Uma introdução ao estudo das superfícies mínimas utilizando o GeoGebra

An introduction to the study of minimal surfaces using GeoGebra

LARISSA NUNES DA SILVA[1]
MARLON POLAZ DA SILVA[2]

Resumo

Este trabalho objetiva realizar uma introdução ao estudo das superfícies mínimas utilizando o software GeoGebra na construção de modelos, superfícies e sólidos de revolução bem como funções e gráficos para auxiliar na obtenção de sólidos com área superficial otimizada. A partir de um problema proposto inicialmente por J. L. Lagrange e posteriormente estudado por Leonhard Euler sobre superfícies mínimas e um experimento utilizando bolhas de sabão elaborado pelo físico belga J. A. F. Plateau, foram construídos algumas superfícies mínimas no GeoGebra como a esfera, a helicoide e a catenóide. Tal estudo permitiu mostrar que dentre os sólidos de revolução abordados de um modo geral nos ensinos Fundamental e Médio: esfera, cilindro e cone, para um dado volume a esfera é o sólido que apresenta a menor área superficial.
Palavras-chave: *superfícies mínimas, sólidos de revolução, GeoGebra.*

Abstract

This work aims to conduct an introduction to the study of minimal surfaces using GeoGebra software in building models, surfaces and solids of revolution as well as functions and graphs to assist in obtaining solids with optimized surface area. From an initially problem proposed by J.L. Lagrange and subsequently studied by Leonard Euler around minimal surfaces and an experiment using soap bubbles prepared by the Belgian physicist J. A.F. Plateau, some minimal surfaces were constructed in GeoGebra as the sphere, helicoid and the catenoid. This study has show that among the solid of revolution discussed in general in elementary and high school: sphere, cylinder and cone, for a given volume the sphere is the solid that has the smallest surface area.
Keywords: *minimal surfaces, solids of revolution, GeoGebra.*

Introdução

Num curso de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), dentre os diversos temas abordados, a resolução dos problemas de otimização têm despertado a atenção e o interesse em grande medida por parte dos estudantes nos cursos como, por exemplo, Engenharia, Tecnologia e

[1] FATEC-MAUÁ- nuneslari21@gmail.com
[2] FATEC-MAUÁ -marlonpolaz@gmail.com

Economia. Este assunto pode ser abordado, por exemplo, no estudo dos pontos de máximo e mínimo utilizando-se do conceito de derivada de uma função.

Esses problemas trazem no seu bojo uma variedade de conceitos relacionados com diversas aplicações, o que sucinta um cenário favorável para o ensino e aprendizagem da Matemática contrapondo-se ao modelo de ensino em que os conceitos são abordados seguindo uma ordem de definição – teorema – exemplos – exercícios, sendo que os exercícios são resolvidos de maneira mecanizada e desprovidos de qualquer contextualização. Tal modelo não proporciona situações que permitam ao aluno elaborar hipóteses e conjecturas acerca do objeto de estudo no sentido não somente de se procurar buscar a solução para o problema mas também construir o conhecimento.

Durante algumas aulas ministradas por mim de CDI em cursos de Tecnologia, ao abordar o assunto aplicações de derivadas – problemas de otimização – especificamente o problema proposto no trabalho de Grande e Vasquez (2014), percebi o interesse e a motivação por parte dos estudantes pelo tema. Esse problema, por nós elaborado e aplicado em diversas áreas como Logística, envolvia a localização de um ponto para distribuição de produtos e utilizava de maneira implícita o princípio de Fermat sobre a reflexão da luz, em que a mesma sempre percorre a menor distância entre dois pontos e que minimiza a distância total percorrida.

Devido ao grande interesse apresentado pelos alunos perante o assunto, recomendei como referência de uma leitura complementar sobre o tema o estudo do capítulo "Máximos e Mínimos" da obra de Courant e Robbins (2000), que traz logo no início do capítulo a seguinte afirmação:

> Um segmento de reta é o caminho mais curto entre seus extremos. Um arco de grande círculo é a curva mais curta unindo dois pontos sobre uma esfera. Entre todas as curvas planas fechadas de mesmo comprimento, o círculo encerra a maior área e, <u>entre todas as superfícies fechadas de mesma área, a esfera encerra o maior volume</u>. (COURANT e ROBBINS, p. 381, grifo nosso).

O último trecho destacado, em particular, que faz referência a um problema de otimização ligado à maximização do volume de um sólido de revolução, despertou a curiosidade dos estudantes. Comentei com os alunos que pode ser realizado um estudo semelhante, por exemplo, sobre a otimização da área superficial dos sólidos de revolução geralmente abordados nos ensinos Fundamental e Médio, como cilindro, cone e esfera, de maneira dinâmica e interativa utilizando-se um software como recurso auxiliar. Prontamente dois estudantes se interessaram em realizar tal pesquisa no sentido de se comprovar um resultado importante a respeito das superfícies mínimas.

Do ponto de vista da Educação Matemática, essa experiência didática se constitui em uma interessante atividade para o ensino e aprendizagem do CDI e outros assuntos relacionados, como, por exemplo, a Geometria Espacial, como o estudo dos sólidos de revolução.

Sendo assim, esse trabalho tem como objetivo realizar um estudo sobre problemas de otimização, especificamente sobre o problema de superfícies mínimas, em que se deseja dentre os sólidos de revolução: cilindro, cone e esfera, para um dado volume fixo, obter aquele que apresenta a menor área superficial possível, utilizando-se do software GeoGebra como recurso computacional auxiliar.

Reiteremos que buscar a solução para esse problema de maneira algébrica requer uma manipulação algébrica razoavelmente complicada, o que torna a resolução extremamente trabalhosa. Nesse caso, o GeoGebra pode se constituir de uma ferramenta auxiliar imprescindível não somente na resolução quanto no estudo desses sólidos em aplicações de problemas de otimização.

Com relação às pesquisas que envolvem o ensino e aprendizagem especificamente sobre o conceito de superfícies mínimas, constatou-se uma escassez de trabalhos no âmbito da Educação Matemática.

Dentre algumas pesquisas encontradas, Tabuti (2013) realizou um trabalho com os alunos de um Colégio Particular com o objetivo de estudar alguns elementos da Geometria Espacial, como sólidos de revolução, relacionando tais conceitos com o cotidiano dos alunos utilizando bolhas de sabão como material auxiliar. Dessa maneira, os estudantes observaram que a forma de muitos produtos usados rotineiramente, como embalagens cilíndricas e esféricas, por exemplo, têm propriedades verificadas com formas na natureza, como as superfícies mínimas geradas por bolhas de sabão, o que reiterou a importância e o estudo de tais conceitos matemáticos. Além deste trabalho descrito, outras pesquisas sobre superfícies mínimas estão mais ligadas à Matemática Pura.

Descreveremos a seguir alguns episódios relacionados à gênese e ao desenvolvimento da teoria e dos problemas envolvendo o conceito de superfície mínima, visando compreender melhor o objeto de estudo em questão bem como os obstáculos apresentados no seu estudo.

1. Superfícies Mínimas – um breve contexto histórico

A abordagem do estudo sobre superfícies mínimas teve início com Joseph-Louis Lagrange (1736 — 1813), no século XVIII, que juntamente com o matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783) desenvolveu a equação que ficou conhecida como *Equação de Euler-Lagrange*, a qual se mostrou útil na solução de problemas de otimização e que em grande medida é análoga ao *Teorema de Fermat* sobre máximos e mínimos estudado de um modo geral nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral.

Já em 1740 Euler descobriu uma superfície que apresentava para um dado volume a menor área superficial possível – a catenóide. Esses problemas que envolviam a área mínima da região compreendida entre um eixo e uma curva de comprimento especificado num determinado intervalo incitaram o estudo em questão de tal forma que posteriormente seriam descobertas outras superfícies apresentando tal configuração.

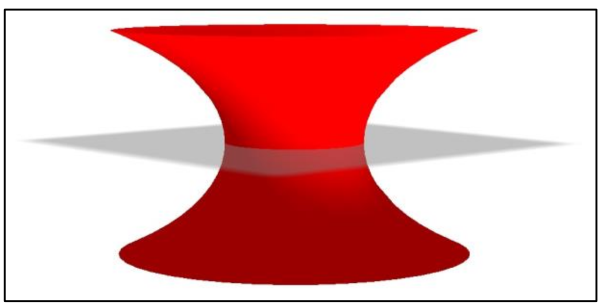

FIGURA 1: Catenóide
FONTE: Autores, 2014

Ainda no século XVIII o matemático francês J. B. M. C. Meusnier de la Place (1754 - 1793) descobriu a superfície denominada helicoide. Assim como a catenoide de Euler, a helicoide, juntamente com o plano e a esfera se constituem como os primeiros modelos identificados de superfícies mínimas.

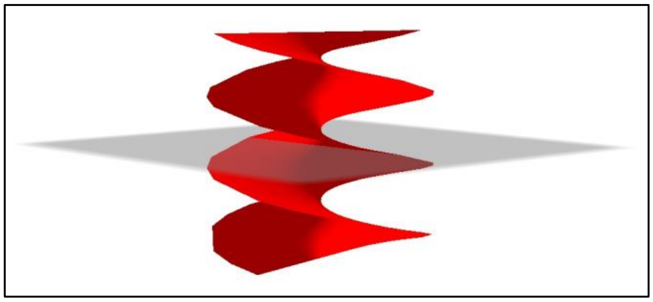

FIGURA 2: Helicóide
FONTE: Autores, 2014

Porém, o estudo sistemático das superfícies mínimas teve início apenas no século XIX com o físico belga J. A. F. Plateau (1801 — 1883) que conduziu pesquisas extensivas com base em bolhas de sabão. O problema já conhecido por Lagrange e Euler foi denominado *Problema de Plateau*, justamente pelo sistema e forma experimentais utilizados pelo mesmo. Tal problema, em sua forma mais simples, consiste em encontrar a superfície de menor área limitada por um contorno fechado no espaço. Por esse motivo o físico belga utilizou-se de experimentos com base em bolhas de sabão, uma vez que a esfera encerra a menor área quando dado um valor fixo de volume.

Na segunda metade do século XX, em 1982, o matemático brasileiro Celso José da Costa (1949), com base nos estudos de Karl Weierstras, (1815 — 1897) descobriu uma nova superfície de configuração mínima que posteriormente foi denominada de Superfície Costa, ilustrada na figura a seguir.

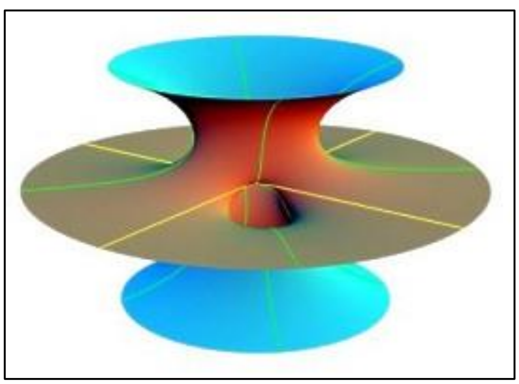

FIGURA 3: Superfície Costa
FONTE: Autores, 2014

2. Aplicações das superfícies mínimas no cotidiano

Um exemplo sucinto da aplicação de superfícies mínimas, devido a sua característica principal de apresentar menor área superficial em relação a outros sólidos, como o cilindro e o cone, é o caso das esferas de armazenamento de GLP (Gás Liquefeito de Petróleo), que tem a função de conservar o gás, no qual é produzido nas unidades de processo para futura comercialização e distribuição ao mercado. Devido ao seu formato geométrico, quando esvaziadas, não é permitido a permanência de resíduos ou sobras de gases no tanque. A ausência de vértices possibilita uma libertação mais eficiente do gás contido nele.

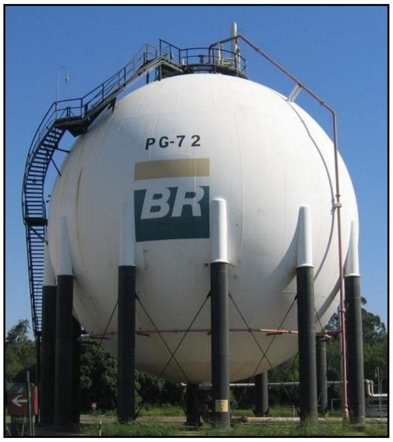

FIGURA 4: Esfera de armazenamento de GLP
FONTE: http://www.sel.eesc.usp.br

Além da esfera, a superfície helicóide e a catenóide possuem muitas aplicações, entre elas podemos destacar aquelas relacionadas à área de mecânica bem como na confecção de latas de produtos alimentícios, conforme as figuras a seguir:

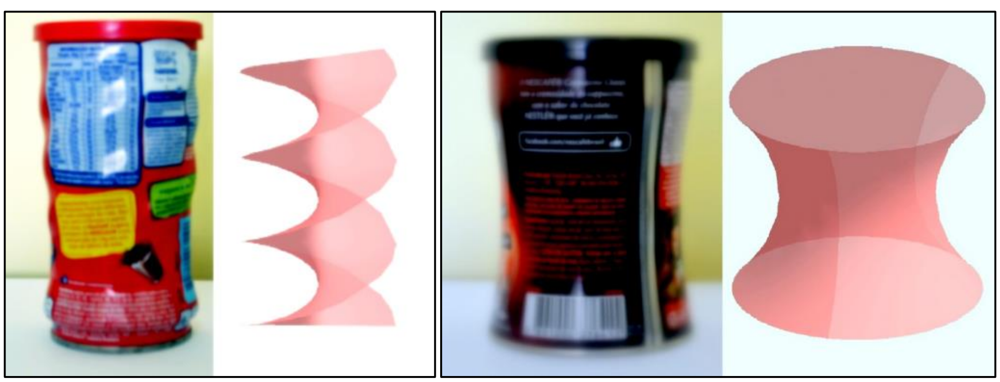

FIGURA 5: Aplicações – Helicóide e Catenóide
FONTE: Autores, 2014

3. Estudo de superfícies mínimas no GeoGebra

O GeoGebra permite o estudo dos sólidos de revolução como cilindro, cone e esfera, em que se pode analisar o comportamento dos mesmos quanto a variação da área total em função do raio da base, para um dado volume fixo, bem como realizar um estudo comparativo entre ambos.

Para isso, pode-se criar, por exemplo, no caso do cilindro circular reto de volume V cujo raio da base é igual a r e altura h, a função que representa a área total em função do raio da base:

$$A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Sendo o volume do cilindro igual a $V = \pi r^2 h$ e que, portanto, $h = \frac{V}{\pi r^2}$, teremos:

$$A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} \Rightarrow A_T(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{\pi r}$$

Com isso, ao criarmos controles deslizantes para o raio da base r e o volume V do cilindro circular reto no GeoGebra e a função $A_T(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{\pi r}$ na janela de visualização 2D, teremos na janela de visualização 3D a formação do sólido em questão, utilizando–se do comando cilindro, com altura e raio variáveis, conforme a ilustração a seguir:

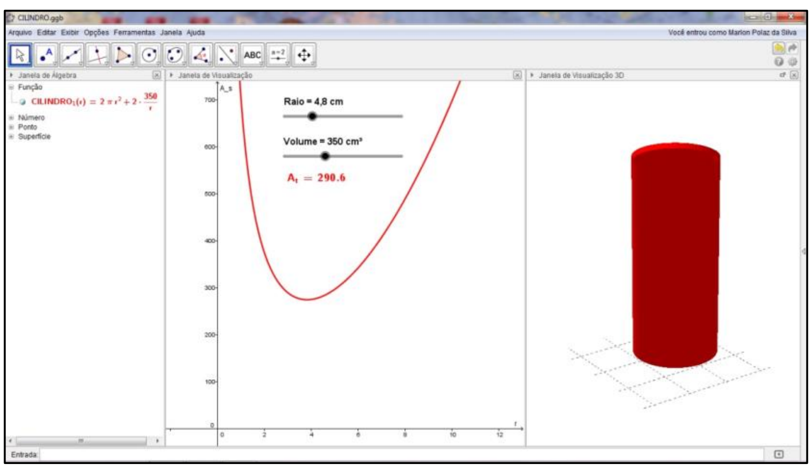

FIGURA 6: Estudo do cilindro circular reto no GeoGebra
FONTE: Autores, 2014

Este estudo permite, por exemplo, determinar quais as dimensões do cilindro de menor área superficial possível para um determinado volume fixo bem como estudar a área superficial do referido sólido variando-se o raio da base ou o volume.

Para o estudo do cone circular reto demonstra-se que a área superficial varia em função do raio da base de acordo com a seguinte expressão analítica:

$$A_T(r) = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + \frac{9V^2}{\pi^2 r^4}}$$

De maneira semelhante, no caso da esfera, a área superficial em função do raio r é constante para um determinado volume V, ou seja:

$$A_T = 4\pi\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Essas duas funções podem ser inseridas e estuadas no GeoGebra de acordo com a figura a seguir:

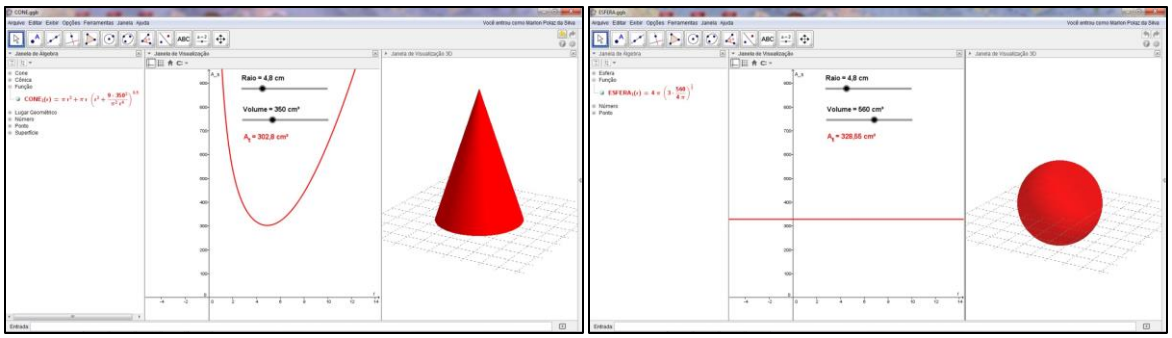

FIGURA 7: Estudo do cilindro circular reto e da esfera no GeoGebra
FONTE: Autores, 2014

Realizou-se um estudo particular comparativo por meio da construção dos gráficos da área superficial em função do raio dos três sólidos: esfera, cilindro e cone no software GeoGebra adotando-se o intervalo do volume de 0 a 1000 cm³ e raio de 0 a 20 cm para os referidos sólidos.

O estudo consistiu em construir o gráfico das funções que representam a variação da área superficial dos três sólidos (cilindro, cone e esfera) num mesmo sistema de coordenadas cartesianas e a partir daí, manipulando-se os valores do raio e do volume dos sólidos por meio dos controles deslizantes, observou-se qual deles apresentava a menor área superficial.

Para o início do estudo da área superficial, fixou-se o volume de 350 cm³ (correspondente, por exemplo, ao volume de uma lata de refrigerante) para os três sólidos. Variando-se o raio entre 0 e 5,18 cm, a área superficial da esfera é menor que a área do cilindro e esta é menor que a do cone, ou seja, para 0 < r < 5,18 cm teremos A(esfera) < A(cilindro) < A(cone).

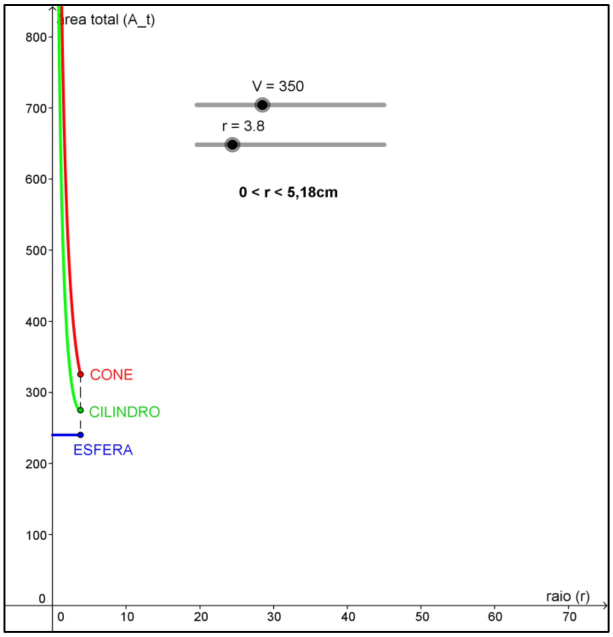

FIGURA 8: Variação do raio dos sólidos entre 0 e 5,18cm, para v = 350cm³
FONTE: Autores, 2014

No caso em que temos r = 5,18cm, constatou-se que a área total do cone torna-se igual à área do cilindro, porém ambas são maiores que a da esfera. Em outras palavras, para r = 5,18 cm: A(cone) = A(cilindro) = 304,08 cm² e A(esfera) = 240,18 cm².

Para o intervalo $5{,}18 < r \leq 20$ cm, inferiu-se que a área total do cilindro passa a ser maior que a do cone, e, a da esfera continuou apresentando a menor área total dentre os três sólidos. Isso quer dizer que para $5{,}18 < r \leq 20\ cm$: A(esfera) < A(cone) < A(cilindro).

A partir dos dados descritos e analisados anteriormente, conclui-se que dentre os sólidos de resolução estudados: esfera, cilindro e cone, a esfera, para um dado volume fixo, é a que apresenta a menor área superficial, mesmo o raio variando-se em um determinado intervalo.

No caso do intervalo considerado $0 < r < 20$ cm para o volume $\mathrm{V} = 350\ \mathrm{cm}^3$, o cone circular reto possui a menor área superficial para $\mathrm{r} = 4{,}9$cm, enquanto que no cilindro circular reto temos a área superficial mínima para $\mathrm{r} = 3{,}8$cm.

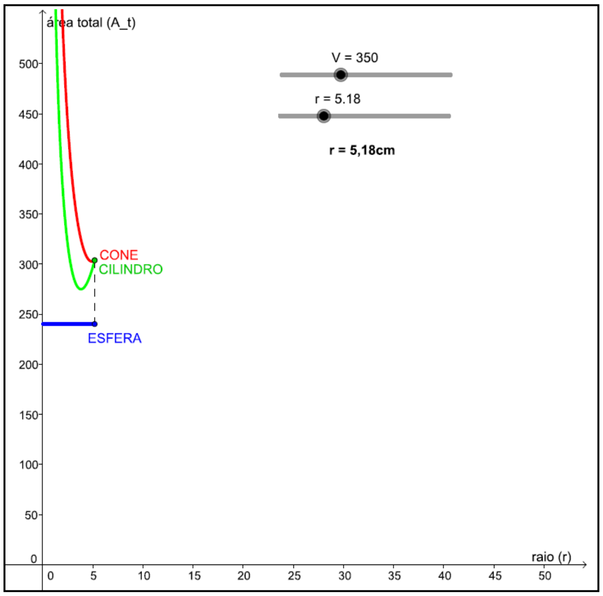

FIGURA 9: Variação do raio dos sólidos entre 5,18 e 20 cm, para v = 350 cm³
FONTE: Autores, 2014

4. Variação do volume – sólidos de revolução

Além do estudo realizado anteriormente, nosso objetivo nessa etapa é encontrar com base em simulações, utilizando os gráficos que representam a variação da área superficial em função do raio, dentre os três sólidos de revolução: cilindro, cone e esfera, variando-se o volume num determinado intervalo para um valor fixo de raio qual é o sólido que apresenta a menor área superficial.

Utilizaremos, por exemplo, os seguintes valores para o raio r: 5 cm e 10 cm e o volume V variando para ambos os valores de *r* no intervalo de 0 a 1000cm³.

Vamos denominar, em ordem crescente, a área superficial dos três sólidos por A_1, A_2 e A_3 e ainda, sendo $b = |A_1 - A_2|$ a diferença em módulo entre a maior área (A_1) e a área intermediária superficial (A_2) e $c = |A_2 - A_3|$ a diferença em módulo entre a área intermediária (A_2) e a menor área superficial (A_3) dentre os três sólidos em questão.

No primeiro caso, para r = 5 cm, pode-se concluir alguns resultados relevantes, para quatro variações de volume. Na primeira, quando $0 \leq V \leq 119{,}31$, constatamos que $A_1 = A_{cilindro}$, $A_2 = A_{cone}$ e $A_3 = A_{esfera}$, ou seja, $A_{esfera} < A_{cone} < A_{cilindro}$. A diferença entre as áreas do cone e cilindro é crescente no intervalo estudado, sendo a superfície cilíndrica maior durante toda variação no intervalo dado. Já para a esfera, em relação aos outros dois sólidos, a diferença sempre diminuiu, conforme a figura a seguir:

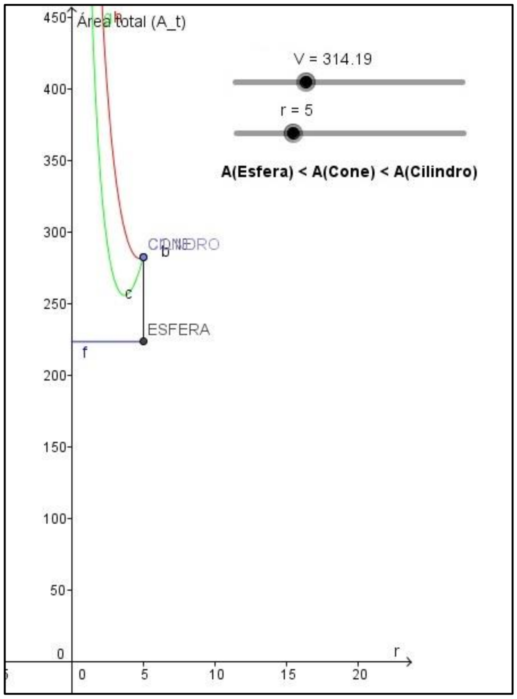

FIGURA 10: Gráfico comparativo – sólidos de revolução
FONTE: Autores, 2014

Agora, com $119{,}31 \leq V \leq 314{,}19$, para cilindro e cone, a diferença entre as áreas se anula em V = 314,19 cm³, ou seja, os volumes se tornam iguais e a partir deste valor $A_{cone} > A_{cilindro}$. Sendo assim, $A_1 = A_{cone}$ e $A_2 = A_{cilindro}$.

Para a esfera também ocorreu uma inversão, pois a partir de 237,22cm³ a diferença entre a área esférica e a dos sólidos de revolução passa a aumentar, pela primeira vez. Portanto a esfera manteve-se com a menor área superficial dentre os três sólidos estudados.

Considerações Finais

Esta pesquisa apresentou como objetivo principal realizar um estudo por meio do software GeoGebra na resolução de um problema de otimização, especificamente sobre superfícies mínimas envolvendo os sólidos de revolução cilindro, cone e esfera.

Observou-se que o software auxiliou sobremaneira o estudo de tal problema de maneira simplificada por meio da manipulação dinâmica da representação gráfica da função que abarcava as variáveis em questão, no caso, área superficial, volume e raio da base.

Além disso, a utilização do GeoGebra permite aos alunos de forma interativa elaborar e modelar o problema como visualizar os resultados obtidos devido a sua gama de recursos e ferramentas, além de suas diversas possibilidades de se trabalhar tanto no domínio algébrico quanto geométrico e numérico.

No caso do problema da superfície mínima proposto por Plateau, verifica-se que sua resolução algébrica se torna extremamente trabalhosa por envolver desigualdades e equações cujas raízes e pontos de máximo e mínimo requer manipulações algébricas e que sua resolução via interpretação gráfica com o auxílio do GeoGebra se constitui como uma valiosa ferramenta.

Essa pesquisa pode ser estendida no estudo de outras superfícies mínimas descritas nesse trabalho, como a catenóide e a helicoide, por exemplo, no sentido de se procurar obter alguns comparativos e aplicações cotidianos dessas superfícies.

Sendo assim, concluiu-se que o uso de um recurso auxiliar computacional no estudo dos conceitos matemáticos pode ser um fator preponderante na construção do conhecimento, com possibilidades e perspectivas de explorações do GeoGebra no ensino e aprendizagem da Matemática.

Referências

CANTO, E. (2010). Como se formam as bolhas de sabão? *Ciências Naturais.* São Paulo: n. 23, Editora Moderna.

COURANT, R. e ROBBINS, H. (2000). *O que é matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos.* Tradução de Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

GRANDE, A.L. e Vasquez, V.R. (2014). Resolução de problemas de otimização com o auxílio do software GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo.* São Paulo: v. 3, n.1.

TABUTI, L.M. (2013) O Estudo de Geometria Espacial com Bolhas de Sabão. *Revista Científico Colégio Novo Tempo. Práticas Pedagógicas: Registros e Reflexões*. São Paulo: v. 2, n. 1.