

## **Teoria e Prática: a interdisciplinaridade a partir de uma análise investigativa no lançamento de dardo**

### **Theory and Practice: interdisciplinarity from an investigative analysis in dart launch**

Alexandre Maia Ferreira<sup>1</sup>

Vagner Lourenção<sup>2</sup>

Jose Carlos Thompson da Silva<sup>3</sup>

#### **Resumo**

Neste relato, apresentamos uma tarefa investigativa de análise da trajetória percorrida por um dardo ao ser lançado numa atividade prática da modalidade de atletismo realizado no Instituto Federal do Espírito Santo no ano de 2016. O trabalho teve como objetivo promover a interdisciplinaridade dos componentes curriculares de Matemática e de Educação Física. Participaram 100 alunos de 03 turmas de 2º ano de dois cursos técnicos (Química e Mecânica) integrado ao Ensino Médio. Sob a ótica de experimento de ensino, adotou-se a metodologia do professor pesquisador, delineada em quatorze encontros, divididas em oito etapas dirigidas por roteiro. Recorreu-se a análise de dados produzidos pelos alunos nos registros individuais, nas entrevistas e nos recursos audiovisuais. Apoiado na metodologia construcionista, os estudantes puderam inferir sobre suas respostas e constatar que, após o lançamento, havia um ângulo ideal de partida e que a trajetória do dardo deveria ser parabólica com curva passível de ser modelada via *Geogebra*.

**Palavras-chave:** Interdisciplinariedade. Matemática. Educação Física. Modelagem Matemática. Lançamento de Dardos

#### **Abstract**

In this report, we present an investigative task of analyzing the trajectory of a javelin when it was launched in a practical athletics activity held at the Federal Institute of Espírito Santo in 2016. The work aimed to promote the interdisciplinarity of the curricular components of Mathematics and Physical Education. 100 students from 03 2nd year classes of two technical courses (Chemistry and Mechanics) integrated to High School participated. From the perspective of a teaching experiment, the research teacher's methodology was adopted, delineated in fourteen meetings, divided into eight stages guided by a script. We used the analysis of data produced by students in individual records, interviews and audiovisual resources. Supported by the constructionist methodology, the students were able to infer about their answers and verify that, after launching, there was an ideal starting angle and that the trajectory of the dart should be parabolic with a curve that could be modeled via *Geogebra*.

**Keywords:** Interdisciplinarity. Math. Physical Education. Mathematical Modeling. Dart Throw

---

<sup>1</sup> Mestre em Matemática; Instituto Federal do Espírito Santo/IFES; Aracruz, Espírito Santo, Brasil e alexandre.ferreira@ifes.edu.br.

<sup>2</sup> Mestre em Educação, Ciência e Matemática; Instituto Federal do Espírito Santo/IFES; Vila Velha, Espírito Santo, Brasil e vagner.lourencao@ifes.edu.br.

<sup>3</sup> Doutor em Educação; Instituto Federal do Espírito Santo/IFES; Vitória, Espírito Santo, Brasil e jose.thompson@ifes.edu.br.

## INTRODUÇÃO

A interdisciplinaridade ainda é uma questão a ser debatida nos processos de formação inicial e continuada de professores. A fragmentação do ensino e a falta de entendimento sobre as correlações entre as disciplinas, ainda hoje, afetam a compreensão relacional dos conteúdos escolares por parte dos estudantes, como advoga Skemp (1976), sobre conceitos e aplicabilidade dos mesmos em diferentes áreas de conhecimento.

De acordo com Silva e Lemos (2019), o planejamento e a realização de práticas interdisciplinares exigem que professores de diferentes áreas de conhecimento se proponham a compartilhar saberes. E, para isto, é preciso ter a compreensão de que se faz necessário romper com barreiras estabelecidas por certos modelos educacionais para que se tenha uma compreensão do mundo como um todo de modo que compreendam as conexões entre os diferentes saberes escolares e não escolares.

Os cursos de formação e a docência em matemática tendem a priorizar uma prática de ensino voltada para a oralidade, explicação e repetição de procedimentos matemáticos fundamentados em listas sistematizadas e que não oportunizam aos estudantes a construção do conhecimento mediante cenários de investigação dos conceitos matemáticos (FIORENTINI; FREITAS, 2009).

Na tentativa de romper com a prática de ensino por mera transmissão de conteúdos e buscando a construção de um cenário de investigação de modo a engajar os alunos ativamente em seus processos de aprendizagem (SKOVSMOSE, 2000) desenvolvemos uma sequência didática articulando conteúdos de Matemática e Educação Física com os estudantes das turmas de 2º ano dos cursos técnicos (02 turmas de Química e 01 turma de Mecânica) integrados ao Ensino Médio do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes) – Campus Aracruz no segundo semestre de dois mil e dezesseis<sup>4</sup>. Ao todo, participaram do relato 100 estudantes (ambos os sexos) com faixa etária de 15 a 17 anos.

Além de repensarmos a nossa prática docente, outros fatores que nos motivaram a desenvolver a atividade interdisciplinar foram o baixo rendimento em Matemática e a falta de interesse nas aulas teórico-práticas de atletismo, uma vez que, a maioria já possuía rendimento suficiente para a aprovação na disciplina de Educação Física. Dada a circunstância do baixo rendimento em Matemática, todos os estudantes optaram pela

---

<sup>4</sup> Destacamos que a publicação do mesmo somente foi possível neste momento, pois durante o período de escrita houveram alguns impedimentos (questão de saúde e mudança de localidade de trabalho de um dos autores) que inviabilizaram a apresentação em anos anteriores.

realização da atividade interdisciplinar proposta. Na próxima seção, apresentamos os materiais e métodos utilizados para o desenvolvimento do cenário de investigação.

## 1. MATERIAIS E METODOLOGIAS UTILIZADAS NA ANÁLISE INVESTIGATIVA

Como alternativa para a promoção de uma recuperação paralela em Matemática e para a participação mais abrangente das turmas nas aulas práticas de Educação Física, principalmente, das diversas modalidades de atletismo que seriam propostas no segundo semestre de 2016, os professores realizaram um sequência didática interdisciplinar envolvendo Matemática e Educação Física. O trabalho consistiu em oito (08) etapas distribuídas em quatorze (14) encontros realizados no contraturno, ou seja, no turno vespertino. No quadro a seguir, apresentamos cada etapa proposta de atividades desenvolvidas.

<b>ETAPA 01</b>		
<b>## Aulas</b>	<b>Tempo</b>	<b>Planejamento/Objetivos</b>
Aula 01	50 minutos	a) Orientações gerais sobre a análise investigativa; b) Regras e técnicas do lançamento de dardo. (Apresentação da teoria via apresentação por meio de datashow)
Aula 02	50 minutos	Regras e técnicas do lançamento de dardo. (Exibição de vídeos com atletas em execução por meio de datashow)
Aula 03	50 minutos	Inicialização do lançamento de dardo – <i>corrida sem lançamento</i> . (Aula de campo com prática monitorada pelos professores)
Aula 04	50 minutos	Inicialização do lançamento de dardo – <i>corrida com lançamento</i> . (Aula de campo com prática monitorada pelos professores)
<b>ETAPA 02</b>		
Aulas 05/06	100 minutos	a) Aprimorar as técnicas praticadas na etapa anterior (Aula de campo); b) Escolher dois lançamentos válidos (o menor e o maior alcance foram medidos com auxílio de fita métrica)
<b>ETAPA 03</b>		
Aulas 07/08	100 minutos	a) Investigar o modelo matemático que descreveria a trajetória do dardo com auxílio do software Geogebra (Aula no laboratório de informática); b) Discutir, algebricamente, a obtenção dos valores dos coeficientes reais (a, b, c) da lei de formação da função quadrática associada a modelagem.
<b>ETAPA 04</b>		
Aula 09	50 minutos	Construir um esboço gráfico no papel milimetrado, com escala adequada, para cada um dos dois lançamentos selecionados.
<b>ETAPA 05</b>		
Aula 10	50 minutos	Construir, via aplicativo de gif animado, uma animação simulatória da ação realizada (sucessivas imagens projetadas numa tela com a sensação de movimento contínuo).
<b>ETAPA 06</b>		
Aula 11	50 minutos	Conjecturar, via simulador interativo virtual, a relação existente entre a medida do alcance máximo atingido pelo dardo e o ângulo de partida/saída do dardo (Aula no laboratório de informática).
<b>ETAPA 07</b>		
Aula 12	50 minutos	Mostrar que a trajetória percorrida pelo dardo era um arco parabólico utilizando o comando “Cônica definida por 05 pontos” do Geogebra.

ETAPA 08		
Aulas 13/14	100 minutos	Demonstrar, de forma lógica e dedutiva, que o alcance máximo atingido pelo dardo ocorre quando a medida do ângulo de partida/saída é igual a $45^\circ$ .

(a) Quadro 1 - Síntese das atividades desenvolvidas

Fonte: Elaborado pelos autores

Ao observar o quadro, é possível verificar como foram organizadas as atividades explicitando o tempo e os objetivos de cada aula. Também constam os ambientes em que tais aulas foram desenvolvidas (laboratório de informática, campo aberto, sala de aula), bem como os materiais utilizados. Esta organização pode contribuir para que outros professores e pesquisadores desenvolvam práticas investigativas semelhantes.

## 2. DISCUSSÃO E RESULTADOS DA ANÁLISE INVESTIGATIVA

Apresentamos nesta seção algumas análises de resultados obtidos ao realizar as etapas investigativas com os estudantes. Descrevemos e analisamos cada etapa de forma individual a fim de contribuir com a compreensão do leitor sobre o desenvolvimento das atividades e implicações oriundas das mesmas.

### 2.1. Etapa 1 – Teorização do processo de lançamento de dardos

Nesta etapa, o objetivo consistiu num estudo sistemático das regras e técnicas associadas ao lançamento de dardo, que foram realizadas durante quatro aulas de cinquenta minutos (duas aulas teóricas e duas aulas práticas de inicialização ao lançamento de dardo).

Foram repassadas as orientações gerais sobre a investigação a ser realizada com o auxílio de projetor. Nesse momento, também foi apresentado o estudo dirigido de forma impressa, destacando que o trabalho seria feito em equipe com grupos de até 10 pessoas e o respectivo planejamento da execução investigativa a ser realizada. Após a apresentação, reservou-se um espaço para esclarecimento de dúvidas ou sugestões para contribuições que pudessem melhorar o estudo dirigido.

Em seguida, iniciou o repasse de conhecimentos teóricos associados ao lançamento de dardo. A teoria foi introduzida com uma abordagem histórica da evolução da modalidade destacando os precursores que fizeram contribuições para a propagação do esporte, os principais atletas de ponta e as competições que empregam o lançamento de dardo (em especial, os jogos olímpicos). Após a introdução teórica, realizou a apresentação de um dos dardos que seria utilizado (uma lança feita de metal, mas que também pode ser composta de

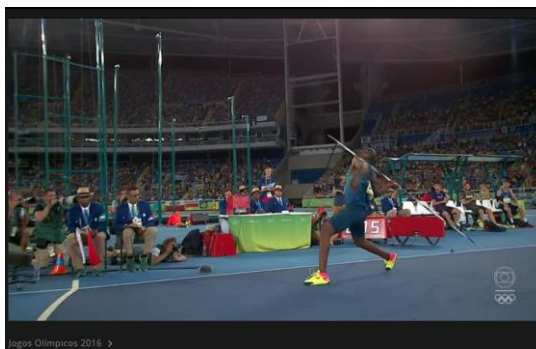
fibra de vidro ou de carbono). O professor de Educação Física esclareceu que há diferença tanto no peso quanto no comprimento dos dardos utilizados por homens e mulheres em competições. Além disso, o dardo utilizado na atividade media 2,7 metros de comprimento e 800 gramas de massa. As regras/técnicas do lançamento de dardo foram apresentadas gradativamente desde a corrida para a tomada de impulso até o giro rápido do corpo para o lançamento do dardo. Ao final, foram pontuadas as penalidades que geram a desclassificação do lançador: saída da zona de lançamento e dardo tocando o solo sem ser pela ponta dianteira. Para fins de ilustração, a Figura 01 corresponde a uma das lâminas expostas na etapa teórica.



(b) Figura 01 – Aprendendo a técnica / [Lâmina](#) da apresentação da técnica do lançamento de dardo  
Fonte: Acesso em 20 de agosto de 2016 – disponível em <https://slideplayer.com.br/slide/9528220/>

A escolha do lançamento de dardo para o desenvolvimento deste trabalho pode ser justificada pelo fato do mesmo ser uma das modalidades de atletismo mais antigas (presença nos jogos olímpicos desde a Grécia Antiga) e por ser uma das modalidades do atletismo explorada nos jogos internos do Ifes. Adiciona-se a esta justificativa, o fato de que a modalidade teve, durante os Jogos Olímpicos do Rio 2016, um representante brasileiro em destaque.

Para finalizar a exibição da teoria, foram analisados vídeos educativos e alguns vídeos que mostravam, na Rio 2016, o atleta brasileiro, Luiz Alberto de Araújo, participando do lançamento de dardo no decatlo em que conseguiu uma de suas melhores marcas de sua carreira. A emissora oficial da Rio 2016 exibiu o lançamento utilizando a tecnologia *slowmotion* (câmera lenta), deste modo foi possível observar as nuances envolvidas na modalidade estudada e a riqueza de detalhes atrelados ao movimento desse esporte.



(c) Figura 02 – Lançamento de dardo pelo atleta brasileiro (Rio-2016)

Fonte: Disponível em <https://globoplay.globo.com/v/5245917/> Acessado em 18 de Agosto de 2016

Após a apresentação da parte teórica, os estudantes iniciaram o treinamento com aplicação prática dos conhecimentos adquiridos (corrida, posição corporal adequada de pernas, ombro e braços), conforme exemplifica a Figura 03.



(d) Figura 03 – Aula prática de implementação das técnicas e regras do lançamento de dardo

Fonte: Arquivo dos pesquisadores

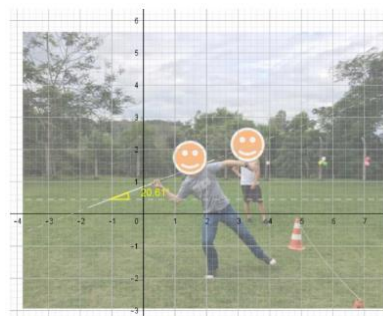
Note que, como não havia pista de atletismo para a realização dos lançamentos, os participantes foram direcionados para uma área aberta existente no campus. A referida situação nos faz repensar sobre a necessidade de investimentos de infraestrutura nos Institutos Federais ou centros de atletismo nos municípios para que possibilite a formação integral do indivíduo e oportunizar a formação de novos atletas.

## **2.2. Etapa 2 – Aprimoramento das técnicas de lançamento de dardos**

Nesta etapa, o objetivo foi realizar o aprimoramento das técnicas abordadas na etapa anterior. O tempo gasto para a realização dessa etapa foi de uma hora e quarenta minutos (100 minutos). Foi solicitado que cada integrante da equipe realizasse pelo menos um lançamento de dardo. Enquanto o colega executava o lançamento, os demais alunos, sob a



orientação do professor de Educação Física, ficaram responsáveis pela supervisão do processo que consistia na verificação do cumprimento das regras e técnicas necessárias para tornar o lançamento válido, metragem do alcance máximo atingido pelo dardo utilizando fita métrica e captação da ação por meio de celulares equipados com câmera habilitadas para foto e vídeo. A Figura 04 mostra o registro de um lançamento realizado por um dos participantes.

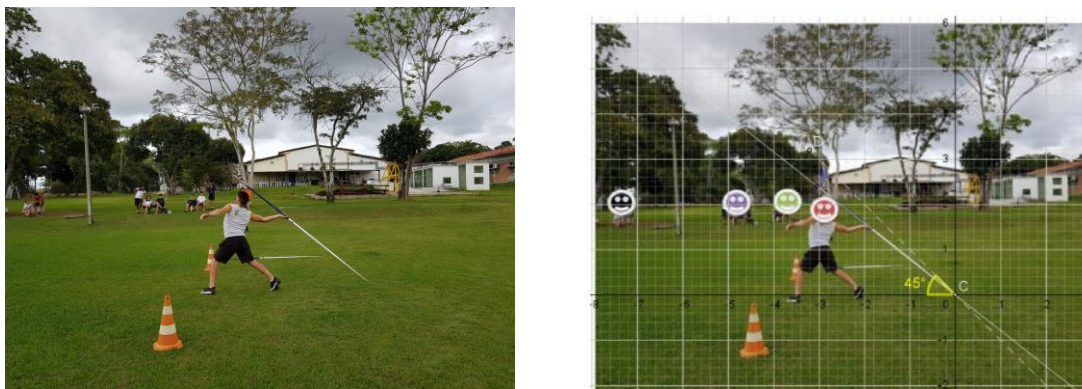


(e) Figura 04 – Praticando a técnica do Lançamento de dardo/Lançamento não válido pelo grupo  
Fonte: Arquivo dos pesquisadores

O lançamento do dardo não obteve o alcance máximo, pois a combinação entre ângulo de partida, altura e a velocidade não foram aplicados corretamente, conforme orientação teórica. Com auxílio do software de geometria dinâmica *Geogebra*, foi possível realizar a inserção da figura no plano cartesiano da janela de visualização e traçar o ângulo de partida/saída do dardo.

Ao final da prática de lançamentos de dardos, os estudantes foram orientados a escolher somente dois (02) dentre os lançamentos validados de acordo com as regras/técnicas da modalidade. Foram priorizados lançamentos válidos de menor e maior alcance, medidos com auxílio de fita métrica, atingido pelo dardo para realizar a análise investigativa minuciosa por meio de orientações específicas do professor de Matemática.

Na Figura 05, exibimos um registro de um lançamento validado por um dos grupos. É válido ressaltar que o lançamento obteve a altura e a velocidade desejadas, possibilitando que o dardo percorresse uma distância mais elevada (alcance maior).



(f) Figura 05 – Aperfeiçoamento da prática / Lançamento considerado válido pelo grupo  
Fonte: Arquivo dos pesquisadores

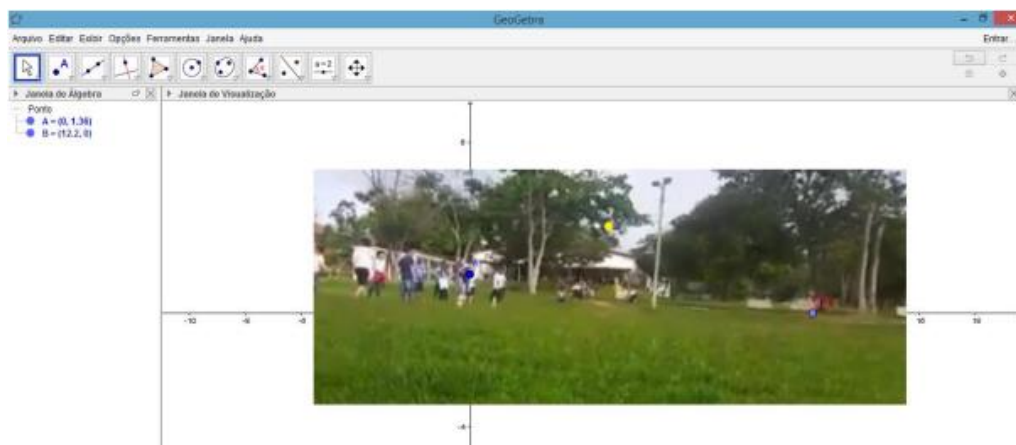
Note que, o lançamento foi validado, pois o estudante aplicou as técnicas/regras adequadas e o ângulo de partida/saída do lançamento foi próximo do ângulo ideal. Com auxílio do *Geogebra*, foi possível observar que o ângulo de lançamento está mais próximo de  $45^\circ$ , tornando a execução do movimento mais próxima do padrão teórico esperado.

### 2.3. Etapa 3 – Investigação do modelo matemático da trajetória do dardo

A investigação realizada consistiu no modelo matemático que melhor descrevia a trajetória do dardo com o auxílio do *Geogebra*. Os modelos matemáticos estudados foram: linear, parabólico, exponencial, logarítmico e modular, cuja escolha deu-se por serem conceitos já estudados pelos estudantes.

A modelagem foi realizada no laboratório de informática. De forma individual, cada grupo editou a gravação dos dois lançamentos considerados válidos realizado na etapa anterior. Para isso, destacaram, preferencialmente, três pontos da curva realizada pela trajetória do dardo. Por meio de orientação do professor de Matemática, os estudantes realizaram os seguintes procedimentos que auxiliaram na escolha dos três pontos para a análise do modelo matemático: ponto inicial de partida do dardo; ponto localizado antes do dardo atingir a altura máxima; ponto próximo ou exatamente correspondente a altura máxima; ponto localizado depois de atingir a altura máxima; ponto alinhado com o ponto inicial de partida do dardo; ponto de intersecção com o solo. Na figura 06, ilustramos a inserção do arquivo imagem modificado com os três pontos escolhidos a partir das orientações do professor de Matemática.





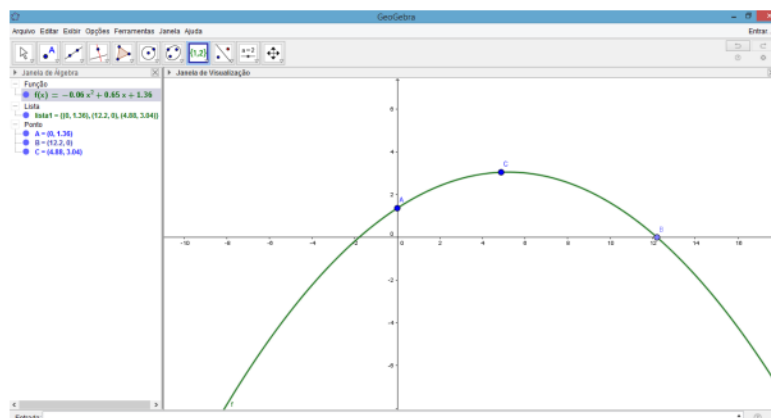
(g) Figura 06 – Escolha de pontos nos lançamentos válidos  
 Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Houve a necessidade de relembrar os modelos estudados e, a partir dessa revisão, em que destacamos principalmente as representações gráficas, os estudantes compararam tais modelos com a curva percorrida pelo dardo e conjecturaram que o mesmo seria um arco parabólico.

Ao serem questionados pelo professor de Matemática sobre o método para a obtenção dos coeficientes da lei de formação de uma função polinomial do 2º grau, a partir do conhecimento das coordenadas de três pontos, os estudantes apontaram que havia necessidade de substituir as coordenadas dos três pontos na lei de formação obtendo assim um sistema linear com três equações e três incógnitas. Diante disso, o docente destacou que se sistema linear fosse possível e determinado (SPD), a solução seria única, isto é, haveria um único valor para cada coeficiente (a, b e c).

A partir dessa discussão, o professor de Matemática elaborou uma proposição que foi enunciada considerando o conhecimento da lei de associação da função quadrática dada por  $f(x) = ax^2 + bx + c$  de domínio real e de tal modo que o gráfico de  $f$  passasse pelos três pontos (A, B e C) de coordenadas conhecidas:  $A = (x_A; y_A)$ ,  $B = (x_B; y_B)$  e  $C = (x_C; y_C)$ .

A intervenção feita foi providencial para que os estudantes desenvolvessem a terceira etapa do trabalho, ou seja, obter a lei de formação da função quadrática para cada um dos dois lançamentos escolhidos para análise investigativa.

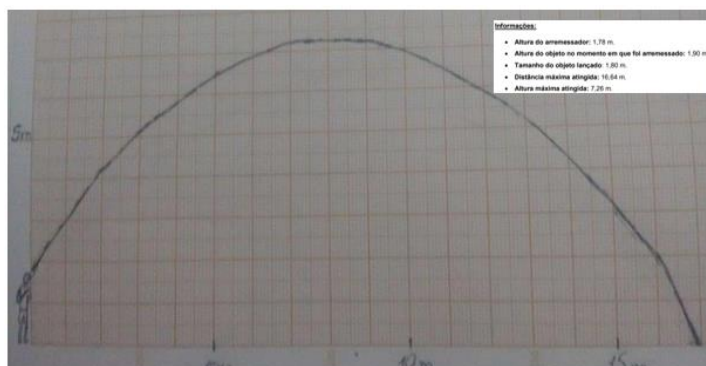


(h) Figura 07 – Constatação parabólica da trajetória dada por três pontos  
 Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Para concretizar a investigação, o professor de Matemática solicitou que os estudantes digitassem a lei de formação obtida no campo de entrada da janela de álgebra do *Geogebra* com o intuito de fazer com que os estudantes percebessem que a parábola exibida pelo software continha os três pontos escolhidos da trajetória do dardo, como pode ser observado na Figura 07.

#### 2.4. Etapa 04 – Construção de esboço gráfico no papel milimetrado

A quarta etapa foi proposta como atividade complementar para ser resolvida conforme a o tempo de disponibilidade dos estudantes em cada grupo. Para cada um dos dois lançamentos selecionados na segunda etapa, o grupo deveria construir um esboço gráfico no papel milimetrado, com escala adequada (que aproximasse, ao máximo, o desenho dos dados reais). Na figura 08, ilustramos um dos esboços produzidos por um dos estudantes.



(i) Figura 08 – Esboço milimetrado do lançamento feito por um dos estudantes  
 Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Por meio desta etapa, foi possível desenvolver com os estudantes a conexão matemática envolvendo conceitos de sistema de medidas utilizando a unidade padrão (metro) e de escala. De acordo com relatos dos estudantes, foi necessário cerca de 50 minutos para a produção do esboço.

## 2.5. Etapa 5 – Construção de uma animação simulatória

A referida etapa foi proposta como uma atividade complementar para ser resolvida. A partir de um questionamento de um estudante sobre a reprodução da situação prática por meio de um desenho animado, a atividade foi sugerida. O principal objetivo consistiu na criação de um *gif* animado utilizando algum aplicativo, preferencialmente gratuito, disponível (por exemplo, FlipCap). Na figura 09, destacamos três momentos printados de um dos *gifs* animados (sucessivas imagens projetadas numa tela com a sensação de movimento contínuo) elaborado por um dos grupos.



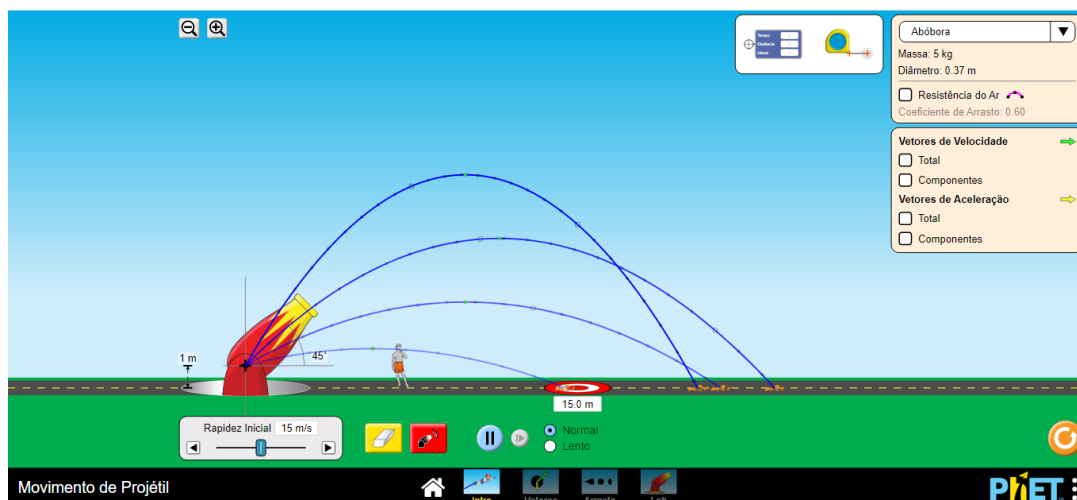
(j) Figura 09 – Print do *gif* animado  
Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Esta atividade além de articular os conceitos de trajetória parabólica possibilita um trabalho interdisciplinar com a disciplina de Arte.

## 2.6. Etapa 6 – Simulação interativa virtual

Com o intuito de mostrar que havia relação entre a medida do alcance atingido pelo primeiro toque da ponta da lança no chão e o ângulo de partida/saída do dardo, os estudantes foram conduzidos até o laboratório de informática. Neste ambiente, realizaram a manipulação de um simulador interativo virtual reproduzindo, de forma hipotética e semelhante ao procedimento de lançamento de dardo, o lançamento oblíquo de uma bala de canhão. Nesse simulador, é possível alterar a altura inicial de partida, a velocidade inicial do lançamento e ângulo de saída do dardo.

Os estudantes foram orientados a escolher uma velocidade inicial de lançamento e a admitir uma altura inicial para o lançamento do projétil, pois no lançamento do dardo há velocidade inicial de impulso e um desnível em relação ao solo. Além disso, receberam a orientação de promover variações na medida do ângulo de partida do lançamento.



(k) Figura 10 – Simulação on-line do lançamento oblíquo

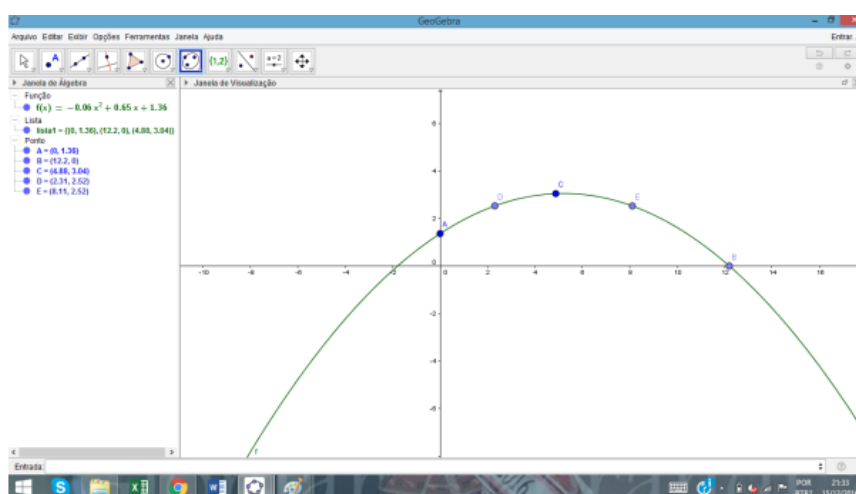
Fonte: Disponível em [https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion\\_pt\\_BR.html/](https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_pt_BR.html/) Acessado em 16/08/2016

Na figura 10, foram utilizadas os seguintes parâmetros para as três variáveis (velocidade, desnível e ângulo). A velocidade inicial de 15 m/s (54 km/h) foi escolhida para que o alcance máximo não ficasse fora da janela de visualização. Foi inserido um desnível inicial de 1 metro, já que o simulador possui graduação de desnível em quantidade inteiras de escala unitária e por ser uma altura média do braço dos estudantes em relação ao solo. E por fim, foram testados variados valores para o ângulo de partida (de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ ).

O professor de Matemática abriu a discussão sobre quais elementos poderiam impactar na mudança do alcance atingido pelo projétil. Desse modo, os estudantes fixaram duas variáveis e fizeram variar a terceira. Com isso, concluíram que o ângulo de partida/saída do dardo, mantendo fixa a altura e a velocidade inicial, era o fator determinante para a obtenção do alcance máximo do projétil. Após realizar inúmeras tentativas, os estudantes conseguiram conjecturar, inferir experimentalmente, que o alcance máximo do projétil aconteceria quando a medida desse ângulo ideal fosse  $45^\circ$ .

## 2.7. Etapa 7 – Ratificando a trajetória percorrida pelo dardo utilizando o comando “Cônica definida por 05 pontos” do *Geogebra*

Após a realização das simulações, cada grupo deveria cumprir a sétima etapa que consistia em utilizar o comando *Cônica definida por 05 pontos* para confirmar ou refutar que a trajetória da curva percorrida pelo dardo era um arco parabólico. Para isso, obrigatoriamente, foi necessário escolher cinco pontos quaisquer da trajetória de cada um dos lançamentos válidos selecionados nas etapas anteriores.



(1) Figura 11 – Confirmação, via *Geogebra*, de que a trajetória do dardo é um arco parabólico  
Fonte: Arquivos dos pesquisadores

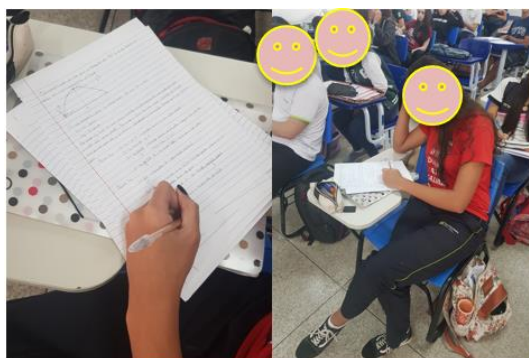
A partir disso, os participantes concluíram que o gráfico da função obtida na terceira etapa era, de fato, uma cônica particular denominada de parábola. Na figura 11, ilustramos a ação desenvolvida por um dos grupos.

## 2.8. – Etapa 8 – Demonstração sistemática da existência de uma medida ideal para o ângulo de partida que proporciona alcance máximo do dardo

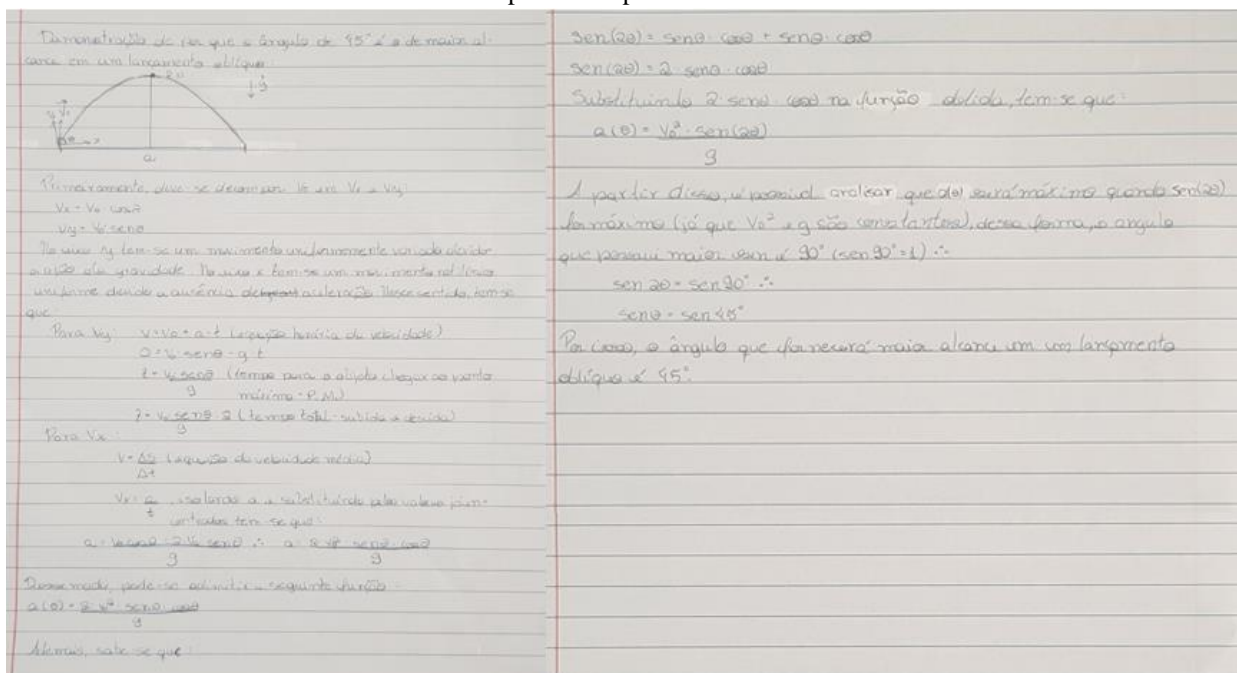
Durante a primeira etapa, em que foi exibida a apresentação teórica do lançamento de dardo, o professor de Educação Física citou a pesquisa realizada Hubbard e Alaways (1989), nos quais descreveram que a fase final dos lançamentos obtidos com ângulos próximos de  $45^\circ$  alcançaram velocidades e alturas superiores, possibilitando que o dardo percorra uma distância mais elevada.

Com o intuito de comprovar os dados da pesquisa, os estudantes foram desafiados a obter a demonstração de que o alcance máximo atingido pelo dardo ocorre quando a medida do ângulo de partida/saída é igual a  $45^\circ$ .

Para a concretização dessa etapa, houve a necessidade de dois encontros de 50 minutos cada. No primeiro encontro, foram definidas as equações do estudo de lançamento oblíquo. Após a apresentação das equações do lançamento oblíquo e as devidas sugestões de substituições, o professor fez a solicitação de que cada grupo tentasse modelar a função matemática que descrevesse a trajetória do dardo. Dentre as demonstrações apresentadas para provar a conjectura de que o ângulo ideal de partida deveria medir  $45^\circ$ , destacamos nas Figuras 12 e 13, a solução elaborada por uma estudante (Ana Luiza).



(m) Figura 12 – Demonstração que  $45^\circ$  fornece alcance máximo  
Fonte: Relatório produzido pela estudante Ana Luiza



(n) Figura 13 – Demonstração que  $45^\circ$  fornece alcance máximo  
Fonte: Relatório produzido pela estudante Ana Luiza



A partir da análise da demonstração realizada pela estudante, é possível notar a riqueza de detalhes e o rigor matemático empregado na solução. Além disso, é possível perceber que houve a necessidade de decompor o vetor velocidade em duas direções (vertical e horizontal). É válido ressaltar que somente na direção vertical há ação da aceleração da gravidade com movimento uniformemente variado retrógrado (velocidade e aceleração com direções contrárias).

Note que, o tempo que o dardo gasta para atingir a altura máxima representa a metade do tempo total do trajeto até retornar a linha de altura em que o dardo foi lançado. A partir dessas observações e da substituição na equação horária da velocidade, encontrava-se o tempo total (dobro do tempo de subida) que seria utilizado em conjunto com a componente horizontal para encontrar o alcance por meio de um equação horária do movimento uniforme (não há atuação da gravidade na componente horizontal). Para concluir a modelagem matemática que fornece o alcance em função do ângulo de partida/saída do dardo, foi necessário aplicar a identidade trigonométrica relativa ao seno do arco duplo.

Assim, pode-se escrever a equação do alcance ( $a$ ) em função do ângulo ( $\theta$ ), a partir do conhecimento dos valores da velocidade inicial ( $v_0$ ) e da aceleração da gravidade ( $g$ ), dada por:

$$a(\theta) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \text{sen}(2\theta)$$

Observando que a velocidade inicial e a aceleração da gravidade são constantes reais, o alcance será maximizado quando a função senoidal atingir valor máximo. Isto é, ocorre quando  $\text{sen}(2\theta) = 1$  e, conseqüentemente,  $(2\theta) = 90^\circ$ . Portanto,  $\theta = 45^\circ$ .

### **Considerações Finais**

A referida atividade interdisciplinar propiciou aos estudantes a aplicação de conceitos de Matemática (particularidades da função quadrática e da trigonometria) e Física (lançamento oblíquo) numa situação concreta e simultaneamente estimulou a participação efetiva dos alunos nas aulas de atletismo (modalidade de lançamento de dardo) proposta na disciplina de Educação Física. As atividades interdisciplinares podem contribuir para melhorar o ensino/aprendizagem e gerar novos significados uma vez que há a interação entre áreas das Ciências.

Foi possível notar que os estudantes tornaram-se agentes transformadores do próprio conhecimento. Além disso, ficaram motivados diante das atividades propostas. Não houve

objeção quanto ao trabalho realizado, mas sim, curiosidade, desenvolvimento de novas habilidades e promoção de interesse por novos aprendizados. Durante o desenvolvimento da atividade, houve engajamento na disciplina de Educação Física, em especial na prática das modalidades de atletismo. Inclusive, um dos estudantes demonstrou um desempenho considerável ao ponto de se destacar na modalidade de lançamento de dardo do Jifes.

A proposta de utilização de tecnologias digitais (Geogebra, FlipCap, Simuladores online) promoveu o interesse por parte dos estudantes em se aprofundar no estudo de desenvolvimento e manuseio de aplicativos disponíveis, estudo de modelagem matemática e autonomia na busca por relações interdisciplinares com as demais áreas do conhecimento.

Este relato aponta para outras tarefas que podem ser investigadas, tais como os conceitos da *cinesiologia* (estudo dos movimentos do corpo humano), os tópicos associados ao estudo de lançamento oblíquo na disciplina de Física e as propriedades atreladas à Matemática do Ensino Médio (sistemas lineares, funções trigonométricas e geometria analítica).

## Referência

FIORENTINI, D.; FREITAS, M. T. M. Investigar e escrever na formação inicial do professor de matemática. In: FIORENTINI, DARIO, et. Al. (Org.) **Práticas de formação e de pesquisa de professores que ensinam matemática**. Campinas, São Paulo: Mercado de Letras, 2009. P. 77-99.

HUBBARD, M., & ALAWAYS, L. W. (1989). **Rapid and accurate estimation of release conditions in the javelin throw**. Journal of Biomechanics, 22(6-7), 583-595.

SILVA, J. C. T.; LEMOS, A. F. Entre a matemática e o inglês: práticas multidisciplinares na escola. In: FRANCISCO, E. C.; LEMOS, A. F. (Org.) **Interdisciplinaridade: pesquisa e ensino**. São Carlos, São Paulo: Pedro & João Editores, 2019. p. 133-149.

SKEMP, R. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics Teaching**, n. 77, p. 20-26, 1976.

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. **Bolema**. Ano 13, n.14, 2000. p. 66-91.

Recebido em: 30 de agosto de 2021

Aprovado em: 29 de abril de 2022