



<http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i3p089-105>

Modelización matemática y GeoGebra en la formación de profesionales de la educación¹

Mathematical modelling and GeoGebra in the training of education professionals

RAINIER V. SÁNCHEZ C.²

ZORAIDA LANTIGUA³

MILAGROS ELENA RODRÍGUEZ⁴

MIGUEL ISRAEL BENNASAR GARCÍA⁵

ARMANDO GARCÍA⁶

RESUMEN

El presente estudio trata sobre la modelización matemática como estrategia didáctica para la enseñanza de funciones reales, a través de la técnica de resolución de problemas aplicada a fenómenos contextualizados en el campo de la educación matemática, con apoyo del software GeoGebra. Este estudio estuvo circunscrito dentro de las investigaciones de tipo cualitativas, se analizaron a fondo bajo el paradigma interpretativo y el diseño evaluativo. La muestra estuvo conformada por 18 estudiantes de álgebra superior I, pertenecientes a la Licenciatura en matemáticas, con orientación a la educación media en el Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña, República Dominicana. Para recopilar los datos se emplearon cuestionarios semiestructurados, hojas de registro diario y se efectuaron entrevistas a docentes involucrados. Además, se diseñaron tareas de modelización matemática que fueron propuestas a los discentes. Para analizar los datos se empleó la triangulación. En conclusión los estudiantes comprendieron los conceptos de función, dominio y rango de una función, además interpretaron correctamente la información suministrada en forma gráfica.

Palabras clave: *GeoGebra; funciones reales; formación docente.*

¹ Se embarca en el campo de las Ciencias del Aprendizaje, en la línea de investigación: Didáctica de la Matemática-Modelización Matemática.

² Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña Recinto Luis Napoleón Núñez Molina, República Dominicana – rainiersan76@gmail.com <https://orcid.org/0000-0002-6739-5102>

³ Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña Recinto Luis Napoleón Núñez Molina, República Dominicana zoraida.lantigua@gmail.com <https://orcid.org/0000-0002-1552-6959>

⁴ Universidad de Oriente, Departamento de Matemática, Venezuela – melenamate@hotmail.com <http://orcid.org/0000-0002-0311-1705>

⁵ Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña Recinto Luis Napoleón Núñez Molina, República Dominicana – miguel.bennasar7884@gmail.com <https://orcid.org/0000-0002-3856-0279>

⁶ Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña Recinto Luis Napoleón Núñez Molina, República Dominicana – argarcia1969x@gmail.com <https://orcid.org/0000-0003-2505-3961>

ABSTRACT

The present study treats about mathematical modelling as a didactic strategy for the teaching of real functions through the technique of problem solving applied to contextualized phenomena in the field of mathematics education, with the support of GeoGebra software. This study was circumscribed within the type of qualitative investigations and the data were deeply analyzed under the interpretative paradigm and the evaluative design. The population sample was of 18 students of higher algebra 1 who belonged to the Bachelor of Mathematics oriented to middle education at Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña in the Dominican Republic. For the data collection were used semi-structured questionnaires and daily registration sheets, and interviews to the professors involved were carried out. Also, there were designed mathematical modelling tasks that were suggested to the students. The data were analyzed using the triangulation method. In conclusion, the students understood the concepts of function, and domain and range of a function. They also expressed correctly in graphical form some given information.

Key-words: *GeoGebra; real functions; teacher training.*

Introducción

Según Goatache 2009, la formación de los docentes no concluye con la titulación de profesor o licenciado, se extiende más allá del curriculum de la carrera, es un proceso que incluye todos los saberes que se desarrollan en la capacitación o actualización, los cuales son sistematizados en talleres, cursos o diversos eventos de índole formativo; y los saberes extraídos de la práctica educativa en sí misma, como experiencia enriquecedora en el quehacer educativo.

Para Ortiz (2002) la modelización matemática es el proceso mediante el cual se construye y se estudia una relación entre un fenómeno y una estructura a partir de una situación o problema de la vida cotidiana con la finalidad de aproximarse a este último. La investigación trata sobre la modelización matemática como herramienta didáctica en la enseñanza de las matemáticas con el apoyo del software GeoGebra.

En la formación del docente de matemática la modelización es esencial, las vías mediante las cuales se realiza son más frecuentes; de manera que el docente debe actualizarse cada día más para facilitar el proceso de enseñanza. El GeoGebra, en la modelización en especial, es un software matemático interactivo; es una aplicación de código abierto bosquejada fundamentalmente para el aprendizaje y la enseñanza de la geometría, álgebra y cálculo.

1. La modelización matemática como estrategia en la formación del docente

La modelización como estrategia didáctica, ha sido aplicada por muchos pedagogos, con resultados importantes, pues a partir de esta técnica, los docentes y estudiantes “tienen la oportunidad de visualizar las posibilidades de resolución de los problemas, sin que estos afecten las aplicaciones reales, de acuerdo a los

resultados” (ALVARADO, 2009, p.19). En el caso de las matemáticas, contribuye a la comprensión de contenidos matemáticos conectados a otras formas de conocimientos.

La modelización matemática es considerada por muchos autores (NISS, BLUM, Y GALBRAITH, 2007; ORTIZ, 2002 y RODRÍGUEZ, 2015) de suma importancia en la enseñanza de la matemática, ya que en su práctica como todo un proceso educativo, ayuda a los estudiantes a percibir la matemática como una disciplina que puede utilizarse para comprender y modificar la realidad, mediante el planteamiento de situaciones problemas tomadas de la vida cotidiana.

En esta práctica didáctica la modelación matemática constituye un “medio pragmático en la enseñanza de la resolución de problemas reales, que hacen vivir al estudiante esta realidad y lo motivan a crear un modelo y la interpretación del fenómeno en estudio” (RODRÍGUEZ, 2015, p.166).

La modelación matemática presenta características para ser consideradas en la enseñanza, por ejemplo: “Los modelos matemáticos son indispensables para comprender fenómenos, se puede observar y practicar el conocimiento matemático, ayuda a la resolución de problemas” (LÓPEZ, 2012 p. 22).

La modelización matemática constituye un medio pragmático en la enseñanza de la resolución de problemas reales, que hacen vivir al estudiante esta realidad y lo motivan a crear un modelo y la interpretación del fenómeno en estudio (RODRÍGUEZ, 2015, p.166).

Con base a lo anterior, se empleó la modelización matemática como estrategia didáctica fundamental en la enseñanza de funciones a futuros docentes, Para ello, desde la perspectiva didáctica, los momentos del ciclo de modelización matemática son:

Momento 1: Paso de la situación del mundo real al modelo real,
 Momento 2: Construcción del modelo matemático, Momento 3:
 Elección de los contenidos y métodos matemáticos apropiados,
 Momento 4: Interpretación de los resultados (ORTIZ, 2002, p.
 67).

2. Modelización Matemática en la formación del docente: perspectivas didácticas

La enseñanza de la matemática y específicamente la enseñanza del cálculo, mediante modelización matemática, han sido objeto de estudio de muchas investigaciones en la Educación Matemática en Latinoamérica y particularmente en la República Dominicana, donde los programas de formación que se desarrollan han motivado, tanto en los docentes como a los estudiantes, la búsqueda de

alternativas de aprendizajes, que permitan una enseñanza significativa en un área tan sensible como las matemáticas y en especial en el concepto de las funciones reales. En consecuencia, se ha convertido en las dos últimas décadas en un tema que se investiga cada vez con mayor frecuencia e interés pedagógico.

Los procesos cognitivos que ejecuta el aprendiz cuando realiza una tarea de modelización matemática, potencian algunas habilidades y destrezas que requiere el docente para enfrentarse a diario a situaciones problemas, lo cual es de gran trascendencia para su capacitación dentro de las competencias profesionales establecidas en el currículo. Es así como

En concreto, la modelización matemática ayuda a articular dos niveles: uno de naturaleza epistemológica, en estrecha relación con los contenidos matemáticos y el otro de naturaleza cognitiva, que concierne al pensamiento del sujeto que resuelve la tarea matemática” (KUZNIAK y RICHARD, 2014, p.12).

Por otra parte, destacar en la educación matemática para educadores tiene que ver con las bondades que ofrece la combinación de la modelación matemática y el uso de las tecnologías digitales, específicamente, los software de matemática dinámica. En este sentido, según (BARTOLOMÉ, 2011), es necesario promover técnicas de aprendizaje usando las nuevas tecnologías, cónsonas con la sociedad de la información donde la universidad debe jugar su rol para formar la sociedad del conocimiento.

En este sentido, la investigación utiliza como estrategia de simulación el GeoGebra como software interactivo y educativo en las experiencias de resolución de problemas matemáticos asociados a la realidad del futuro docente. En la implementación de la propuesta didáctica los estudiantes pudieron visualizar y construir objetos matemáticos, como funciones reales de una variable real y funciones paramétricas, gracias a las imágenes dinámicas generadas en el programa y de ciertas competencias necesarias que se potenciarán para el buen desarrollo de las prácticas profesionales del futuro docente.

Para el análisis didáctico o pedagógico en educación matemática, se utilizaron las ideas planteadas por (RICO y FERNÁNDEZ-CANO, 2013), las cuales se expresan en dos etapas, a saber:

- En primera instancia para planificar y diseñar el material de instrucción a ser aplicado en cada sesión de clases, durante el diseño y la ejecución de los experimentos de enseñanza: Guías de instrucción, tareas de modelización matemática que contienen los objetivos, las actividades a desarrollar, los problemas propuestos, la secuencia didáctica, entre otros. Para ello, se realizó un análisis de contenido matemático, análisis cognitivo y análisis de instrucción (análisis a priori).

- Luego, el análisis didáctico, para planificar, diseñar y evaluar la propuesta didáctica a ser implementada para la enseñanza de funciones reales de variable real y funciones paramétricas. En esta etapa, se efectuaron los análisis a priori planteados anteriormente, seguido del análisis evaluativo que es a posteriori.

Ante lo planteado, el análisis didáctico en este estudio jugó un doble papel: uno en la fase de diseño del experimento de enseñanza y otro en la fase evaluativa, apoyándose en el modelo de evaluación CIPP: contexto, entrada (Input), proceso y producto (STUFFLEBEAM y CORYN, 2014, p. 309-335).

Consecuentemente, todos los productos generados en cualquiera de las fases fueron evaluados en los mismos términos de las dimensiones y categorías que se consideraron durante la construcción de estos diseños.

3. Características de las tareas de modelización Matemática

Durante la ejecución de la investigación se diseñaron una serie de tareas de modelización matemática, con el objetivo de impulsar e inducir al desafío colectivo, de resolver problemas contextualizados durante el desarrollo de las sesiones de clases. Estas eran planificadas para que desde la modelización matemática los estudiantes puedan analizar las funciones y sus elementos característicos, desde el planteamiento y la reflexión de problemas reales en función de dos actividades:

Actividades piensa y actúa: Se le presenta al estudiante todos los datos o elementos para que logre obtener un modelo matemático el cual, reproduzca de la mejor manera la situación planteada”.

Actividades de ajuste de curvas: Son las actividades en donde al alumno se le presentan una serie de datos obtenidos a partir de una medición, con el propósito de que los manipule y obtenga un modelo matemático que represente de la mejor manera la gráfica de la situación planteada (LÓPEZ, 2012, p. 657).

En cuanto a la estructura de estas tareas de modelización, se han propuesto tres tareas.

Tareas de reproducción: que consistirán en realizar operaciones matemáticas básicas y uso de fórmulas simples y algoritmos ya conocidos. Tareas de conexión: con el propósito de relacionar ideas para resolver los problemas propuestos. Para ello, se inducirá a los estudiantes a buscar y usar nuevas estrategias o formas para intentar resolver situaciones problemáticas del fenómeno a estudiar. Tareas de reflexión: al describir demandas de tareas que requieren comprensión y reflexión, creatividad e innovación. En estas se relacionarán conocimientos previos para resolver

problemas más complejos, donde se busca generalizar y justificar los resultados (RICO, 2005, p. 14-15).

En cuanto a los contenidos que se trataron en la modelización y aplicación del software, se pueden mencionar el comportamiento de funciones polinómicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y sus correspondientes inversas. Se estudiaron propiedades de los modelos construidos, tales como el dominio, el rango, las asíntotas (si existen), el dominio restringido de la función inicial para hallar su inversa, las traslaciones verticales y horizontales, las reflexiones con los ejes coordenados, la compresión o dilatación y amplitud de las curvas, incluso al cambiar los parámetros presentes en el modelo. También se realizaron representaciones de funciones en varios sistemas de representación: el algebraico, el geométrico y el numérico o tabular. Se estudiaron las formas canónicas de las funciones reales, los diagramas de dispersión, ajuste de curvas y estudio de los parámetros y variables que involucran los modelos.

4. Itinerario metodológico

Tipo y diseño de la investigación

El diseño de la investigación fue de naturaleza cualitativa, ya que los hallazgos fueron descritos y analizados sin hacer cuantificaciones ni inducciones matemáticas. Pertenece al campo de las Ciencias del Aprendizaje y está enmarcada en la línea de investigación Didáctica de la Matemática, y se inscribe en la línea de Modelización Matemática. Específicamente, se aplicó la Modelización socio-crítica, realística y aplicada, educativa y cognitiva (KAISER y SRIRAMAN, 2006). Este estudio de diseño se conoce como *Teacher Development Experiments* o experimentos (TDE), según VALVERDE (2014). La estructura general de la investigación es:

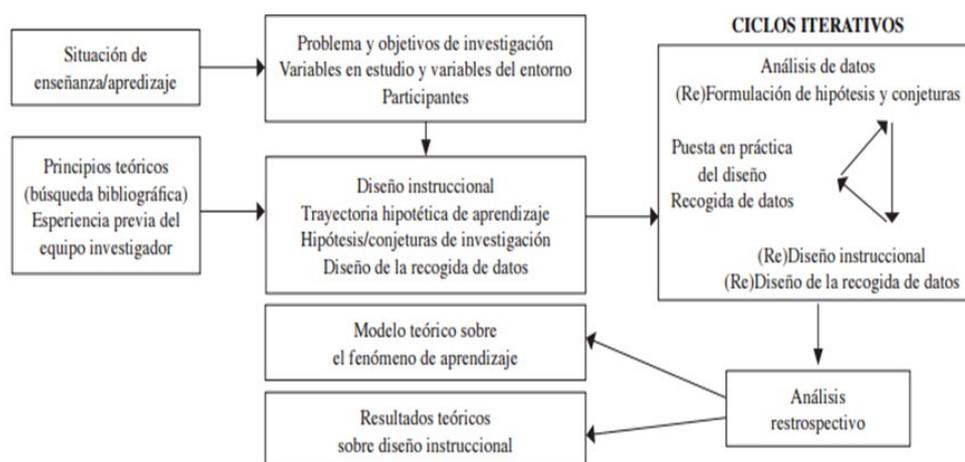


FIGURA 1: Estructura General de la Investigación de Diseño, realizada para la indagación
FUENTE: Molina y Castro (2011)

Dimensiones del Estudio

Se consideraron tres tipos de dimensiones: las que tienen que ver con la complejidad de la tarea propuesta, otras relacionadas con las competencias de modelización matemática a estudiar y aquellas que abarcan las diversas formas de representación del objeto matemático. La matriz de las dimensiones de la investigación se presenta a continuación.

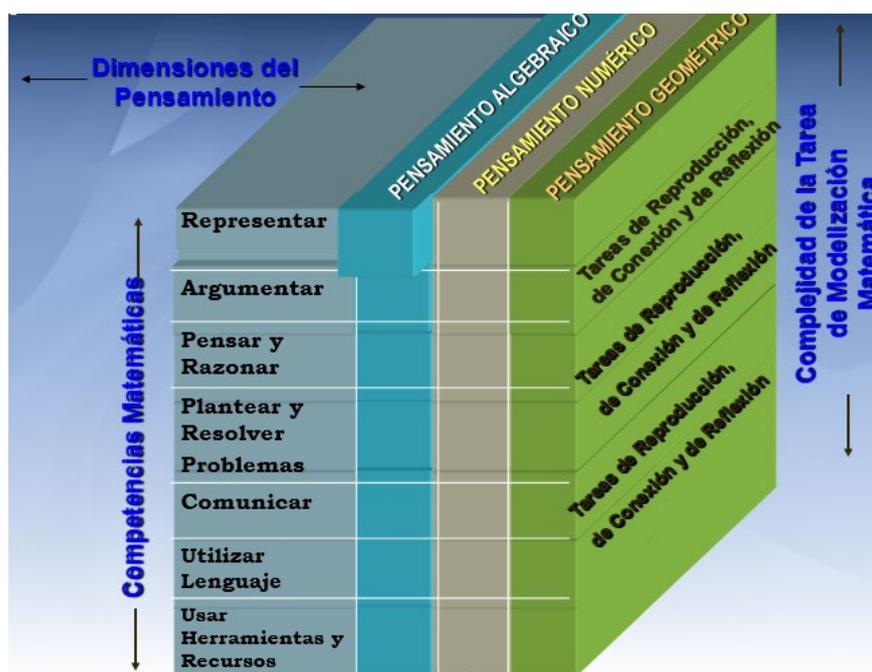


FIGURA 2: Dimensiones del Estudio

FUENTE: Rico (2005, p.232)

Instrumentos de recolección de información

Los instrumentos de investigación utilizados para obtener información son los siguientes:

- Cuestionarios semiestructurados para conocer las opiniones de los profesores asignados a los cursos y de los estudiantes, en cuanto a las estrategias didácticas implementadas.
- Hojas de registro diario para que los docentes investigadores apunten sus notas de observación durante el desarrollo de las clases.
- Entrevistas a los profesores involucrados.
- Guías de instrucción a desarrollar sobre modelización matemática con GeoGebra en la enseñanza de funciones, la cual ha de dirigir las sesiones prácticas.

- Material entregado a los estudiantes con el contenido de las tareas propuestas.

Técnicas de procesamiento y análisis de los datos

Los productos de las tareas de modelización fueron sometidos a técnicas de análisis cualitativo. Así mismo, por tratarse de un estudio interpretativo y descriptivo, fue necesario el uso de la técnica de análisis de contenido y de imágenes, ya que “ofrece la posibilidad de investigar sobre la naturaleza del discurso” (PORTA y SILVA, 2003. p.8). Los estudios descriptivos miden de forma independiente las variables y aun cuando no se formulen hipótesis, tales variables aparecen enunciadas en los objetivos de investigación (ARIAS, 2016. p.25). Estos análisis fueron hechos desde las producciones que entregaron los estudiantes. Se utilizó como técnica de análisis de datos, la triangulación, definida por BISQUERRA (1989). A su vez, para el diseño e implementación de la propuesta formativa, se efectuó un análisis didáctico tal y como lo concibe RICO y FERNÁNDEZ-CANO (2013); que comprende: análisis conceptual, de contenido, cognitivo, de instrucción y evaluativo.

Se efectuaron registros diarios en cada sesión de trabajo y de las tareas hechas por cada estudiante. En cada sesión de trabajo se integraron grupos formados previamente; a través del trabajo colaborativo los discentes interpretaron los datos para luego construir los modelos.

Actividades realizadas

Durante el desarrollo de las clases se integraron grupos de estudiantes, los cuales interpretaban y evaluaban los datos, estos datos posteriormente fueron utilizados para construir modelos usando funciones reales de una variable real apoyándose en GeoGebra. A continuación se indican todas las actividades desarrolladas en el taller. El protocolo consistió en:

- Motivación y objetivos del taller y su importancia.
- Presentación del problema matemático contextualizado propuesto.
- Desarrollo de la Modelización Matemática como estrategia didáctica.
- Simulación del modelo construido en GeoGebra, que estimara el comportamiento de las variables involucradas en el fenómeno estudiado.
- Interpretación de las transformaciones de los parámetros que intervenían en el modelo.

Asociación del modelo encontrado a formas canónicas predeterminadas.

- Validación e interpretación del modelo alcanzado.
- Diversificación del modelo matemático logrado.

Todas estas actividades permitieron trabajar las siguientes competencias:

- Describir propiedades cualitativas de los tipos de funciones que se construyan en cada problema propuesto.
- Analizar cualitativamente el fenómeno que se observó, con respecto al mismo tipo de propiedades.
- Encontrar formas canónicas de los tipos de funciones.
- Interpretar el significado de los parámetros en las formas canónicas.
- Visualizar y representar el efecto de los cambios en los parámetros en las propiedades cualitativas.
- Realizar transformaciones algebraicas llevando una expresión funcional a su forma canónica.
- Analizar cualitativamente las restricciones en las variables del modelo, para que tuviese sentido su interpretación de acuerdo con el fenómeno estudiado. (PUIG y MONZÓ, 2008, p. 5).

Institución en la implementación de la investigación

La investigación fue desarrollada en el Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña, Recinto Luis Napoleón Núñez Molina, Licey al Medio, Santiago de los Caballeros, República Dominicana; en la asignatura: Álgebra Superior I. La población objeto de estudio fue de 18 estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Orientada a la Educación Secundaria.

Para alcanzar los objetivos propuestos, se diseñaron tareas de modelización matemática, en las cuales se plantearon problemas contextualizados en un problema de la vida cotidiana; que permitieran desarrollar todas las fases del ciclo de modelización. Se consideraron las funciones reales de una variable real y funciones paramétricas, estas últimas utilizadas para modelar la parte superior del monumento a los héroes de la restauración, ubicado en Santiago de los Caballeros, República Dominicana. También se construyó un modelo para el arco parabólico de la puerta principal de la catedral metropolitana de Ciudad Bolívar, Venezuela.

4. Resultados

En esta sección se presentan los resultados obtenidos del estudio de las tareas de modelización efectuadas en las clases. Para simular fenómenos es importante que estos sean contextualizados, para que el docente familiarice al estudiante con su futuro entorno laboral. El estudiante tiene que aprender conocimientos teóricos que lo lleven a tomar decisiones sobre qué tipo (o tipos) de función va a ser usada como modelo (o cuáles se van a comparar) y en la posterior adecuación de la función ya obtenida como modelo tiene que predecir otros valores del fenómeno que no se han obtenido experimentalmente. A continuación, se describen las tareas efectuadas.

Tarea 1. Monumento a los Héroes de la Restauración

Diseñado por el arquitecto Henry Gazón Bona, el Monumento a los Héroes de la Restauración es una espectacular torre de unos 70 metros de altura, cubierto parcialmente por mármol blanco. En su cima, hay una inmensa estatua de una mujer denominada: El Ángel de la Paz.

Supóngase que la parte cilíndrica del monumento tiene una longitud de 30 metros y una base de 5 metros de diámetro (valores aproximados). Encuentre un modelo que se ajuste a la forma de hélice de la torre.

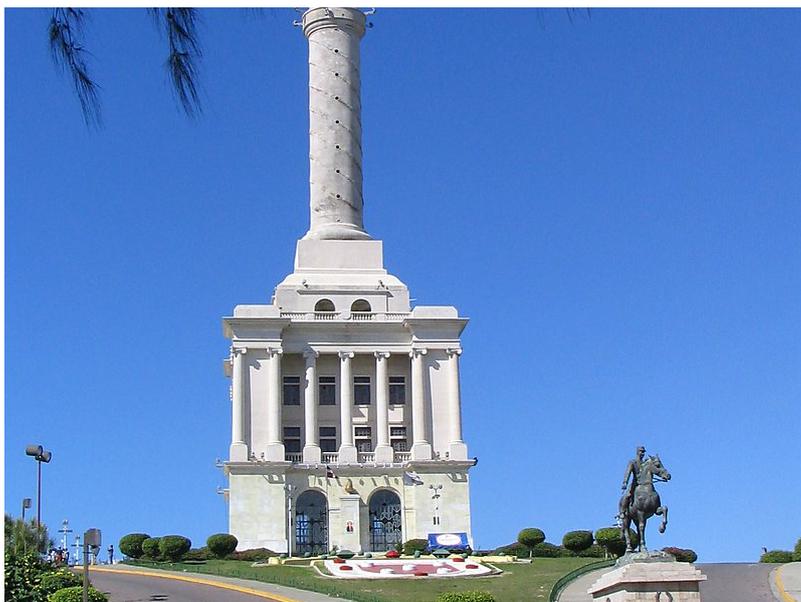


FIGURA 3: Monumento a los Héroes de la Restauración, República Dominicana

Esta tarea tiene los siguientes requerimientos cognitivos y de contenido:

- Describa el problema propuesto, represéntelo gráficamente e identifique las variables involucradas.
- Encuentre un modelo que se ajuste a la parte superior del monumento.
- Encuentre un modelo que se ajuste a la forma de hélice (o surco) que está en la parte exterior de la torre.
- Visualice el problema con GeoGebra.
- Analice como cambia el modelo al variar los parámetros.
- Calcule el volumen de la torre.

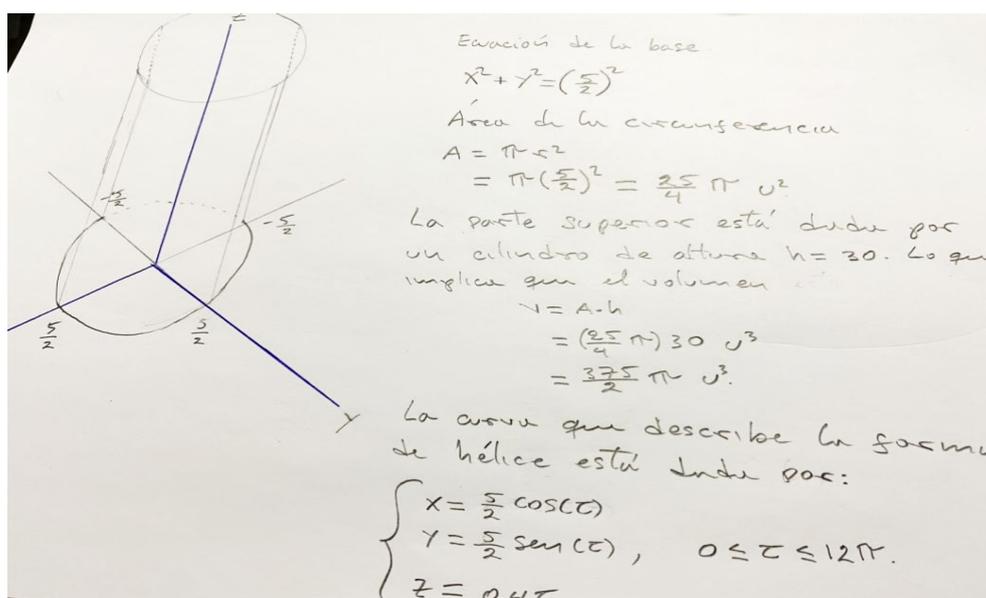


FIGURA 4: Construcción del modelo

Durante el desarrollo de los tres primeros momentos del ciclo de modelización matemática, los estudiantes, en su gran mayoría, representaron gráficamente el problema, identificando las variables involucradas y obtuvieron el modelo.

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} \cos(t), \\ y = \frac{5}{2} \text{sen}(t), & 0 \leq t \leq 12\pi \\ z = 0,4t, \end{cases}$$

El cual identificaron como un caso particular del modelo general

$$\begin{cases} x = r \cos(t) \\ y = r \text{sen}(t), & 0 \leq t \leq n\pi \\ z = at \end{cases}$$

También calcularon el volumen de la torre y analizaron la forma en que este cambiaba, al hacer variar el parámetro r . Establecieron semejanzas con problemas similares y consideraron posibles aplicaciones a otros problemas contextualizados.

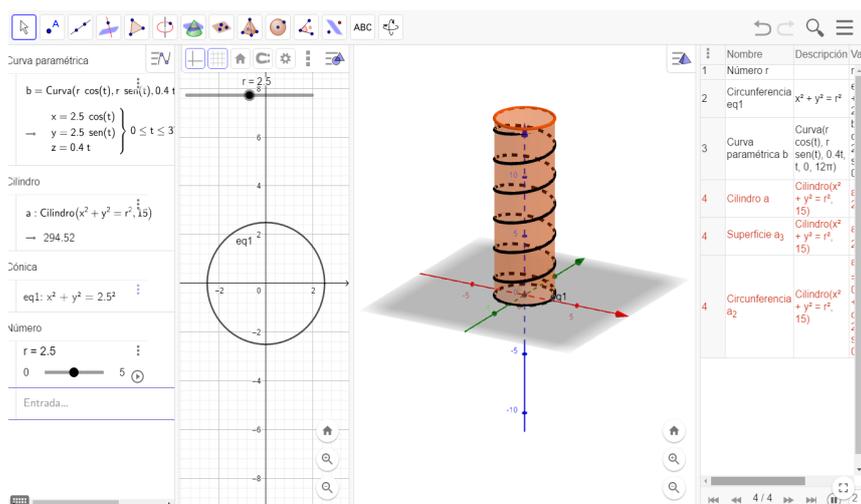


FIGURA 5: Desarrollo del cuarto momento de modelización. Representación del modelo y protocolo de construcción

También calcularon el volumen de la torre y analizaron la forma en que este cambiaba, al hacer variar el parámetro r . Establecieron semejanzas con problemas similares y consideraron posibles aplicaciones a otros problemas contextualizados.

Tarea 2. Catedral metropolitana de Ciudad Bolívar

La Catedral de Santo Tomás o Catedral Metropolitana de Ciudad Bolívar o simplemente Catedral de Ciudad Bolívar es el nombre que recibe un edificio religioso que pertenece a la Iglesia Católica y se encuentra ubicado frente a la plaza Bolívar de Ciudad Bolívar capital del Estado Bolívar, ubicada en la parte meridional de Venezuela.



FIGURA 6: Catedral de Ciudad Bolívar, Venezuela

Construya un modelo matemático (parabólico) que se ajuste al arco presente en la entrada principal de la catedral de Ciudad Bolívar, con los siguientes datos: altura 15 metros y 3 metros de distancia entre los dos puntos que están a nivel del piso.

Esta tarea tiene las siguientes demandas cognitivas y de contenido:

- Haga una representación gráfica y describa el problema propuesto.
- Encuentre un modelo que se ajuste y describa el problema propuesto.
- Visualice y valide su resultado usando GeoGebra.
- Calcule el área bajo la curva que describe el arco y que está sobre el piso
- Analice el comportamiento de la función encontrada, al variar el valor del coeficiente de x^2 , utilizando un deslizador en GeoGebra.

En el desarrollo del primer, segundo y tercer momento de ciclo de modelización matemática los estudiantes obtuvieron que $y = -\frac{20}{3}x^2 + 15$, se ajusta al problema. En este proceso los estudiantes reconocieron fácilmente las variables involucradas y dieron satisfactoriamente con el modelo $y = ax^2 + c$. Determinaron los valores de a, b y c sabiendo que el modelo general era de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

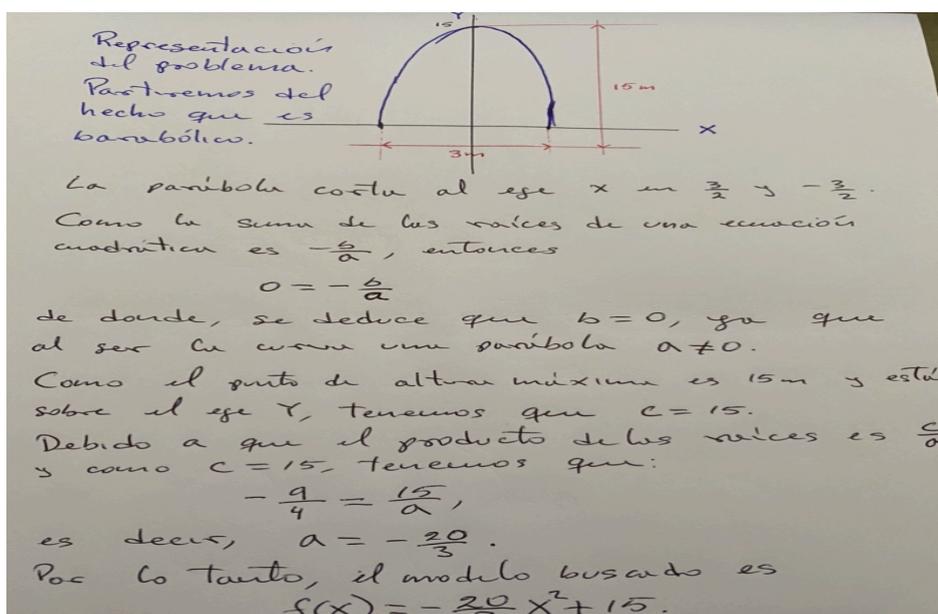


FIGURA 7: Desarrollo del primer, segundo y tercer momento del ciclo de modelización: construcción del modelo

Una vez obtenido el modelo particular, construyeron su gráfica usando GeoGebra. También analizaron el comportamiento de la función generalizada

$y = ax^2 + c$, haciendo variar el parámetro a , utilizando un deslizador. Además, se calculó el área bajo la curva y sobre el eje X.

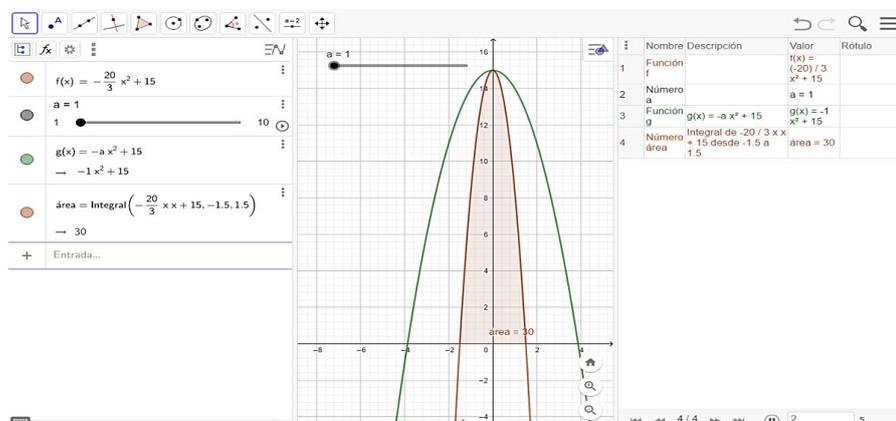


FIGURA 8: Desarrollo del cuarto momento de modelización. Representación del modelo y protocolo de construcción

Los estudiantes reflexionaron sobre la aplicación del modelo encontrado a contextos similares. Establecieron semejanzas entre el problema resuelto y sus posibles aplicaciones a la solución de otros problemas contextualizados.

Conclusiones

Una vez analizados los resultados, producto de la aplicación de la modelización y el software GeoGebra, se pueden resaltar las siguientes conclusiones.

Los estudiantes desarrollaron su pensamiento lógico matemático, lo cual se evidenció en el desarrollo de las actividades. Comprendieron los conceptos de función, dominio y rango de una función, así como la construcción de gráficas de funciones reales de una variable real. Se apoderaron del concepto de funciones paramétricas y lo vincularon con situaciones de la vida cotidiana, a través de la modelización matemática. Todo esto se logró con la incorporación de GeoGebra en el proceso de enseñanza-aprendizaje para efectuar tareas de modelización matemática.

La mayor parte de los estudiantes (90%) interpretaron correctamente la información suministrada en forma gráfica. Fueron capaces de determinar si la gráfica dada era o no una función y determinaron satisfactoriamente el dominio, el rango, los máximos, los mínimos y las simetrías. Además, clasificaban a las funciones representadas gráficamente, como inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Determinaban con facilidad si la función era par o impar. Pudieron visualizar los cambios que presentaba la gráfica de una función al variar algunos de sus parámetros, tales como la dilatación, la contracción y la traslación de la gráfica. Sólo el 10% de los estudiantes tuvo dificultad para alcanzar las competencias antes

mencionadas. La incorporación de Geogebra, mantuvo activo el interés de todos los estudiantes y se logró un cambio sustancial en su idiosincrasia, en la forma de enfrentar y resolver problemas matemáticos.

Los estudiantes que participaron en el estudio, construyeron modelos matemáticos partiendo de situaciones de la vida cotidiana, una vez suministrados determinados datos. Hicieron comparaciones con modelos matemáticos similares. Pudieron formular problemas de modelización matemática, lo cual será de suma importancia en su futuro desempeño profesional.

En el desarrollo de las tareas programadas, los estudiantes fueron capaces de argumentar, representar y comunicar los resultados obtenidos haciendo uso correcto del lenguaje simbólico, formal y técnico de la matemática. Es decir, fueron capaces de expresar sus ideas matemáticas de manera clara y precisa. En estos procesos también se pudo vincular a las matemáticas con otras áreas.

Para que el aprendizaje, a través de la incorporación de GeoGebra, sea significativo no es suficiente a realizar la abstracción de la sustitución del modelo, es necesario adecuarlo y analizar esta representación y su significado en el mundo real. En función a ello, se considera que las actividades de modelación matemáticas deben ser motivadoras y que proporcionen profesionales planteadas en los pensum de estudios. Es necesario incorporar herramientas tecnológicas en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que esto hace más atractiva y amenas las actividades áuricas, al mismo tiempo que fomenta el trabajo colaborativo. Las políticas educativas deben estar cargadas de estas innovaciones educativas en la formación docente e implementación en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Referencias

ALVARADO, A. **Estudio y clasificación de funciones reales.** (Trabajo de ascenso). UPEL-IPM, Venezuela, 2009.

ARIAS, F. **El Proyecto de Investigación. Introducción a la Metodología Científica.** Caracas, Episteme. 2016.

BARTOLOMÉ, A. **Recursos tecnológicos para el aprendizaje.** San José de Costa Rica, Universidad Estatal a Distancia-EUNED. 2011.

BISQUERRA, R. **Métodos de investigación educativa.** Barcelona, CEAC. 1989.

GOATACHE, Y. (2009). **El hipervideo en entornos de aprendizaje. Una propuesta para la enseñanza del cálculo en el ámbito**. Tesis Doctoral. Universidad Salamanca. España.

HOUSTON, & Q. JIANG. **Mathematical modelling in education and culture**. ICTMA 10. Chichester, England: Horwood. 2003.

KAISER, G., & SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM**, v. 38, n. 3, 2006.

KUZNIAK, A.; RICHARD, P. R. Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, México**, v. 17, n. 4 - I, p. 5- 15, 2014.

LÓPEZ, J. **Modelización matemática en la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales**. (Doctorado em Educación). Universidad Veracruzana. México, 2012.

NISS, M., BLUM, W. & GALBRAITH, P. L. (2007). «Introduction». En: BLUM, WERNER ETÁL. (Eds.), **Modelling and Applications in Mathematics Education**. New York: Springer, 2007, p. 3-32.

ORTIZ, J. **Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra. Estudio evaluativo de un programa de formación**. (Doctorado en Educación Matemática). Granada: Universidad de Granada, 2002.

ORTIZ, J., RICO, L. & CASTRO, E. Organizadores del Currículo como Plataforma para el Conocimiento Didáctico. Una Experiencia con Futuros Profesores de Matemáticas. **Enseñanza de las Ciencias**, v.25, n.1, 2007.

PORTA, L. & SILVA, M. **La investigación cualitativa: El Análisis de Contenido en la investigación Educativa**, 2003. Disponible en: www.uccor.edu.ar/paginas/REDUC/porta.pdf acceso en: 23/1/2020.

PUIG, L., & MONZÓ, O. (2008). Competencias algebraicas en el proceso de modelización. En: F. GRACIA, A. MONEDERO, J. PALOMO Y MARÍA J. PERIS. **El discretencant de les matemàtiques. Actes de les VIII Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana**: Castelló: SEMCV, 2008, p. 142-158.

RICO, L. & FERNÁNDEZ-CANO. Análisis didáctico y metodología de investigación. En: L. RICO, J.L. LUPIÁÑEZ Y M. MOLINA. **Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Innovación Curricular y Formación de Profesores**. Los autores, Granada, 2013.

RICO, L. La competencia matemática en PISA. En: FUNDACIÓN SANTILLANA (Ed.), **La enseñanza de las matemáticas y el informe PISA**. Madrid: Santillana, 2005, p. 21-40.

RODRÍGUEZ, R. Enseñanza y aprendizaje de matemáticas a través de la modelación desde y para la formación de ingenieros. En: J. ARRIETA Y L. DÍAZ. **Investigaciones latinoamericanas en modelación matemática**, México: Gedisa, 2015, p. 163-194.

STUFFLEBEAM, D. & CORYN, C. **Evaluation Theory, Models, and Applications**. San Francisco, United States of America: Jossey Bass. 2014.

VALVERDE, G. Experimentos de enseñanza: una alternativa metodológica para investigar en el contexto de la formación inicial de docentes. **Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación**, v.14, n.3, 2014.