em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana
Universidade Federal de Pernambuco
ISSN 2177-9309
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

LANÇANDO DADOS E MOEDAS: RELAÇÃO DE (IN)DEPENDÊNCIA SOB A ÓTICA DE CRIANÇAS DOS ANOS INICIAIS

Rita Batista
Mestre em Educação Matemática e Tecnológica
UFPE – PE - Brasil
rita_mat_@hotmail.com

Rute Borba
PhD
UFPE – PE – Brasil
resrborba@gmail.com

Resumo

A independência de eventos é condição fundamental para a aleatoriedade. A compreensão da aleatoriedade, por sua vez, se configura como uma das quatro exigências cognitivas para a apreensão da probabilidade, além da formação do espaço amostral, da comparação de probabilidades e do entendimento das correlações. Numa sequência aleatória, os eventos que se sucedem não possuem qualquer relação ou influência sobre os ensaios futuros, nem passados, ou seja, cada evento é independente. Todavia, crianças, e também adultos, são influenciados pela natureza da relação que eles julgam existir entre dois ou mais eventos. O presente artigo é um recorte de uma pesquisa que investigou noções probabilísticas de crianças do 1º, 3º e 5º anos, cujos dados foram obtidos a partir de entrevistas clínicas, as quais envolviam dois jogos. Os resultados apontaram que a maioria das crianças utilizou o significado intuitivo da probabilidade e que cometeram o erro de recência positiva ou de recência negativa, vislumbramos que o ensino de probabilidade pode dar-se desde os anos iniciais, a partir da utilização de jogos, considerando noções intuitivas que as crianças já possuem e possibilitando discussões que permitam avanços em seus raciocínios probabilísticos.

Palavras-Chave: Independência de eventos, Probabilidade, Crianças, Anos Iniciais, Jogos.

THROWING DICE AND COINS: RELATION OF (IN)DEPENDENCE UNDER THE PERSPECTIVE OF PRIMARY SCHOOL CHILDREN

Abstract

The independence of events is a fundamental condition for randomness. The understanding of randomness, in turn, is considered as one of the four cognitive demands for grasping probability, in addition to the formation of sample space, the comparison of probabilities and the understanding of correlations. In a random sequence, the events that follow have no relation with or influence on future or past events, i.e., each event is independent. However, children, and also adults, are influenced by the nature of the relation that they believe exists between two or more events. This article is a part of a research that investigated probabilistic intuitions of 1st, 3rd and 5th grade children and data was obtained from clinical interviews, which involved two games. The results suggested that most children used the intuitive meaning of probability and made the mistakes of positive recency or negative recency. We see that probability education can begin since the early school years, with the utilization of games, considering intuitive notions that children already have and allowing discussions that permit advances in their probabilistic reasoning.

Keywords: Independence of Events, Probability, Children, Early Years, Games.

INTRODUÇÃO

Em uma sequência aleatória cada resultado de um evento particular não tem qualquer influência sobre os demais resultados dos ensaios anteriores, nem os posteriores, como, por exemplo, no lançamento de uma moeda honesta que pode resultar em qualquer uma das duas possibilidades (cara ou coroa), se sair repetidamente a face *cara*, não significará que haverá maior ou menor chance de sair *cara* novamente nos lançamentos futuros. A cada novo lançamento da moeda, a probabilidade de sair uma das faces se mantém a mesma, ou seja, 50%. Cada lançamento é independente dos demais. Não se sabe qual será, com certeza, o próximo resultado, pois a incerteza permeia as sequências aleatórias.

Se ao lançar um dado não viciado os primeiros cinco lançamentos resultarem no número 4, no próximo lançamento a probabilidade de ocorrência do 4 permanece a mesma do primeiro lançamento, ou seja, 1 em 6. Não há influência de um resultado sobre o outro. No entanto, a ideia de independência de eventos não parece simples para alguns adultos e também as crianças tendem a relacionar os resultados de um determinado ensaio, julgando maior ou menor a chance de ocorrência do mesmo. Para Bryant e Nunes (2012), se o que acontece nos cinco primeiros ensaios torna possível realizar a previsão do que acontecerá no sexto ensaio melhor do que foi possível prever no primeiro ensaio, então, há razões para acreditar que a sequência não é ao acaso. Dessa forma, entende-se que a possível influência externa entre os ensaios torna o resultado tendencioso e desconsidera a independência dos ensaios, descaracterizando assim a aleatoriedade.

Bryant e Nunes (2012) julgam a probabilidade um conceito bastante complexo que necessita a compreensão de quatro exigências cognitivas que se inter-relacionam: o entendimento da natureza e das consequências da aleatoriedade; a formação e caracterização do espaço amostral; a comparação e quantificação de probabilidades; e a compreensão das relações entre eventos (correlações). Assim, nas situações probabilísticas, é necessário reconhecer que o problema é sobre resultados que são incertos porque há elementos aleatórios envolvidos; é preciso conhecer os possíveis eventos que compõem o espaço amostral; é necessário quantificar e calcular probabilidades. A quarta exigência, qual seja o entendimento de correlações, nem sempre é necessária, mas exige o olhar das três anteriores.

Na ótica desses autores, a aleatoriedade é a marca registrada de todo problema de probabilidade; ela é projetada para trabalhar com a incerteza, garantindo a equidade e a justiça, como nos casos de sorteios numéricos das loterias. Esta incerteza relaciona-se com a imprevisibilidade, pois embora seja possível listar todas as possibilidades de ocorrência de um evento, não se sabe ao certo qual será o resultado e nenhum resultado terá relação com o anterior. As situações aleatórias se opõem às situações determinísticas, cujas consequências causais são diretas e facilmente definíveis como, por exemplo, lançar uma bola para o alto e, em consequência, ela cair, caso haja gravidade.

Conforme Viali (2008, p. 143), "a probabilidade é o ramo da matemática que pretende modelar fenômenos não determinísticos, isto é, aqueles fenômenos em que o 'acaso' representa um papel preponderante". Por conseguinte, os problemas de probabilidade dizem respeito a um conjunto de eventos incertos que ocorrem de forma aleatória, e o acaso é percebido como um conjunto de forças, não determinadas ou controladas, que exercem papel prevalecente na ocorrência dos resultados de um experimento.

Gal (2004) argumenta que o letramento probabilístico envolve a compreensão de *elementos cognitivos* e *disposicionais*, os quais constituem apoio para as pessoas entenderem questões probabilísticas do mundo real. Assim, o pensamento e o comportamento das pessoas em situações probabilísticas são afetados por várias bases de conhecimentos e disposições, não apenas de conhecimentos factuais e habilidades formais, como também crenças e atitudes, perspectivas críticas e sentimentos pessoais sobre incerteza e risco. Os *elementos cognitivos* elencados por Gal (2004) abarcam cinco bases de conhecimentos:

1- Grandes tópicos/temas - que envolvem conhecimentos acerca da variação, aleatoriedade, *independência de eventos*, previsibilidade e incerteza;
2- Cálculos de probabilidade - maneiras de encontrar ou estimar a probabilidade de eventos;
3- Linguagem – os termos, expressões e métodos para comunicar o acaso;
4- Contexto – compreensão do papel e das implicações das questões probabilísticas nos contextos e discursos;
5- Questões críticas – reflexão crítica ao lidar com probabilidades.

Os *elementos disposicionais* que envolvem crenças e atitudes desempenham um importante papel na forma como as pessoas pensam sobre a informação probabilística ou agem em situações que envolvem a oportunidade e a incerteza, em contextos do mundo real e em sala de aula.

Ao defender os *elementos cognitivos*, Gal (2004) atribui importância fundamental à *independência de eventos* quando lista os elementos concernentes aos grandes tópicos da probabilidade que trazem ainda a *aleatoriedade* e a *variação* como bases fundamentais ao conhecimento probabilístico. O autor julga que essas noções servem de suporte para o entendimento de um quarto elemento, que é a *previsibilidade e incerteza*.

Em conformidade com os pesquisadores supracitados, observa-se uma estreita relação entre a aleatoriedade e a independência de eventos que se configura como um importante elemento na compreensão da probabilidade, em conjunto com outros elementos que se influenciam e se inter-relacionam. Considerando tal importância e o fato das crianças, jovens e adultos apresentarem dificuldades na compreensão da independência de eventos, se faz mister que as instituições de ensino tratem da questão. Entende-se, portanto, que quando se pretende discutir a aleatoriedade não é possível deixar de fora a independência de eventos.

Os níveis apresentados no Quadro 1 dizem respeito à evolução do pensamento probabilístico de estudantes da escola secundária acerca da independência de eventos de acordo com estudos de Tarr e Jones (1997 apud JONES, 2006). É comum as crianças apresentarem características presentes em mais de um nível, possivelmente em função da influência das particularidades propostas nas situações apresentadas.

Quadro 1 – Extrato de um quadro descrevendo os níveis de pensamento referente à independência de eventos

	Nível 1 **Subjetivo**	**Nível 2** **Transitório**	**Nível 3** **Quantitativo informal**	**Nível 4** **Numérico**
INDEPENDÊNCIA DE EVENTOS	- Predisposição para considerar que eventos consecutivos estão sempre relacionados. - Crença generalizada de que podem controlar o resultado de um evento - Uso do raciocínio subjetivo que se opõe a qualquer foco	- Algum reconhecimento quanto ao fato de eventos consecutivos estarem, ou não, relacionados. - Frequentemente usa-se uma estratégia de "representatividade", uma	- Reconhecimento quando o resultado do primeiro evento influencia ou não o resultado do segundo evento. Em situações de substituição, vê-se o espaço amostral como restaurado. -Pode-se diferenciar	- Distinção de eventos dependentes e independentes em situações de substituição e não substituição, utilizando probabilidades numéricas para justificar o raciocínio.

	significativo sobre a independência. - Confiança injustificada na previsão de resultados sucessivos.	orientação de recência positiva ou negativa. - Pode-se também reverter para o raciocínio subjetivo.	eventos, embora de forma imprecisa, eventos independentes e eventos dependentes em com e sem situações de substituição. - Algumas reversões à representatividade.	- Observa-se os resultados de ensaios sucessivos, mas rejeita-se uma estratégia de representatividade. - Relutância ou recusa de prever resultados quando os eventos são igualmente parecidos.

Fonte: Tarr e Jones (1997 apud JONES, 2006).

Observa-se que há uma gradação na compreensão da independência de eventos sendo que o *nível subjetivo* (Nível 1) refere-se às pessoas que julgam que os eventos consecutivos estão sempre relacionados, ou seja, descartam a independência de eventos, e no extremo oposto encontra-se *o nível numérico* (Nível 4), no qual as pessoas não apenas distinguem eventos dependentes de independentes, como também justificam numericamente seus argumentos.

Um dos significados da probabilidade atribuídos por Batanero, Henry e Parzysz (2005), e elencados por Batanero e Diaz (2007), diz respeito à probabilidade com *significado intuitivo*. Os autores apontam que ideias intuitivas aparecem desde muito cedo em crianças e vão se ampliando em adultos, mesmo os que não têm educação formal, e expressões como *provável, improvável, impossível* são utilizadas para expressar graus de crença na ocorrência de eventos aleatórios.

Sobre o *significado intuitivo*, Batanero (2005) informa que as primeiras ideias intuitivas e os jogos de azar são comuns em todas as civilizações primitivas. Tais ideias são percebidas tanto em crianças como em pessoas que nunca tiveram acesso ao estudo de probabilidades, observadas a partir de frases coloquiais para quantificar os sucessos incertos e expressar graus de crença.

Outro significado apontado pelos Batanero e Diaz (2007) é o *significado subjetivo* em que as questões probabilísticas consideram graus de crença com base em julgamentos pessoais. Assim, a probabilidade de ocorrência de um evento está sempre relacionada a um sistema de conhecimentos personalizados que variam de pessoa para pessoa.

As noções intuitivas podem ser ampliadas a partir de experiências pessoais. Elas são utilizadas como plataforma para apoiar conhecimentos futuros, inclusive os que envolvem o pensamento probabilístico. No entanto, apesar das intuições se ampliarem e amadurecerem com o passar do tempo, alguns conhecimentos, que envolvem a probabilidade como independência de eventos, espaço amostral, aleatoriedade entre outros, dificilmente serão solidificados coerentemente sem instrução escolar. Nos parece, então, que a escola pode ter grande influência no avanço do pensamento probabilísticos das crianças.

Diante do exposto, nos propomos a analisar compreensões de crianças acerca de independência de eventos em situações envolvendo dois jogos: Travessia do Rio e Passeios Aleatórios da Rute.

MÉTODO

O recorte aqui apresentado é um fragmento de uma pesquisa sobre conhecimentos probabilísticos de crianças com foco nas três primeiras exigências cognitivas necessárias à apreensão da probabilidade, defendidas por Bryant e Nunes (2012): *compreensão da aleatoriedade*, *formação de espaço amostral* e *comparação de probabilidades*. Na pesquisa, foram levantados conhecimentos probabilísticos de crianças por intermédio do uso de dois jogos: o Travessia do Rio (Figura 1), que é realizado com o uso de dados, e Passeios Aleatórios da Rute – PAR (Figura 3). Estes jogos foram escolhidos tendo como base as análises e avaliações de um estudo piloto.

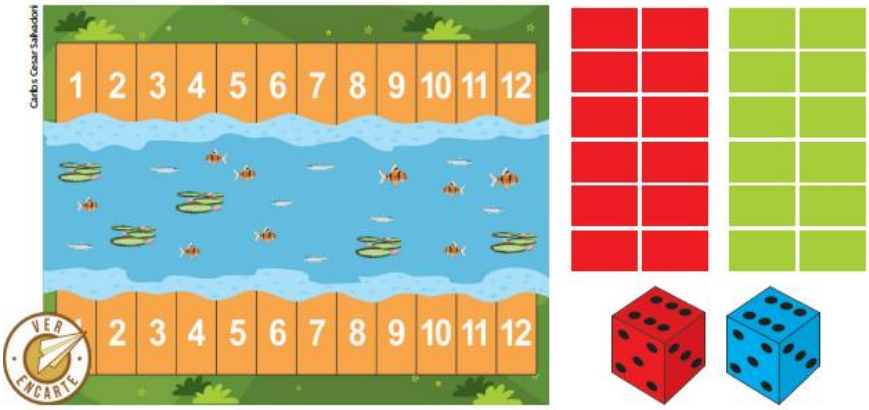
O estudo foi realizado com 36 alunos de duas escolas públicas, sendo 12 do 1º ano, 12 do 3º ano e 12 do 5º ano. Foram realizadas entrevistas individuais do tipo clínica[1]. As entrevistas foram audiogravadas em aparelho smartphone e, posteriormente, transcritas para análises. Apresentaram-se os jogos às crianças, explicando suas respectivas regras e oferecendo oportunidade para elas jogarem e efetuarem registros, se achassem necessário. Cada criança participou dos dois jogos, numa única sessão que durou entre 50min e 1h20min. Metade do grupo iniciou com um jogo e a outra metade com o outro jogo.

O jogo Travessia do Rio encontra-se no Caderno de Jogos na Alfabetização Matemática do Pacto Nacional para Alfabetização na Idade Certa – PNAIC (BRASIL, 2014)

[1] Baseada no Método Clínico Piagetiano – entrevista que permite ao examinador dirigir a conversa para um terreno fértil e, ao mesmo tempo, ser dirigido pelo pensamento do sujeito, com a intenção de estudar os pensamentos, intenções e valores do que o sujeito diz e faz. Definição apresentada em CARRAHER, Terezinha Nunes. **O método clínico usando os exames de Piaget**. São Paulo: Cortez, 1998.

e tem por objetivo resolver adições e analisar as possibilidades de soma 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 no lançamento de dois dados. Com o desenvolvimento do jogo, pretende-se que as crianças criem estratégias baseadas na observação, considerando que há resultados (somas) que saem com maior ou menor frequência que outros, bem como existe um resultado impossível: o 1.

Figura 1 - Jogo Travessia do Rio

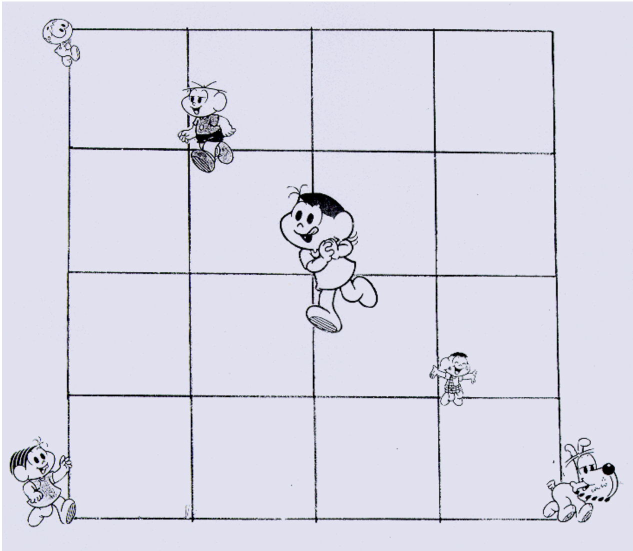


Fonte: Brasil (2014, p. 40).

No jogo, em dupla, os participantes escolhem as *casas* onde irão colocar suas 12 fichas, podendo colocar mais de uma ficha em uma *casa*, e, consequentemente, deixando outras casas vazias. Alternadamente, os dados são lançados pelos jogadores e, se a soma dos lados totalizar um número referente a uma das *casas* escolhidas pelo jogador, a ficha passa para o outro lado, ou seja, é realizada a travessia do rio. Ganha o jogador que conseguir atravessar todas as fichas para outra margem do rio.

O jogo Passeios Aleatórios da Rute teve raízes nos Passeios Aleatórios da Mônica. De acordo com Nagamine, Henriques, Utsumi e Cazorla (2011), a atividade “Os Passeios Aleatórios da Mônica”, foi proposta inicialmente por Fernandez e Fernandez (1999), numa pesquisa envolvendo estudantes do Ensino Superior sobre a distribuição binomial. Posteriormente, o jogo foi adaptado por Cazorla e Santana (2006) para o ensino de Probabilidade na Educação Básica.

Figura 2: Passeios Aleatórios da Mônica



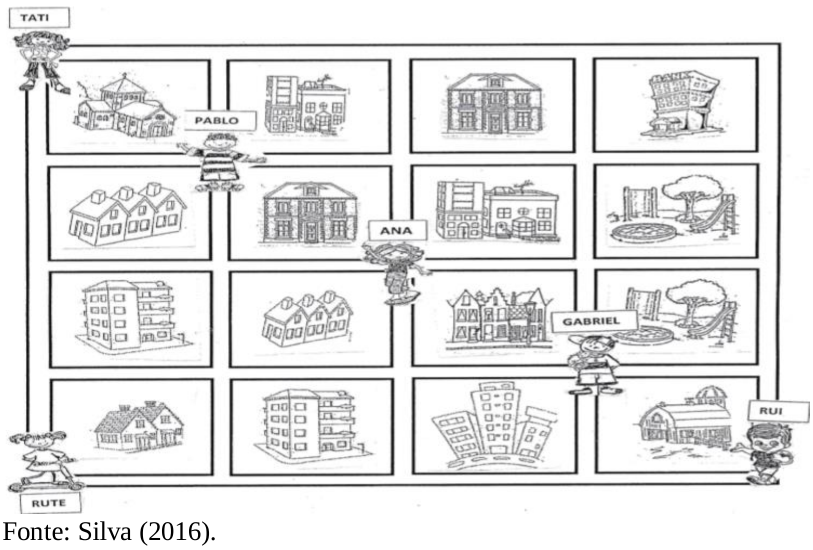
Fonte: Nagamine, Henriques, Utsumi e Cazorla (2011).

Na atividade, Mônica e seus amigos moram no mesmo bairro. Mônica visita cada um deles (Horácio, Cebolinha, Magali, Cascão e Bidu) de acordo com uma ordem pré-estabelecida, considerando os dias da semana: Horácio na segunda-feira, Cebolinha na terça-feira, Magali na quarta-feira, Cascão na quinta-feira e Bidu na sexta-feira. A distância da casa da Mônica para a casa de cada um dos amigos é sempre de quatro quarteirões, conforme ilustra a Figura 2. A turma combinou um jogo para tornar os encontros mais emocionantes, de forma que a "sorte" escolhesse o amigo a ser visitado pela Mônica. Para tal, foi estabelecido que ao sair de sua casa e a cada cruzamento do quarteirão, Mônica deveria lançar uma moeda para o alto; se saísse *cara*, ela andaria um quarteirão para o Norte, se saísse *coroa*, ela andaria um quarteirão para o Leste. Para chegar a qualquer um dos amigos, Mônica deveria jogar a moeda quatro vezes. A partir daí, vem o questionamento: todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?

Há uma versão denominada "Passeios Aleatórios da Carlinha" que foi adaptada para o ambiente virtual e elaborada no Ambiente Virtual de Apoio ao Letramento Estatístico (AVALE) da Universidade Estadual de Santa Cruz, sob orientação de Cazorla, Kataoka, Nagamine (2011). Nesta nova versão, que também toma como referência a Turma da Mônica, as personagens chamam-se Carlinha (Mônica), Luiz (Horácio), Felipe (Cebolinha), Fernanda (Magali), Alex (Cascão) e Paula (Bidu). A proposta pedagógica destinada aos estudantes do nível fundamental e médio envolve o ambiente papel e lápis para a Turma da Mônica e o ambiente virtual do AVALE com a Turma da Carlinha e tem os seguintes objetivos: trabalhar as noções elementares da teoria de probabilidades - eventos, espaço amostral, probabilidade de eventos simples; construir tabelas simples e gráficos de barras; discutir as diferenças entre experimento determinístico e aleatório; estimar probabilidades por meio da frequência relativa; calcular a probabilidade teórica a partir da árvore de possibilidades e analisar padrões observados e esperados.

Para nossa pesquisa, foram necessárias algumas adequações na imagem do jogo, em função da faixa etária dos participantes, que são crianças com idade entre 6 e 11 anos. A ideia era que o desenho apresentasse maior realismo e se assemelhasse a um bairro com ruas e quarteirões mais bem definidos, como observado na Figura 3. Dessa forma, as linhas tornaram-se "ruas" e os quarteirões foram preenchidos por casas, lojas, praças e escolas, simulando uma cidade ou bairro, visando facilitar a compreensão das crianças mais novas sobre a questão geográfica da atividade. As personagens foram substituídas por Rute e sua turma: Tati, Pablo, Ana, Gabriel e Rui. Como as personagens não são conhecidas do público em geral, colocaram-se os nomes de cada uma delas na imagem para identificá-las. Foi contada a seguinte história às crianças no início do jogo: *Rute pretende visitar os amigos e para tal, ela criou um jogo. Quando ela sai de casa, lança uma moeda: se sair 'cara' ela anda um quarteirão para direita (em frente, sentido leste) e se sair 'coroa' ela anda um quarteirão para cima (sentido norte). Em cada esquina de quarteirão ela para e lança a moeda novamente. Ela sempre consegue chegar na casa de um amigo após lançar a moeda quatro vezes. Rute só não sabe qual amigo será contemplado com sua visita.*

Figura 3 - Passeios Aleatórios da Rute (PAR)



Fonte: Silva (2016).

As crianças foram apresentadas a cada um dos jogos e puderam jogar algumas rodadas a fim de se familiarizarem e compreenderem as nuances das atividades propostas e, dessa forma, poderem refletir sobre as perguntas, bem como tomarem como referencial a atividade experienciada para responder aos questionamentos contemplados na entrevista clínica. As crianças responderam a oito perguntas que objetivavam conhecer suas compreensões sobre diversos focos probabilísticos, como: evento impossível, chance igual e chance diferente de ocorrência de um evento, levantamento de possibilidades, evento pouco provável, equiprobabilidade, independência de eventos e evento aleatório. A sexta pergunta norteadora da entrevista focou o tema em discussão nesse artigo: a independência de eventos.

Inicialmente, a pergunta norteadora que fizemos às crianças considerando o jogo Travessia do Rio para identificar as compreensões das mesmas a respeito da independência de eventos foi: *André jogou o dado vermelho algumas vezes e o resultado foi sempre o 5. Se ele jogar novamente vai sair o 5 novamente? Por quê?* Como tratava-se de uma entrevista do tipo clínica e para maior compreensão das crianças, houve necessidade de uma readequação da pergunta norteadora de maneira que a questão ficasse mais clara para os participantes. Por fim, a pergunta ficou assim: *André jogou um dadinho para cima e saiu 5, jogou outra vez e saiu 5, jogou de novo e caiu 5, jogou mais uma vez e saiu 5. Se ele jogar novamente, você acha que vai sair o 5 novamente? Por quê?*

Semelhantemente ao jogo Travessia do Rio, no jogo Passeios Aleatórios da Rute, a pergunta que desencadeou as discussões acerca de independência de eventos foi: *Paulo jogou a moeda e saiu cara, jogou novamente e saiu cara, jogou de novo e caiu cara, jogou outra vez e saiu cara mais uma vez. Se ele jogar novamente, você acha que vai sair cara de novo? Por quê?*

É importante pontuar que, em função de se tratar de uma entrevista do tipo clínica, as perguntas norteadoras serviram de plataforma para argumentações, questionamentos e confrontações posteriores, norteados pela pesquisadora, objetivando resgatar de cada participante da pesquisa não o que ele respondeu inicialmente, mas o que ele defendeu mais fortemente. Buscaram-se, assim, "as respostas mais características do sujeito, aquelas que o sujeito dá com maior convicção e não com maior rapidez" (CARRAHER, 1998, p. 17-18).

ANÁLISES

Para fins de apresentação das análises efetuadas, utilizaremos nomes fictícios das crianças, a fim de preservar as identidades das mesmas.

As análises aqui apresentadas não são pautadas em acertos e erros e, sim, em justificativas, argumentos e compreensões evidenciadas pelas crianças. Consideraremos os significados da probabilidade propostos por Batanero, Henry e Parzysz (2005) e defendidos por em Batanero e Diaz (2007), as características e a descrição do raciocínio probabilístico de acordo com os níveis de maturidade em independência de eventos defendidos por Tarr e Jones (1997), presente em Jones (2006), bem como nas referências citadas por Bryant e Nunes (2012).

Analisando a pergunta norteadora *André jogou um dadinho para cima e saiu 5, jogou outra vez e saiu 5, jogou de novo e caiu 5, jogou mais uma vez e saiu 5. Se ele jogar novamente, você acha que vai sair o 5 novamente? Por quê?*, a partir do jogo Travessia do Rio, constatamos que a probabilidade de sair novamente o 5 permanece igual ao da primeira jogada: 1 em 6, ou seja, menos de 17%. Os resultados dos lançamentos são possibilidades independentes, mas nem todas as crianças perceberam isso, como se pode verificar na Tabela 1. Nela, observam-se os registros das quantidades de crianças, por ano escolar, que responderam: 'Sim' (vai sair 5 novamente), 'Não' (não vai sair 5 novamente) e 'Qualquer um' (pode cair o 5 ou qualquer outro número). Entende-se que os alunos que informaram que poderia sair *qualquer um* dos números e não apenas o 5 apresentaram compreensão, mesmo que intuitiva, tanto da independência de eventos, como também da aleatoriedade.

Tabela 1 - Síntese da quantidade de respostas dos alunos, por ano, sobre independência de eventos no jogo Travessia do Rio

André jogou o dado uma vez e deu 5, jogou de novo e deu 5, jogou mais uma vez e deu 5.
Se ele jogar novamente, você acha que vai sair o 5 de novo?

Ano	Sim	Não	Qualquer um
1º	7	4	1
3º	4	6	2
5º	3	6	3

Fonte: Silva (2016).

Um pouco mais da metade dos alunos do 1º ano acreditou que sairia o 5 mais uma vez. Ana justificou que sairia o 5 novamente *"porque só caía no 5"*; Davi informou: "*porque caiu o 5 um bocado de vez*" e Maria argumentou: "*porque ele jogou um montão de vezes*". A tendência, assim, das crianças do 1º ano foi julgar que se o 5 saiu três vezes, sairia novamente o 5 no quarto lançamento do dado. Tais alunos não perceberam a independência de eventos e cometeram o erro de *recência positiva* que se caracteriza pela crença de que, em função de recentes resultados repetidos, o próximo ensaio tenderá a ser o mesmo. O erro de recência positiva é apontado tanto por Bryant e Nunes (2012) como por Tarr e Jones (1997 apud JONES, 2006).

Aproximadamente 42% das crianças do 1º ano julgaram que não sairia novamente o 5 no lançamento do dado. Essas crianças acreditaram na impossibilidade de sair, em sequência, um mesmo número repetidas vezes. Claramente atrelavam o resultado recente de um lançamento aos seus antecessores, desconsiderando a independência de eventos. Para ilustrar trazemos alguns argumentos apresentados por elas:

> "*Vai dar 1 ou então o 6"* Ivan;
> "*Se ele jogar outra vez fica o 2"* Fagner;
> "*Vai dar 6. Se ele jogar mais uma vez, vai dar 6*" Raissa;
> "*Ele jogou direto o 5. Eu acho que vai sair outro número"* Joana;
> "*Ele tentou muitas vezes e agora vai mudar*" Luan.

Observamos que as crianças supracitadas desconsideraram a aleatoriedade, bem como a equiprobabilidade presente na situação, quando julgaram que um evento tem mais probabilidade de ocorrência que outro, além de considerarem que há relação estreita entre o novo evento e os anteriores, desconsiderando, assim, a independência de eventos. A partir de seus discursos é possível observar que as crianças cometeram o erro de recência negativa que se refere ao tipo de equívoco cometido pela crença de que, em função de recentes resultados repetidos, o próximo resultado tende a ser diferente, em conformidade com o exposto por Bryant e Nunes (2012). Assim, essas crianças acreditaram que iria ocorrer um resultado diferente dos que haviam ocorrido antes. Tal fato é nitidamente percebido na fala de Joana quando afirma "eu acho que vai dar outro número" e Luan que disse: "ele tentou muitas vezes e agora vai mudar".

O aluno Pedro considerou outros elementos para apoiar sua resposta. Inicialmente, ele disse que não era possível sair o 5, em seguida ele lançou o dado e saiu o 5. Então, ele mudou de resposta e disse "*Vai porque caiu 5*" quando ele jogou. A pesquisadora questionou se fosse Pedro (se referindo a outra pessoa qualquer) e não André, lançando o dado, se sairia o 5 novamente e ele disse que sim "*porque EU sou Pedro*". Constatamos que o aluno se apoiou na sua vivência do jogo. Sua resposta dependeu unicamente do resultado apresentado no momento em que ele lançou o dado, baseado em parâmetros particulares.

No 1º ano, apenas o aluno Iago apontou percepções mais coerentes acerca da independência de eventos, apresentando indícios de compreensão da equiprobabilidade, acreditando que "pode cair qualquer um", bem como da independência de eventos ao não atrelar o novo ensaio aos eventos anteriores. O diálogo a seguir entre a entrevistadora e Iago mostra essa compreensão:

> Pesquisadora: *André tava brincando com um dadinho. Ele jogou pra cima uma vez e deu 5, jogou de novo e deu 5, jogou mais uma vez e deu 5. Tu achas que se ele jogar de novo vai cair o 5 novamente?*
>
> Iago*: Não sei.*
>
> Pesquisadora*: Mas tu achas que vai cair, que pode cair, que pode cair qualquer um...o que é que tu achas?*
>
> Iago*: Eu acho que vai cair qualquer um.*
>
> Pesquisadora*: Por que tu achas isso?*
>
> Iago*: Porque tem que jogar o negócio (dado) e tem que ter sorte para parar no 5.*

Já no jogo Passeios Aleatórios da Rute - PAR (com moedas) Iago não foi tão enfático, apesar de manter a dúvida, que já é um indício de compreensão. No entanto, ele acabou informando que poderia cair, mas não apresentou justificativa.

Como apontado anteriormente, foi proposto às crianças a seguinte situação: *Paulo jogou a moeda e saiu cara, jogou novamente e saiu cara, jogou outra vez e saiu cara mais uma vez. Se ele jogar novamente, vai sair cara de novo? Por quê?*, para verificar o entendimento das mesmas sobre a independência de eventos no jogo PAR.

A probabilidade de sair cara, nesse novo possível lançamento ou em qualquer outro, continua a mesma, 1 em 2, ou seja, 50%. A Tabela 2 mostra a quantidade de alunos que julgaram que *sim* – possibilidade de sair cara novamente, *não* – impossibilidade de sair cara de novo, ou seja sairia coroa, e *qualquer um* – percepção de que poderia sair qualquer uma das faces (cara ou coroa) no lançamento da moeda.

Tabela 2 - Síntese da quantidade de respostas dos alunos, por ano, sobre independência de eventos no jogo PAR

Paulo jogou a moeda e saiu cara, jogou novamente e saiu cara, jogou outra vez e saiu cara mais uma vez. Se ele jogar novamente, vai sair cara de novo?			
Ano	**Sim**	**Não**	**Qualquer um**
1º	7	5	0
3º	6	6	0
5º	5	4	3

Fonte: Silva (2016).

Os resultados das crianças do 1º ano apresentados no jogo PAR se assemelharam aos resultados apresentados no jogo Travessia do Rio. Várias crianças cometeram o erro de recência negativa. Elas acreditarem que iria ocorrer um evento diferente do que vinha acontecendo. Para essa escolha, as crianças apresentaram como justificativas: "Não porque ele jogou 'muita vez' cara, cara, cara, cara. E agora vai sair coroa", diz Antônio; "Ele jogou quatro vezes e saiu cara. Aí da última vez que ele jogar vai sair coroa", informa Raissa.

Dos alunos do 1º ano que julgaram que sairia o 5 novamente – erro de recência positiva -, os argumentos apresentados tinham similitudes com os do jogo Travessia do Rio, como: "*Sim, porque caiu um bocado de vez", "porque sempre dá cara" e "sim, porque ele jogou 5 vezes aí caiu cara".*

Verificamos que, nos dois jogos, as crianças do 1º ano não apresentaram indícios de compreensão acerca da independência de eventos, à exceção de Iago que apontou percepções mais coerentes que os demais. No entanto, tal fato ocorreu apenas no jogo Travessia do Rio. Nitidamente, as crianças associaram o resultado de um evento aos anteriores, julgando haver relação entre eles.

As crianças do 3º ano, considerando o jogo Travessia do Rio, apresentaram em seus discursos justificativas mais consistentes que as do 1º ano, mesmo que equivocadas. Jeane foi convicta que sairia novamente o 5 ao afirmar: "*Ele jogou tanto e deu o número 5 que eu acho que vai dar de novo (...) Pode sair outro, mas acho que vai dar 5 a quinta vez, se Deus quiser. Vai ser falta de sorte não sair 5".* A aluna não percebeu a independência de eventos, "amarrando" os ensaios anteriores ao próximo, ou seja, ela se encontrava no *nível subjetivo* proposto por Tarr e Jones (1997 apud JONES, 2006), possuindo predisposição para considerar que eventos consecutivos estão sempre relacionados. No entanto, observamos que a aluna abre uma possibilidade para a incerteza quando diz: *"pode sair outro"* ou "*vai ser falta de sorte*". Percebemos esses discursos como importantes plataformas para possíveis intervenções.

Outras crianças do 3º ano começaram a vislumbrar a equiprobabilidade, apesar de não terem firmeza em suas respostas. Manoel disse que "*pode sair o 5 ou pode sair qualquer um. Mas acho que vai bater outro número porque ele bateu 3 vezes no 5, agora vai dar sorte e vai cair qualquer um".* Se, por um lado, Manoel apresentou indícios de compreensão da equiprobabilidade, por outro ele resistiu em perceber a independência de eventos.

Ryan sentiu-se perdido, mas a experiência recente do jogo provocou nele importantes reflexões. Ele afirmou que não sairia o 5 novamente, depois disse: *"Não sei. Pode sair, mas acho que não vai sair porque é difícil acertar muitas vezes (...). Quando eu tava jogando acertei duas vezes no 6, quando joguei de novo caiu o 4".* Ou seja, apesar de Ryan acreditar que pode sair o 5, ele usou seu próprio exemplo para "provar" o quão difícil e pouco provável seria o evento se repetir.

No jogo PAR, alguns participantes do 3º ano continuaram desconsiderando que os eventos sucessivos são independentes. Como exemplo trazemos as justificativas de Anita que afirmou: *"Vai, porque ele jogou as três vezes e saiu também"* e de Késia que defendeu que *"Não. Ele jogou tudo de uma vez e foi cara, cara, cara, não será possível que ele vai ser tudinho como cara. Não vai ser tudinho não. Só se ele tem muita chance e sorte".*

Observamos que os argumentos, tanto para os que acreditaram que iria sair cara no novo lançamento, quanto para os que pensaram o contrário, são os mesmos, apresentando características de erros de recência positiva, ao julgarem que em função dos eventos recentes acontecerem de determinada forma, os demais eventos permanecerão ocorrendo do mesmo jeito; ou recência negativa, por acreditarem que, como os ensaios anteriores se repetiram algumas vezes, da próxima ocorrerá um evento diferente. No entanto, alguns alunos já trouxeram em seus discursos a *incerteza*, que é um importante conceito no pensamento probabilístico, apesar de defenderem a saída, ou não, de uma face da moeda, como ilustrado na fala de Jane: "*Vai sair, se ele jogou e saiu cara três vezes* é possível *que vá sair cara a quarta vez".* O termo *é possível* utilizado pela aluna aponta para uma possibilidade, mas não para uma certeza, um evento determinístico. Gal (2004) considera a *linguagem* como um dos elementos cognitivos para o desenvolvimento do letramento probabilístico, apontando que é importante que o aluno descreva oralmente ou por escrito o seu pensamento e a compreensão probabilística e que é necessária à familiarização com termos e expressões relevantes à probabilidade.

No 5º ano, considerando o lançamento do dado a partir do jogo Travessia do Rio, Samuel julgou que havia um jeito específico de jogar o dado que resultaria no número 5. Ele afirmou: *"Vai se ele jogar do mesmo jeito. Se ele jogar de qualquer jeito não cai o 5"*. A partir das reflexões propostas pela pesquisadora, Samuel trouxe um discurso que apresenta uma compreensão mais ampla sobre a possível não-equiprobabilidade presente na situação, quando disse: "*Pode cair o 5, mas tem pouca chance. Os outros (1, 2, 3, 4 e 6) estão em maior quantidade. Todos eles contra o 5 são maiores".* Apesar da equiprobabilidade estar presente no lançamento de um dado, ou seja, cada uma das faces tem as mesmas chances de sair, a relação indicada por Samuel, sabiamente, propõe que se compararmos o evento "sair 5" em comparação com "sair número diferente de 5", de fato, não seria equiprovável.

No lançamento da moeda, Samuel foi ainda mais preciso. Ele respondeu *que "poder pode (sair cara) porque as expectativas são as mesmas. Porque na moeda tem uma vez cara e uma vez coroa, não tem duas vezes cara e uma coroa. Mesma chance".* Nitidamente, ele apontou a equiprobabilidade presente e não fez nenhuma relação com eventos anteriores, apontando indícios de compreensão da independência de eventos.

Podemos dizer que Samuel deixou uma *porta aberta* para o aprendizado, que possivelmente se concretizará, caso haja instrução que lhe permita compreender que não tem "um jeito certo" de jogar para cair determinado número, bem como solidificar conceitos de equiprobabilidade, aleatoriedade e independência de eventos. Acreditamos que o uso de jogos, registros, indagações e reflexões orientadas permitirão a crianças como Samuel e outras construírem uma compreensão mais sólida acerca de elementos probabilísticos, tomando como plataforma os conceitos intuitivos de que dispõem inicialmente.

O aluno Kennedy teve uma percepção bem abrangente da situação. Claramente ele percebeu a equiprobabilidade presente, bem como não apresentou indícios de relacionar os eventos anteriores ao próximo. Ele disse: *"As chances são mínimas. Porque ninguém sabe qual é o que vai cair (...). Não vai dar o 5 ou vai dar o 5, dar o 4, 3, qualquer um".* Ao que tudo indica, Kennedy compreendeu a independência de eventos, bem como a aleatoriedade e a equiprobabilidade. É possível que Kennedy estivesse, no momento da entrevista, no nível 3, denominado *quantitativo informal* (TARR; JONES, 1997 apud JONES, 2006), pois apresentou reconhecimento de que o primeiro evento não influencia o resultado do segundo evento e percebeu e citou o espaço amostral, ou seja, apontou implicitamente que no lançamento de um dado as possibilidades são: 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Alguns alunos do 5º ano atribuíram os resultados no lançamento da moeda, e também do dado, à sorte ou ao azar ou ao jeito de lançar os objetos (moeda ou dado). Alguns ficaram na dúvida, como Luísa que afirmou: "*Acho que sim, Sei lá, pode ser sorte",* enquanto Miguel disse: "*Pode sair cara. Ele jogou tantas vezes, né? Pode ser que saia cara de novo*". Há alguns que fizeram relação com a experiência recente vivenciada no jogo, como Márcio que informou que *"quando eu tava jogando batia cara, coroa, cara, coroa. Pode ser diferente. Tudo não é igual não".*

No jogo Passeios Aleatórios da Rute foi constatado que a maioria das crianças do 1º ano (7 alunos) cometeu o erro de *recência positiva*, resultado igual ao do jogo Travessia do Rio. Já no 3º ano, houve um equilíbrio no jogo com moedas: metade cometeu o erro *de recência positiva* e a outra metade, o de *recência negativa*. No 5º ano, três crianças julgaram corretamente a situação (em ambos os jogos), demonstrando algum entendimento sobre independência de eventos, apesar de não aparecer explicitamente em seus argumentos que o resultado de um evento não teria qualquer relação com o outro. Talvez as crianças tenham pensado só em termos de equiprobabilidade, ou seja, imaginado que qualquer face da moeda ou lado do dado teria a mesma chance de sair, como explicitado no discurso de Samuel quando sentencia: "as expectativas são as mesmas".

Constatou-se uma diminuição em relação à quantidade de alunos que cometeram a recência positiva no PAR: 7 do 1º ano (crianças com 6 anos), 6 do 3º ano (8 anos de idade) e 5 do 5º ano (10 anos).

De uma forma geral, observamos que os participantes desta pesquisa não apresentam uma compreensão adequada sobre independência de eventos, apesar de alguns alunos do 5º ano demonstrarem algumas noções que precisariam de intervenção para que fossem solidificadas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso estudo apontou que quase sempre as crianças utilizaram o *significado intuitivo* descrito por Batanero e Diaz (2007). As justificativas que as crianças utilizaram parecem não ter como base a instrução escolar, e sim, as vivências a partir das crenças que supõem existir nas relações probabilísticas. Outras vezes, elas argumentam utilizando a recente experiência com o jogo como sustentação para suas justificativas. Especificamente no que tange à independência de eventos, as crianças deste estudo encontraram-se, em sua maioria, quase sempre no Nível 1 – *subjetivo* ou Nível 2 – *transitório*, defendido por Tarr e Jones (1997 apud JONES, 2006).

As crianças envolvidas nesta pesquisa possuíam uma compreensão limitada da independência de eventos. A maioria delas apresentou nos dois jogos, tanto no lançamento de moeda como nos dados, justificativas e argumentos que relacionavam a influência direta ou indireta de eventos anteriores aos resultados dos futuros ensaios. Ou seja, julgavam haver dependência entre os resultados dos eventos. Cometeram, quase sempre, o erro de recência negativa ou o erro de recência positiva, descrito por Bryant e Nunes (2012), bem como por Tarr e Jones (1997 apud JONES, 2006).

No entanto, constatamos que alguns alunos já possuíam uma compreensão mais elaborada, inclusive com indícios de entendimento sobre equiprobabilidade, aleatoriedade e independência de eventos. Eram ideias iniciais e intuitivas apresentadas por alguns alunos que, havendo instrução adequada, poderão ser solidificadas.

Como era de se esperar, os alunos do 3º e 5º anos apresentaram, em seus discursos, compreensões intuitivas mais elaboradas que os alunos do 1º ano, embora quase todos tenham opinado desconsiderando a independência de eventos.

Observamos que a vivência nos jogos e os questionamentos realizados nas entrevistas parecem ter motivado as crianças a construírem e reconstruírem hipóteses, a partir das conexões que elas realizavam com conhecimentos provenientes de sua vida. Uma evidência disso refere-se às menções de fatos ocorridos no cotidiano para justificar escolhas, bem como com as experiências com o jogo, uma vez que usavam respostas e argumentos apoiados nas recentes experiências vivenciadas na atividade.

Como apontado por Batanero, Henry e Parzysz (2005 apud BATANERO; DIAZ, 2007), as crianças apresentaram marcas do significado intuitivo da probabilidade com expressões que indicam graus de crença na ocorrência de eventos aleatórios, quando utilizavam parâmetros particulares para justificar suas escolhas.

Os estudos citados por Bryant e Nunes (2012) apontam que parece não haver melhoria na compreensão da independência de eventos com o passar do tempo por crianças mais novas e mais velhas, como também por adultos. Ao que parece, todos chegam num certo nível de compreensão e estancam; não conseguem evoluir. Tais fatos levam a especular que a escola não tem contribuído para construção deste importante elemento probabilístico. Para esses autores, compreender a independência de eventos sucessivos em uma sequência aleatória é uma parte fundamental do aprendizado sobre aleatoriedade, portanto, é imprescindível o papel da escola no sentido de garantir a compreensão da independência de eventos pelos estudantes.

Para finalizar, reafirmamos a importância da instrução para ampliação da compreensão do pensamento probabilístico, em especial o que se refere à independência de eventos, equiprobabilidade e aleatoriedade. Consideramos os jogos mecanismos importantes que podem possibilitar o desenvolvimento de noções probabilísticas, pois, além de permitirem a reflexão de uma forma lúdica e espontânea, possibilitam a criação de estratégias para se ganhar o jogo que perpassam pela compreensão de elementos concernentes ao desenvolvimento do pensamento probabilístico.

O recorte apresentado aqui pode ter tido influência das atividades anteriores, propostas no estudo do qual este fragmento faz parte. É importante ampliar pesquisas que tratem não apenas das compreensões de crianças sobre os diversos elementos que dão suporte ao pensamento probabilístico, bem como formas de intervenção que possibilitem tais compreensões.

REFERÊNCIAS

BATANERO, Carmen. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. **Relime**, Ciudad de México, v. 8, n. 3, nov. 2005.

BATANERO, Carmen; DIAZ, Carmen. Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. In: VAN BENDENGREN, Jean Paul; FRANÇOIS, Karen (Ed.). **Philosophical Dimensions in Mathematics Education**. New York: Springer, 2007. p. 107-128.

BATANERO, Carmen; HENRY, Michel; PARZYSZ, Bernard. The nature of chance and probability. In: JONES, G. (Ed.). **Exploring probability in school**: challenges for teaching and learning. Dordrecht: Kluwer, 2005, pp. 16-42.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa**: Jogos na Alfabetização Matemática. Ministério da Educação. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Brasília: MEC, SEB, 2014.

BRYANT, Peter; NUNES, Terezinha. **Children's understanding of probability**: a literature review. Oxford: Nuffield Foundation, 2012. Disponível em: <http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf>. Acesso em: 22 set. 2014.

CARRAHER, Terezinha Nunes. **O método clínico usando os exames de Piaget**. 5. ed. São Paulo: Cortez, 1998.

CAZORLA, Irene; KATAOKA, Verônica; NAGAMINE, Camila. **Os passeios aleatórios da Carlinha**. A estatística vai à escola. Coleção UESC. Projeto: Avale - Ambiente Virtual de apoio ao Letramento Estatístico. Ilhéus: Universidade Estadual de Santa Cruz, 2011.

Disponível em: <http://ambiente.educacao.ba.gov.br/conteudos/download/1621.pdf>. Acesso em: 28 set. 2014.

CAZORLA, Irene; SANTANA, Eurivalda. **Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio**. Itabuna, BA: Via Litterarum, 2006.

FERNANDEZ, Dinara W. Xavier; FERNANDEZ, Dierê Xavier. O Prazer de Aprender Probabilidade Através de Jogos: Descobrindo a Distribuição Binomial. **Atas da Conferência Internacional "Experiências e Expectativas do Ensino de Estatística – Desafios para o Século XXI".** Florianópolis, SC, 20 a 23 de setembro de 1999.

GAL, Iddo. Toward 'probability literacy' for all citizens. In: JONES, Graham. **Exploring probability in school**: Challenges for teaching and learning. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2004. p. 43-71.

JONES, Graham A. **The challenges of teaching probability in school**. New York: Spring, 2006. Disponível em: <http://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Digital_Library/ICMEs/Bulletin_Jones.pdf>. Acesso em: 30 dez. 2015.

NAGAMINE, Camila Macedo Lima; HENRIQUES, Afonso; UTSUMI, Miriam Cardoso; CARZOLA, Irene Maurício. Análise Praxeológica dos Passeios Aleatórios da Mônica. **Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro, SP, vol. 24, núm. 39, agosto, 2011, p. 451-472. Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Disponível em: <http://www.redalyc.org/pdf/2912/291222099007.pdf

SILVA, Rita. **É a moeda que diz não é a gente que quer não**: conhecimentos probabilísticos de crianças em situações de jogos. 2016. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, 2016.

VIALI, Lori. Algumas Considerações Sobre a Origem da Teoria da Probabilidade. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Rio Claro, SP, v. 8, p. 85-97, 2008.