

## Um estudo da presença da simetria nos livros didáticos de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental

*A study of the presence of symmetry in mathematics textbooks from middle school*

**Poliana de Araújo de Sousa**

Licenciada em Matemática  
UNESP – SP – Brasil  
polianaaraujosousa97@gmail.com  
<https://orcid.org/0000-0002-7376-6766>

**Douglas Ribeiro Guimarães**

Mestrando em Educação Matemática  
UNESP – SP – Brasil  
douglasrguimaraes5@gmail.com  
<http://orcid.org/0000-0001-6247-3506>

**Rúbia Barcelos Amaral-Schio**

Livre-Docente em Educação Matemática  
UNESP – SP – Brasil  
rubia.amaral@unesp.br  
<http://orcid.org/0000-0003-4393-6127>

### Resumo

Este artigo apresenta resultados de uma pesquisa acerca do tema simetria, a partir de uma análise de livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental, que são recursos muito utilizados pelo professor de Matemática. De abordagem qualitativa, foi realizada uma pesquisa que se ancorou na análise de documentos e no conceito de demanda cognitiva, focando o estudo de três coleções. Os resultados apontam que, dos quatro tipos de simetria, os que se destacam nos livros são rotação, translação e reflexão. Há um predomínio da simetria de reflexão, e salientamos o papel das cores no estudo desse conceito, observando que, ainda que essa não seja uma propriedade geométrica, a cor é usada como critério de simetria. Não obstante, notamos que práticas culturais e a Arte são exemplos constantes da presença da simetria no cotidiano, e observamos o papel relevante do eixo de simetria, como, por exemplo, da sua exploração nas letras do alfabeto, muitas vezes tornando as atividades de alto nível de demanda cognitiva. No que tange à simetria de rotação, destacamos que a posição do seu centro aparece de forma diferente nas coleções, apresentando uniformemente o ponto no interior da figura – ou no seu exterior (não variando as possibilidades). Quanto à translação, foi possível notar atividades repetitivas que mantinham padrões prototípicos de deslocamento na horizontal/vertical. Esperamos que este estudo propicie a reflexão crítica sobre o estudo da simetria, e ainda fomente a realização de novas pesquisas que levem à reflexão de professores e futuros professores sobre a utilização do livro didático em suas aulas, pois, mesmo sendo um recurso muito presente nas escolas, é fundamental que o professor tenha um olhar crítico sobre os conteúdos e a abordagem dos mesmos.

Palavras-Chave: Simetria. Demanda cognitiva. Reflexão. Rotação. Translação.

## Abstract

This paper presents results of a research about symmetry, from an analysis of textbooks middle school, which are resources widely used by the Mathematics teachers. With a qualitative approach, a research was carried out that was anchored in the analysis of documents and in the concept of cognitive demand, focusing on the study of three collections. The results show that, of the four types of symmetry, those that stand out in the books are rotation, translation and reflection. There is a predominance of reflection, and we emphasize the role of colors in the study of this concept, noting that although this is not a geometric property, color is used as a criterion of symmetry. Nevertheless, we note that cultural practices and Art are constant examples of the presence of symmetry in everyday life, and we observe the relevant role of the axis of symmetry, such as its exploration in the letters of the alphabet, often making tasks of a high level cognitive demand. Regarding of rotation, we point out that the position of its center appears differently in the collections, presenting the point uniformly inside the figure – or on its outside (the possibilities not varying). As for translation, it was possible to notice repetitive tasks that maintained prototypical patterns of horizontal/vertical displacement. We hope that this study promotes critical reflection on the study of symmetry, and also promotes the development of new researches that lead to the reflection of teachers and future teachers on the use of textbooks in their classes, because even though it is a very present resource in schools, it is essential that the teacher has a critical view at the contents and their approach.

Keywords: Symmetry. Cognitive demand. Reflection. Rotation. Translation.

## Introdução

O estudo de simetria tem papel importante na Geometria, pois apresenta uma variedade de conceitos que estão relacionados com outras áreas do conhecimento, principalmente a Arquitetura e as Artes. Esses conceitos são chamados de reflexão, rotação, translação e reflexão com deslizamento. Por considerá-los fundamentais para o ensino de Geometria, optamos por analisar livros didáticos de Matemática destinados aos Anos Finais do Ensino Fundamental, com foco no conteúdo de simetria e que foram aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2017 (BRASIL, 2016).

Entendemos que a análise de conteúdos geométricos presentes nos livros didáticos permite identificar as diferentes abordagens exploradas no desenvolvimento desses conteúdos. Neste artigo, compartilhamos resultados de uma pesquisa cujo objetivo foi estudar a presença da simetria em livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental, a partir da análise de três coleções. Dessa forma, nosso problema de pesquisa focava a construção do conceito simetria, discutindo a natureza das atividades propostas à luz do nível de demanda cognitiva, e analisando as relações feitas com o cotidiano e com outros conceitos, tanto do campo da Matemática como de outras áreas do conhecimento (buscando contribuir também com uma reflexão sobre a importância do livro didático como uma ferramenta pedagógica).

Ressaltamos a necessidade de olhar para os livros didáticos devido à sua grande utilização nas aulas de Matemática (AMARAL-SCHIO, 2018; BIEHL; BAYER, 2009; GUIMARÃES *et al.*, 2007; LAJOLO, 1996). Há pesquisas que abordam diversos assuntos relevantes ao fazer uso dos livros (AMARAL; HOLLEBRANDS, 2017; CARRETA; GODOY, 2018; GODOY, 2016; MORAIS; BELLEMAIN; LIMA, 2014), assim como algumas que exploram o tema simetria (FONSECA, 2013; MARTINS, 2018; RAFAEL; MIRANDA, 2018; SANTOS, 2010; SILVA, 2010; TONETTO, 2004), que trazemos para reflexão em consonância com os dados produzidos nessa pesquisa.

Destacamos, ainda, que as orientações curriculares, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) e o currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011), documentos importantes que guiavam, até o PNLD 2017, os conteúdos dos livros didáticos são fontes importantes para as discussões apresentadas. Inferimos, no entanto, que, com a promulgação da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) e do novo currículo paulista (SÃO PAULO, 2019), os livros passaram por mudanças no PNLD dos Anos Finais do Ensino Fundamental, em 2020.

### Conceito de simetria

Simetria é um conceito que está relacionado com diversas áreas do conhecimento e possui várias aplicações. Ornes (2015, p. 59) aponta que “a simetria é o conceito de que certos objetos podem passar por uma série de transformações – girar, se dobrar, se refletir, se mover pelo tempo – e, ao final de todas elas, permanecerem inalterados”, explicando que sua presença está no universo como um todo.

Rezende e Queiroz (2000), para tratar de simetria, apresentam o conceito de isometria, que são as transformações no plano em que se preservam as distâncias. Para reflexão, partem de uma reta  $r$  e afirmam que “A isometria dada pela transformação, que leva cada ponto  $P$  do plano em seu simétrico  $P'$  em relação à reta  $r$ , é chamada **reflexão na reta  $r$** , ou simetria de reflexão na reta  $r$ ” (REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 216, grifos das autoras). Essas autoras ainda definem que “Uma figura tem **simetria de rotação** de um ângulo  $\theta$ , ou tem **simetria  $\theta$ -rotacional**, quando coincide com sua imagem pela rotação do ângulo  $\theta$  ao redor de seu centro” (REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 226, grifos das autoras).

Oliveira e Silva (2016) afirmam que,

dado  $AB$  um segmento orientado, a **translação** definida por  $AB$  é a transformação geométrica  $T$  que faz corresponder a cada ponto  $P$  do plano, o ponto  $Q$  é a extremidade do segmento orientado  $PQ$  se, e somente se, os segmentos orientados  $AB$  e  $PQ$  possuem o mesmo comprimento, a mesma

direção (ou seja, são paralelos) e o mesmo sentido (OLIVEIRA; SILVA, 2016, p. 10, grifos nossos).

Um outro conceito para simetria é o de **reflexão com deslizamento** ou reflexão transladada. Segundo Neves (2011, p. 16), “trata-se da composição de uma reflexão em relação a uma reta  $r$  com uma translação (deslizamento) na mesma direção da reta  $r$  (ou vice versa)”. Como exemplo do cotidiano, podemos associar este conceito com as pegadas deixadas por uma pessoa, que caminhou em uma linha reta, conforme a Figura 1.

Figura 1 - Pegadas deixadas por uma pessoa em linha reta.



Fonte: Neves (2011, p. 18).

Analisando os livros didáticos de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental, encontramos algumas definições para simetria (axial). No livro *Vontade de saber matemática*, Souza e Pataro (2015a, p. 193, grifos dos autores, inserção nossa) a apresentam da seguinte maneira: “o segmento de reta divide a figura [2] em duas partes. Ao dobrarmos a figura ao longo do segmento de reta, as duas partes vão se sobrepor. Nesse caso dizemos que essa figura é **simétrica**, e o segmento de reta é o **eixo de simetria**”. Os autores explicam que outras figuras podem apresentar mais de um eixo de simetria.

Figura 2 - Figura com simetria de reflexão.



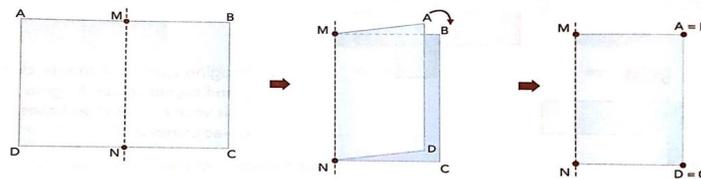
placa de trânsito

Fonte: Souza e Pataro (2015a, p. 192).

Destacando que será um estudo das características presentes em algumas figuras geométricas, em objetos e seres vivos, na coleção *Matemática nos dias de hoje*, Centurión e Jakubovic (2015a, p. 84, grifos dos autores) apontam que

a palavra **axial** se refere ao que tem eixo. Desenhamos o retângulo ABCD no papel. Marcamos os pontos médios M e N e depois dobramos o papel na reta  $\overleftrightarrow{MN}$ . [...] O lado  $\overline{AD}$  do retângulo cai exatamente sobre o  $\overline{BC}$ . Além disso,  $\overline{AM}$  e  $\overline{MB}$  também ficam sobrepostos, assim como  $\overline{DN}$  e  $\overline{NC}$ . [...] Na situação mostrada, dizemos que a reta  $\overleftrightarrow{MN}$  é **eixo de simetria** do retângulo.

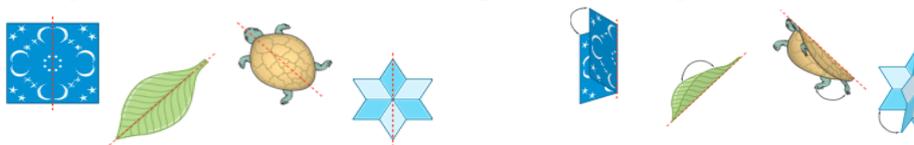
Figura 3 - Simetria axial em um retângulo.



Fonte: Centurión e Jakubovic (2015a, p. 84).

E, na coleção *Projeto Araribá: Matemática* (GAY, 2014a, p. 108, grifos da autora, inserções nossas), por sua vez, afirma-se que, ao se fazer uma dobra, “as duas partes de cada figura [4] coincidem. Por isso dizemos que essas figuras são **simétricas** em relação à dobra [...]. A linha que traçamos é chamada de **eixo de simetria** da figura [e] uma figura pode ter mais de um eixo de simetria”.

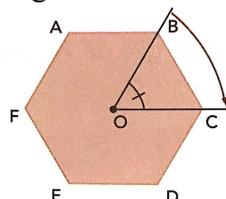
Figura 4 - Eixos de simetria das figuras e suas respectivas dobraduras.



Fonte: Gay (2014a, p. 108).

Nos livros didáticos do 7º ano do Ensino Fundamental, o conceito de simetria axial é retomado e é construído o de simetria de rotação. Souza e Pataro (2015b, p. 268, grifos dos autores) afirmam que “A **simetria de rotação** consiste em rotacionar uma figura em torno de um ponto **O**. O **ângulo de rotação** pode ser no sentido **horário** ou **anti-horário**”. Centurión e Jakubovic (2015b, p. 178, grifo dos autores) apontam que “Uma figura tem **simetria de rotação** se, após girar certo ângulo diferente do ângulo nulo, ela aparentemente não mudar de posição, embora seus pontos tenham mudado de lugar”. Assim, como exemplo, trazem as rotações de um hexágono regular, explicando que, após uma rotação de  $60^\circ$ , a partir do centro do polígono, este ficará inalterado, mudando apenas seus vértices (Figura 5).

Figura 5 - Hexágono regular com simetria de rotação de  $60^\circ$ .



Fonte: Centurión e Jakubovic (2015b, p. 179).

Gay (2014b) aborda as transformações geométricas de figuras planas iniciando pela observação de que as transformações que ocorrem nas figuras originais geram novas figuras, de modo que mantêm sempre o tamanho e a forma. “A **rotação** é a transformação geométrica no plano pela qual a figura é girada ao redor de um ponto, no sentido horário ou no sentido anti-horário, de acordo com certo ângulo” e “A **translação** é a transformação geométrica no plano pela qual a figura é deslocada por certo comprimento, em determinada direção e sentido, de modo que cada um dos pontos da figura original sofra o mesmo deslocamento” (GAY, 2014, p. 82-83, grifos da autora). Souza e Pataro (2015c, p. 74, grifo dos autores) afirmam que a “transformação de uma figura que sofre um deslocamento de acordo com uma distância, uma direção e um sentido, mantendo seu tamanho e sua forma, é chamada de **simetria de translação**”.

Apresentamos na sequência o conceito de demanda cognitiva, e pesquisas que foram realizadas com livros didáticos, em especial sobre o tema simetria, que coletivamente constituíram a lente teórica para a análise dos dados.

### **Demanda cognitiva**

Para Stein *et al.* (2009, p. 1), a demanda cognitiva de uma atividade é “o tipo e o nível de pensamento que se requer dos alunos para poderem participar da atividade e resolvê-la com sucesso”. Esses autores elaboraram critérios teóricos para identificar o nível de demanda cognitiva necessário para solucionar problemas ou exercícios propostos em livros didáticos, os quais compõem o modelo de demanda cognitiva.

Esse modelo identifica quatro níveis de demanda cognitiva possíveis nas atividades, avaliando a reflexão e o raciocínio necessários para que o aluno possa resolvê-las com sucesso. Esses níveis são: memorização, que corresponde a atividades com menor demanda cognitiva, ou seja, que requerem apenas um raciocínio simples; algoritmos sem conexões; algoritmos com conexões; e fazer matemática, onde estão localizadas as atividades com maior demanda cognitiva, ou seja, aquelas que exigem raciocínio complexo. No entanto, Benedicto, Jaime e Gutiérrez (2015, p. 154-155) observaram que

as definições de algumas características dos níveis são ambíguas e não se adaptam a atividades complexas diferentes daquelas utilizadas pelos autores citados, por exemplo, às atividades geométricas. Essas dificuldades nos levaram a tentar adaptar a caracterização do modelo existente [...] às atividades de padrões geométricos.

Esses autores criaram um modelo com seis categorias: o procedimento de resolução exigido pela atividade; o objetivo com o qual a atividade é proposta; o esforço cognitivo necessário para executar sua resolução; o conteúdo matemático implícito em sua resolução; o tipo de explicação apresentada pelo estudante; e as formas de representação contidas na solução. Para a análise a partir desse modelo, no entanto, é preciso ter acesso a resoluções de alunos. Como nosso interesse estava na análise das atividades de simetria propostas nos livros didáticos, seguimos critérios apresentados por Amaral e Hollebrands (2017).

Essas autoras criaram critérios a partir de Wijaya, van den Heuvel-Panhuizen e Doorman (2015). Para esses autores, é fundamental, para o aprendizado dos alunos, que a resolução de atividades com contexto propicie experiências com atividades que abranjam todos os diferentes níveis de demandas cognitivas, incluindo atividades de reprodução, conexão e reflexão (OECD<sup>1</sup>, 2009).

Tarefas de reprodução exigem a recuperação de propriedades matemáticas e a aplicação de procedimentos de rotina ou algoritmos padrão. Tais tarefas não requerem modelagem matemática. As tarefas de conexão requerem integração e vinculação de diferentes cadeias matemáticas do currículo ou diferentes representações de um problema. Essas tarefas também exigem a interpretação de uma situação problemática e o envolvimento dos alunos em um raciocínio matemático simples. As tarefas de reflexão incluem situações problemáticas complexas nas quais não é óbvio antecipadamente quais procedimentos matemáticos devem ser realizados (WIJAYA; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN; DOORMAN, 2015, p. 46).

Stein e Smith (1998) observam que as competências que os alunos eventualmente dominam dependem das demandas cognitivas das tarefas matemáticas nas quais foram envolvidas. Sendo assim, Wijaya, van den Heuvel-Panhuizen e Doorman (2015) ressaltam que essas tarefas de reflexão não devem faltar. A partir dessas ponderações, Amaral e Hollebrands (2017), ao analisarem mais de 2000 tarefas de semelhança de figuras geométricas, em seis livros, estabeleceram critérios como: se uma tarefa demanda para sua solução a mesma resolução que a tarefa anterior, ou que um exemplo recém-apresentado, então ela é considerada de baixa demanda. Se, por outro lado, para resolvê-la é preciso retomar conhecimentos estudados previamente, ou criar uma estratégia ainda não exemplificada pelo autor, então ela é considerada de alta demanda. Nesse contexto, ajustamos os critérios para a temática desta pesquisa, sobre simetria, e partimos dessa classificação para seguirmos em nossa análise. Seguindo também a classificação das autoras, cabe observar que, como cada item pode ter uma

---

<sup>1</sup> Sigla em inglês da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico.

proposta de nível diferente, eles foram contados separadamente (por exemplo, se o exercício 1 tinha questões a), b) e c), esse seria contabilizado três vezes).

Como mencionamos, além de considerar o conceito de demanda cognitiva no processo de análise das tarefas de simetria, procuramos conhecer pesquisas que foram desenvolvidas com foco nos livros didáticos e, em especial, relacionadas à temática da simetria, para complementar aspectos relevantes de análise.

### **Livros didáticos e o estudo sobre simetria**

O uso do livro didático é uma prática no Brasil há anos. Programas governamentais foram criados com o objetivo de primar pela qualidade desse material, fornecido gratuitamente aos alunos das escolas públicas. O papel do livro didático é dar suporte ao professor, que tem liberdade para usá-lo à sua maneira, integrando-o, por exemplo, com outras mídias, como computador, internet, vídeo, material concreto, outros livros etc. Para Guimarães *et al.* (2007, p. 3),

o livro didático se constitui em um importante recurso utilizado por professores na condução e/ou elaboração das abordagens de ensino, em parte pela ausência de outros materiais que orientem os professores sobre o quê e como ensinar, e em parte pela frequente dificuldade de acesso do aluno a outras fontes de estudo e pesquisa.

Os livros didáticos são referência em muitas aulas de Matemática, sendo uma fonte de definições, exemplos, exercícios, entre outros elementos. Lima, Januario e Pires (2016, p. 720) destacam que “os livros didáticos são os materiais mais difundidos e utilizados”. Corroborando a importância dos livros didáticos em sala de aula, Biehl e Bayer (2009, n.p) apontam que “o uso do livro didático pelo professor como material didático, ao lado do currículo, dos programas e outros materiais, institui-se historicamente como um dos instrumentos para o ensino”.

Para Choppin (2004), os livros didáticos apresentam quatro funções essenciais: referencial, instrumental, ideológica e cultural, e documental. A função referencial existe em decorrência de um programa de ensino, assim, o livro “constitui o suporte privilegiado dos conteúdos educativos, o depositário dos conhecimentos, técnicas ou habilidades que um grupo social acredita que seja necessário transmitir às novas gerações” (CHOPPIN, 2004, p. 553). Na função instrumental, “o livro didático põe em prática métodos de aprendizagem, [...] que, segundo o contexto, visam a facilitar a memorização dos conhecimentos, favorecer a aquisição de competências disciplinares ou transversais” (CHOPPIN, 2004, p. 553). Na função ideológica e cultural, “o livro didático se afirmou como um dos vetores essenciais da língua, da cultura e

dos valores das classes dirigentes” (CHOPPIN, 2004, p. 553). Dessa forma, o livro contribui para um importante papel político. Já no âmbito da função documental, o autor destaca que ela é recente e que pode ser identificada, com exceções, nos ambientes em que os alunos são levados à autonomia, a partir de leituras não dirigidas, e os textos e ícones podem desenvolver um “espírito crítico do aluno” (CHOPPIN, 2004, p. 553).

Podemos destacar que três dessas funções foram identificadas nesta pesquisa. A função referencial foi observada quando abordamos os conceitos de simetria que os livros didáticos apresentam. A instrumental se notifica ao descrever como os livros representam, em exercícios e tarefas, alguns dos conceitos de simetria; e a ideológica e cultural, quando os autores dos livros trazem elementos arquitetônicos ou artísticos que estão relacionados com a simetria.

Analisar a Matemática presente nos livros didáticos é um campo recente de pesquisa, e está em estágio de desenvolvimento se comparado com muitos outros campos de pesquisa em Educação Matemática (FAN, 2013). Na perspectiva de contribuir com investigações nesse contexto, buscamos por pesquisas dessa natureza, com foco em conceitos de simetria. A partir de palavras-chave como “livro didático” e “simetria”, foram selecionados seis trabalhos que entendemos consoantes com a pesquisa aqui apresentada.

Tonetto (2004) identificou como as transformações geométricas são apresentadas nos livros didáticos do Ensino Fundamental, utilizando como dados três coleções aprovadas pelo Ministério da Educação. A pesquisa foi embasada sob três orientações oficiais, são elas: os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a Proposta Curricular de Santa Catarina e o Planejamento Anual de sete escolas, entre públicas e particulares. Tonetto (2004, p. 9) explica que seu objetivo, com as orientações, foi de “explicitar o que, como e quando (em que classes ou níveis), as transformações geométricas devem ser estudadas”. Sua análise foi dividida conforme a classificação dos tipos de problemas que os livros continham. Destacam-se duas categorias nesta análise: as transformações geométricas como objeto de estudo e como ferramenta na resolução de problemas.

Como resultados, a autora aponta que os problemas, nas três coleções analisadas, mostram que o ensino de simetria axial é voltado ao eixo de simetria. Ainda, que na 5ª série (atual 6º ano) os estudos se concentram na simetria axial, enquanto na 6ª série (7º ano) são voltados para os estudos de simetria central. Conclui que, pela ausência de se abordarem as propriedades das transformações geométricas, o uso para a resolução de problemas fica restrito.

A pesquisa de Rafael e Miranda (2018) tem características parecidas com o trabalho de Tonetto (2004). As referidas autoras investigaram e analisaram as propostas para o ensino de

simetria nos Anos Finais do Ensino Fundamental, utilizando os PCN e o Conteúdo Básico Comum de Minas Gerais, além de verificar a abordagem destes conteúdos em duas coleções aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), no ano de 2017. A análise consistiu na categorização de informações, realizando uma comparação entre as obras selecionadas, de modo que concluem que não foram verificadas “situações que permitam ao aluno, experimentar, conjecturar, argumentar, levantar hipóteses, formalizar e generalizar conceitos de simetria, tão pouco que possibilite as deduções e demonstrações” (RAFAEL; MIRANDA, 2018, p. 49). Ainda, os resultados apresentados são que as duas coleções abordam as noções de simetria de maneiras distintas. Uma com poucos conceitos e apenas a dedicação ao estudo dos eixos de simetria; já a segunda abordou as reflexões, rotações e translações, atendendo melhor às orientações citadas anteriormente.

Silva (2010), por sua vez, investiga os conceitos de simetria axial através do uso do erro em uma abordagem reconstrutiva, com estratégias pedagógicas utilizando tecnologias. Sua pesquisa ocorreu em duas etapas, contudo, vamos apresentar apenas a primeira delas, por se tratar da análise de livros didáticos do Ensino Fundamental. Diferentemente das duas pesquisas anteriores, o autor traz referenciais que definem a simetria de reflexão, mas também apresenta as visões dos PCN. As análises dos livros se concentraram em três coleções, duas das quais foram selecionadas pelo PNLD de 2008. Para essa análise, Silva (2010, p. 40) define três categorias: “Atividades que priorizam somente a construção; Como ferramenta para o estudo de outros conceitos ou propriedades; Como ferramenta para construção de outras figuras”. O autor indica que as três coleções exploram a simetria axial como ferramenta aos estudos de outros conceitos e/ou propriedades, e, ainda, que

Comparando o que foi proposto pelas obras, fica perceptível a ênfase na 5ª série através da apresentação de figuras que apresentam eixo de simetria e figuras simétricas duas a duas. As obras analisadas propõem, através de roteiros de construção, traçar o eixo de simetria, obter figuras simétricas de outras e também trabalhar com dobraduras (SILVA, 2010, p. 57).

Podemos dizer que as pesquisas de Tonetto (2004) e Silva (2010) apontam para o conceito de simetria axial como dominante nos estudos do 6º ano/5ª série. Ademais, o trabalho de Rafael e Miranda (2018) mostrou que uma das coleções privilegia o estudo do eixo de simetria, ou seja, o estudo da simetria de reflexão.

Outra pesquisa revisada é a de Santos (2010), que analisa atividades de simetria que articulam a Geometria e as Artes Visuais, presentes nos livros didáticos das séries iniciais do Ensino Fundamental. A autora traz três enfoques para a simetria: sob um ponto de vista

matemático; sobre o ensino; e em conexão com as Artes Visuais. No total, foram analisados 17 livros aprovados pelo PNLD de 2010 e 200 atividades; já em outro enfoque, qualitativo, a autora identificou propriedades da simetria que são trabalhadas de forma implícita, como a perpendicularidade, além do maior destaque para as figuras conexas, em comparação com as desconexas.

Na pesquisa de Santos (2010), um elemento importante é o caso das cores para determinar a simetria de algumas figuras. Segundo a autora, a cor não é uma propriedade geométrica, e sim estética. Outro resultado mostra que o eixo de simetria é, predominantemente, deixado na posição vertical. Por fim, Santos (2010, p. 194) destaca que “faz-se necessário que os livros explicitem as diferenças e busquem uma distribuição igualitária das figuras nas atividades, pois o tipo de figura gera estratégias de resolução de problemas diferentes”.

Já a pesquisa de Martins (2018) analisa os casos de simetria nos livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental, contudo, estabelece relações conceituais e didáticas com artefatos socioculturais. Considera, para sua análise, cinco coleções aprovadas pelo PNLD, das quais há um total de 11 livros que estudam os conceitos de simetria. Os artefatos socioculturais são compostos por pinturas (corporais e de carrocerias de caminhão), tapetes de crochê e cerâmicas de duas cidades no estado do Pará. O autor desenvolve os conceitos de simetria atrelados aos artefatos, identificando as reflexões, rotações, translações e reflexões deslizantes. A análise mostrou que apenas dois livros dentre os 11 apresentam relações conceituais, quando definem ou iniciam algum conteúdo; já sobre as relações didáticas, Martins (2018, p. 116) diz “que nenhum dos livros estudados mobiliza os artefatos socioculturais nas atividades de ensino propostas, o que mostra um descompasso entre a forma como a simetria foi introduzida, definida e como está sendo cobrado do aluno nas atividades”. Em suas considerações, o autor propõe ações pedagógicas aos professores, em uma tentativa de complementação aos livros didáticos.

A pesquisa de Fonseca (2013) teve como objetivo analisar o conceito de simetria – via processo de modelização matemática – adotado nos livros didáticos do Ensino Fundamental, em que discute a importância científica do conceito, sua presença em textos educacionais e nos Guias do Livro Didático do PNLD, além de apresentar algumas pesquisas sobre o ensino de simetria e, através da ideia de modelo, introduzir as simetrias geradas por isometrias do plano euclidiano. Desse modo, o referido autor verificou, entre outros casos, a inclusão da cor como um critério de simetria, “podemos levar em conta a cor das figuras no estudo de simetria em geometria, sabendo-se que a cor não é um atributo geométrico das figuras?” (FONSECA, 2013,

p. 33), além de mostrar que o ensino de simetria de reflexão tem uma maior predominância em tais livros; “no ensino escolar atual, o termo simetria, na maioria das vezes, é tomado como sinônimo de simetria de reflexão” (FONSECA, 2013, p. 37).

As pesquisas de Santos (2010) e Fonseca (2013) mostram que a cor como um dos critérios de simetria nas figuras geométricas não tem embasamentos no campo da Geometria. Santos (2010) destaca que a cor pode ser um critério estético, já que em sua pesquisa buscou evidenciar as relações entre a Geometria e as Artes Visuais, e Fonseca (2013) explica que a cor não tem propriedade geométrica, apesar de tarefas dos livros didáticos levarem este ponto em consideração.

Situando nossa pesquisa no cenário composto pelo conjunto das anteriores, salientamos que nosso foco foi o estudo da presença da simetria em livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental, apresentando resultados complementares aos anteriores. Ademais, consideramos como diferencial: aspectos relativos aos níveis de demanda cognitiva das tarefas e a revisão de literatura, que pode contribuir com pesquisas na área.

## **Metodologia**

Este trabalho segue a abordagem de pesquisa qualitativa, no âmbito da Educação Matemática, que tem, como questões relacionadas,

pesquisas que priorizem a compreensão da dinâmica das salas de aula, a investigação de atividades que auxiliem no ensino e na aprendizagem de Matemática, o estudo histórico da evolução dos materiais didáticos para que possamos pensar em possibilidades de atualização e aprimoramento, as possibilidades das Tendências em Educação Matemática, entre outros (BORBA; ALMEIDA; GRACIAS, 2018, p. 77-78).

Garnica (2004, p. 86) define a investigação qualitativa a partir das seguintes características, as quais consideramos consoantes com nossa perspectiva de pesquisa:

(a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas.

Sendo assim, adotamos neste estudo a análise de documentos, que para Lüdke e André (2014, p. 45) constituem “uma fonte poderosa de onde podem ser retiradas evidências que

fundamentem afirmações e declarações do pesquisador”. Os documentos que o compõem são três coleções de livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental (aprovadas pelo PNLD 2017): *Projeto Araribá: Matemática* (GAY, 2014a; 2014b), *Vontade de saber matemática* (SOUZA; PATARO, 2015a; 2015b; 2015c) e *Matemática nos dias de hoje: na medida certa* (CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2015a; 2015b). A escolha teve como critério inicial a seleção de livros de editoras diferentes. Considerando nosso acesso a coleções completas, ficamos com três coleções, que totalizam 12 livros, quantidade essa que ponderamos adequada para o período de 18 meses que dedicamos à análise do material. Desses, cinco não apresentam conteúdo de simetria.

Gonsalves (2005, p. 32) define que os documentos correspondem “a uma informação organizada sistematicamente, comunicada de diferentes maneiras (oral, escrita, visual ou gestualmente) e registrada em material durável”, o que nos parece coerente com o fato de os documentos analisados serem os livros didáticos citados anteriormente. Dessa forma, os primeiros passos para a organização dos dados foi selecionar os capítulos destinados ao ensino de simetria. Depois, fizemos uma leitura destes capítulos, procurando identificar critérios, definições, exemplos e tarefas que mostrassem de que forma os livros estavam se referindo às simetrias.

Para análise partimos das pesquisas realizadas previamente, em uma constante interlocução com elas, teórica e criticamente, não deixando de considerar aspectos relacionados aos níveis de demanda cognitiva. Para a classificação do nível de demanda cognitiva, criamos um processo inicial de análise de um conjunto de tarefas em que, após classificá-las individualmente, nos reuníamos para debater o resultado. Aquelas que não coincidiam nos possibilitavam aprimorar os critérios, de modo que, após alguns encontros, conseguimos definir com maior detalhe os critérios e, assim, as classificações convergiam. Por exemplo, se para solucionar uma atividade era preciso resgatar conceitos previamente estudados, era considerada de alta demanda. Se, após uma atividade de alta demanda, seguiam outras em que se repetia o padrão de solução, essas eram então consideradas de baixa demanda. E assim seguia um conjunto de critérios.

Também, periodicamente, nos reuníamos para compartilhar nossas análises realizadas separadamente, a partir da lente teórica que assumimos. Aspectos diferentes foram se complementando, até constituirmos os dados e resultados das análises, que apresentamos na sequência.

## **Análise dos dados**

Iniciamos a análise das tarefas pela classificação dos níveis de demanda cognitiva de cada uma, o que está sintetizado na Tabela 1, a seguir. Nela é possível visualizar a distribuição das atividades por coleção e por ano, considerando a quantidade de cada nível. Destacamos que a coleção de Centurión e Jakubovic (2015a, 2015b) aborda mais tarefas com alto nível de demanda do que de baixo nível, no entanto, em relação ao total de tarefas, é inferior às outras duas coleções.

Tabela 1: Classificação das tarefas de simetria.

Legenda: L1, L6 (GAY, 2014a, 2014b). L2, L4 e L7 (SOUZA; PATARO, 2015a, 2015b, 2015c). L3 e L5 (CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2015a, 2015b).

Livros	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7
	6º ano			7º ano		8º ano	9º ano
<b>Tarefas com baixo nível de demanda cognitiva</b>	31	38	4	49	6	13	29
<b>Tarefas com alto nível de demanda cognitiva</b>	12	11	8	16	11	10	14
<b>Número total de tarefas</b>	43	49	12	65	17	23	43

Fonte: Elaborada pelos autores.

No livro *Projeto Araribá: Matemática*, do 6º ano, encontramos no início do capítulo “Simetria” uma pequena observação para o professor sobre os tipos de simetria (reflexão, rotação e translação), porém, é ressaltado que a palavra “simetria” é usada para se referir à simetria de reflexão em relação a uma reta (Figura 6). Isso confirma os resultados de Fonseca (2013) sobre a preferência da simetria de reflexão nessa fase escolar.

Figura 6 - Definição de simetria.



### Figuras simétricas

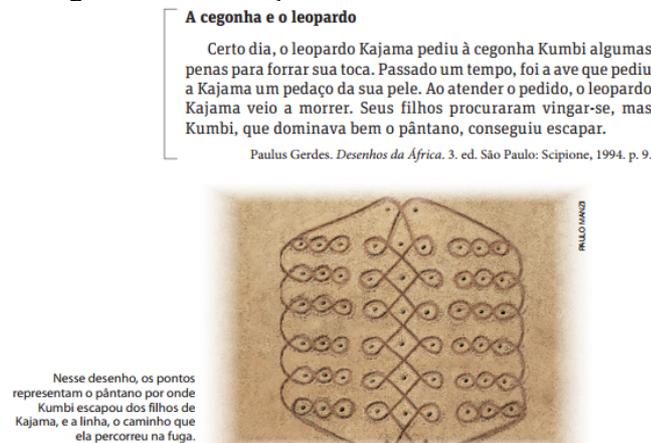
Fonte: Gay (2014a, p. 107).

Na Matemática, há as simetrias de reflexão, de translação e de rotação. Nesta unidade, chamaremos de “simetria” a simetria de reflexão em relação a uma reta.

Fonseca (2013, p. 9) destaca que “o conceito de simetria ocupa um lugar privilegiado no saber científico nos campos da: Matemática, Física, Química, Biologia, entre outras. Também é um conceito central na Arquitetura e nas Artes”. Nesse sentido, alguns livros analisados apresentam tarefas que trazem conteúdos de simetria inseridos em capítulos que tratam de outros conteúdos, e isso costuma acontecer também em outras áreas.

Gay (2014a), para introduzir o conceito estudado, traz uma prática cultural do povo africano, que consiste em contar histórias e, enquanto as narra, o contador vai criando um desenho na areia que simboliza a ação da história (Figura 7). De acordo com a autora, “a arte de desenhar a história na areia tem regras, ritmo e técnica” (GAY, 2014a, p. 107), em que as representações apresentam simetria. Assim como a pesquisa de Martins (2018) identificou, esta prática cultural apresenta o conceito, no caso, da simetria de reflexão, que o referido autor aponta como “relações conceituais” com os artefatos culturais. Inferimos que especificamente esta coleção é a mesma da pesquisa citada, contudo, no ano de publicação em que encontramos esse contexto, ele aparece no 6º ano e, na pesquisa de Martins (2018), está contido no 8º ano.

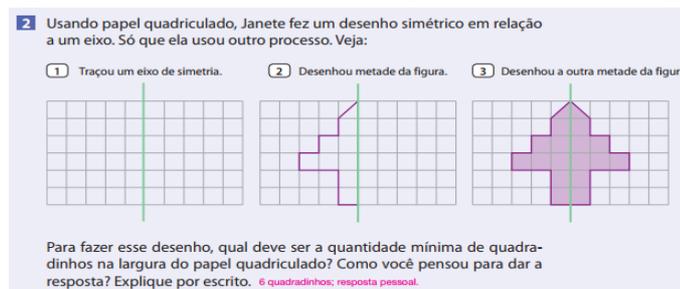
Figura 7 - Introdução da simetria de reflexão.



Fonte: Gay (2014a, p. 107).

Identificamos, ainda, que os primeiros exemplos e exercícios mostravam as representações das reflexões com o eixo de simetria interceptando as figuras geométricas (Figura 8) e que, sem explicações, o eixo deixa de interceptar as formas geométricas nas outras tarefas (Figura 9). Destacamos esse fato por perceber que Santos (2010), que analisou os livros dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, também observou que não identificou essas explicações no material.

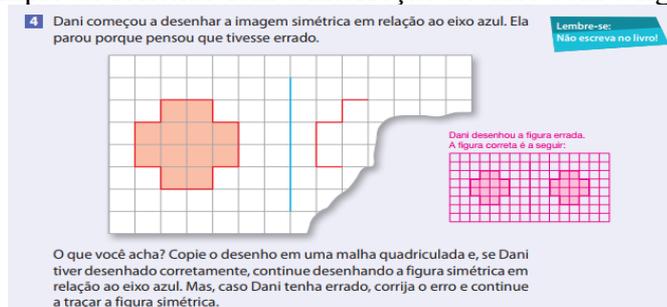
Figura 8 - Exemplo de reflexão com a interseção do eixo com a figura geométrica.



Fonte: Gay (2014a, p. 110).

Na tarefa proposta por Gay (2014a) na Figura 8, a simetria é estudada com uso do papel quadriculado, explorando o conceito de equidistância, que não é abordado previamente pela autora. Sobre isso, Santos (2010, p. 122) observa na análise de suas atividades que “não se faz menção à equidistância, embora algumas atividades oportunizem a explicitação dessa propriedade”.

Figura 9 - Exemplo de reflexão sem a interseção do eixo com a figura geométrica.



Fonte: Gay (2014a, p. 111).

Na Figura 9, podemos sugerir outras discussões. Fonseca (2013) traz uma pesquisa<sup>2</sup> que tinha como objetivo minimizar os erros dos alunos e, entre uma das tarefas para teste, apresenta “atividades de completar figuras geométricas de modo que a figura final tivesse simetria de reflexão e atividades em que intervinha a questão dos ângulos de uma reta e sua refletida com relação a um eixo e da equidistância do ponto e seu refletido em relação ao eixo” (FONSECA, 2013, p. 22). Pensando nesta questão, observamos que a tarefa de Gay (2014a), mostrada na Figura 9, traz exatamente essa discussão, pedindo ao estudante que identifique se o processo que está sendo realizado para encontrar a imagem simétrica está correto. Desse modo, o estudante deve perceber que não está no caminho certo, pois as distâncias para construção da figura simétrica não estão sendo preservadas.

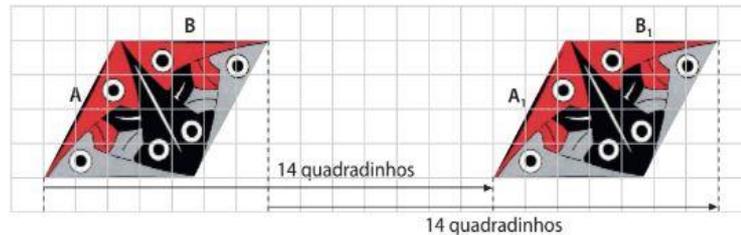
Nesse cenário, consideramos que esse exercício possui uma alta demanda cognitiva (AMARAL; HOLLEBRANDS, 2017), sendo que, sem explicações, o eixo deixa de intersectar as figuras geométricas. Santos (2010, p. 144) afirma ser importante o trabalho das figuras em que o eixo de simetria não a intersecta, “pois o aluno tem uma visualização global da figura e da distância estabelecida em relação ao eixo.” Essa tarefa é importante para construir o conceito de simetria de modo significativo. Clemente *et al.* (2015, p. 8) apontam “a importância de novas e diferentes atividades serem abordadas no ensino da matemática, principalmente, em geometria”.

<sup>2</sup> SIQUEIRA, J. E. **Explorando a simetria de reflexão**: uma sequência didática no Cabri-Géomètre. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2000.



A definição de translação, por sua vez, segue com o mesmo objetivo de explorar o quadro de Escher, conforme a Figura 12. Dessa forma, Gay (2014b) apresenta todas as tarefas deste conceito na malha quadriculada, seguindo o referido exemplo. Apesar de não se referir aos vetores, a autora explica, nas tarefas e na definição, que a translação das figuras respeita um comprimento, uma direção e um sentido, como ilustra o exemplo, onde a figura é transladada 14 quadrados de unidade para a direita na direção horizontal.

Figura 12 - Exemplo do conceito de translação.



Fonte: Gay (2014b, p. 83).

Observamos que na maior parte das tarefas, como na Figura 13, são explorados direção e sentido prototípicos, como horizontal/vertical e direita/esquerda. A partir disso, salientamos que consideramos o item (a) como de alta demanda cognitiva, pois precisa combinar duas translações, e essa combinação de mais de um processo não foi apresentada como exemplo ou realizada anteriormente. Aferimos, também, que os itens (b) e (c) seriam de baixa demanda cognitiva, uma vez que pedem para repetir o procedimento do primeiro item.

Figura 13 - Tarefa com combinação de translações.

4 Observe as figuras e responda às questões.

a) Como podemos obter o retângulo  $A'B'C'D'$  fazendo a translação do retângulo  $ABCD$ ? Exemplo de resposta: transladando 3 quadradinhos para a direita e depois 4 para cima.

b) Como podemos obter o retângulo  $A''B''C''D''$  fazendo a translação do retângulo  $A'B'C'D'$ ? Exemplo de resposta: transladando 3 quadradinhos para a direita e depois 4 para baixo.

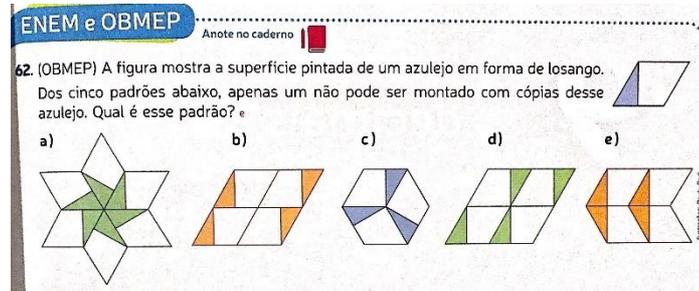
c) Como podemos obter o retângulo  $A'B'C'D'$  fazendo a translação do retângulo  $A''B''C''D''$ ? Exemplo de resposta: transladando 3 quadradinhos para a esquerda e depois 4 para cima.

Fonte: Gay (2014b, p. 85).

Já na coleção *Vontade de saber matemática*, o livro do 6º ano não traz a definição de simetria, mas utiliza apenas a simetria de reflexão em suas atividades e exemplos, o que pode levar os alunos a essa relação conceitual. Também apresenta o eixo de simetria ora interceptando a figura, ora não. Nessa etapa do Ensino Fundamental, os autores dessa coleção

acrescentam, ao final de cada capítulo, uma página com exercícios da Obmep (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) e do Enem (Exame Nacional do Ensino Médio), usualmente de alta demanda cognitiva, pois são avaliações formais que comumente foram elaboradas nesse nível, como exemplifica a Figura 14.

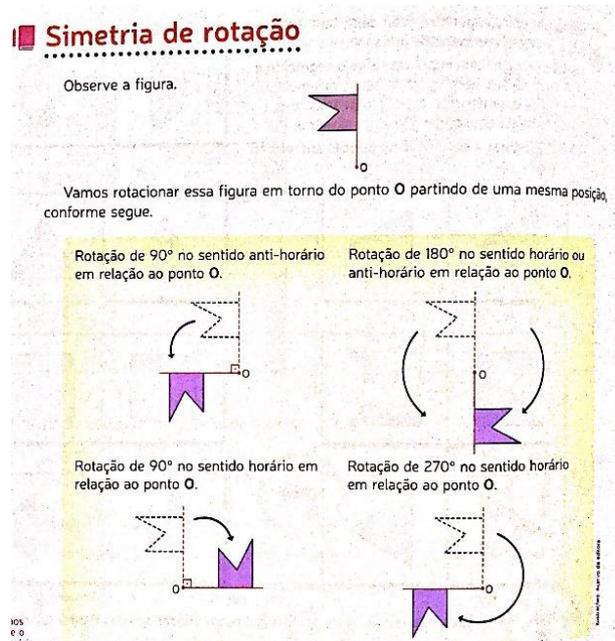
Figura 14 - Exercício da Obmep sobre simetria de reflexão.



Fonte: Souza e Pataro (2015a, p. 203).

Souza e Pataro (2015b) conceituam a simetria de rotação de modo diferente de Gay (2014b). Eles apresentam, no 7º ano, o centro de rotação como um ponto fora da figura geométrica, como ilustra a Figura 15. Nas atividades, o centro de rotação também aparece fora da figura, e apenas uma, retirada da Obmep, tem o centro no vértice da figura. Já no livro do 9º ano (SOUZA; PATARO, 2015c), ao retomar o conteúdo de rotação, os autores trazem outra configuração, com o centro de rotação sendo o próprio centro da figura geométrica (Figura 16).

Figura 15 - Exemplo do conceito de rotação.

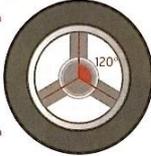


Fonte: Souza e Pataro (2015b, p. 268).

Figura 16 - Tarefa com centro de rotação sendo o próprio centro da figura.

**5.** A roda abaixo possui simetria de rotação de  $120^\circ$  em relação ao seu centro.

Caso não haja transferidores para todos os alunos, reúna-os em grupos para que possam realizar a atividade ou, então, veja a possibilidade de trazer alguns transferidores para a sala de aula.

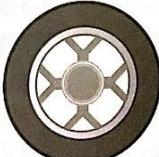
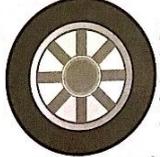


Observe outras rodas que apresentam simetria de rotação em relação ao centro. Determine o ângulo de rotação de cada uma delas utilizando um transferidor.

a)  $72^\circ$       c)  $60^\circ$




b)  $90^\circ$       d)  $45^\circ$

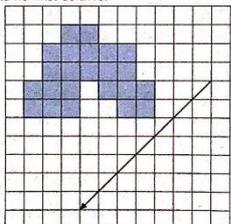
construção c

Fonte: Souza e Pataro (2015c, p. 74).

No âmbito da simetria de translação, observamos que Souza e Pataro (2015c) se preocuparam em apresentar uma tarefa em que a seta que indica a direção da translação da figura não é prototípica (Figura 17), não seguindo padrão de deslocamento horizontal, mas vertical apenas, levando-nos a considerar esta tarefa como de alta demanda cognitiva.

Figura 17 - Tarefa sobre a direção de deslocamento na translação.

**16.** Em uma malha quadriculada, reproduza a figura e construa uma figura simétrica a ela por translação, conforme a distância, direção e sentido indicados pela seta. Resposta no final do livro.

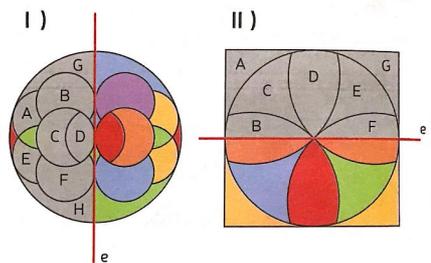


Fonte: Souza e Pataro (2015c, p. 80).

Em relação ao uso da cor no estudo de simetria (FONSECA, 2013; SANTOS, 2010), encontramos algumas tarefas que o fazem, como ilustra a Figura 18.

Figura 18 - Cor como ferramenta no estudo de simetria.

59. Nos mosaicos o eixo  $e$  é de simetria. Escreva a cor das partes representadas pelas letras em cada mosaico. Resposta no final do livro.



Fonte: Souza e Pataro (2015a, p. 200).

Podemos perceber que a Figura 18 mostra uma tarefa onde as cores são utilizadas como uma ferramenta para encontrar a figura simétrica, e não como um critério de simetria, porque as cores não constituem uma propriedade geométrica das figuras. Consideramos esta tarefa como de baixa demanda cognitiva, visto que é fácil visualizar e identificar as cores das partes representadas pelas letras nos mosaicos. Além da cor como ferramenta para encontrar as figuras com simetria, temos ainda os primeiros passos para uma definição matemática de simetria de reflexão, que é a utilização dos pontos simétricos em relação a um eixo (Figura 19). Neste aspecto, em comparação com o livro anterior (GAY, 2014b), Souza e Pataro (2015a) mostram uma atividade em que a definição de simetria de reflexão já é dada, sem a possibilidade de exploração por parte dos alunos, levando-nos a considerar esta atividade como de baixa demanda cognitiva (AMARAL; HOLLEBRANDS, 2017).

Figura 19 - Definição de distância de pontos simétricos.

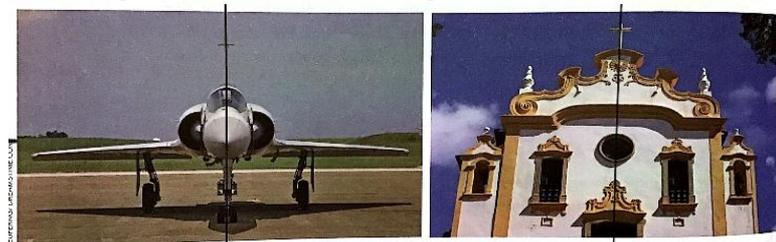
45. Observe como Fábio desenhou figuras simétricas utilizando malha quadriculada.

Reproduza as figuras a seguir em uma malha quadriculada e, de maneira semelhante à de Fábio, obtenha a figura simétrica em relação ao eixo  $e$ .

Fonte: Souza e Pataro (2015a, p. 196).

Além do rigor matemático, que difere dos outros dois livros analisados, *Matemática nos dias de hoje: na medida certa* é o único dos três livros que aborda, nessa etapa do Ensino Fundamental, as simetrias de figuras tridimensionais (Figura 20). Os autores notam que, por se tratar de uma foto, o correto é dizer que se trata de um eixo de simetria, mas que, no caso real, com o objeto tridimensional, chamamos de plano de simetria. Neste exemplo, consideramos que os autores oportunizaram um estudo em alto nível de demanda cognitiva.

Figura 20 - Simetria em figuras tridimensionais.



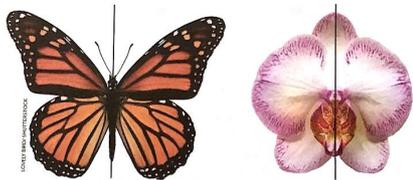
Fonte: Centurión e Jakubovic (2015a, p. 86).

Nesse aspecto, Centurión e Jakubovic (2015a) trazem um apontamento relevante, ao destacarem que, no caso do avião, a simetria é necessária, pois sem ela seria muito difícil fazê-lo voar. Outro ponto importante é o da aplicabilidade do conceito em estudo, visto que os alunos sentem essa necessidade de saber de onde vem; em quais objetos e/ou contextos o conteúdo pode ser visualizado; para que serve etc. Para isso, Centurión e Jakubovic (2015a, p. 86)

afirmam que, “conhecendo a simetria axial, você poderá descrever com mais precisão figuras, objetos e seres vivos. Aos poucos verá que esse conhecimento tem várias aplicações”.

Os autores exemplificam situações reais que têm uma “aproximação” simétrica em suas formas, como as asas de uma borboleta e as pétalas de flores (Figura 21). Tonetto (2004, p. 22) explica que não existe a simetria, segundo a definição matemática, em elementos da natureza, mas se pode inferir uma “presença de certa simetria (pseudo-simetria) em objetos da natureza enquanto saber socialmente aceito”. Considera, também, que o papel do professor é fundamental para evitar distorções em relação aos conceitos de simetria.

Figura 21 - Situações naturais com simetria.



Fonte: Centurión e Jakubovic (2015a, p. 86).

Outro ponto que o livro aborda é a relação entre os ângulos das figuras simétricas, como exemplificado no exercício da Figura 22. Nesse contexto, consideramos que esta atividade possui alto nível de demanda cognitiva, sendo que os alunos precisam retomar o conceito de ângulo, que foi construído em uma seção anterior do livro.

Figura 22 - Associação de simetria e ângulos.

4. Considere o quadrado  $ABCD$  e a reta  $\overline{BD}$ .

Imagine o quadrado dobrado na linha  $\overline{BD}$ .

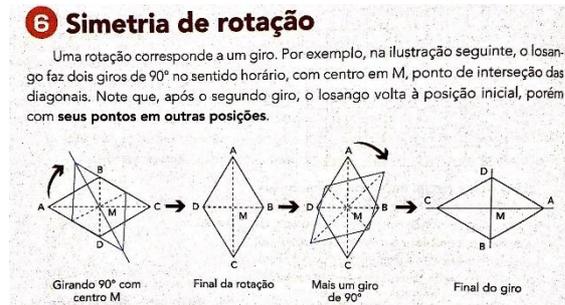
- O ponto A “cai” sobre o ponto C? *Sim*
- $\overline{BD}$  é eixo de simetria do quadrado? *Sim*
- Quanto mede o ângulo  $\widehat{DBC}$ ? *45°*

Fonte: Centurión e Jakubovic (2015a, p. 87).

Para definir a simetria de rotação, Centurión e Jakubovic (2015b), no 7º ano, mostram outro modo de conceituar, que difere das outras duas coleções. Dessa vez, o centro de simetria é tomado como o centro da figura geométrica (Figura 23). Esta definição é importante porque, da forma que está descrita no livro, não se abrem oportunidades para a ocorrência de uma rotação sem que o ponto seja o próprio centro da figura, e o mesmo ocorre nas tarefas desse livro. Ademais, na última tarefa (Figura 24), correspondente à simetria de rotação, existe uma tentativa de deixar o ponto fora da figura; contudo, explica-se, para o professor, que este ponto

é próximo da figura, o que pode fomentar um erro do professor em entender (e assim explicar aos alunos) que o centro, da simetria central, se encontra necessariamente próximo da figura.

Figura 23 - Exemplo do conceito de rotação.

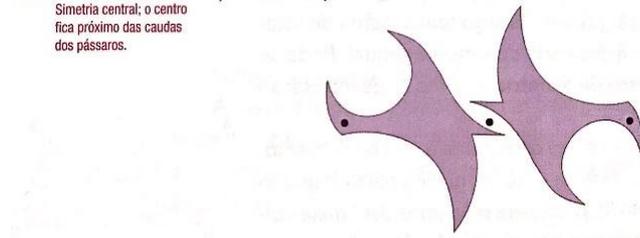


Fonte: Centurión e Jakubovic (2015b, p. 178).

Figura 24 - Tarefa com ponto de rotação próximo da figura.

5. Qual é a simetria apresentada pela figura?

Simetria central; o centro fica próximo das caudas dos pássaros.



Fonte: Centurión e Jakubovic (2015b, p. 180).

Ainda analisando as três coleções quanto à presença da simetria, destacamos uma curiosidade ao redor das letras do alfabeto, incluídas nas atividades de todos os autores, no tratamento da simetria axial. Existem diferenças importantes entre os livros ao especificarem quais letras têm um ou mais eixos de simetria, e convidamos à reflexão sobre a importância dessa discussão quanto à ambiguidade matemática em relação ao conceito de simetria de reflexão. Em Gay (2014a), no item (b), ao questionar os estudantes sobre quais letras possuem mais de um eixo de simetria, afirma-se que são as letras H, O e X. Em Souza e Pataro (2015a), temos a inclusão da letra I com dois eixos de simetria (Figura 25). E por que não há simetria na letra K? No livro de Centurión e Jakubovic (2015a), as letras são desenhadas no papel quadriculado e não no editor de texto, o que vai fazer com que a letra K tenha um eixo de simetria, o que não foi identificado nos outros dois livros.

Figura 25 - Exercício com as letras do alfabeto.

Observe as letras do nosso alfabeto e responda às questões.

ais das letras acima possuem:

apenas um eixo de simetria?  
A, B, C, D, E, M, T, U, V, W e Y

dois eixos de simetria?  
H, I, O e X

eixo de simetria horizontal?  
B, C, D, E, H, I, O e X

eixo de simetria vertical?  
A, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y

Observe as outras letras e responda:

a) que letras têm eixo de simetria vertical?  
b) quais delas têm eixo de simetria horizontal?

1, 9 H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y  
2, 3 C, D, E, H, I, K, O e X

Fonte: Gay (2014a, p. 113), Souza e Pataro (2015a, p. 200) e Centurión e Jakubovic<sup>3</sup> (2015a, p. 87), respectivamente.

Cabe destacar, por fim, que há uma variação na forma e ano de tratar das transformações geométricas, haja vista, como exemplo, os resultados da análise de três das onze coleções aprovadas. Observamos que isso foi possível até a edição do PNLD de 2017, cujos livros ficaram na escola entre 2017 e 2019. Nesse período, as orientações oficiais eram os antigos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p. 124), que destacam as seguintes simetrias: “reflexão numa reta (ou simetria axial), translação, rotação, reflexão num ponto (ou simetria central), identidade”. Nos PCN também eram enfatizadas as relações das simetrias com o cotidiano, seja em objetos, no corpo humano, construções, entre outras. Nesse documento, no entanto, não havia sugestão do ano a tratar desse conteúdo. Dessa forma, notamos que a coleção *Projeto Araribá: Matemática* não aborda esse tema no 7º e 9º anos, enquanto *Vontade de saber matemática* nada traz no livro do 8º ano, e *Matemática nos dias de hoje: na medida certa* se restringe ao estudo do tema apenas no 6º e 7º anos.

### Considerações finais

O presente texto teve como objetivo compartilhar resultados de uma pesquisa sobre a presença da simetria em livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental. A partir da análise de três coleções, exploramos aspectos relacionados aos conceitos de reflexão, rotação e translação (nenhum deles tratou de simetria de reflexão com deslizamento). Abordamos algumas diferenças, como a posição do eixo de simetria, do centro de rotação, e da direção/sentido da translação. Apresentamos também semelhanças, como a noção de “dobrar” a figura como sinônimo de simetria de reflexão, presente em todas as coleções.

Destacamos alguns pontos relevantes, tanto para reflexão do professor, como para possíveis discussões em cursos de formação inicial, como o uso das cores em figuras simétricas. Fonseca (2013) traz uma discussão, bem colocada, de que várias coleções incluem as cores das

<sup>3</sup> Por questões de espaço trouxemos aqui um recorte de algumas letras, convenientes à discussão.

figuras como critério de simetria. Nesse caso, é necessário explicitar que a cor é uma propriedade não geométrica e, portanto, é preciso tomar o devido cuidado ao utilizá-la, para não acabar por perder o foco da simetria nas figuras geométricas.

As atividades repetitivas, que foram identificadas nos livros analisados, também são destacadas por Fonseca (2013). Tarefas que se repetem, como encontrar a figura simétrica por um eixo de simetria (usualmente horizontal ou vertical), apresentar o centro da simetria de rotação sempre na mesma posição (interior ou exterior à figura), transladar figuras na horizontal ou vertical (mantendo os alunos vislumbrando apenas essas possibilidades prototípicas), não ampliam o repertório dos alunos, limitando-os ao tratamento majoritário de tarefas de baixa demanda cognitiva. Nesse sentido, alertamos quão importante é, quando possível e de maneira adequada, se utilizar de meios diversos, que possam ajudar na visualização e na construção do conhecimento de maneira significativa. Corroborando essas afirmações, Amaral e Hollebrands (2017) destacam que o papel do professor é fundamental no processo de escolha (e exploração) das tarefas, podendo fazer discussões sobre os contextos usados e os níveis de demanda cognitiva, junto com os estudantes.

Outro aspecto importante está relacionado ao fato de, no ensino atual, o termo simetria, na maioria das vezes, ser tomado como sinônimo de simetria de reflexão, o que contradiz os aspectos relevantes desse conteúdo, destacados pela literatura. Acreditamos que a simetria necessita de uma base bem fundamentada. Por exemplo: afinal, a letra “I” tem um ou dois eixos de simetria? Qual definição de simetria de reflexão está sendo assumida pelos autores para que um livro a classifique com dois eixos e outro com apenas um? Qual o papel das cores no estudo da simetria (de reflexão, rotação e translação)? Onde pode estar o centro de simetria de rotação? Quais as possibilidades de deslocamento na translação (direção e sentido, em especial)? Essas discussões visam contribuir para um olhar mais reflexivo do material e para que os professores possam ser críticos quanto aos conteúdos e abordagens dos livros didáticos, atentando ao seu importante papel na exploração desses aspectos em suas aulas.

Para concluir, convidamos os leitores à continuação deste estudo. Em 2020, as coleções passaram a se orientar pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que predefiniu o quê e em que ano abordar esse tema. Iniciamos nosso estudo pelas coleções do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2014 e pudemos notar que muito se assemelham àquelas aprovadas no PNLD 2017. Por outro lado, em uma “visita superficial” a algumas coleções do PNLD 2020, já pudemos identificar diferenças dessas edições anteriores, como o padrão similar do ano a apresentar esse conceito, e a presença tanto da reflexão, como da rotação e da translação

(lembramos que uma das coleções que analisamos não aborda simetria de translação) – ainda que também não apresentem a reflexão deslizante. Ficam, então, questões a serem investigadas: há de fato essa semelhança entre as obras atuais? Será que a BNCC acabou por pasteurizar o desenvolvimento dos conteúdos nos livros didáticos? A partir dessas alterações para contemplar o PNLD 2020, que mudanças aconteceram das edições anteriores para essa última? Identificamos também aspectos positivos: notamos, por exemplo, o incentivo ao uso dos softwares de geometria dinâmica em atividades de simetria nos novos livros, a partir das orientações do PNLD 2020. Essa abordagem é praticamente inexistente nos três livros analisados em nosso estudo (PNLD 2017). Esperamos, assim, que este artigo traga contribuições para refletir sobre o conteúdo de simetria, e fomente a realização de novas pesquisas sobre o tema.

## Referências

AMARAL, R. B.; HOLLEBRANDS, K. An analysis of context-based similarity tasks in textbooks from Brazil and the United States. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 48, n. 8, p. 1166-1184, 2017.

AMARAL-SCHIO, R. B. Livro Didático de Ensino Médio, Geometria e a Presença das Tecnologias. **RENOTE**, v. 16, n. 2, p. 127-137, 2018.

BENEDICTO, C.; JAIME, A.; GUTIÉRREZ, Á. Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. *In*: FERNÁNDEZ, C.; MOLINA, M.; PLANAS, Y. N. (Ed.). **Investigación en Educación Matemática XIX**. Alicante: SEIEM, 2015. p. 153-162.

BIEHL, J. V.; BAYER, A. A escolha do livro didático de Matemática. *In*: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2009, Ijuí. **Anais...** Ijuí: Unijuí, 2009.

BORBA, M. C.; ALMEIDA, H. R. F. L.; GRACIAS, T. A. S. **Pesquisa em ensino e sala de aula: diferentes vozes em uma investigação**. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

\_\_\_\_\_. **PNLD 2017: matemática – Ensino fundamental anos finais**. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2016.

\_\_\_\_\_. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2017.

CARRETA, C. L. A.; GODOY, E. V. O Programa Nacional do Livro Didático: um olhar sociocrítico para a abordagem do conceito de Função. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, PR, v. 7, n. 13, p. 152-180, jan./jun. 2018.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática nos dias de hoje, 6º ano**: na medida certa. São Paulo: Leya, 2015a.

\_\_\_\_\_. **Matemática nos dias de hoje, 7º ano**: na medida certa. São Paulo: Leya, 2015b.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e pesquisa**, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, 2004.

CLEMENTE, J. C.; BEDIM, A. A. P.; RODRIGUES, A. C. D.; FERREIRA, H. L.; SOUZA, J.; SANTOS, L. G. D.; CARNEIRO, R. F. Ensino e aprendizagem da geometria: um estudo a partir dos periódicos em educação matemática. *In*: ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2015, São João del-Rei. **Anais...** São João del-Rei: SBEM/MG, 2015. p. 1-12.

FAN, L. Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. **ZDM Mathematics Education**, v. 45, n. 5, p. 765-777, 2013.

FONSECA, C. R. C. **Conceito de Simetria em livros didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental**. 2013. 90 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática. *In*: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GAY, M. R. G. (Ed.). **Projeto Araribá: matemática**. 4. ed. São Paulo: Moderna. 2014a, v. 1.

\_\_\_\_\_. **Projeto Araribá: matemática**. 4. ed. São Paulo: Moderna, 2014b, v. 3.

GODOY, J. S. **A geometria presente em alguns livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental**. 2016. 97 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2016.

GONSALVES, E. P. **Conversas sobre iniciação à pesquisa científica**. 4. ed. Campinas, SP: Alínea, 2005.

GUIMARÃES, G.; GITIRANA, V.; CAVALCANTI, M.; MARQUES, M. Livros didáticos de matemática nas séries iniciais: análise das atividades sobre gráficos e tabelas. *In*:

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: SBEM, 2007. p. 1-17.

LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual de usuário. **Em aberto**, Brasília, v. 16, n. 69, p. 3-9, 1996.

LIMA, K.; JANUARIO, G.; PIRES, C. M. C. Professores e suas relações com materiais que apresentam o currículo de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 2, p. 717-740, 2016.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas**. 2. ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2014.

MARTINS, J. P. Livro didático, artefatos socioculturais e ensino de simetria no Ensino Fundamental. **REMATEC**, v. 13, n. 29, p. 107-119, 2018.

MORAIS, L. B.; BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. Análise de situações de volume em livros didáticos do ensino médio à luz da teoria dos campos conceituais. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 1, p. 25-46, 2014.

NEVES, P. R. V. **O uso de caleidoscópios no ensino de grupos de simetria e transformações geométricas**. 2011. 147 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

OECD. Learning mathematics for life. **A view perspective from PISA**. Paris: OECD, 2009.

OLIVEIRA, S. C.; SILVA, S. A. F. **Transformações Geométricas: Bordando Conceitos e Divulgando Atividades**. Editora do Ifes, 2016. Disponível em: [https://repositorio.ifes.edu.br/bitstream/handle/123456789/131/PRODUTO\\_Reconstru%C3%A7%C3%A3o\\_pensamento\\_geom%C3%A9trico\\_professores.pdf?sequence=5&isAllowed=y](https://repositorio.ifes.edu.br/bitstream/handle/123456789/131/PRODUTO_Reconstru%C3%A7%C3%A3o_pensamento_geom%C3%A9trico_professores.pdf?sequence=5&isAllowed=y)

ORNES, S. O resgate do Teorema Enorme. **Scientific American Brasil**, v. 13, n. 159, p. 59-65, 2015.

RAFAEL, J. A. M.; MIRANDA, P. R. Onde está a Simetria? Uma investigação nos documentos oficiais e livros didáticos de Matemática. **Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática**, v. 2, n. 1, p. 26-52, 2018.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas**. Campinas, SP: Editora Unicamp, 2000.

SANTOS, L. F. **Pintar, dobrar, recortar e desenhar: o ensino de simetria e das artes visuais em livros didáticos de matemática para séries iniciais do ensino fundamental**. 2010. 216 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. São Paulo: SE, 2011.

\_\_\_\_\_. Secretaria da Educação. **Currículo Paulista**. 2019. Disponível em: <[https://drive.google.com/file/d/1ltG4n1GySbPYnc0\\_UIHCSuU0a1ccda4f/view](https://drive.google.com/file/d/1ltG4n1GySbPYnc0_UIHCSuU0a1ccda4f/view)>. Acesso em: 25 out. 2019.

SILVA, J. T. **O uso reconstrutivo do erro na aprendizagem de simetria axial: uma abordagem a partir de estratégias pedagógicas com uso de tecnologias**. 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SOUZA, J.; PATARO, P. M. **Vontade de saber matemática**. 6º ano. São Paulo: FTD, 2015a.

\_\_\_\_\_. **Vontade de saber matemática**. 7º ano. São Paulo: FTD, 2015b.

\_\_\_\_\_. **Vontade de saber matemática**. 9º ano. São Paulo: FTD, 2015c.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. **Mathematics teaching in the middle school**, v. 3, n. 4, p. 268-275, 1998.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S.; HENNINGSEN, M. A.; SILVER, E. A. **Implementing standards-based math instruction: A casebook for professional development**. Nova Iorque: Teachers College Press, 2009.

TONETTO, C. P. **As transformações geométricas (isometrias) no ensino fundamental – estudo de livros didáticos e sugestões de atividades**. 2004. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática – Habilitação Licenciatura) – Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.

WIJAYA, A.; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M.; DOORMAN, M. Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. **Educational studies in Mathematics**, v. 89, n. 1, p. 41-65, 2015.

*Recebido em 12 de julho de 2020.  
Aprovado em 30 de dezembro de 2020.*