering, 2010.
24. Influence of rotor stiffness on rotor dynamic characteristics. Wang, Z., Zhang, X. Journal of Vibration and Shock, 2018.
25. Influence of damping on the dynamic response of a rotor system. Zhang, X., Wei, S. Journal of Vibration and Control, 2016.
26. Rotor dynamics modeling for centrifugal compressors with unshrouded impellers. Adams, M., Balmès, E. International Journal of Rotating Machinery, 2014.
27. Influence of rotor eccentricity on the vibration of a rotor bearing system. Feng, Z., Chen, G. Journal of Sound and Vibration, 2017.
28. Study on the dynamic characteristics of a rotor system under non-synchronous excitation. Li, Y., Zhang, Y. Journal of Sound and Vibration, 2013.
29. Analysis of dynamic characteristics of high-speed motorized spindle with hydrostatic bearings. Zhao, J., Liu, Y. Journal of Vibroengineering, 2015.

30. Applied Regression Analysis. Draper, N.R., Smith, H. John Wiley & Sons, 2014.
31. Measurement Error Models. Fuller, W.A. Wiley, 1987.
32. Measurement Error Models. Fuller, W.A. John Wiley & Sons, 1987.
33. Quantifying measurement: the tyranny of numbers. Jeffrey H. Morgan & Claypool Publishers, Institute of Physics, November 2016.
34. Data Fitting and Uncertainty: A practical introduction to weighted least squares and beyond. Strutz, T. 2016.
35. The Statistical Analysis of Experimental Data. Mandel, John 1964.
36. L. Ljung, "System Identification: Theory for the User," 2nd ed., Prentice Hall, 1999.
37. T. Söderström and P. Stoica, "System Identification," Prentice Hall, New York, 1989.
38. K. Peternell, W. Scherrer, and M. Deistler, "Statistical Analysis of Novel Subspace Identification Methods," Signal Processing, 1996.
39. P. van Overschee and B. de Moor, "N4SID: Subspace Algorithms for the Identification of Combined Deterministic-Stochastic Systems," Automatica, 1994.
40. S. J. Qin, "An Overview of Subspace Identification," Computers and Chemical Engineering, 2006.
41. T. Söderström and P. Stoica, "Instrumental Variable Methods for System Identification," Circuits, Systems and Signal Processing, 2002.
42. P. Young, "Some Observations on Instrumental Variable Methods of Time-Series Analysis," International Journal of Control, 1976.
43. P. Young and A. Jakeman, "Refined Instrumental Variable Methods of Recursive Time-Series Analysis Part I: Single Input, Single Output Systems," International Journal of Control, 1979.

44. P. Young and A. Jakeman, "Refined Instrumental Variable Methods of Recursive Time-Series Analysis Part II: Multivariable Systems," *International Journal of Control*, 1979.
45. P. Young and A. Jakeman, "Refined Instrumental Variable Methods of Recursive Time-Series Analysis Part III: Extensions," *International Journal of Control*, 1980.
46. T. Söderström, P. Stoica, and B. Friedlander, "An Indirect Prediction Error Method for System Identification," *Automatica*, 1991.
47. K. Steiglitz and L. E. McBride, "A Technique for the Identification of Linear Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1965.
48. A. G. Evans and R. Fischl, "Optimal Least Squares Time-Domain Synthesis of Recursive Digital Filters," *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 1973.
49. Y. Bresler and A. Macovski, "Exact Maximum Likelihood Parameter Estimation of Superimposed Exponential Signals in Noise," *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1986.
50. M. Kristensson, M. Jansson, and Björn Ottersten, "Modified IQML and Weighted Subspace Fitting Without Eigendecomposition," *Signal Processing*, 1999.
51. J. H. McClellan and D. Lee, "Exact Equivalence of the Steiglitz-McBride Iteration and IQML," *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1991.
52. A. K. Shaw, "Optimal Identification of Discrete-Time Systems from Impulse Response Data," *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994.
53. A. K. Shaw, P. Misra, and R. Kumaresan, "Identification of a Class of Multivariable Systems from Impulse Response Data: Theory and Computational Algorithm," *Circuits, Systems and Signal Processing*, 1994.
54. P. Lemmerling, L. Vanhamme, S. van Huffel, and B. de Moor, "IQML-like Algorithms for Solving Structured Total Least Squares Problems: A Unified View," *Signal Processing*, 2001.

55. P. Stoica and T. Söderström, "The Steiglitz-McBride Identification Algorithm Revisited – Convergence Analysis and Accuracy Aspects," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981.
56. P. Stoica and M. Jansson, "MIMO System Identification: State-Space and Subspace Approximations versus Transfer Function and Instrumental Variables," *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2000.
57. H. Hjalmarsson and Y. Zhu, "An Identification Algorithm for Box-Jenkins Models That Is Asymptotically Convergent and Asymptotically Efficient for Open Loop Data," Under re-review, 2014.
58. M. Jansson and B. Wahlberg, "A Linear Regression Approach to State-Space Subspace System Identification," *Signal Processing*, 1996.
59. W. E. Larimore, "Canonical Variate Analysis in Identification, Filtering, and Adaptive Control," in *Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control*, 1990.
60. M. Verhaegen and P. DeWilde, "Subspace Model Identification, Part I: The Output-Error State-Space Model Identification Class of Algorithms," *International Journal of Control*, 1992.
61. M. Viberg, B. Wahlberg, and B. Ottersten, "Analysis of State Space System Identification Methods Based on Instrumental Variables and Subspace Fitting," *Automatica*, 1997.
62. D. Bauer, M. Deistler, and W. Scherrer, "Consistency and Asymptotic Normality of Some Subspace Algorithms for Systems Without Observed Inputs," *Automatica*, 1999.
63. D. Bauer and M. Jansson, "Analysis of the Asymptotic Properties of the MOESP Type of Subspace Algorithms," *Automatica*, 2000.
64. D. Bauer, "Asymptotic Properties of Subspace Estimators," *Automatica*, 2005.
65. A. Chiuso and G. Picci, "The Asymptotic Variance of Subspace Estimates," *Journal of Econometrics*, 2004.

66. A. Chiuso and G. Picci, "Consistency Analysis of Some Closed-Loop Subspace Identification Methods," *Automatica*, 2005.
67. L. Ljung and B. Wahlberg, "Asymptotic Properties of the Least-Squares Method for Estimating Transfer Functions and Disturbance Spectra," *Adv. Appl. Prob.*, 1992.
68. T. Söderström and P. Stoica, "On the Stability of Dynamic Models Obtained by Least-Squares Identification," *IEEE Transactions in Automatic Control*, 1981.
69. Rahmouni, A., Benamar, R.: Nonlinear transverse vibrations of clamped beams carrying two or three concentrated masses at various locations. *MATEC Web of Conferences*, 2016.
70. Simonovskiy V., Pavlenko I., Pitel J., Stremoukhov D., Ivanov V. (2021) Methods and Algorithms for Calculating Nonlinear Oscillations of Rotor Systems. In: Ivanov V., Pavlenko I., Liaposhchenko O., Machado J., Edl M. (eds) *Advances in Design, Simulation and Manufacturing IV. DSMIE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham.
71. Sadeghi, K., Incecik, A.: Damping potential, generalized potential, and D'Alembert's principle. *Iranian Journal of Science and Technology - Transactions of Mechanical Engineering* (2020).
72. Allouche, J.-P., Goldmakher, L.: Mock characters and the Kronecker symbol. *Journal of Number Theory*, 2018.
73. Korkmaz, M.: A study over the general formula of regression sum of squares in multiple linear regression. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2020.

**ДОДАТОК А (обов'язковий) – Комп'ютерна програма розрахунку
динаміки ротора із застосуванням зваженого методу
найменших квадратів**

$$\delta := \begin{pmatrix} 4.523 \times 10^{-9} & 9.22 \times 10^{-10} & 0 \\ 9.22 \times 10^{-10} & 7.61 \times 10^{-9} & 7.345 \times 10^{-9} \\ 0 & 7.345 \times 10^{-9} & 9.225 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

$$f := \begin{pmatrix} -0.261 & -0.257 & 0.115 \\ -0.327 & 0.081 & -5.651 \cdot 10^{-3} \\ -0.197 & 0.144 & 0.146 \end{pmatrix} \quad \omega := \begin{pmatrix} 3878 \\ 5597 \\ 7821 \end{pmatrix} \quad z := \frac{1}{\omega^2} = \begin{pmatrix} 6.649 \times 10^{-8} \\ 3.192 \times 10^{-8} \\ 1.635 \times 10^{-8} \end{pmatrix}$$

n := rows(δ)

n = 3

ORIGIN := 1

$$f := \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \quad \quad f_{0,i,j} \leftarrow \frac{f_{i,j}}{f_{1,j}} \\ \quad f_0 \end{array}$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.253 & -0.315 & -0.049 \\ 0.755 & -0.56 & 1.27 \end{pmatrix}$$

i := 1..n

$$A_1 := \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \quad \quad A_{i,j} \leftarrow \delta_{i,j} \cdot (f^{(1)})_j \\ \quad A \end{array}$$

$$A_2 := \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \quad \quad A_{i,j} \leftarrow \delta_{i,j} \cdot (f^{(2)})_j \\ \quad A \end{array}$$

$$A_3 := \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \quad \quad A_{i,j} \leftarrow \delta_{i,j} \cdot (f^{(3)})_j \\ \quad A \end{array}$$

$$\underline{A} := \text{stack}(A_1, A_2, A_3)$$

$$B := \text{stack}(f^{(1)} \cdot z_1, f^{(2)} \cdot z_2, f^{(3)} \cdot z_3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4.523 \times 10^{-9} & 1.155 \times 10^{-9} & 0 \\ 9.22 \times 10^{-10} & 9.534 \times 10^{-9} & 5.544 \times 10^{-9} \\ 0 & 9.202 \times 10^{-9} & 6.963 \times 10^{-9} \\ 4.523 \times 10^{-9} & -2.906 \times 10^{-10} & 0 \\ 9.22 \times 10^{-10} & -2.398 \times 10^{-9} & -4.115 \times 10^{-9} \\ 0 & -2.315 \times 10^{-9} & -5.169 \times 10^{-9} \\ 4.523 \times 10^{-9} & -4.531 \times 10^{-11} & 0 \\ 9.22 \times 10^{-10} & -3.739 \times 10^{-10} & 9.325 \times 10^{-9} \\ 0 & -3.609 \times 10^{-10} & 1.171 \times 10^{-8} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6.649 \times 10^{-8} \\ 8.331 \times 10^{-8} \\ 5.019 \times 10^{-8} \\ 3.192 \times 10^{-8} \\ -1.006 \times 10^{-8} \\ -1.789 \times 10^{-8} \\ 1.635 \times 10^{-8} \\ -8.033 \times 10^{-10} \\ 2.076 \times 10^{-8} \end{pmatrix}$$

a := 1..9

b := 1..9

$\underline{W}_{a,b} := 0$

$$\alpha := \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.30 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} W_{1,1} &:= \alpha_1 & W_{2,2} &:= \alpha_2 & W_{3,3} &:= \alpha_3 \\ W_{4,4} &:= \alpha_1 & W_{5,5} &:= \alpha_2 & W_{6,6} &:= \alpha_3 \\ W_{7,7} &:= \alpha_1 & W_{8,8} &:= \alpha_2 & W_{9,9} &:= \alpha_3 \end{aligned}$$

$$\underline{m} := (A^T \cdot W \cdot A)^{-1} \cdot (W \cdot A)^T \cdot B$$