



<http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2023.v12i1p062-077>

Uma visão dinâmica do teorema de Pitágoras via GeoGebra

A dynamic view of the Pythagorean theorem with GeoGebra

VICTORIA MAZOTTI RODRIGUES DA SILVA ¹

<https://orcid.org/0000-0002-5028-8802>

RUDIMAR LUIZ NÓS ²

<https://orcid.org/0000-0002-9219-081>

MARI SANO ³

<https://orcid.org/0000-0003-3822-917X>

RESUMO

*Apresentamos neste trabalho algumas visualizações dinâmicas do teorema de Pitágoras usando o GeoGebra. Para as experiências manipulativas, selecionamos algumas demonstrações dentre as 370 catalogadas por Elisha Scott Loomis em sua obra *The Pythagorean Proposition*, sendo uma delas a equicomposição de Perigal. Construímos as abordagens dinâmicas em páginas na plataforma GeoGebra, acessadas por links externos. Concluímos que o GeoGebra é uma excelente ferramenta para explorar dinamicamente o teorema de Pitágoras, possibilitando abordagens algébrico-geométricas assim como vetoriais.*

Palavras-chave: triângulo retângulo; equicomposição de Perigal; o último teorema de Fermat; Ensino de Matemática.

ABSTRACT

*We present in this work some dynamic views of the Pythagorean theorem using GeoGebra. For the manipulative experiments, we selected some demonstrations among the 370 cataloged by Elisha Scott Loomis in his work *The Pythagorean Proposition*, one of them being Perigal's equicomposition. We build the dynamic approaches in pages of the GeoGebra platform, accessed by external links. We conclude that GeoGebra is an excellent tool to dynamically explore the Pythagorean theorem, enabling algebraic-geometric and vector approaches.*

¹ Escola Estadual Maria Vidal Novaes – victoriamazotti@gmail.com

² UTFPR, Campus Curitiba – rudimarnos@utfpr.edu.br

³ UTFPR, Campus Curitiba – marisano@utfpr.edu.br

Keywords: *right triangle; Perigal's equicomposition; last Fermat's theorem; Mathematics Teaching.*

Introdução

Os povos antigos não efetuavam demonstrações matemáticas formais. Para eles, “o critério de confiabilidade das regras e procedimentos usados era simplesmente a concordância com a realidade a que se destinavam” (DOMINGUES, 2002, p. 56). Acredita-se que a Irmandade Pitagórica tenha sido a pioneira no emprego do método dedutivo, embora sem uma base axiomática pré-estabelecida. O que os pitagóricos faziam “era encadear raciocínios para estabelecer propriedades e encadear propriedades para deduzir outras propriedades de certas partes da geometria” (DOMINGUES, 2002, p. 58).

Os métodos de demonstração mudaram a partir de Euclides, que fundamentou sua geometria em cinco postulados (EUCLIDES, 2009). Atualmente, podemos dizer que “uma demonstração é uma entidade objetivamente existente no espaço lógico [...] é algo capaz de induzir a uma vivência subjetiva indutora de convicção em um agente matemático real” (SILVA, 2002, p. 69). Assim, uma demonstração agrega três elementos: uma linguagem, que deve ser definida inicialmente; axiomas ou postulados e regras de inferência, que fazem com que as hipóteses conduzam à tese (BICUDO, 2002).

Com o desenvolvimento tecnológico, passamos a empregar o computador para demonstrar. Como a leitura de uma demonstração geométrica “exige que se desloque, frequentemente, o olhar para as representações visual, linguística e simbólica” (NÓBRIGA, 2019, p. 12), nascem os ambientes de geometria dinâmica que, segundo Gravina (1996), são ferramentas de construção que possibilitam que propriedades geométricas sejam descobertas/analizadas a partir dos invariantes do movimento.

Para construir demonstrações dinâmicas é necessário “um ambiente que permita a integração dinâmica das diferentes representações, tenha um editor intuitivo de texto e equações, além de espaços específicos para as diferentes representações” (NÓBRIGA, 2019, p. 15). Dentre os ambientes de geometria dinâmica mais empregados na atualidade estão o *Cabri-Géomètre* e o GeoGebra (GEOGEBRA, 2022). Ambos possibilitam que construções geométricas sejam movidas dinamicamente para analisarmos o que ocorre a partir do movimento. Ambos também permitem mesclar elementos como figuras, textos e equações, que se modificam sempre que um parâmetro é alterado, acompanhando as mudanças ocorridas ao se arrastar ou mover um ponto, uma reta ou controles deslizantes.

Assim, empregamos o GeoGebra para construir experiências dinâmicas com teoremas geométricos clássicos (SILVA, 2022; LAGO; NÓS, 2020; NÓS; SANO;

LAGO, 2021). Dentre estes, selecionamos para este artigo o teorema de Pitágoras. Nossa escolha se deve ao fato de que a geometria é uma das cinco unidades temáticas presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018). A quinta competência específica de matemática para o Ensino Fundamental da BNCC é “utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas do conhecimento, validando estratégias e resultados” (BRASIL, 2018, p. 267). Ainda, a habilidade EF09MA13 da unidade temática Geometria para o 9º ano do Ensino Fundamental da BNCC estabelece: “Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos” (BRASIL, 2018, p. 319). Logo, esperamos que nossas abordagens dinâmicas do teorema de Pitágoras sirvam de subsídio aos professores de matemática da Educação Básica.

1. O teorema de Pitágoras

Pitágoras de Samos, filósofo nascido na ilha grega de Samos em meados de 570 a.C., é uma das figuras mais místicas e influentes da história da matemática.

Como não existem relatos originais de sua vida e de seus trabalhos, Pitágoras está envolvido no mito e na lenda, tornando difícil para os historiadores separar o fato da ficção. O que parece certo é que Pitágoras desenvolveu a ideia da lógica numérica e foi responsável pela primeira idade de ouro da matemática. Graças ao seu gênio, os números deixaram de ser apenas coisas usadas meramente para contar e calcular e passaram a ser apreciados por suas próprias características (SINGH, 2010, p. 28).

Várias são as descobertas matemáticas associadas a Pitágoras, tais como os números perfeitos (números iguais à soma de seus divisores) e a harmonia musical. O teorema que leva seu nome, “embora este teorema esteja eternamente associada a Pitágoras, ele já era usado pelos chineses e babilônios mil anos antes” (SINGH, 2010, p. 40), consta na Proposição 47 do Livro I de *Os elementos* de Euclides: “Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto” (EUCLIDES, 2009, p. 132).

Em um triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é denominado hipotenusa (do grego *hypotenousa*: que se estende abaixo do ângulo reto), enquanto que os lados que determinam o ângulo reto são denominados catetos (do grego *káthetos*: descido, abaixado de maneira reta). Assim, o teorema de Pitágoras pode ser enunciado como: em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da

hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Se a hipotenusa mede c e os catetos medem a e b , então a tese do teorema de Pitágoras é definida pela igualdade $c^2 = a^2 + b^2$.

O teorema de Pitágoras fascinou diversos matemáticos, dentre eles o professor norte-americano Elisha Scott Loomis (1852-1940). Loomis colecionou, de 1907 a 1927, demonstrações desse teorema e as agrupou em um livro denominado *The Pythagorean Proposition* (A proposição de Pitágoras). O livro foi lançado inicialmente em duas edições: a primeira em 1927, com 230 demonstrações; a segunda em 1940, com 370 demonstrações. Após a morte de Loomis, o livro foi reimpresso mais duas vezes, em 1968 e 1972, pelo *National Council of Teachers of Mathematics*, a Associação Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos (ROSA, 1983).

Na edição de 1968 do livro de Loomis, as demonstrações estão separadas em quatro categorias: 109 demonstrações algébricas, sendo a primeira a demonstração clássica presente nos livros didáticos que emprega as relações métricas e de semelhança no triângulo retângulo; 256 demonstrações geométricas, que comparam áreas; 4 demonstrações vetoriais; 2 demonstrações baseadas em conceitos físicos, como massa e velocidade, as quais Loomis denominou demonstrações dinâmicas. Na parte final do livro, há cinco quadrados pitagóricos mágicos. Nas demonstrações algébricas, há demonstrações do tipo implicação simples (se ..., então), bicondicional (se, e somente se) e redução ao absurdo (FOSSA, 2009).

Desta forma, selecionamos do livro A proposição de Pitágoras (LOOMIS, 1968) quatro demonstrações geométricas e duas vetoriais para construir abordagens dinâmicas no GeoGebra. Os critérios adotados na seleção foram a aplicabilidade em sala de aula na Educação Básica e a variação de movimentos nas abordagens dinâmicas. As experiências interativas foram construídas em páginas da plataforma GeoGebra, acessadas por links externos.

2. Demonstrações geométricas do teorema de Pitágoras

A centésima demonstração do teorema de Pitágoras em Loomis (1968) emprega uma estratégia algébrico-geométrica que compara áreas.

Demonstração algébrico-geométrica 100. Sejam o triângulo ABC , retângulo em \hat{C} e de lados $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$, o quadrado $DEFG$, de lado $a + b$, e o quadrado $ABIJ$, de lado c e cujos vértices pertencem, respectivamente, aos lados GD , DE , EF e FG do quadrado $DEFG$, como ilustra a Figura 1.

Na Figura 1, o quadrado $DEFG$ equivale à união do quadrado $ABIJ$ com os triângulos FIJ , EIB , DAB e $G AJ$. Como esses quatro triângulos são congruentes ao triângulo ABC , concluímos que:

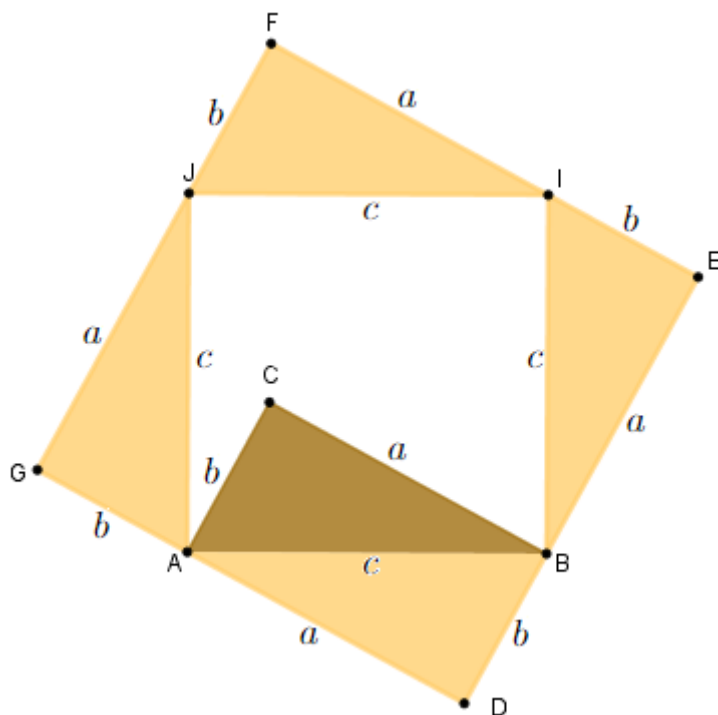


FIGURA 1: Demonstração algébrico-geométrica 100 (LOOMIS, 1968) para o teorema de Pitágoras

FONTE: Os autores com o GeoGebra (2022)

$$A(DEFG) = A(ABIJ) + 4A(ABC);$$

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \frac{ab}{2};$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab;$$

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

onde A representa a área da figura. □

No GeoGebra, construímos uma experiência dinâmica da centésima demonstração (algébrico-geométrica) catalogada por Loomis (1968) para o teorema de Pitágoras e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/krkgpae>.

Na construção, os vértices do triângulo ABC podem ser movimentados dinamicamente.

As demonstrações geométricas em Loomis (1968) foram divididas em dez grupos, cada um destes abordando uma estratégia distinta de demonstração. As demonstrações geométricas de números 9 a 32 consistem na divisão dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo em partes congruentes, e na comprovação de que a união das partes dos quadrados menores forma o quadrado maior (ou que a união das partes do quadrado maior forma os quadrados menores). Nesse grupo, selecionamos a demonstração 9, que corresponde à equicomposição de Henry Perigal (1801-1898) (FERNANDES, 2018; NÓS; FERNANDES, 2019), matemático amador britânico, ilustrada na Figura 2.

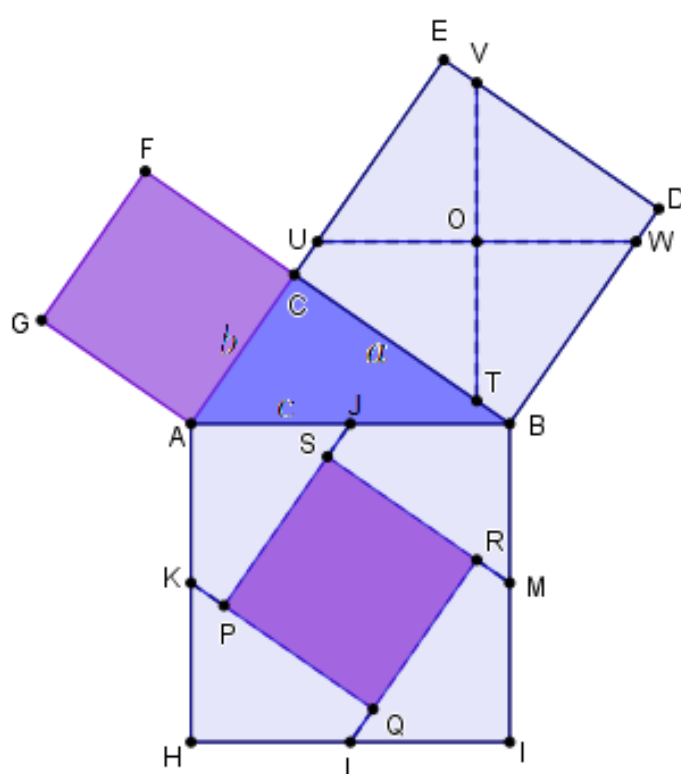


FIGURA 2: Demonstração geométrica 9 (LOOMIS, 1968) para o teorema de Pitágoras: a equicomposição de Perigal

FONTE: Os autores com o GeoGebra (2022)

Demonstração geométrica 9. Sejam: o triângulo ABC , retângulo em \hat{C} e de lados $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$; os quadrados $ACFG$, $CBDE$ e $ABIH$ construídos, respectivamente, sobre os lados AC , BC e AB do triângulo ABC ; os pontos J , K , L e M , pontos médios dos lados AB , HA , IH e BI , respectivamente, do quadrado $ABIH$; os pontos P , Q , R e S , interiores ao quadrado $ABIH$, com $JP \parallel RL \parallel AC$ e $SM \parallel KQ \parallel BC$, onde $S \in JP$, $Q \in RL$, $R \in SM$ e $P \in KQ$; o ponto O , centro do quadrado $CBDE$; os

pontos T , U , V e W pertencentes, respectivamente, aos lados CB , EC , DE e BD do quadrado $CBDE$, tais que $UW \parallel AB$ e $VT \perp UW$, como ilustra a Figura 2.

Desta forma, temos que o quadrado $PQRS$ é congruente ao quadrado $ACFG$, $VT \parallel BI$, $VO \equiv OT \equiv BM$ e $AU \equiv BW \equiv JP \equiv SM \equiv RL \equiv KQ \equiv DV \equiv EU \equiv CT$. Ainda, como $UW \parallel AB$ e $AJ \equiv JB \equiv UO \equiv OW \equiv AK$, os quadriláteros $HLQK$, $IMRL$, $BJSM$, $AKPJ$, $UCTO$, $TBWO$, $WDVO$ e $VEUO$ são congruentes. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} A(ABIH) &= A(PQRS) + 4A(AKPJ); \\ A(ABIH) &= A(ACFG) + 4A(VEUO); \\ A(ABIH) &= A(ACFG) + A(CBDE). \end{aligned} \quad (1)$$

Como os lados dos quadrados $ABHI$, $ACFG$ e $CBDE$ medem, respectivamente, c , b e a , concluímos de (1) que $c^2 = a^2 + b^2$.

□

A demonstração da equicomposição de Perigal (demonstração geométrica 9 de Loomis) pode ser efetuada com mais detalhes, como em Fernandes (2018) e Sette (2013).

Construímos no GeoGebra uma experiência dinâmica da demonstração geométrica 9 (equicomposição de Perigal) catalogada por Loomis (1968) para o teorema de Pitágoras e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/vzjfw5vk>.

Na construção, os vértices do triângulo ABC podem ser movidos dinamicamente e a experiência é válida enquanto $AC < BC$.

As demonstrações geométricas de números 43 a 69 em Loomis (1968) comparam, geralmente, as áreas dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo com as áreas de outros quadriláteros. Nesse grupo, selecionamos a demonstração de número 63.

Demonstração geométrica 63. Sejam o triângulo ABC , retângulo em \hat{C} e de lados $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$, e os quadrados $ACFG$, $CBHI$ e $ABED$ construídos, respectivamente, sobre os lados AC , BC e AB do triângulo ABC . Inicialmente, prolongamos o segmento GF até os pontos K e J , o segmento HI até os pontos J e M e traçamos o segmento KL paralelamente ao segmento HI , com $LM \parallel JK$, $D \in KL$ e $E \in LM$. Em seguida, prolongamos o segmento FC até o ponto $O \in LM$, o segmento GA até o ponto $P \in LM$, o segmento CA até o ponto $N \in KL$ e o segmento HB até o ponto $S \in KL$. Finalmente, demarcamos o ponto R na interseção dos segmentos GP

e HS . Desta forma, construímos o retângulo $JKLM$, de lados $a + 2b$ e $2a + b$, como ilustra a Figura 3.

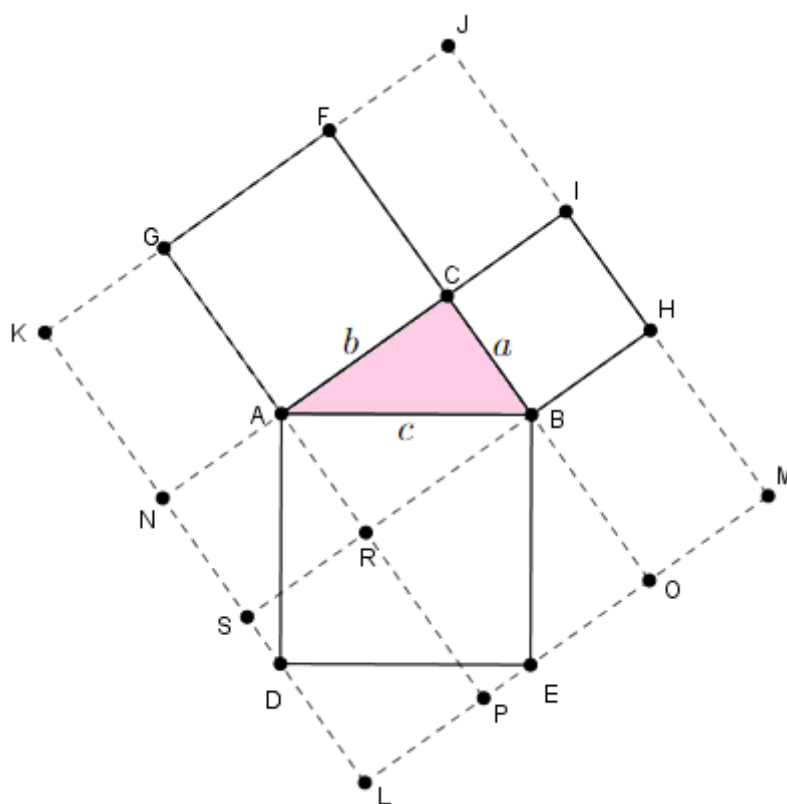


FIGURA 3: Demonstração geométrica 63 (LOOMIS, 1968) para o teorema de Pitágoras
FONTE: Os autores com o GeoGebra (2022)

Desta maneira, temos que:

$$A(JKLM) = A(ABED) + 4A(ABC) + A(CIMO) + A(GAIJ) + A(GANK);$$

$$A(JKLM) = A(NAPL) + A(ACOP) + A(CIMO) + A(GAIJ) + A(GANK); \quad (2)$$

$$A(NAPL) = A(CBHI) + 2A(ABC); \quad (3)$$

$$A(ACOP) = A(ACFG) + 2A(ABC). \quad (4)$$

Substituindo (3) e (4) em (2), obtemos que:

$$A(JKLM) = A(CBHI) + 4A(ABC) + A(ACFG) + A(CIMO) + A(GAIJ) + \\ + A(GANK). \quad (5)$$

A área do quadrado $ABED$ pode ser obtida a partir da área do quadrilátero $JKLM$, ou seja:

$$A(ABED) = A(JKLM) - 4A(ABC) - A(CIMO) - A(GAIJ) - A(GANK). \quad (6)$$

Substituindo (5) em (6), constatamos que:

$$A(ABED) = A(CBHI) + A(ACFG). \quad (7)$$

Como os lados dos quadrados $ABED$, $ACFG$ e $CBHI$ medem, respectivamente, c , b e a , concluímos de (7) que $c^2 = a^2 + b^2$.

□

No GeoGebra, construímos uma experiência dinâmica da demonstração geométrica 63 catalogada por Loomis (1968) para o teorema de Pitágoras e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/qbnkx4rp>.

Na construção, os vértices do triângulo ABC podem ser movimentados dinamicamente.

As demonstrações geométricas de números 71 a 157 em Loomis (1968) utilizam, geralmente, o triângulo retângulo contido em pelo menos um dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo. Nesse grupo, selecionamos a demonstração de número 153, cuja construção é ilustrada na Figura 4.

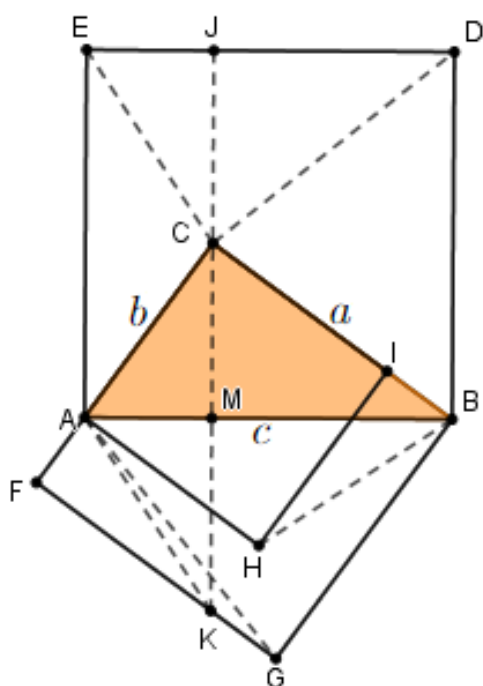


FIGURA 4: Demonstração geométrica 153 (LOOMIS, 1968) para o teorema de Pitágoras
FONTE: Os autores com o GeoGebra (2022)

Demonstração geométrica 153. Sejam: o triângulo ABC , retângulo em \hat{C} e de lados $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$; os quadrados $ABDE$, $BCFG$ e $ACIH$ construídos, respectivamente, sobre os lados AB , BC e AC do triângulo ABC ; $JK \perp AB$ no ponto M , com $M \in AB$, $J \in DE$, $K \in FG$ e $C \in JK$; os segmentos AK , AG , EC e DC , como ilustra a Figura 4.

A partir da construção descrita anteriormente, temos que:

$$A(ABDE) = A(AMJE) + A(BMJD);$$

$$A(ABDE) = A(ECKA) + 2A(BCD);$$

$$A(ABDE) = 2A(CAK) + 2A(AGB);$$

$$A(ABDE) = A(ACIH) + A(BCFG). \quad (8)$$

Como os lados dos quadrados $ABDE$, $BCFG$ e $ACIH$ medem, respectivamente, c , a e b , concluímos de (8) que $c^2 = a^2 + b^2$.

□

Construímos no GeoGebra uma experiência dinâmica da demonstração geométrica 153 catalogada por Loomis (1968) para o teorema de Pitágoras e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/p7msbees>.

Na construção, os vértices do triângulo ABC podem ser movidos dinamicamente.

3. Demonstrações vetoriais do teorema de Pitágoras

Loomis (1968) catalogou quatro demonstrações para o teorema de Pitágoras que empregam operações com vetores. A essas demonstrações Loomis atribuiu a denominação *quaternionic proofs*. Neste grupo, selecionamos as demonstrações de números 1 e 4.

Demonstração vetorial 1. Sejam: $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$; $\vec{v} = \overrightarrow{CB}$; $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ com $\vec{u} \perp \vec{v}$, como ilustra a Figura 5. Desta forma, temos que:

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v};$$

$$\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2;$$

$$\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2. \quad (9)$$

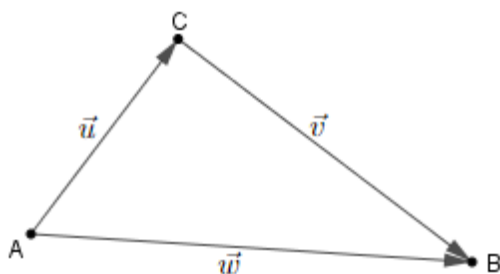


FIGURA 5: Demonstração vetorial 1 (LOOMIS, 1968) para o teorema de Pitágoras
FONTE: Os autores com o GeoGebra (2022)

Como os vetores \vec{u} e \vec{v} são perpendiculares, temos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Portanto, concluímos de (9) que $\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

□

No GeoGebra, construímos uma experiência dinâmica da demonstração vetorial 1 catalogada por Loomis (1968) para o teorema de Pitágoras e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/ejdhqyt7>.

Na construção, os vértices do triângulo ABC podem ser movimentados dinamicamente.

A Figura 6 ilustra a demonstração vetorial 4 em Loomis (1968).

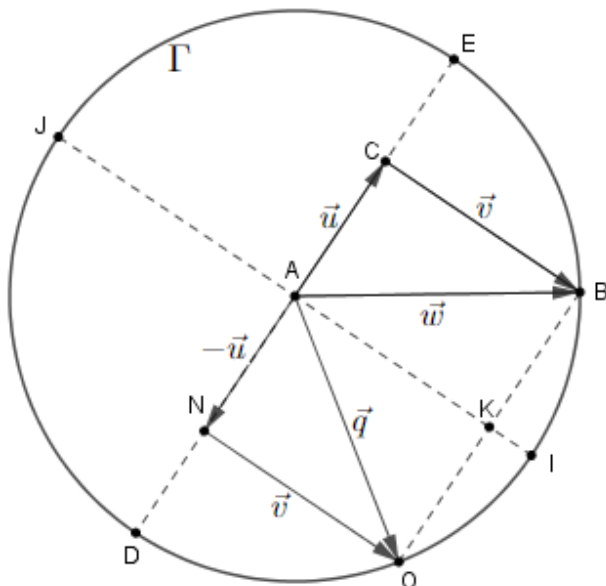


FIGURA 6: Demonstração vetorial 4 (LOOMIS, 1968) para o teorema de Pitágoras
FONTE: Os autores com o GeoGebra (2022)

Demonstração vetorial 4. Sejam: $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$; $\vec{v} = \overrightarrow{CB}$; $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ com $\vec{u} \perp \vec{v}$; Γ a circunferência de centro A e raio AB ; o ponto $N \in DE$, onde DE é um diâmetro de Γ , com $AC \subset DE$ e $\overrightarrow{AN} = -\vec{u}$; o ponto $O \in \Gamma$, com $\overrightarrow{NO} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AO} = \vec{q}$ e \vec{q} simétrico a \vec{w} segundo o diâmetro IJ , como ilustra a Figura 6.

Como $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{q} = -\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{v}$ e AB e AO são raios de Γ , o que implica $\|\vec{w}\| = \|\vec{q}\|$, temos que:

$$\|\vec{w}\|^2 + \|\vec{q}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|-\vec{u} + \vec{v}\|^2;$$

$$\|\vec{w}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2;$$

$$2\|\vec{w}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2);$$

$$\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$

□

Construímos no GeoGebra uma experiência dinâmica da demonstração vetorial 4 catalogada por Loomis (1968) para o teorema de Pitágoras e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/g93wybme>.

Na construção, os vértices do triângulo ABC podem ser movidos dinamicamente.

4. A generalização do teorema de Pitágoras

A equação $x^2 + y^2 = z^2$, que define o teorema de Pitágoras, tem uma infinidade de soluções inteiras (x, y, z) , denominadas trios (ou tríades) pitagóricos, sendo $(3,4,5)$ a tríade mais conhecida. As soluções inteiras ainda existem se reescrevemos a equação como $x^n + y^n = z^n$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $n > 2$?

Pierre de Fermat (1601-1665), magistrado, matemático e cientista francês, conjecturou em 1637, na margem de sua cópia da *Arithmetica* de Diofante, na versão de 1621 de Bachet, que não havia soluções inteiras para a equação.

Felizmente, para nós, a edição da *Aritmética* de Bachet tinha grandes margens em torno do texto, em cada uma de suas páginas, e às vezes Fermat apressadamente escrevia comentários e fórmulas nessas bordas. Essas notas se tornariam um valiosíssimo registro, ainda que esparso, dos mais brilhantes cálculos deste gênio (SINGH, 2010, p. 76).

Assim, a partir da clássica escrita na borda da página “*Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi hanc marginis exiguitas non caperet*” (SINGH, 2010, p. 80) (do latim, eu descobri uma demonstração notável deste teorema mas a margem é muito pequena para contê-la), formula-se o último teorema de Fermat: *Não existe solução inteira não nula para x, y e z quando $n > 2$, $n \in \mathbb{N}$, na equação $x^n + y^n = z^n$.*

Leonhard Euler (1707-1783) estabeleceu uma prova para o último teorema de Fermat, mas apenas para $n = 3$ e $n = 4$. Em uma das páginas da *Aritmética* de Diofante, Fermat deixou uma observação da prova por contradição, conhecida como *método da descida infinita*, para $n = 4$. Ainda, Adrien-Marie Legendre (1752-1833) obteve a prova para $n = 5$ e Gabriel Lamé (1795-1870) para $n = 7$. Em 1994, o matemático britânico Andrew John Wiles (1953-) finalmente demonstrou o último teorema de Fermat, mais de trezentos e cinquenta anos após as anotações feitas por Fermat.

Wiles teve o primeiro contato com o último teorema de Fermat aos dez anos de idade e tentou demonstrá-lo durante muitos anos. Em seu doutoramento, Wiles foi orientado por John Henry Coates (1945-2022), que o direcionou para a pesquisa das curvas elípticas. O que Coates não sabia é que “essa decisão se mostraria um ponto vital na carreira de Wiles e lhe daria as técnicas necessárias para uma nova abordagem do Último Teorema de Fermat” (SINGH, 2010, p. 175).

Diversas teorias da matemática foram exploradas nas tentativas para se provar o último teorema de Fermat, entre elas os números complexos, os números primos, as formas de demonstração e os processos lógicos associados a elas, a teoria de jogos e probabilidade, a criptografia, a teoria de grupos e as equações elípticas e modulares (SINGH, 2010).

No GeoGebra, construímos uma animação com soluções não inteiras da equação $x^n + y^n = z^n$ e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/kbjwvrzw>.

Na animação, as superfícies podem ser observadas para n variando de 3 a 100.

Considerações finais

Apresentamos neste trabalho algumas das demonstrações geométricas e vetoriais do teorema de Pitágoras catalogadas por Elisha Scott Loomis na obra *The Pythagorean Proposition*, edição de 1968. Nas demonstrações, utilizamos o GeoGebra (2022) para construir figuras bidimensionais e experiências dinâmicas. Essas experiências foram organizadas em páginas da plataforma GeoGebra, que podem ser acessadas através de links externos.

As demonstrações catalogadas por Loomis (1968) omitem, muitas vezes, diversas passagens. Isto pode ser observado especialmente nas demonstrações geométricas de números 9 e 153, que foram apresentadas neste artigo da mesma forma como descritas por ele. Contudo, as experiências dinâmicas construídas no GeoGebra, que podem ser exploradas tanto antes quanto após as demonstrações formais, complementam essas passagens e possibilitam, através do movimento de “arrastar” (COSTA: BONETE, 2019), a compreensão plena da estratégia adotada para provar o teorema de Pitágoras.

Esperamos que este trabalho seja útil aos professores de matemática da Educação Básica e aos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, por descrever formas dinâmicas de abordar o teorema de Pitágoras, atendendo assim ao que estabelece a BNCC sobre o emprego de recursos digitais no ensino de matemática.

Referências

BICUDO, I. Demonstração em matemática. **Bolema**, v. 15, n. 18, p. 79-90, 2002.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, MEC/SEB/CNE, 2018.
Disponível em:

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.

COSTA, A.; BONETE, I. P. Geometria dinâmica: uma investigação no curso de Licenciatura em Matemática. **Anais do XV Encontro Paranaense de Educação Matemática - EPREM**, p. 1-14, 2019.

DOMINGUES, H. H. A demonstração ao longo dos séculos. **Bolema**, v. 15, n. 18, p. 55-67, 2002.

EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo, Unesp, 2009.

FERNANDES, F. M. **Polígonos e poliedros equidecomponíveis**. 116 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018. Disponível em: http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/2972/1/CT_PROFMAT_M_Fernandes%2c%20Flavia%20Mescko_2018.pdf.

FOSSA, J. A. **Introdução às técnicas de demonstração na matemática**. 2. ed. São Paulo, Livraria da Física, 2009.

GEOGEBRA. **GeoGebra**: aplicativos matemáticos. 2022. Disponível em: https://www.geogebra.org/?lang=pt_BR. Acesso em: 01 ago. 2022.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. **Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, p. 1-13, 1996.

LAGO, R. C.; NÓS, R. L. Investigando teoremas de geometria plana com o GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 9, n. 3, p. 15-29, 2020.

LOOMIS, E. S. **The pythagorean proposition**. Washington, National Council of Teachers of Mathematics, 1968.

NÓBRIGA, J. C. C. Demonstrações matemáticas dinâmicas. **REVEMAT**, v. 15, n. 1, p. 1-21, 2019.

NÓS, R. L.; FERNANDES, F. M. Ensinando áreas e volumes por equicomposição. **Educação Matemática em Revista**, v. 24, n. 63, p. 121-137, 2019.

NÓS, R. L.; SANO, M.; LAGO, R. C. Using GeoGebra in generalization processes of geometrical challenging problems. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 10, n. 1, p. 49-64, 2021.

ROSA, E. Mania de Pitágoras. **Revista do Professor de Matemática**, v. 1, n. 2, p. 14-17, 1983.

SILVA, J. J. da. A demonstração matemática da perspectiva da lógica matemática. **Bolema**, v. 15, n. 18, p. 68-78, 2002.

SETTE, P. F. **A aula de matemática no projeto UCA: o GeoGebra e o teorema de Pitágoras**. 213 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2013. Disponível em: https://www.repositorio.ufop.br/jspui/bitstream/123456789/3475/1/DISSERTA%3%87%3%83O_AulaMatem%3%a1ticaProjeto.pdf

SILVA, V. M. R. da. **Uma visão dinâmica de alguns teoremas geométricos clássicos via GeoGebra**. 102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2022. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/29513/1/visaodinamicateoremasgeogebra.pdf>. Acessado em: 03 mar. 2023.

SINGH, S. **O último teorema de Fermat**. 17. ed. Rio de Janeiro, Record, 2010.