em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana
Universidade Federal de Pernambuco
ISSN 2177-9309
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

COMO TRADUZIR O CAMINHO DO BURRO EM UM TEOREMA EM AÇÃO: Análise de situações de conhecimento matemático contextualizado à luz da teoria dos campos conceituais

Nadja Maria Acioly-Régnier
Doutora pela Université René Descartes Paris V Sorbonne
Professora-pesquisadora - ESPÉ – Université Claude Bernard Lyon 1 - France
nadja.acioly-regnier@univ-lyon1.fr

Resumo

Os esquemas, que estão na base da teoria piagetiana, são retomados por Gérard Vergnaud, na teoria dos campos conceituais. Apesar de diretamente voltados para a ação, esses esquemas possuem um núcleo conceitual passível de ser analisado. Nessa perspectiva teórica, os procedimentos de resolução de problemas fazem sempre referência a “conceitos”. Este artigo focaliza uma situação de conhecimento extraescolar, e propõe uma explicitação do teorema matemático subjacente ao raciocínio do sujeito. Postula-se, entretanto que teoremas em ação não são restritos ao raciocínio extraescolar e que no contexto escolar o professor deve também buscar uma explicitação conceptual para desempenhos aparentemente desprovidos de sentido para a avaliação do nível de conceptualização dos alunos. Esse procedimento permite a compreensão do processo de resolução de problema e estratégias pedagógicas mais pertinentes.

Palavras-Chave: teorema em ação, matemática extraescolar, resolução de problemas.

HOW TO TRANSLATE THE WAY OF DONKEY ON A THEOREM IN ACTION: Analysis of situations of mathematical knowledge contextualized in light of the theory of conceptual fields

Abstract

The schemes, which are the basis of Piaget's theory, are taken up by Gérard Vergnaud's theory of conceptual fields. Although these schemes are direct related to action, they have a conceptual core that can be analysed. In this theoretical perspective, the procedures for solving problems always refer to "concepts". This paper focuses on a situation of extra-curricular knowledge, and proposes to make explicit mathematical theorem that underlies the reasoning of the subject. It is postulated, however, that theorems in action are not restricted to extra-school reasoning, and that in the school context, teachers should also look for to make explicit the conceptualizations for performances apparently meaningless in order to evaluate students' level of conceptualization. This procedure allows understand the problem solving processes and to develop more relevant teaching strategies.

Keywords: Theorem in action, extraescolar mathematics, problem solving.

INTRODUÇÃO

> Um homem estava sentado num barranco, pitando o seu cigarrinho de palha e apreciando a paisagem quando para um carro e descem dois sujeitos com um monte de tralhas. O homem fica um tempão observando-os. Mede daqui, mede dali, torna a conferir, até que o caipira não resiste e pergunta:
>
> H - Me adescurpe a intromissão, mas o que é que ocêis tão fazeno cum estes trecos tudo aí?
>
> [O que um deles respondeu]
>
> E - É que nós somos engenheiros! Estamos fazendo as medições para fazer uma estrada! E o homem:
>
> H - Ah! bão! É que aqui nóis num faiz istrada deste jeito não!
>
> [E o engenheiro, em tom desafiador]
>
> E - Ah, não? Então como é que vocês fazem estradas por aqui?
>
> H- A gente sórta um burro e vai seguindo ele, por onde o bicho passa é sempre o mió caminho pra se fazê a istrada..
>
> E - E se vocês não tiverem o burro?
>
> H - Bom... daí a gente chama um engenhero!

A situação acima ilustra o encontro de duas "culturas matemáticas": uma baseada em conhecimentos "contextualizados"[1] e a outra guiada pela matemática formal escolar. É evidente que não postulamos que o burro possui teoremas em ação no sentido da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1981), mas o homem que soltou o burro provavelmente aciona esquemas para a reconstrução do caminho traçado que poderiam ser "traduzidos" para uma linguagem matemática formal. Neste artigo, tentaremos explicitar o teorema implícito em uma situação de resolução de um problema matemático inserido em uma atividade rural, ou seja, no contexto da cultura da cana-de-açúcar pernambucana nos anos de 1990, e analisar os efeitos dessa explicitação para a Educação Matemática. O quadro teórico que nos guia nesta reflexão é a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, na qual o conceito de esquema

[1] Utilizamos aqui a expressão conhecimentos contextualizados para designar a Matemática aprendida fora da escola. Trata-se apenas de uma simplificação linguística uma vez que o conhecimento escolar também é contextualizado.

é central para a compreensão dos esquemas em situação. Esse conceito, criado por Kant, foi retomado por Piaget, sobretudo nas atividades sensório-motoras dos bebês. Nesse sentido, Vergnaud prefere a expressão perceptivo-gestual à expressão sensório-motora utilizada por Piaget, mas reconhece naquele autor o mérito de ter dado ao gesto e ao corpo um papel importante no desenvolvimento psicológico do ser humano.

Gérard Vergnaud, na teoria dos campos conceituais, apresenta o esquema como uma *totalidade dinâmica que exprime a organização invariante da conduta, desenvolvida pelo sujeito para tratar uma certa classe de situações.* Assim, o conceito de esquema engloba tanto as práticas conhecidas e familiares quanto a capacidade de adaptação a novas situações.

Apesar de diretamente voltados para a ação, os esquemas possuem um núcleo conceitual passível de ser analisado. Nesse sentido, as condutas e procedimentos que os sujeitos utilizam durante a realização de uma tarefa, fazem sempre referência a "conceitos". Isso é válido mesmo quando esses conhecimentos são expressos em termos de atividades práticas, e num contexto cultural particular. Mesmo se esses conceitos não são conscientes para os sujeitos o pesquisador deve postular a existência para compreender as condutas e procedimentos e principalmente as variações sistemáticas que ele pode constatar.

Nesse sentido, nos estudos pioneiros do grupo de Recife, Carraher, Carraher e Schliemann (1982; 1985) observam que crianças que exercem atividades de venda, conseguem realizar operações aritméticas em atividades quotidianas de trabalho sem poder formalizar essas operações pelo cálculo escrito ensinado na escola. Esses autores afirmam que as situações criadas pela escola para ensinar um conceito podem ser mais ou menos restritas em função da prática pedagógica dos professores, mas que permanecem muito distanciadas da prática quotidiana não escolar. Assim os conceitos ensinados na escola estariam associados a fórmulas que consistem em representações abstratas, às quais são atribuídas valores numéricos.

Em um contexto extraescolar e com relação a sujeitos adultos Da Rocha Falcão (2003), citando o exemplo de um jangadeiro nordestino, observa que:

> [...] não se pode, via de regra, imaginar que ele (o jangadeiro) disponha de conhecimentos formais acerca de composição vetorial, mas o jangadeiro age, em contexto real, de forma coerente com os

> princípios básicos de composição vetorial (tendo em vista os elementos envolvidos e a resultante desejada). (p. 37).

Acioly (1985), Acioly e Schliemann (1986) e Schliemann e Acioly (1989a; 1989b) em um trabalho com cambistas do jogo do bicho em Recife, ja faziam referência à sofisticação de alguns procedimentos de resolução de problemas matemáticos envolvendo permutações e arranjos utilizados por sujeitos analfabetos ou pouco escolarizados.

Mesmo se nos centralizamos aqui em uma situação de conhecimento extraescolar e em uma explicitação do teorema matemático subjacente ao raciocínio do sujeito, consideramos que os teoremas em ação não são restritos ao raciocínio extraescolar e que no que diz respeito à Educação Matemática escolar o professor deve também buscar uma explicitação conceitual para desempenhos aparentemente desprovidos de sentido para a avaliação do nível de conceptualização dos alunos. Esse procedimento permitiria uma compreensão mais sofisticada do processo de resolução de problema e estratégias pedagógicas mais pertinentes para a inclusão do “diferente” e prevenção do fracasso e evasão escolar. Mas o que seria esse diferente? Posicionamo-nos aqui do ponto de vista psicológico e de formas diferentes do conhecimento, ou seja, a forma predicativa e operatória do conhecimento.

FORMA PREDICATIVA E FORMA OPERATÓRIA DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Podemos dizer de forma breve que a forma operatória do conhecimento, é o que permite o agir numa situação dada e a forma predicativa consiste na formulação das propriedades dos objetos e da ação. Implícita nessa discussão encontra-se a questão da passagem da forma operatória de conhecimento à forma predicativa quando abordamos competências matemáticas implícitas em uma atividade de trabalho. Essa passagem não é automática e esquemas de enunciação são necessários para a explicitação ou a simbolização. O problema levantado por Gérard Vergnaud é o de estabelecer a relação entre a conceptualização presente na atividade e a conceptualização presente nos textos matemáticos e escolares. Ora, as atividades práticas mobilizam conhecimentos nem sempre visíveis, nem dizíveis nas análises teóricas. Existe sempre uma decalagem entre a forma operatória do conhecimento, utilizado na prática, e a forma predicativa do conhecimento oral ou escrito que traduz apenas uma parte da forma operatória. Mas, os conceitos presentes em uma atividade extraescolar são de mesma natureza daqueles utilizados em contextos escolares? Consideramos que essas diferenças são fundamentais para o reconhecimento dos mesmos e para a construção de situações pedagógicas e didáticas pertinentes para a elevação do nível de conceptualização dos alunos e para a capacidade de transferência de aprendizagem à situações extraescolares.

Do ponto de vista extraescolar, quando o sujeito se engaja em uma atividade, ele não tem consciência que nos bastidores dessa aprendizagem, encontram-se vários conceitos necessários à realização correta do trabalho a ser efetuado. No contexto escolar os alunos *sabem* (em principio) que eles se encontram nesse local para aprender conteúdos específicos, que são verbalizados pelo professor e nos livros didáticos. Lembramos aqui a perspectiva de Vygotski onde a cognição e a consciência não são as causas, mas sim os produtos da atividade humana. Nesse sentido quais seriam as especificidades da conceptualização em diferentes contextos de atividade? Nós retomamos aqui um esboço de teorização já desenvolvido em outros artigos (ACIOLY-RÉGNIER, 2011; FRADE; ACIOLY-RÉGNIER; JUN, 2013). Considera-se aqui que contextos diferentes privilegiam componentes particulares do conceito, tornando-os de forma intencional ou não, mais ou menos conscientes. Propõe-se assim uma interpretação alternativa dessa questão pelo cruzamento da perspectiva de Vygotski com a concepção de Vergnaud, que define o conceito como um sistema tripolar constituído por três conjuntos assim designados: significantes, situações e invariantes operatórios. O conjunto dos significantes permite a *representação*, a *comunicação* e o *tratamento* do conceito. O segundo conjunto faz referência às situações nas quais o conceito opera e se insere. O conjunto dos invariantes operatórios refere-se à ideia de *significados.*

Nessa concepção de um conceito com três componentes, a ênfase é dada de maneira diferente em contextos escolares ou extraescolares, e o triângulo pode perder seu equilíbrio e sua força, tornando-se instável quando amputado de pelo menos um de seus elementos. Consideramos que é essa amputação que revela os limites tanto de conceitos científicos, quanto de conceitos quotidianos, tanto de aprendizagens escolares, quanto de aprendizagens extraescolares. Nos diferentes tipos de aprendizagem, um componente do conceito parece ficar nos bastidores, o foco da consciência iluminando apenas dois elementos pela especificidade da aprendizagem.

Parece-nos que a partir desse quadro teórico, podemos identificar uma distinção entre conceitos construídos em situações escolares e extra escolares do ponto de vista do foco da consciência (Figura 1), numa tentativa de potencializar a modelização teórica de Vygotski para posteriormente nos situar na compreensão dos conceitos construídos em situação extraescolar. No contexto escolar, o foco de consciência é essencialmente dirigido para a relação de dois polos (significante ↔ invariante operatório) deixando de lado o conjunto de situações de referência. Os limites do sujeito nesse contexto aparecem nas dificuldades em reconhecer as situações extraescolares ou mesmo escolares nas quais os conceitos aprendidos podem ser operatórios. Por exemplo, alguns alunos podem repetir as definições dos conceitos e não serem capazes de resolver problemas implicando esses mesmos conceitos.

Por outro lado, no contexto extraescolar, o foco da consciência é dirigido prioritariamente para a relação de dois polos (situação ↔ invariante operatório) deixando nos bastidores os recursos oferecidos pelos significantes. Nesse caso, os limites dos sujeitos aparecem na insuficiência de representantes simbólicos que permitiriam ampliar os conhecimentos desenvolvidos no contexto local.

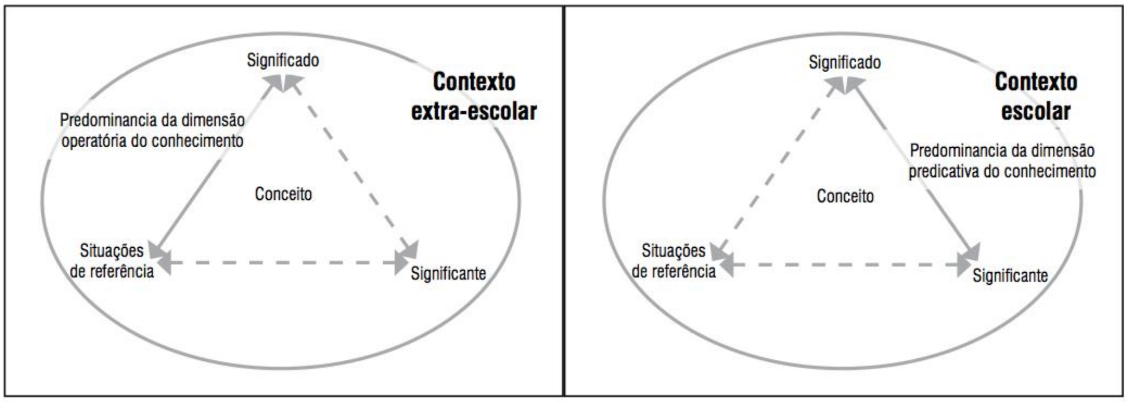

Figura 1: Diferenciação contextual da definição tripolar do conceito segundo Vergnaud (ACIOLY-RÉGNIER, 2010)

Essa diferença contextual da definição tripolar do conceito conduz a três questões fundamentais da aprendizagem, ou seja:

- O status do conhecimento produzido;
- O tipo do conceito e a consciência dos conceitos implicados na atividade;
- O poder da generalização e da transferência desses conhecimentos.

Na primeira questão, relativa ao *status do conhecimento*, podemos observar uma predominância da dimensão operatória do conhecimento (saber-fazer) em contextos extraescolares e uma predominância da dimensão predicativa do conhecimento (saber-dizer) em contextos escolares. Entretanto, essas formas diferentes do conhecimento apontam também para as ideias de Douady e Perrin-Glorian (1989) sobre os tipos de conceitos .

CONCEITO-FERRAMENTA X CONCEITO-OBJETO: NOMINALIZAÇÃO E CONCEPTUALIZAÇÃO

A dificuldade de explicitar os procedimentos de resolução de problemas matemáticos da vida quotidiana tem sido objeto de vários debates na literatura psicológica, sobretudo quando nos referimos a sujeitos analfabetos ou pouco escolarizados. Entretanto uma parte importante de pesquisas em psicologia e em Educação Matemática utiliza esses dados para inferir os processos cognitivos subjacentes e, sobretudo, a competência dos sujeitos ou o nível de desenvolvimento conceitual. Mesmo nos casos onde as verbalizações poderiam ser consideradas como secundárias, como no caso de desempenhos matemáticos, a explicitação dos procedimentos de resolução de problemas constitui um elemento essencial para a análise das competências dos sujeitos: um cálculo realizado, um problema resolvido, sem explicitação podem ser interpretados como o resultado de uma manipulação automática de algoritmos escolares ou de esquemas sem um domínio do conceito subjacente.

Douady e Perrin-Glorian (1989) introduziram uma distinção interessante relativa aos conceitos matemáticos: a distinção *ferramenta/objeto* sobre a qual se fundamenta o que elas chamam a dialética ferramenta/objeto. Neste sentido, *um conceito é uma ferramenta* quando o interesse é focalizado no uso que é feito para resolver um problema ou para se questionar sobre algo. Uma mesma ferramenta pode ser adequada à vários problemas e várias ferramentas podem ser adequadas a um mesmo problema. Um conceito é um objeto quando ele é considerado de um ponto de vista cultural, e reconhecido socialmente, no seu lugar no edifício estruturado de conhecimentos, em um certo momento do desenvolvimento de conhecimentos. Para essas autoras, um novo conceito é inicialmente uma ferramenta para resolver problemas práticos ou teóricos, depois pelo seu funcionamento e no uso social ele torna-se um objeto. Ele pode então suscitar novos problemas que darão nascimento à novas ferramentas.

Do ponto de vista do processo de aprendizagem escolar, essas autoras consideram que o trabalho dos conceitos que agem como ferramentas é criador de sentido. O trabalho escolar utilizando o conceito-objeto permite a descontextualização e a capitalização do saber. Ou seja, antes de serem objetos de conhecimento, os conceitos matemáticos são ferramentas de conhecimento. Inicialmente, eles não são o que apreendemos, mas aquilo pelo qual nos apreendemos a experiência, o mundo real.

Vergnaud (1990) afirma que a operação de nominalização é essencial para a transformação de um conceito ferramenta em um conceito objeto. Os invariantes que constituem os esquemas são apenas ferramentas, mesmo quando designados por palavras ou por significantes, eles não tem o estatuto imediato de objeto. Seria pelo jogo em paralelo da comunicação-representação linguística e simbólica e do funcionamento cognitivo em situação habitual, que essas ferramentas tornam-se objetos. A conceptualização é assim considerada como um processo que se desenvolve e evolui, e que além disso não atinge necessariamente um conhecimento objetivo, na medida em que o sujeito pode tomar em consideração traços que não pertinentes ao uso, ou estabelecer relações cuja validade é limitada. Nessa perspectiva, a conceptualização é inicialmente uma atividade implícita, não consciente, voltada para o resultado e não para as modalidades de seu próprio funcionamento. Competências de uma outra natureza são assim necessárias para transformar esse conhecimento-ferramenta em conhecimento-objeto.

OS DIFERENTES CONTEXTOS DE ATIVIDADES MATEMATICAS E A NATUREZA DOS CONCEITOS ASSOCIADOS

A matemática escolar é uma disciplina formal que utiliza vários sistemas simbólicos, e solicita a compreensão e produção da língua escrita. Nesse sentido, a utilização dos diferentes sistemas simbólicos é fundamental nessa disciplina e as consequências didáticas decorrentes desse fator não podem ser desprezadas. Observe-se, por exemplo, a dificuldade de "traduzir" um problema em linguagem natural para o seu equivalente formal ou ainda as dificuldades ligadas à passagem da aritmética à álgebra. (LOOS; Da ROCHA FALCÃO; ACIOLY-RÉGNIER, 2006).

Do ponto de vista escolar, os conceitos ensinados na escola são geralmente associados à fórmulas que consistem em representações “abstratas” às quais são atribuídos valores numéricos, com exemplos específicos. A criança aprende operações com valores numéricos abstratos pelo uso de fórmulas explícitas.

Do ponto de vista cotidiano extraescolar, o tratamento dos dados nos problemas “matemáticos” têm uma relação direta como os objetos implicados nos problemas. Entretanto, apesar do reconhecimento da importância dos significantes linguísticos e não linguísticos para a conceptualização e a resolução de problemas, não podemos associar conceptualização à linguagem. Essa associação implicaria na exclusão de todo elemento conceptual que não seja explícito e verbalizável. Ora, a princípio um conceito é uma ferramenta de conhecimento e não obrigatoriamente explícito, mesmo se para adquirir um estatuto de objeto ele deva estar necessariamente associado à significantes linguísticos e simbólicos (FRADE; ACIOLY-RÉGNIER; JUN, 2013).

Assim; se postulamos que a matemática não é apenas uma linguagem, sendo inicialmente uma tentativa de conceptualizar o mundo real para lidar com ele duas questões podem ser colocadas:

- O real pode ser apreendido por outros meios que os sistemas simbólicos formais?
- A resolução de um problema matemático sem explicitação de procedimentos pode nos informar sobre o nível de conceptualização do sujeito?

Essas questões podem se tornar mais complexas quando estudamos a “matemática da rua”, como no caso de sujeitos analfabetos ou pouco escolarizados, na qual observa-se seja a ausência de alguns sistemas simbólicos como os algoritmos escolares (que tornariam alguns cálculos mais econômicos) seja a presença de sistemas simbólicos específicos da cultura e não validados pela matemática formal.

Abreu e Bishop (1993) observam que desde que diferentes práticas coexistem numa mesma sociedade, elas possuem prestígios diferentes e que a exclusão da matemática não escolar pela escola poderia conduzir a criança a construir crenças e atitudes susceptíveis de impedir a construção de uma passarela entre as diferentes matemáticas.

A confrontação dessas especificidades poderiam ter algumas consequências práticas:

- A ausência de alguns sistemas simbólicos pode ser interpretada como ausência de competências matemáticas. Nesse caso se as competências matemáticas não se exprimem através dos sistemas simbólicos usuais elas não são reconhecidas e validadas.
- A utilização de sistemas simbólicos “regionais” pode ser interpretada de forma abusiva como sendo competências matemáticas locais, com baixo nível de generalização, enquanto que a utilização de sistemas simbólicos escolares é interpretada como competências generalizáveis. Contudo, essas correspondências são falsas e revelam análises superficiais da relação entre os vários sistemas simbólicos.

Na realidade, a matemática formal oferece, pelo menos em princípio, sistemas simbólicos abstratos que podem ser empregados em qualquer situação. Ela implica, por exemplo, uma aritmética codificada, convencional, geral, que aplicada corretamente, permite cálculos mais econômicos, principalmente quando trata-se da manipulação de grandes quantidades e em situações onde os métodos “regionais” de resolução de problemas falham. Nessa perspectiva, a aritmética formal constitui-se como um “amplificador cultural” (COLE; BRUNER, 1971), porque elas amplificam os processos de pensamento dos sujeitos. Entretanto, se desconhecemos os sistemas simbólicos “regionais” para uma possível integração ao “sistema matemático escolar”, a noção da Matemática formal como amplificador cultural perde seu sentido. Assim, conhecer os diferentes sistemas simbólicos susceptíveis de representar aspectos dos conceitos, estudar suas eventuais interações e os poderes e limites de cada sistema representa uma tarefa essencial na Educação Matemática.

Neste sentido, nossos trabalhos com adultos pouco escolarizados em situação de trabalho mostram que existe uma conceptualização matemática em situações de trabalho. Entretanto essa conceptualizão privilegia certos aspectos dos conceitos que podem por um lado ajudar na construção dos mesmos mas por outro lado podem também se constituir em obstáculos dificultando a passagem a níveis superiores de conceptualização, uma vez que teoremas em ação podem ser falsos mas funcionar de forma estável em todo um conjunto de situações se integrando nas diversas representações do sujeito. O conceito de teorema em ação[2] permite interpretar de

[2] Esse conceito designa as propriedades das relações consideradas e utilizadas por um sujeito em situação de resolução de problemas, entendendo-se que isso não significa. necessariamente uma capacidade de explicitar ou de justificar essas propriedades e ralações (VERGNAUD, 1981).

maneira diferente uma atividade, na qual os sujeitos necessitem de conceitos matemáticos para sua realização.

Admite-se que, explicitar, e de preferência, de maneira escolar, é a condição necessária para o reconhecimento do domínio do conceito. Ora, a solicitação de explicitação de procedimentos de resolução de problemas não se constitui como uma atividade habitual na vida diária extraescolar.

Vergnaud (1992) observa que uma grande parte de nossos conhecimentos são competências e que muitas de nossas concepções são implícitas, necessitando de uma reconstituição a partir das condutas e das declarações dos sujeitos. Nesse sentido, as verbalizações podem ser mais ou menos ricas, mas geralmente muito contextualizadas e ligadas a alguns valores particulares das variáveis das situações. Este autor acrescenta que a explicitação é sempre muito restrita se a relacionarmos ao conjunto de elementos conscientes que permitem administrar de forma eficaz uma situação, e ainda mais se a relacionarmos aos elementos inconscientes subjacentes aos automatismos que cada sujeito construiu. Geralmente, a escolha do que é dito é geralmente muito seletivo e discreto, econômico, e ao mesmo tempo muito confuso quando deve-se improvisar uma explicação sobre as razões de uma ou outra operação.

Assim, parece-nos que não podemos atribuir uma relação causal entre a explicitação dos procedimentos de resolução de um problema e o domínio de um conceito ou ainda a ausência de explicitação e o não domínio do conceito. Sendo a conceptualização uma construção gradual, parece-nos mais importante identificar os níveis dessa construção do que raciocinar em termos de presença ou ausência de conceito.

Assim, a partir de um exemplo de um trabalhador da cana-de-açúcar do Nordeste do Brasil nos anos 1990 nós retomamos aqui as três questões fundamentais da aprendizagem já mencionadas, ou seja:

- O status do conhecimento produzido;
- O tipo e a consciência dos conceitos implicados na atividade;
- O poder da generalização e da transferência desses conhecimentos.

ENTRE BANANAS E CANA-DE-AÇÚCAR, CHAMAMOS O ENGENHEIRO OU O BURRO?

Este exemplo permite a identificação do teorema em ação subjacente à atividade de trabalho do canavieiro, ou seja, a explicitação do conceito com significantes matemáticos, o status do conhecimento produzido notadamente de forma operatória; uma conceptualização onde o polo significante parece ficar nos bastidores e um fraco poder de generalização a outros contextos. Este exemplo implica uma situação de resolução de problema de cálculo de preço, proposta a um canavieiro pela pesquisadora. Para resolver o problema, o sujeito deveria efetuar uma escolha entre os dados propostos e as operações matemáticas a serem realizadas. Apresentados em linguagem acessível aos sujeitos, esses problemas, que nomearemos aqui de familiar, quando ligado à atividade de trabalho do sujeito, e de não-familiar quando ligado a uma atividade de trabalho rural mas diferente daquela que o sujeito costumar realizar no seu cotidiano do sujeito. Esses problemas fazem referência a situações que não são puramente numéricas, mas contextualizadas em situações de trabalho rural para fazer emergir problemas específicos de conceptualização, conforme exemplo baseado em Acioly-Régnier (1994):

> Problema familiar. Um cabo de turma pesou três feixes de cana para calcular o salário do trabalhador. O primeiro feixe tinha 10 Kg; o segundo, 12 Kg; e o terceiro, 11 Kg. O trabalhador tinha cortado 300 feixes e a tonelada estava a 450 cruzeiros[3]. Quanto o cortador vai receber?
>
> Sujeito: Peraí, ele cortou 300 feixes... à 12?
>
> Pesquisadora: À 11, 12 e 10 quilos.
>
> Sujeito: 11, 12 e 10... 11; 12 e 10 ele (o cabo de turma) vai deixar por 11 digamos.
>
> Pesquisadora: Mas como é que ele faz?
>
> Sujeito: Porque eu corto cana e eu sei! Mas, na maior parte do tempo ele não faz assim. Ele vai deixar à 10 (referência às regras da usina, onde os feixes devem ter 10 Kg). Mas se a gente brigar muito, ele diz; "tá bom, como eu pesei um de 12, eu vou deixar a 11".

---

[3] Como consequência de forte instabilidade econômica, existiram muitas mudanças no nome da moeda nacional. Cruzeiro era nome da me

> Pesquisadora: Mas por que ele vai escolher o 11?
>
> Sujeito: Ele nunca vai escolher esse. A gente acha que tem direito, porque se tinha um de 10, tinha também um de 12. Mas, ele vai escolher sempre o mais maneiro. Por exemplo, ele encontra um de 12, ele não vai parar, ele vai continuar até achar um mais maneiro; ele vai pesar até cinco ou seis, quando ele encontra um mais maneiro aí ele vai tirar o salário por esse aí.
>
> Pesquisadora: Mas por que você disse 11?
>
> Sujeito: Porque é o do meio, às vezes a gente faz assim, mas geralmente a gente faz por 10 quilos. Aí, nesse caso, 300 feixes faz três toneladas, à 450 cruzeiros; dá, 900... 1350 cruzeiros.
>
> Pesquisadora: E como você faria pra ser positivo com o trabalhador?
>
> Sujeito: A 11; vai dar 300 feixes; três toneladas... três toneladas e 300 quilos. Então, 1350 a mais... 45, 90, 135, 1485 cruzeiros.
>
> Pesquisadora: Como você fez?
>
> Sujeito: Uma tonelada é 450; 100 quilos é 45; 300 quilos, faz 45 mais 45; dá 90; mais 45 dá 135; mais 1350, 1485.

Observe-se que a noção de média apresenta-se de uma forma bastante peculiar, uma vez que é obtida através da compensação de valores numéricos. O peso de normas culturais se impõe fortemente induzindo alguns sujeitos a abandonarem as respostas obtidas através do cálculo da média, em favor de valores admitidos socialmente para problemas específicos de média de peso. Mas como poderia ser traduzido em linguagem matemática, o teorema em ação implícito nesse procedimento de resolução de problema? Os Quadros 1 e 2 apresentam uma análise desenvolvida em Acioly-Régnier (1994).

$t \xrightarrow{g} g(t) = bt$ onde b = preço em cruzeiros de uma tonelada de cana-de-açúcar t = quantidade de cana-de-açúcar pesada em toneladas g (t) = preço do montante da cana-de-açúcar	b = 450 (cruzeiros/tonelada) t = 3 g (3)= g (1+1+1) = (g (1) +g(1))+g(1) = (450+450) + 450 = 900 + 450 = 1350
$s \xrightarrow{h} h(s) = cs$ onde c= preço em cruzeiros de cem quilos de cana s= quantidade de cana por cem quilos h(s) = preço do montante de cana	c = 45 s = 3 h(3) = h(1+1+1) = h(1) + h(1) + h(1) = (45+45) + 45 = 90 + 45 = 135
Transformação descrevendo a conversão da unidade de cem quilos em tonelada $s \xrightarrow{C} C(s) = \frac{1}{10} s = t$ Transformação descrevendo a conversão da tonelada em cem quilos $t \xrightarrow{C^{-1}} C^{-1}(t) = 10t = s$ essas duas transformações são funções lineares $g(t) = g(C(s)) = g(\frac{1}{10} s) = \frac{1}{10} g(s)$ $h(s) = h(C^{-1}(t)) = h(10t) = 10h(t)$ $g(t) = bt = 10ct = 10h(t)$	h(33)=h(30 + 3)=h(30) + h(3) = h(30)+135 h (30) = 10 h (3) = 10 x 135 = 1350 h (33) = 1350 + 135 = 1485 ou ainda, g (3) = 10 h (3) = 10 x 135 assim g (3) + h (3) = 1350 + 135

Quadro 1: sistematização por Acioly-Régnier (1994).

A outra etapa prévia na qual o número de feixes corresponde ao peso total conhecendo-se o peso médio de um feixe, requer a função bilinear (Quadro 2).

$(a;t) \xrightarrow{f} f(a;t) = at$ onde a = peso médio do feixe t = número de feixes f(t) = peso do total de feixes	a = 11 (quilogramas) t = 300 f (11; 300) = 11 x 300 f (10 + 1; 300) = f (10; 300) + f (1 ; 300) f (10; 300) = 3000 = 3 x 1000 f (1; 300) = 300

Quadro 2: teorema em ação implícito na resolução do problema

Obviamente o canavieiro não reconheceria o que ele fez nesse quadro, mas o pesquisador precisa conhecer o implícito do discurso para (re)conhecer e legitimar o conhecimento matemático na ausência de uma explicitação convencional.

O conteúdo dos problemas parece desempenhar um papel importante na identificação dos esquemas invocados, na capacidade de generalização do conhecimento e dos tipos de conceitos. Isto se revela tanto no número elevado de recusas para resolver os problemas não-familiares, quanto pela recusa de resolução de problemas de mesma estrutura matemática, quando este não tenha sentido social para o sujeito. O protocolo abaixo, do mesmo trabalhador ao resolver um problema não-familiar, ilustra este comentário.

> Problema não-familiar. Um senhor tinha um bananal e estava vendendo suas bananas a 370 cruzeiros a tonelada. Um negociante que queria comprar as bananas combinou com ele que faria uma média do peso de três cachos de bananas para calcular o preço que ele deveria pagar. O peso dos três cachos que eles pegaram ao acaso eram de 1 quilo, 3 quilos e 2 quilos, e o negociante ia comprar 700 cachos. Quanto ele deveria pagar?
>
> Sujeito: Ah, esse problema eu não sei resolver; eu nunca trabalhei com bananas na minha vida!
>
> Pesquisadora: Mas tu já resolveste um problema como este com feixes de cana, eles são parecidos, não são?
>
> Sujeito: De jeito nenhum, essas histórias de banana são mais difíceis, eu não entro não!
>
> Pesquisadora: Então, se eu dissesse que em vez de banana era cana?
>
> Sujeito: Tá brincando!? Já viu feixe de 1 quilo? (Ri muito)
>
> Pesquisadora: Mas se a gente fizesse de conta?
>
> Sujeito: Olhe, tem coisas que a gente não pode fazer; nem fazendo de conta; é impossível! Esses problemas tem de perguntar pra quem conhece do assunto; porque eu, eu respondo tudo o que você quiser da cana. Eu nasci aqui, meu pai também; ele até trabalhou como cabo de turma, durante toda a vida dele; é por isso que eu conheço as manhas deles, porque tem trabalhador que não sabe. Então eu posso explicar um bocado de coisa, mas essas histórias de banana não é comigo não!

Assim, a recusa parece relacionada à artificialidade do problema para o sujeito. Vale ressaltar que os sujeitos que conseguiram resolver esses tipos de problemas o fizeram apenas quando aceitaram e integraram essa condição. De maneira explícita, Perret-Clermont, Perret e Bell (1991) resumem esta proposição: "Os sujeitos não se confrontam jamais a situações ou tarefas idênticas, mesmo se elas são rigidamente padronizadas ou controladas". A ideia de base destes trabalhos é que a interação social não existe sem o desejo das partes implicadas.

Nesta perspectiva, o próprio Piaget (1972) que defende a hipótese da universalidade dos processos cognitivos, afirma que, mesmo no estagio de operações formais - caracterizado pela independência do conteúdo real ao qual as operações estão ligadas - é preferível testar os sujeitos dentro de um domínio significativo de sua carreira ou próximo de seu centro de interesses. Ele conclui que o desempenho do sujeito pode ser função de habilidades ou de especializações profissionais.

Sabe-se que para "explicitar" os procedimentos de resolução de um problema, um sujeito precisa acionar processos cognitivos de uma outra natureza que aqueles empregados para resolvê-lo, ou seja que ele precisa recorrer a processos metacognitivos.

Segundo Bredart e Rondal (1982), Chaudron (1983) e Kolinsky (1986); citados por Gombert (1992), é preciso distinguir entre, de um lado, as habilidades constatadas em comportamentos espontâneos e, de outro lado, as capacidades baseadas em conhecimentos sistematicamente representados e que podem ser deliberadamente aplicadas. Mais do que uma diferença de grau, existe uma diferença qualitativa na atividade cognitiva que parece separar estes dois tipos de comportamento. Gombert (1990) observa que uma forma satisfatória de demarcar a diferença seria utilizar sistematicamente a expressão "habilidade metalinguística" para designar os conhecimentos linguísticos aplicados automaticamente sem reflexão nem decisão deliberada da parte do sujeito; e de reservar a expressão" capacidade metalinguística" quando os elementos de reflexão e de deliberação estão presentes.

Neste sentido, poder-se-ia propor expressões análogas de habilidades metamatemáticas e capacidades metamatemáticas?

Se a analogia é valida, poder-se-ia dizer que quando um sujeito resolve um problema matemático, ele acionaria habilidades metamatemáticas. Por outro lado, diante da solicitação de explicitar os procedimentos utilizados para resolvê-los, ele é obrigado a lançar mão de processos de uma outra natureza, aqui considerados como capacidades metamatemáticas.

O ensino da Matemática escolar é realizado mais frequentemente pela apresentação verbal de princípios gerais e a aprendizagem por trocas verbais e questionamentos.

Pode-se admitir que estas características, ao menos a principio, devem requerer frequentemente o uso de competências metacognitivas, ou seja, um "conhecimento introspectivo sobre os estados cognitivos e suas operações, portanto sobre as capacidades de controle e de planificação de seus próprios processos de pensamento e de seus produtos" (GOMBERT,1992). Assim, a facilidade relativa dos sujeitos escolarizados para explicitar seus procedimentos de resolução pode resultar mais da consequência do tipo de aprendizagem do que ser um indício do conhecimento do conceito estudado.

Por outro lado, a matemática implícita em atividades de trabalho se caracterizaria por um ensino baseado, sobretudo, em demonstrações; e uma aprendizagem por observação e imitação, fazendo apelo apenas de forma indireta às capacidades metacognitivas. E, sobretudo, ao nível das habilidades a partir das quais essa aprendizagem se exterioriza. Assim, a solicitação de explicitação de procedimentos de resolução de problemas é uma tarefa que os sujeitos analfabetos ou pouco escolarizados não estão sempre habituados.

Retomando o quadro teórico de base desse artigo vemos que nesse exemplo os conceitos matemáticos são *ferramentas de conhecimento* e não objetos de conhecimento. Eles são o fato pelo qual o sujeito apreende o mundo real.

CONCLUSÃO: ENTRE O BURRO E O ENGENHEIRO

Reconsiderar a análise do caminho do burro como um conhecimento de tipo operatório, centrada no eixo *situação ↔ significado,* onde os significantes ficam nos bastidores amplia nossa visão do conhecimento matemático. Propomos com a análise desse exemplo uma perspectiva diferente de conceber as estratégias de resolução de problemas, a princípio estranhas quando se espera respostas possíveis em função de um quadro de análise previamente estabelecido, de acordo com um incontestável modelo teórico.

Reconsiderar a análise do trabalho dos engenheiros como conhecimentos válidos, mas nem sempre eficazes em todas as situações, reduz as dicotomias e, sobretudo a hierarquia existente entre formas de conhecimento.

As ideias desenvolvidas neste capitulo conduzem a sugerir que a explicitação dos procedimentos de resolução de problemas, frequentemente utilizada quando da análise dos processos cognitivos dos sujeitos, possa ser estudada de forma mais rigorosa, a fim de clarificar o papel eventual da natureza da atividade exercida pelo sujeito, contexto da atividade e natureza da aprendizagem.

Pode-se admitir que algumas pesquisas no domínio de competências matemáticas, apesar da utilização das verbalizações dos sujeitos para inferir as competências, se preocupam apenas de forma parcial às particularidades destas verbalizações. Talvez em função do interesse centralizado sobre o raciocínio matemático, a observação se centraliza, sobretudo, na justificação dessas verbalizações do ponto de vista matemático formal. Geralmente, aquelas que não estão diretamente ligadas ao raciocínio matemático são abandonadas.

A análise dos diferentes tipos de verbalizações poderia apresentar um interesse do ponto de vista da compreensão da conceptualização implícita. Se verificarmos o estudo da cognição cronologicamente, observa-se que as pesquisas iniciais centralizavam-se principalmente na quantificação de erros e acertos, mas muito raramente sobre a natureza destes erros e acertos.

Por que as verbalizações não poderiam ser também objeto de uma analise idêntica?

Existiriam algumas regularidades nas verbalizações, em função de alguns tipos de tarefas, da situação social ou do status do interlocutor, por exemplo?

Observações realizadas na zona da mata sul de Pernambuco (ACIOLY, 1989) que consistia numa abordagem didática de transmissão do saber escolar a sujeitos canavieiros comportavam esta ideia. Interrogados sobre situações da vida quotidiana (como por exemplo, sobre decisões relativas ao local mais econômico para fazer compras; ou sobre o cálculo do salário durante o período de corte da cana), os canavieiros respondiam de forma extremamente breve ao grupo de universitários de zona urbana, em certos casos as respostas eram incompreensíveis.

Por outro lado, no quadro de situações naturais, em interação com interlocutores cujos interesses eram antagônicos aos seus (representantes das usinas ou donos dos barracões), as verbalizações tornavam-se muito mais ricas, e traduziam claramente seus procedimentos de resolução de problemas. Observe-se que os conflitos existentes entre os canavieiros e os usineiros têm suas origens na historia da cultura de cana-de-açúcar do estado onde os participantes tentam conciliar interesses contrários, tentativas nas quais agressões verbais e físicas são frequentes,. As consequências para os canavieiros de uma má negociação podem ser dramáticas, resultando em perda de dinheiro, de emprego ou em alguns casos extremos até em perda da vida.

Assim, para concluir este artigo convoco a ideia de Fernando Pessoa que traduz do meu ponto de vista a relação dialética constante entre linguagem e pensamento, forma operatória e predicativa do conhecimento, conceito-ferramenta conceito-objeto.

"Assim como falham as **palavras** quando querem exprimir qualquer **pensamento**, assim falham os **pensamentos** quando querem exprimir qualquer **realidade**" (PESSOA, 1946)

REFERÊNCIAS

ABREU, G.; BISHOP, A. Do children bring "home mathematics" to their understanding of the "school mathematics". In: BIENNIAL MEETINGS OF THE INTERNATIONAL SOCIETY FOR THE STUDY OF BEHAVIORAL DEVELOPMENT – ISSBD, 12., 1993, Recife, Brazil. **Proceedings...** Recife: ISSBD, 1993.

ACIOLY, N. M. **A Lógica Matemática no jogo do bicho**: compreensão ou utilização de regras? 1985. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) - Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Centro de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, Brasil, 1985.

ACIOLY, N. M. **Interaction sociale**: Variable négligeable en situations de recherche? Étude clinique sur les concepts de pourcentage et de proportionnalité chez des adultes “bas niveau de qualification”, Mémoire de D.E.A. Paris: Université René Descartes, 1989.

ACIOLY, N. M.; SCHLIEMANN, A. D. Escolarização e conhecimento matemático desenvolvido no contexto do jogo do bicho. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, v. 61, p. 42-57, 1986.

ACIOLY-REGNIER, N. M. **La juste mesure**: une estude des competences mathematiques des travailleurs de la canne a sucre du Nordeste du Bresil dans le domainede la mesure. 1994. Tese (Doutorado em Psicologia) – Université Paris Descartes, Paris 5, França. 1994.

ACIOLY-REGNIER, N. M. **Culture et Cognition**: Domaine de recherche, Champ conceptuel, Cadre d’intelligibilité et Objet d’étude fournissant des instruments pour conduire des analyses conceptuelles et méthodologiques en psychologie et en sciences de l’éducation-Habilitation à Diriger des Recherches Université Lumière Lyon 2. Lyon: Lyon Université, 2010.

ACIOLY-RÉGNIER, N. M. Educação formal, não formal e informal: desconstruindo muros que separam e enfatizando os poros invisíveis entre diferentes formas de aprender. In: FERREIRA, A. L.; ACIOLY-RÉGNIER, N. M., (Coord.) **Psicologia dos Processos interativos nos espaços de periferia**: a formação humana em questão. Recife: Universitária UFPE, 2011.

BRÉDART, S.; RONDAL, J. A. L'analyse Du langage chez l'enfant: lês activités métalinguistiques. Bruxelas: Mardaga, 1982.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Na vida dez; na escola, zero: os contextos culturais da aprendizagem da matemática. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, n. 42, p. 79-86, 1982.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Mathematics in the streets and in schools. **British Journal of Developmental Psychology**, n. 3, p. 21-29, 1985.

CHAUDRON, C. Research on metalinguistic judgments: A review of theory, methods, and results. **Language Learning**, v. 33, p. 343-377, 1983.

COLE, M.; BRUNER, J. Cultural differences and inferences about psychological processes. **American Psychologist**, v. 26, n. 10, p. 867-876, 1971.

Da ROCHA FALCÃO, J. T. **Psicologia da Educação Matemática**: uma introdução. Coleção Tendências em Educação Matemática. Autêntica: Belo Horizonte, 2003.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. J. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**, n. 20, p. 387-424, 1989.

FRADE, C.; ACIOLY-RÉGNIER, N. M.; JUN, L. Beyond deficit models of learning mathematics: sociocultural directions for change and research. In: CLEMENTS, M. et al. (Ed.). **3rd International Handbook of Mathematics Education**. New York: Springer, p. 101-144. 2013.

GOMBERT, J. E. Metalinguistic development. London: Harvester-Wheatshef, 1992.

KOLINSKY, R. L'émergence dês habilites métalinguistiques. Cahiers de Psychologie Cognitive, v. 6, p. 379-404, 1986.

LOOS, H.; Da ROCHA FALCÃO, J.; ACIOLY-RÉGNIER, N. M. A ansiedade na aprendizagem da matemática e a passagem da aritmética para a álgebra. In: BRITO, M. R. F. (Org.). **Psicologia da Educação Matemática** - Teoria e pesquisa. 2. ed. Campinas: Insular, 2006, p. 235-261.

PERRET-CLERMONT, A. N.; PERRET, J. F.; BELL, N. The social construction of meaning and cognitive activity in elementary school children. In: RESNICK, L. B.; LEVINE, J. M.; TEASLEY, S. D. (Ed.), **Perspectives on Socially Shared Cognition** Washington D.C.: American Psychological Association, 1991. p. 41-62.

PESSOA, F. **Poemas de Alberto Caeiro**. Lisboa: Ática, 1946.

PIAGET, J. Intellectual Evolution from Adolescence to Adulthood. Human development, v. 15, p. 1-12, 1972.

SCHLIEMANN, A. D.; ACIOLY, N. M. Mathematical Knowledge Developed at work: the contribution of practice versus the contribution of schooling, **Cognition and Instruction**, New Jersey, v. 6, n 3, p. 185-221, 1989a.

SCHLIEMANN, A. D.; ACIOLY, N. M. Numbers and operation in everyday problem solving, In: KEITEL, P. C. et al. (Ed.). **Mathematics Education and Society**, Paris, UNESCO, Science and Technology Education, v.35, 1989b.

VERGNAUD, G. Quelques orientations theoriques et methodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 2, n. 2, p. 215-232, 1981.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. Recherches en didactique des mathématiques, v. 10, n. 2, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. Approches didactiques en formation d'adultes. In: VERGNAUD, G. **Éducation Permanente**, n. 11, 1992.