

A APRENDIZAGEM DA MÉDIA ARITMÉTICA SIMPLES A PARTIR DE MATERIAIS DIDÁTICOS DISTINTOS: uma comparação entre duas propostas de ensino

Sandra Magina
sandramagina@gmail.com
Sônia Fonseca
soniafonseca19@gmail.com

RESUMO

Este artigo tem por objetivo apresentar uma análise comparativa entre dois estudos que investigaram a formação do conceito de média aritmética simples. Os estudos foram realizados com estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental (antiga 4ª série) de uma mesma escola pública situada em uma zona central da cidade de São Paulo. Os estudos utilizaram os mesmos instrumentos diagnósticos (pré e pós-testes) e trabalharam as mesmas atividades (situações-problema) em suas intervenções de ensino. Eles, porém, diferiram quanto ao material didático utilizado: um trabalhou em ambiente computacional, com o software Tabletop, e o outro usou material manipulativo, especificamente uma tábua de gráfico, feita de chapa galvanizada, acompanhada de ímãs com formas e cores distintas. Os resultados apontam que os alunos que usaram material manipulativo tiveram melhores desempenhos nas atividades de média do que os que trabalharam com o Tabletop. Essa diferença, porém, não foi estatisticamente significativa. O comportamento dos estudantes de ambos os grupos nos testes seguiu a mesma tendência, tanto no que tange ao acerto quanto ao erro. O estudo conclui que as intervenções interferiram positivamente no processo de abstração, do tipo pseudo-empírica, desses estudantes.

Palavras chave: média aritmética. Ambiente Computacional. Material manipulativo. Estudo comparativo. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This paper aims to make a comparative analysis of two studies that explored the simple arithmetic average. The studies were conducted with students from the fifth grade of elementary school (former 4th grade) of the same public school, located in a central area of the city of São Paulo. The studies used the same diagnostic instruments (pre and post-tests) as well as used the same activities in their teaching interventions, that is, used the problem solving as didactic method. However, they differed from each other in the teaching didactic materials, as one worked in computational environment, specifically Tabletop software, while the another used manipulative material, specifically a board chart, made of galvanized sheet, accompanied by magnets with shapes and different colors. The results show that students who worked with manipulative materials had better performances in the post-test diagnostic than those who worked in the computer environment. This difference, however, was not statistically significant. Nevertheless, students' behavior in both groups followed the same

trend in all items, both with regard to accuracy as the error. The study concluded that those interventions interfered positively in the process of reflective abstraction of these students.

Keywords: Arithmetic Average. Computational environment. Manipulative material. Comparative Study. Elementary School.

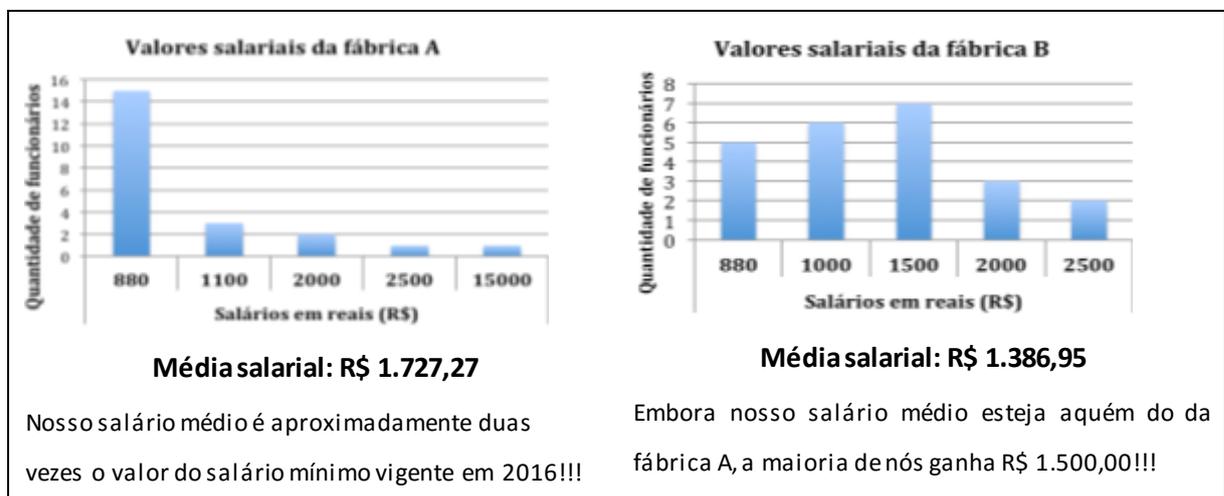
INTRODUÇÃO

Este artigo apresenta e compara resultados de dois estudos sobre apropriação do conceito de média, em que ambos foram realizados com alunos do 5º ano (antiga 4ª série), de quatro turmas distintas de uma mesma escola pública da área central da cidade de São Paulo.

O motivo que nos mobilizou a elaborar este artigo pauta-se na importância que o conceito de média tem na vida científica e cotidiana do cidadão. Esse conceito permite explicar muitos fenômenos, embora nem sempre seu uso seja adequado. Assim, não raro, pessoas escolhem a média para lhes subsidiar em suas tomadas de decisão sem que esta seja a ferramenta estatística mais acertada para essa determinada situação. Para ilustrar nosso argumento, imagine a seguinte situação:

Para escolher entre duas fábricas onde trabalhar, o operário obteve as seguintes informações dos gerentes dessas fábricas:

Figura 1 - Ilustração gráfica dos salários de duas fábricas fictícias



As informações das duas fábricas são absolutamente verdadeiras. Então, qual é a melhor fábrica para o operário trabalhar do ponto de vista salarial? Se o operário for usar a média salarial como parâmetro, certamente escolherá a fábrica A. Mas será este o melhor critério para embasar sua escolha? Isto é, usar a média salarial da fábrica como parâmetro de escolha é uma boa opção? Em quais das fábricas a média apresentada se aproxima da realidade dos valores salariais praticados? Existe uma outra medida estatística que mais bem

avaliaria esta situação? São perguntas como essas que nos permitem avaliar uma determinada situação com mais precisão, para então escolher que ferramenta estatística (ou matemática) podemos usar para nos subsidiar em nossas escolhas. Neste caso específico a média não se mostra a ferramenta mais adequada. Vejamos porque.

MÉDIA ARITMÉTICA SIMPLES, OU SIMPLEMENTE MÉDIA

A Média faz parte dos conceitos da Estatística. Os dados estatísticos podem ser sintetizados por meio de quantidades chamadas de medidas. Estatisticamente temos as medidas de assimetria, de dispersão e de posição. Essas últimas subdividem-se em ordenamento e tendência central. Chamam-se de “tendência central” as medidas cujos dados tendem a se juntarem em torno de valores centrais. Fazem parte dessas medidas a média, a moda e a mediana. No que concerne à média, esta pode ser aritmética (simples ou ponderada), geométrica, harmônica, quadrática, cúbica ou biquadrática. Tratando especificamente da média aritmética, esta é considerada como “o conceito mais básico da Estatística e da ciência experimental, é também o mais utilizado na vida cotidiana das pessoas” (MAGINA; CAZORLA; GITIRANA; GUIMARÃES, 2010, p. 61-62). Essas autoras ainda explicam que

a média fornece um indicador que pode ser interpretado como um valor típico e que pode representar, em certas circunstâncias, um conjunto de dados. Além disso, é a base para o cálculo de outras medidas tais como o desvio padrão, coeficiente de variação, de correlação, dentre outras” (p. 62).

A média aritmética simples (doravante chamaremos simplesmente por “média”) é representada pela fórmula: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$, onde X_i são os valores assumidos pela variável e n é o número de dados.

Quando pensamos na escola, em especial no Ensino Fundamental, esse conteúdo resume-se à memorização de seu algoritmo: soma dos valores da variável dividida pelo número de dados envolvidos na soma, o que do ponto de vista da fórmula seria:

Figura 2 - Forma simplificada da média aritmética simples

$\text{Média} = \frac{\text{Soma dos valores da variável}}{\text{Número de parcelas que compõem a soma}} = \frac{\text{Soma}}{n}$

Assim, é tomado como certo que dentre todas as medidas de tendência central (média, moda e mediana), a média é a mais conhecida entre os estudantes (talvez a mais ou a única

ensinada na escola). Mas será que o seu uso é sempre adequado? Não, não é. A média não é a melhor medida, por exemplo, para ser usada quando entre os dados há algum que se distancie muito dos demais dados, isto é, quando a distribuição dos dados é muito assimétrica. Nessas situações ela termina por gerar uma medida dessincronizada da realidade. Este é o caso dos salários da fábrica A (figura 1) que, por causa de uma pessoa, sua média salarial se apresenta muito acima da realidade dos salários dessa fábrica.

A depender do conjunto de dados que temos, a média, mesmo que calculada de maneira correta, pode nos dar uma visão distorcida da realidade. Podemos pensar em um outro exemplo de maior importância até que a situação dos salários das fábricas, pois afeta não apenas uma pessoa mas um país inteiro, que é o cálculo do Produto Interno Bruto (PIB) per capita. Este é calculado pela soma monetária de bens e serviços finais produzidos no país, dividido pela população total do país. Nesse cálculo é possível, por exemplo, que o PIB aumente, enquanto a população fica mais pobre, pois ao calcular a média não é considerado o nível de desigualdade da população. Outra situação, também de grande importância para um país, é o cálculo da renda per capita (indicador que auxilia a avaliar o grau de desenvolvimento de um país). Ambos índices são calculados a partir da média. A renda per capita do Brasil em 2015 foi de R\$ 1.113,00 enquanto o salário mínimo era de R\$ 788,00. Para mostrar a distorção de tal valor, embora a renda per capita nesse período tenha sido de R\$ 1.113,00, no Maranhão ela não chegou nem à metade desse valor (R\$ 509,00). E mais, nesse mesmo período, as rendas per captas de Alagoas, Pará, Ceará, Piauí (R\$ 598,00, R\$ 672,00, R\$ 680,00, R\$ 729,00 respectivamente) não conseguiam sequer atingir o valor do salário mínimo vigente. Tais números não deixam dúvidas sobre as distorções que o uso da média pode trazer sobre uma realidade.

Então a média não é uma boa medida para se usar? Também não é verdade. A média é sim uma medida muito boa. Imagine a seguinte situação:

FLÁVIO TRABALHA EM UMA LOJA DE ELETRODOMÉSTICOS. NO PRIMEIRO DIA DE TRABALHO ELE ENTREGOU 4 GELADEIRAS, NO SEGUNDO 5, NO TERCEIRO 7 E NO QUARTO 6. QUAL FOI A MÉDIA DE GELADEIRAS ENTREGUES NESSES DIAS?

Quadro 1: Exemplo retirado de Marques, Guimarães e Gitirana (2011, p. 742).

Aqui, usar a média é uma excelente opção, pois por meio dela obtemos uma distribuição uniforme. Cazorla e Santana (2006, p. 18) explicam que a média é

uma medida que resume e representa um conjunto de dados em um único valor [...] seu cálculo remete à divisão em partes iguais do todo entre seus

componentes [...] seu algoritmo consiste em somar todos os valores da variável e dividir pelo número de dados.

No caso da situação acima proposta por Marques, Guimarães e Gitirana (2011), para calcular a média, somaríamos todos os valores das entregas ($4 + 5 + 7 + 6$) e dividiríamos pelo número de dias em que elas aconteceram ($\div 4$), obtendo assim a média de 5,5 geladeiras entregues por dia. Note que o valor da média encontrada, embora esteja dentro do intervalo dos valores da situação (entre 4 e 7), não coincide com nenhum dos quatro valores do enunciado da situação. Essa situação alinha-se com seis das sete propriedades da média aritmética, descritas por Strauss e Bichler (1988 apud MAGINA; CAZORLA; GITIRANA; GUIMARÃES, 2010, p. 62).

Para mais bem discutir a questão, iremos apresentar as sete propriedades, relacionando-as, sempre que pertinente, com as propriedades que estão presentes na situação acima trazida por Marques, Guimarães e Gitirana (2011):

1. A média está localizada entre os valores extremos (valor mínimo \leq média \leq valor máximo) – na situação das geladeiras, foram entregues 22 geladeiras em 4 dias, o que dá uma média de 5,5 geladeiras por dia. Esse número está localizado entre os valores 4 e 7 contidos na situação;
2. A soma dos desvios a partir da média é zero ($\sum(X_i - \text{média}) = 0$);
3. A média é influenciada por cada um e por todos os valores (média = $\sum X_i/n$) – na situação da geladeira a média 5,5 foi encontrada porque somamos todas as quantidades de geladeiras entregues (22) e dividimos pelo número de dias em que essa entrega aconteceu (4). Assim, fica evidente que cada um dos valores contidos na situação, seja no que se refere à quantidade de geladeira, seja na quantidade de dias influenciaram o resultado, pois cada um dos valores contidos na entrega e nos dias foram contabilizados e fizeram parte das operações realizadas para se achar a média aritmética;
4. A média não necessariamente coincide com um dos valores que a compõem – como vimos, a média obtida foi 5,5, que é um número que não pertence ao conjunto dos números naturais, ao passo que todos os valores contidos na situação, a partir dos quais a média foi calculada, pertencem ao conjunto dos naturais. Notemos que a situação apresenta os números 5 e 6 como duas das quantidades de geladeiras entregues, ao passo que a média aritmética das geladeiras foi 5,5, isto é, um valor entre 5 e 6;
5. A média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física (por exemplo, o número médio de filhos por casal é de 2,3) – essa propriedade fica explícita na

situação da entrega das geladeiras, já que a média foi 5,5 e ninguém pode, na realidade física, entregar 5 geladeiras e meia; ou bem entrega 5 ou bem entrega 6 geladeiras;

6. O cálculo da média leva em consideração todos os valores, inclusive os nulos e os negativos – foram consideradas na situação cada uma das quantidades de geladeiras entregues (4, 5, 7, 6), as quais foram somadas e depois divididas pela quantidade de dias (4) em que ocorreram essas entregas. Assim, nenhum valor referido na situação deixou de ser considerado. A situação, contudo, não apresentou nenhum valor nulo. Como veremos mais adiante, aparecerá em nosso estudo duas situações em que um dos valores do gráfico é nulo;
7. A média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada. Em termos espaciais, a média é o valor que está mais próximo de todos os valores – se considerarmos o intervalo entre 4 e 7 (4, 5, 6 e 7), achamos em 5,5 mais próximo de todos os valores. Ele fica a 1,5 dos valores 4 e 7, e fica a 0,5 dos valores 5 e 6. Qualquer outro valor ficaria de um dos números da situação. Se a média obtida fosse 6, por exemplo, então esse valor estaria mais distante do 4 do que a média que encontramos (5,5).

Essas propriedades mostram que a média, como aliás a maioria dos conteúdos matemáticos, é um valor que não precisa fazer parte do mundo concreto. Uma loja pode vender e entregar uma, duas, três, várias geladeiras, a depender do veículo que disponha para isso. Mas ela não pode entregar um quarto de geladeira. Contudo, a média referente à situação de entrega de geladeiras, tanto pode ser um valor discreto (1, 2, 3, 4, etc.) como um valor contínuo (1,2; 1,4; 1,5 etc.). Assim, ao trabalhar com esse conceito, exigiremos do estudante um processo de abstração. Em termos piagetiano, abstração reflexionante, que é do que trataremos sinteticamente a seguir.

ABSTRAÇÃO REFLEXIONANTE

O termo “*abstração reflexionante*” foi cunhado por Piaget (1995) que parte do pressuposto que todo conhecimento traz em seu bojo uma abstração, já que para sua construção o sujeito retira elementos de alguma realidade já experienciada anteriormente.

Nessa direção, Piaget (1995) esclarece que existem dois tipos de abstrações: a empírica e a reflexionante. No que tange à primeira, esta apoia-se em objetos concreto ou, ainda, nos aspectos materiais da ação do próprio sujeito, tais como identificar e classificar propriedades do que se observa, como a cor ou textura, ou do que faz, tal qual a força.

Quanto à abstração reflexionante esta encontra apoio nas atividades mentais do sujeito, tais como os esquemas, as coordenações das ações e, ainda, as operações efetuadas. Dois

processos cognitivos estão presentes: o *reflexionamento* – funciona como um refletor iluminando um patamar superior, o qual foi retirado do patamar inferior – e a *reflexão* – uma ação cognitiva que reconstrói e organiza o que chegou nesse patamar superior.

De maneira sintética, é possível afirmar que enquanto a *abstração empírica* limita-se a informar sobre dados extraídos de objetos concretos que sofreram algum tipo de abstração (uma representação direta, por exemplo), a *abstração reflexionante* tem uma função estruturante, já que conduz à construção de novas formas de conhecimentos. Nela, as relações criadas não estão nos objetos, elas são construídas mentalmente por cada sujeito. Dessa forma, “a abstração reflexionante está apoiada nas atividades cognitivas e depende das coordenações das operações mentais do sujeito” (PEROVANO; MAGINA, 2012, p. 5). Mais especificamente, Perovano e Magina (2012, p. 6) explicam que quando o sujeito faz uso da abstração reflexionante “as situações seriam transpostas (espelhadas) para planos superiores, onde seriam melhor compreendidas (pensadas mais abstratamente). Seria a passagem da ação para a representação e da representação para a operação”.

No âmbito da abstração reflexionante, Piaget (1990, 1995) identifica a existência de dois tipos: *abstração pseudo-empírica* e *abstração refletida*. A primeira abstração parte de objetos materiais (tal qual parte também a abstração empírica), mas avança cognitivamente quando o sujeito passa a ser capaz de abstrair propriedades dos objetos observados. Isto implica na necessidade de que os objetos observados sejam manipulados pelo sujeito. Já a abstração refletida ocorre quando a criança “toma consciência da utilização de novos instrumentos de raciocínio e consegue reconstruir ou representar o raciocínio que fez para resolver o problema apresentado, ou seja, formaliza-o. É uma reflexão sobre a reflexão” (CAETANO, 2004, p. 57). A abstração, de um modo geral, e a abstração pseudo-empírica em particular foram as principais sustentações teóricas do estudo de Caetano.

Após esta breve discussão sobre a média e sobre os tipos de abstração propostos por Piaget (1990, 1995), relataremos brevemente os estudos cujos resultados, no que tange à média, serão comparados. O primeiro estudo (doravante chamado por Estudo 1) a ser relatado intitula-se “*Introduzindo a Estatística nas séries iniciais do Ensino Fundamental a partir de material manipulativo: uma intervenção de ensino*”, desenvolvido por Caetano (2004), e o segundo estudo (doravante chamado por estudo 2), realizado por Lima (2005) chama-se “*Introduzindo o conceito de média aritmética na 4ª série do Ensino Fundamental usando o ambiente computacional*”. É importante informar que ambos os estudos se debruçaram sobre outros conceitos estatísticos, os quais, para efeito do foco do presente artigo, não serão discutidos aqui.

DESCRIÇÃO DOS ESTUDOS

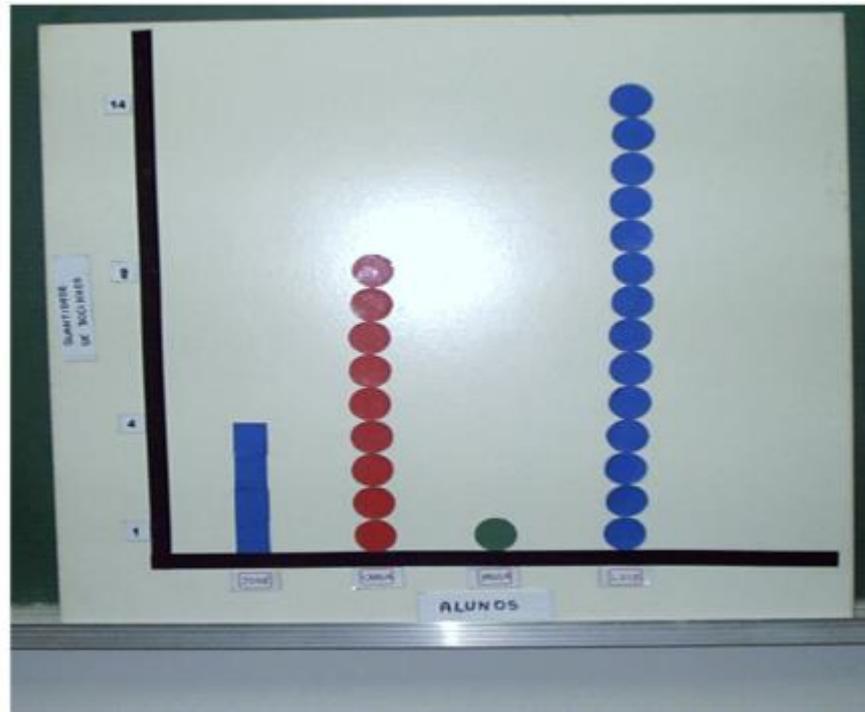
São dois estudos intervencionistas, cujos desenhos se assemelharam. Os dois foram realizados com estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental advindos de uma mesma escola pública situada em uma área central da cidade de São Paulo, sendo que um foi realizado com duas turmas do turno matutino e o outro com duas turmas do vespertino. Ambos tiveram duas etapas, uma relativa à realização de uma intervenção de ensino e a outra à aplicação de dois instrumentos diagnósticos (pré-teste, aplicado antes da intervenção, e pós-teste, aplicado depois dela). Todos os dois estudos também lançaram mão de um grupo controle (GC), que participou apenas da etapa dos instrumentos diagnósticos, aplicados nas mesmas ocasiões em que foram aplicados ao grupo experimental (GE). O GC de cada estudo foi constituído considerando eventuais efeitos de maturação e de aprendizagem escolar sobre o desenvolvimento cognitivo dos estudantes participantes do estudo. Assim o GC teve a finalidade de servir de referência comparativa aos resultados do GE. Por fim, apontamos como semelhança entre os estudos, os testes diagnósticos (pré e pós-testes), que foram os mesmos, inclusive com a mesma formatação. A seguir apresentamos uma síntese de cada um dos estudos.

Síntese do estudo 1:

Este estudo teve por objetivo “investigar o desenvolvimento da leitura e interpretação de gráficos, bem como do conceito de média aritmética por crianças da 4ª série do Ensino Fundamental por meio de uma intervenção de ensino com uso de material manipulativo” (CAETANO, 2004, p. 6). Para tanto foram constituídos dois grupos de pesquisa, o experimental (GE) e o de controle (GC) e traçado um desenho de experimento que constou de duas partes: testes diagnósticos (pré e pós-testes) e intervenção de ensino. Apenas o GE, composto por 28 estudantes, passou pela intervenção de ensino, que se pautou em resolução de problemas, propostos em fichas de atividades, tendo apoio no material manipulativo “tábua de Gráfico” (uma chapa galvanizada pintada de branco, com dimensões de 0,50m de comprimento por 0,50m de altura para os estudantes e de 1m² para a pesquisadora) e em figuras (círculos e retângulos verdes, vermelhos e azuis), números e etiquetas imantadas. Havia 7 tábuas de 0,25m² (0,50m X 0,50m). A figura 3 a seguir ilustra uma situação em que a tábua de gráficos quadrada foi utilizada para construir um gráfico de coluna, com características pictóricas, pois as colunas, na verdade, são formadas a partir de um empilhamento dos ímãs com formatos circulares (vermelho, azul e verde) e formato

retangular azul. As linhas pretas que formam os eixos também são ímãs (em formato de tiras), bem como os rótulos de cada eixo.

Figura 3 - Tábua de Gráfico



Fonte: Caetano (2004, p. 66).

A intervenção de ensino foi desenvolvida com dois encontros semanais ao longo de quatro semanas, sendo que cada um deles teve a duração de uma hora e meia. Nesses encontros os estudantes eram divididos em sete grupos de quatro alunos e cada grupo dispunha de uma tábua de gráfico e um conjunto de ímãs, os quais eram utilizados para ajudar na resolução dos problemas contidos nas fichas de atividades. Ao todo foram sete fichas.

Síntese do estudo 2:

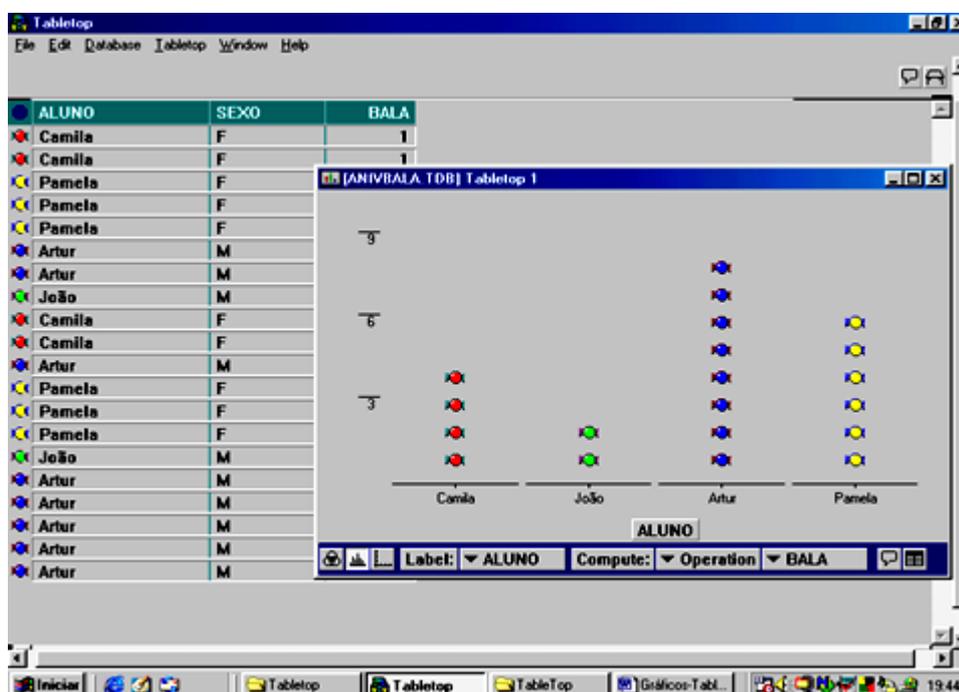
O objetivo deste estudo foi “investigar a introdução do conceito de média aritmética em alunos da 4ª série do Ensino Fundamental, partindo do uso de gráficos em ambiente computacional, na situação de sala de aula” (LIMA, 2005, p. 2). Para tanto, o estudo foi realizado com dois grupos de pesquisa, sendo um experimental (GE) e o outro controle (GC). O desenho do experimento foi traçado de tal modo que os dois grupos passassem pelos dois testes diagnósticos (pré e pós-testes). A aplicação desses testes aconteceu no mesmo dia, sendo aplicado no primeiro horário da escola no GC e, após o recreio, aplicado no GE. Este

último grupo era formado por 23 estudantes, os quais participaram ainda de uma intervenção de ensino em ambiente computacional¹, utilizando o software Tabletop.

Esclarecemos que o software Tabletop foi desenvolvido pelo Technical Education Research Centers (TERC) com finalidade educacional, para manipulação de dados, permitindo incluir as etapas de construção, exploração e análise de banco de dados. O Tabletop tem cinco diferentes maneiras de representar os dados: tabelas, caixas de pontos, diagrama de Venn, gráfico de pontos e histograma. Tem, ainda, o modo de questionário. Estas facetas acopladas com as opções de títulos, ícones e marcação de grupos permitem que os estudantes visualizem e tratem os dados de várias formas. Informamos, por fim, que é na representação tabular que o banco de dados é construído, pois é aí que os estudantes criam as variáveis (por exemplo: nome, sexo, tipo de bala etc.). Nesse banco é possível ainda definir um ícone para representar uma das variáveis nele presente.

No exemplo mostrado na figura 4 a seguir, o ícone escolhido foi o de uma bala, a qual foi representada nas cores vermelha, verde, azul e amarela. Assim, a figura 4 mostra o banco de dados sobre quantidade de balas consumidas pelos estudantes e ainda um gráfico de barra, com características icônicas, referente à distribuição dessas balas por quatro alunos.

Figura 4 - Exemplo de um banco de dados e um gráfico de frequência no Tabletop, retirado dos dados do banco



Fonte: Lima e Magina, 2007, p. 5.

¹ A escola dispunha de um laboratório de informática, com uma bancada em disposição de “U” e contendo 20 microcomputadores, todos com o software Tabletop instalado.

A intervenção de ensino foi desenvolvida com dois encontros semanais de uma hora e trinta minutos cada, perfazendo oito encontros, todos realizados no laboratório de informática da escola. Nesses encontros os estudantes trabalharam em grupos livres formados por três a quatro crianças que usavam o Tabletop para responder as sete fichas de atividades.

Os Instrumentos diagnósticos

Os instrumentos diagnósticos (pré e pós-testes) utilizados nos dois estudos foram compostos por três questões, sendo que a primeira questão tinha cinco itens, a segunda tinha seis e a terceira questão quatro itens. Para maiores detalhes consultar Caetano (2004) e Lima (2015), quando é possível ter acesso aos dois instrumentos diagnósticos na íntegra.

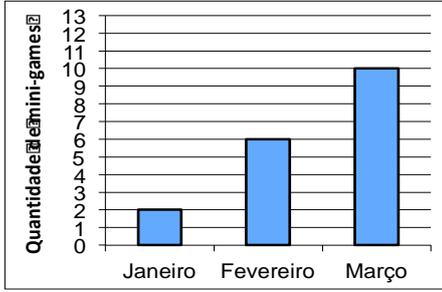
Esses instrumentos foram elaborados de tal maneira a manter equivalência matemática entre as questões do pré e do pós-teste. Para minimizar o efeito memorização, essas questões, além de mudarem de contexto, mudaram também de numeração do pré para o pós-teste. Mas para efeito deste artigo, no sentido de facilitar sua leitura, faremos o emparelhamento das questões, seguindo a numeração de como foram apresentadas no pré-teste.

A seguir apresentamos a figura 5, a qual traz os quatro itens de duas das questões do teste, sendo que dois deles pertencem à questão 1 (itens “c” e “d”) e dois à questão 2 (itens “e” e “f”). Escolhemos esses itens para serem discutidos neste artigo porque eles trataram especificamente do assunto média. Por fim, informamos que embora o item “f” da questão 2 esteja presente no teste, ele não foi computado como certo ou errado, já que ele abordava sobre a estratégia (processo) usada pelo estudante ao resolver uma questão sobre média, o que nos impossibilita quantificá-la. Assim, ele será apresentado na figura 5, que mostra os instrumentos diagnósticos, mas não aparecerá na tabela 1, que apresenta os resultados dos desempenhos dos estudantes de ambos os grupos nos itens pertencentes às duas questões de que trata este artigo nos dois instrumentos diagnósticos (pré e pós-testes).

Figura 5 - Questões de média retiradas dos pré e pós-testes dos estudos em comparação

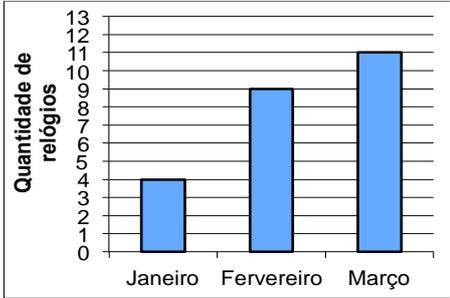
Questão 1

Chico vende mini-games na praça da República. No gráfico abaixo está representada a quantidade de mini-games que ele vendeu nos meses de janeiro, fevereiro e março.



Mês	Quantidade de mini-games
Janeiro	2
Fevereiro	6
Março	10

Maria vende relógios na praça da Sé. No gráfico abaixo está representada a quantidade de relógios que ela vendeu nos meses de janeiro, fevereiro e março.



Mês	Quantidade de relógios
Janeiro	4
Fevereiro	9
Março	11

Item c

“Seu Chico” pediu para seu neto Luis determinar qual foi sua venda média mensal de mini-games nesses meses. Luis pediu ajuda para seus colegas que responderam:

Luis: sua venda média mensal é 2 mini-games.
Alberto: sua venda média mensal é 12 mini-games.
Paulo: sua venda média mensal é 4 mini-games.
Rui: sua venda média mensal é 6 mini-games.
Carlos: sua venda média mensal é 18 mini-games.
 E para você, qual é a resposta correta?

Item d

Se “seu Chico” tivesse vendido 7 mini-games no mês de março, sua venda média mensal nesse período seria a mesma? _____

Se você acha que **SIM**, explique porquê.
 Se você acha que **NÃO**, qual seria a nova média?

Maria pediu para sua sobrinha Renata determinar qual foi sua venda média mensal de relógios nesses meses. Renata pediu ajuda para suas colegas que responderam:

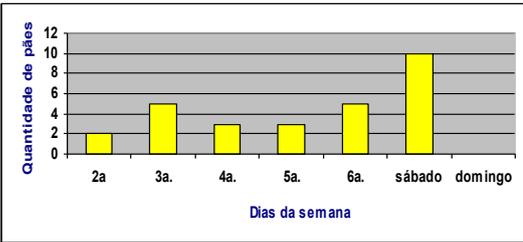
Joana: sua venda média mensal é 4 relógios.
Sonia: sua venda média mensal é 8 relógios
Carmem: sua venda média mensal é 11 relógios
Silvia: sua venda média mensal é 9 relógios.
Carina: sua venda média mensal é 24 relógios.
 E para você, qual é a resposta correta?

Se Maria tivesse vendido 6 relógios no mês de fevereiro, sua venda média mensal nesse período seria a mesma? _____

Se você acha que **SIM**, explique porquê
 Se você acha que **NÃO**, qual seria a nova média?

Questões e, f

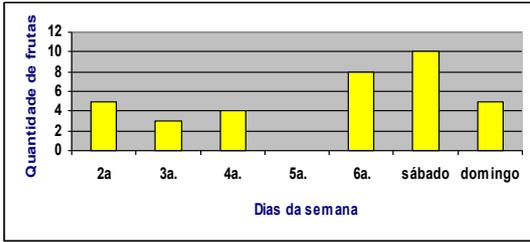
O GRÁFICO ABAIXO INFORMA O CONSUMO DE PÃES, DA FAMÍLIA DE “SEU CHICO” DURANTE UMA SEMANA.



Dias da semana	Quantidade de pães
2a	2
3a	5
4a	3
5a	3
6a	5
sábado	10
domingo	0

Qual o consumo médio diário de pães dessa família?
 Que conta você fez para achar esse valor?

O GRÁFICO ABAIXO INFORMA O CONSUMO DE FRUTAS, DA FAMÍLIA DE MARIA DURANTE UMA SEMANA.



Dias da semana	Quantidade de frutas
2a	5
3a	3
4a	4
5a	0
6a	8
sábado	10
domingo	5

Qual o consumo médio diário de frutas dessa família?
 Que conta você fez para achar esse valor?

Fonte: bricolagem das questões retiradas dos estudos de Caetano (2004) e Lima (2005).

Tendo apresentado os quatro itens sobre média contidos nas questões 1 e 2 dos dois estudos que nos propusemos a comparar, passaremos para a seção seguinte onde procederemos com tal análise comparativa. Mister se faz informar que como a intenção é comparar o efeito do uso de duas ferramentas didáticas sobre a aprendizagem dos estudantes acerca da introdução do conceito de média, então não vimos razão para trazer para o artigo os

resultados referentes aos grupos controles de ambos os estudos, detendo-nos apenas nos dois grupos experimentais, um de cada estudo.

DISCUTINDO OS RESULTADOS

Iniciamos esta seção apresentando os resultados gerais dos dois grupos nos pré e pós-testes, que é o que mostra a tabela 1 a seguir

Tabela 1 - Resultados dos desempenhos dos estudantes dos dois grupos

Testes Itens Estudos	Pré-teste			Pós-teste		
	1 c	1 d	2 e	1 c	1 d	2 e
Estudo 1: Ferramenta didática manipulativa (N = 28)	1 de 28 3,57%	1 de 28 3,57%	1 de 28 3,57%	13 de 28 46,43%	9 de 28 32,14%	10 de 28 35,71%
Estudo 2: Ferramenta didática computacional (N = 23)	0	0	0	7 de 23 30,47%	4 de 23 17,39%	4 de 23 17,39%

O primeiro resultado importante que podemos extrair da tabela 1 é que houve um enorme salto no desempenho desses estudantes do pré para o pós-teste e isso é válido para os dois grupos. Os resultados de ambos os grupos no pré-teste deixam claro que esses estudantes não sabiam resolver problemas de média. Tal resultado em nada espanta, já que essas crianças ainda não tinham tido contato formal com o conceito de média à época do pré-teste. Assim um efeito de chão já era esperado. Este resultado nos faz refletir que, diferente de alguns conceitos matemáticos, a média não parece ser um conceito que a criança possa aprender espontaneamente.

O segundo resultado, também importante e extraído da interpretação dos dados dos pós-testes apresentados na tabela 1, é que os estudantes de ambos os grupos obtiveram desempenhos bem melhores no item 1c do que nos demais itens (1d e 2e). Essa tendência foi observada nos dois grupos. Em outras palavras, tudo indica que o item 1c foi o mais fácil para esses alunos.

De fato, esse item mostrou-se o mais simples dos três, uma vez que ele solicitava a obtenção da média a partir de apenas 3 valores discretos, apresentados em um gráfico de coluna, cujos valores do eixo do y apresentavam-se em escala um. Notemos que o item “1d” já exigiu dos estudantes uma abstração do tipo “se...então” – “Se seu Chico tivesse” ... “se Maria tivesse”. Então, este item exige um esforço cognitivo no sentido de visualizar um novo gráfico cuja coluna referente ao mês de março será diminuída. Daí, um novo cálculo da média

teria que ser feito. Note que este foi o item mais difícil para os dois grupos, pois a pergunta não mais dizia respeito ao gráfico que era perceptualmente visto pelo estudante na questão 1, mas se referia a um gráfico que seria preciso construir no nível da representação.

Do nosso ponto de vista a resolução deste item exigia do estudante uma passagem da ação perceptiva do gráfico (abstração empírica) para uma representação de um novo gráfico que não estava ali desenhado (abstração reflexionante). Era preciso que o estudante agisse sobre a terceira coluna do gráfico desenhado, redesenhando assim um novo gráfico no nível da representação e, dessa representação, passasse para a operação (no caso, realizasse o novo cálculo da média), considerando os novos valores desse gráfico imaginário. Em outras palavras, o item exigia que o estudante operasse no âmbito da abstração refletida.

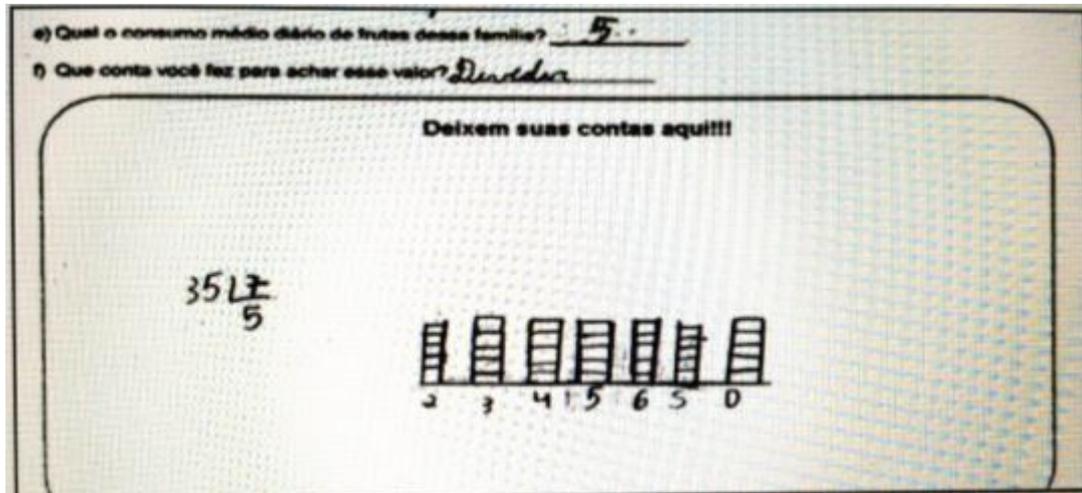
Por fim, o item 2e exigia do estudante a compreensão da sexta propriedade da média apresentada por Strauss e Bichler (1988 apud MAGINA; CAZORLA; GITIRANA; GUIMARÃES, 2010) – *o cálculo da média leva em consideração todos os valores inclusive os nulos e os negativos*. Assim, embora só houvesse seis colunas, seja no pré ou no pós-teste, o estudante teria que considerar o dado nulo (ausência de coluna) e dividir a soma encontrada por sete (e não por seis, que seria o número de colunas existentes, perceptualmente visível, no gráfico). Mais uma vez, percebe-se que o item requeria do estudante um esforço cognitivo complexo, iniciando por uma abstração que parte do objeto material (o gráfico), mas avança cognitivamente, exigindo que o sujeito passe a ser capaz de abstrair propriedades do objeto observado. Podemos falar que no caso do item 1d, foi exigido do estudante que este lançasse mão minimamente de uma abstração pseudo-empírica.

Em suma, em termos piagetianos podemos dizer que o item 1c exigia do estudante uma *abstração empírica* (que parte de objetos concretos ou perceptíveis), enquanto que os outros dois exigiam o uso de uma *abstração reflexionante*, em que o sujeito reflete sobre o objeto em um patamar superior.

Ainda no que tange à questão 2, o gráfico de onde os estudantes tinham que retirar as informações para responder o item “2e”, diferentemente do gráfico da questão 1 cuja escala era 1, aqui a escala usada era dois. Assim, as colunas relativas aos dias terça e sexta-feira no pré-teste e segunda-feira e domingo no pós-teste não encontravam valores explícitos no eixo do “y”, pois ficavam entre um e outro valor explícito no eixo. Do ponto de vista piagetiano (PIAGET, 1995), essas situações não permitem que os estudantes lancem mão apenas de uma representação direta (abstração empírica) das informações.

Uma das estratégias mais eficientes utilizadas pelos estudantes do grupo do estudo 1 foi o de *redistribuição de valores*. Essa estratégia pode ser identificada graças ao item “2P”. A figura 6 apresenta um exemplo dessa estratégia.

Figura 6 - Exemplo da estratégia *redistribuição de valores*



Fonte: Caetano (2004, p. 178).

A utilização dessa estratégia por parte de vários estudantes do estudo 1 é um forte indicador de que eles abstraíram o conceito de média por meio do que Piaget (1995) chama uma abstração pseudo-empírica. De fato, observa-se, na figura 6, que o estudante atuou sobre o objeto (no caso o gráfico de barra), redistribuindo os valores das barras do gráfico original em sete barras de mesmo valor (5).

Por fim, um terceiro resultado, igualmente extraído da tabela 1, e que merece destaque, é a diferença nos percentuais de acertos dos estudantes dos dois grupos. De fato, enquanto no pré-teste os desempenhos dos dois grupos foram similares, com ambos apresentando “efeito de chão” (quando os acertos nos itens das questões de ambos os grupos foram ou ficaram próximos a zero), no pós-teste o grupo que trabalhou com material manipulativo (estudo 1) mostrou desempenhos superiores em todos os três itens. Contudo, ao aplicar o teste estatístico t de Student (teste indicado para verificar se houve diferença ou igualdade entre duas médias advindas de duas amostras independentes), constatamos que desvios dessas médias foram devidos ao acaso, não havendo, portanto, diferenças estatisticamente significativas entre os grupos. Dessa forma, podemos afirmar que as amostras dos dois estudos são homogêneas.

CONCLUSÃO

Baseadas nas análises dos resultados discutidos na seção anterior, na qual constatou-se uma evolução positiva dos dois grupos entre o pré e o pós-teste, podemos afirmar que ambos

os materiais didáticos utilizados nas intervenções de ensino dos dois estudos mostraram-se efetivos para o ensino da média aritmética simples, pelo menos no que tange a esse grupo de estudantes. Notou-se ainda que houve uma tendência do grupo que trabalhou com a tábua de gráficos se sair melhor nas resoluções dos itens do pós-teste, o que por si já mereceria uma investigação mais profunda, envolvendo um número maior de participantes do estudo e, ainda, um número maior de situações-problema envolvendo o conceito de média nos instrumentos diagnósticos.

Por fim, concluímos, baseadas na análise de nossos achados, que ensinar média aritmética simples a partir de gráficos construídos de maneira pictórica, utilizando sejam ferramentas didáticas manipulativas, sejam ferramentas computacionais dinâmicas, mostrou ter grande efeito positivo para a apropriação desse conceito por estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

CAETANO, Simone da Silva Dias. **Introduzindo a Estatística nas séries iniciais do Ensino Fundamental a partir de material manipulativo**: uma intervenção de ensino. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pós-Graduação em Educação Matemática – PUC/SP, 2004. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/resultado-tdes-prog.php?ver=13&programa=13&ano_inicio=&mes_inicio=&mes_fim=&ano_fim=2013&grau=Todos>.

CAZORLA, Irene. Introduzindo o conceito de média aritmética na 4ª série do Ensino Fundamental usando o ambiente computacional. 2002. Tese (Doutorado em Educação) – Pós-Graduação em Educação, UNICAMP, Campinas, 2002.

_____; SANTANA, Eurivalda. **Tratamento da informação para o Ensino Fundamental e Médio.** Itabuna, BA: Via Litteratum, 2006.

_____; MAGINA, Sandra; GITIRANA, Verônica; GUIMARÃES, Gilda. **Estatística para os anos iniciais do Ensino Fundamental.** Itabuna, BA: Via Litteratum, 2011.

LIMA, Rosana. **Introduzindo o conceito de média aritmética na 4ª série do Ensino Fundamental usando o ambiente computacional.** 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pós Graduação em Educação Matemática, PUC, São Paulo, 2005. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/resultado-tdes-prog.php?ver=13&programa=13&ano_inicio=&mes_inicio=&mes_fim=&ano_fim=2013&grau=Todos>.

LIMA, Rosana; MAGINA, Sandra. Ler e interpretar gráficos usando as novas tecnologias: um estudo com alunos da 4ª série do ensino fundamental. IX Encontro Nacional de Educação

Matemática - ENEM. **Anais do IX ENEM**. Belo Horizonte, 2007. Disponível em: <http://www.sbemrasil.org.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html>

MAGINA, Sandra; CAZORLA, Irene; GITIRANA, Verônica; GUIMARÃES, Gilda. Concepções e concepções alternativas de média: Um estudo comparativo entre professores e alunos do Ensino Fundamental. **Educar em Revista**, Curitiba: Ed UFPR, n. especial 2, p. 59-72, 2010. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/er/nspe2/04.pdf>>

MARQUES, Mabel; GUIMARÃES, Gilda; GITIRANA, Verônica. Compreensões de Alunos e Professores sobre Média Aritmética. **Bolema**, Rio Claro (SP): Ed. UNESP, v. 24, n. 40, p. 725-745, 2011.

PEROVANO, Ana; MAGINA, Sandra. A Abstração Reflexionante A Construção do Conceito de Número pela Criança. 3o Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEMAT. **Anais do 3o SIPEMAT**. Fortaleza, 2012. Disponível em: <<http://ocs.virtual.ufc.br/index.php/sipemat/sipemat2012/paper/view/352>>

PIAGET, Jean. **Epistemologia Genética**. São Paulo: Martins Fontes, 1990.

_____. **Abstração Reflexionante**. Porto Alegre: Artmed, 1995.