



Revista Eletrônica  
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664  
v. 23, n. 1, jul. 2023  
Artigo de Iniciação Científica

**Francisco Regis Vieira Alves**  
Instituto Federal de Educação  
Ciência e Tecnologia do Estado  
do Ceará  
e-mail: [regis@gmx.fr](mailto:regis@gmx.fr)

**Renata Passos Machado Vieira**  
Universidade Federal do Ceará  
e-mail: [re.passosm@gmail.com](mailto:re.passosm@gmail.com)

**Paula Maria Machado Cruz  
Catarino**  
Universidade de Trás-os-  
Montes e Alto Douro  
e-mail: [pcatarino23@gmail.com](mailto:pcatarino23@gmail.com)

**Elen Viviani Pereira Spreafico**  
Universidade Federal do Mato  
Grosso do Sul  
e-mail: [elen.spreafico@ufms.br](mailto:elen.spreafico@ufms.br)

## Abordagem combinatória para a Sequência Fibonacci, Tribonacci, Tetranacci, Pentanacci,... etc e a noção de Tabuleiro

A combinatorial approach for the Fibonacci, Tribonacci, Tetranacci, Pentanacci, etc. and the board's notion.

### Resumo

Depois dos anos 60, conseguimos registrar o incremento do vigor científico e o interesse de inúmeros pesquisadores de vários países em torno de propriedades generalizadas da Sequência de Fibonacci. No cotejo dos métodos e abordagens diferenciadas que resultam na generalização de propriedades visando o estudo desta e de outras sequências recorrentes, encontramos no cenário da abordagem combinatória um componente que preserva um viés heurístico e intuitivo. Diante deste cenário, o presente trabalho discute propriedades combinatórias relacionadas com a Sequência de Fibonacci e outras sequências, na medida em que aumentamos, na relação de recorrência, a quantidade de seus termos antecedentes. Assim, o leitor poderá constatar propriedades e teoremas relacionados com as sequências Tribonacci, Tetranacci, Pentanacci, etc., inclusive suas correspondentes representações polinomiais significadas por intermédio da noção de tabuleiro.

**Palavras-chave:** Sequência de Fibonacci. Abordagem combinatória. A noção de tabuleiro. Representações polinomiais.

### Abstract

After the sixties, we were able to register the increase in scientific vigor and the interest of numerous researchers from various countries around generalized properties of the Fibonacci Sequence. In the comparison of different methods and approaches that result in the generalization of properties aiming the study of this and other recurrent sequences, we find in the combinatorial approach scenario a component that preserves a heuristic and intuitive bias. Given this scenario, the present work discusses combinatorial properties related to the Fibonacci Sequence and other sequences, as we increase, in the recurrence relation, the number of its antecedent terms. Thus, the reader will be able to verify properties and theorems related to the sequences Tribonacci, Tetranacci, Pentanacci, etc., including their corresponding polynomial representations signified through the notion of board.

**Keywords:** Fibonacci sequence. Combinatorial approach. The board notion. Polynomial representation.

Artigo recebido em maio 2022 e aceito em maio 2023



Este artigo está licenciado com uma Licença Creative Commons Attribution 4.0 International, podendo ser usado, distribuído e reproduzido, sem restrições, desde que o trabalho original seja devidamente citado.

# 1 Introdução

A sequência de Fibonacci, sobretudo, depois dos anos 60 (GOULD, 1981), motivou o interesse de inúmeros especialistas em vários países. Não obstante, quando consultamos alguns livros de História da Matemática, de forma invariante, deparamos um expediente que costuma exaltar um viés anedótico e com maior atenção destinada à curiosidade que, de forma correspondente, relega o saber matemático para um segundo plano. Para exemplificar, Gullberg (1997) desenvolve uma crítica de abordagens que costumam evidenciar a história que tornou popular um problema formulado por Leonardo Pisano, sobre os ‘coelhos imortais’ (Figura 1), cujas propriedades numéricas e aplicadas já eram conhecidas bem antes dele (SINGH, 1985).

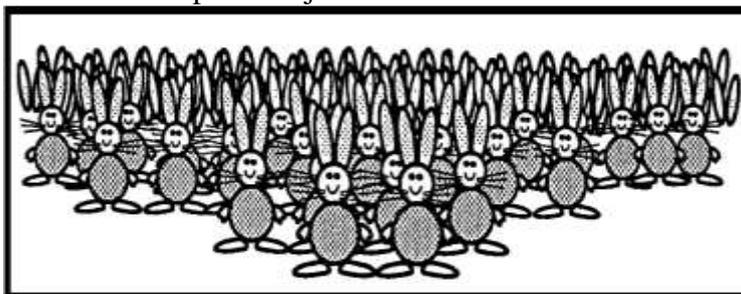


Figura 1: Gullberg (1997) discute o problema da produção dos ‘coelhos imortais’ e outras abordagens anedóticas presentes em livros de História da Matemática. Fonte: Gullberg (1997).

Por outro lado, se mostra imprescindível compreender determinados vestígios históricos que motivam um processo epistemológico e evolutivo de determinados objetos matemáticos (ALVES, 2017) e, de um modo amplo, determinadas teorias matemáticas. Para exemplificar, na Figura 2, Feinberg (1963) discute um modelo biológico, cujos exemplos para o caso de Fibonacci podem ser encontrados em profusão, todavia, correlacionado com a sequência Tribonacci, cuja relação pode ser descrita pela relação  $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}, n \geq 3$ . Ademais, Feinberg (1963) questiona em seu trabalho a terminologia “*Tree-bonacci*” se haveria uma relação entre a sequência de Tribonacci com as ramificações dos galhos de uma árvore, assim como ocorre com a sequência de Fibonacci. O termo Tribonacci é simplesmente devido ao fato de que a relação de recorrência é formada pelos três termos anteriores.

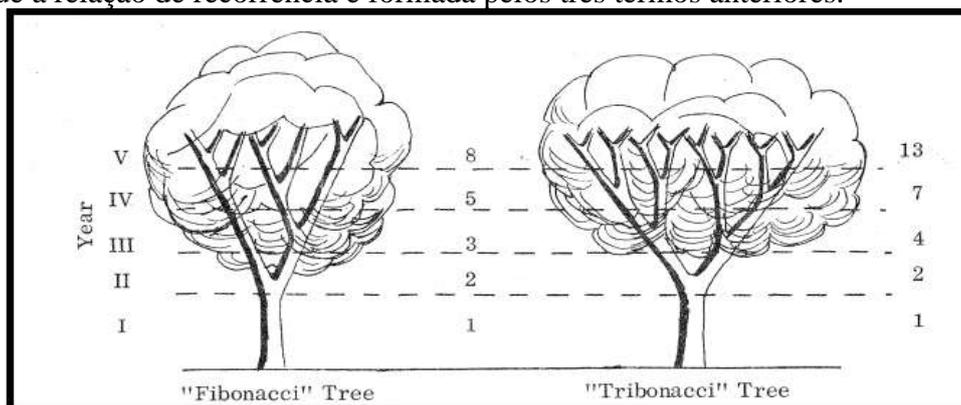


Figura 2: Feinberg (1963) introduziu, de forma pioneira, a generalização da Sequência de Fibonacci e vestígios de sua manifestação na natureza, como no caso da ‘Tree – bonacci’. Fonte: Feinberg (1963).

De forma geral, podemos constatar que o interesse por diversas formas de abordagem e generalização de sequências numéricas recorrentes e, com lugar de destaque, pela generalização da Sequência de Fibonacci (HOGGATT; LIND, 1969) preserva um amplo vigor e contemporaneidade. De modo particular, identificamos o emprego de inúmeras noções e modelos

combinatórios que permitem interpretar e descrever tais relações. Diante desse contexto, nas seções subsequentes, buscaremos responder ao seguinte questionamento: Considerando a Sequência de Fibonacci e suas formas de generalização (Tribonacci, Tetranacci, Pentanacci, etc.), que propriedades combinatórias permitem formas diferenciadas de sua interpretação?

Com o escopo de responder, pelo menos em parte, o questionamento anterior, exploraremos a noção de tabuleiro e outras noções originadas da combinatória que possuem um viés significativamente heurístico e intuitivo e, por fim, alguns exemplos sobre a pesquisa atual.

## 2 Abordagem combinatória para a Sequência de Fibonacci

De modo geral, podemos constatar o vigor da pesquisa contemporânea em torno do estudo de sequências numéricas recorrentes e suas inúmeras formas de abordagens e de generalização (GRIMALDI, 2012; LAGRANGE, 2013) que, de modo recorrente, costuma ser negligenciada pelos autores de livros de História da Matemática (GRIMALDI, 2012; STILLWELL, 2010). A relação de recorrência que permite determinar os números de Fibonacci é definida pela seguinte relação:  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ,  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ . Em seguida, assumiremos o interesse em calcular o número de ladrilhamentos possíveis em um tabuleiro do tipo  $1 \times n$  (ver Figura 3), com dois tipos de ladrilhos: um ladrilho  $1 \times 1$  na cor branca e um ladrilho (dominós)  $1 \times 2$  na branca. Um  $n$ -tabuleiro unidimensional é indicado abaixo. Todavia, iremos empregar o expediente discutido por Brigham, Caron, Chinn e Grimaldi (1997), quando definem a seguinte recorrência auxiliar:  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ,  $f_0 = 1$ ,  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = 2$ . Claramente, por intermédio de uma mudança na ordem dos índices, obtemos a relação  $f_i = F_{i+1}$ ,  $i \geq 0$ .

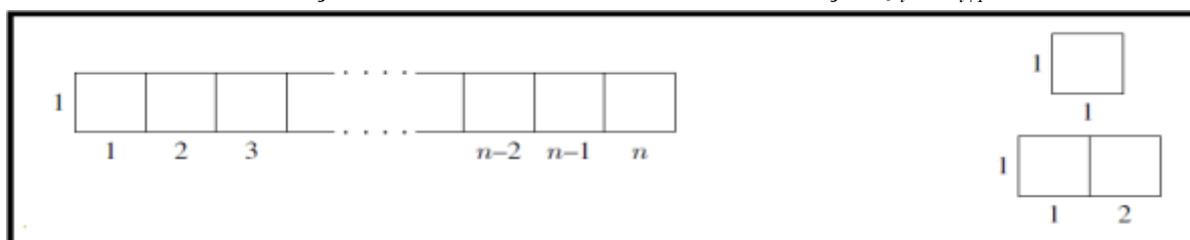


Figura 3: Benjamin e Quinn (2003b) fornecem uma interpretação heurística sobre a noção de  $n$ -tabuleiro. Fonte: Benjamin e Quinn (2003b).

Ademais, para efeito de introdução de maior rigor envolvendo determinados termos e expedientes a serem empregados, apoiamos nossa argumentação nos trabalhos de Benjamin e Quinn (2003b) e Spreafico (2014), quando descrevem a noção de um  $n$ -tabuleiro, mediante a formulação de uma definição e, logo a seguir, suas propriedades combinatórias com a sequência de Fibonacci, como indicaremos logo no Teorema 1.

**Definição 1:** (*Tabuleiro*). O tabuleiro é uma formação de quadrados denominados por casas, células ou posições. Essas posições são enumeradas e essa enumeração descreve a posição. Um tal tabuleiro será chamado apenas de  $n$ -tabuleiro (SPREAFICO, 2014).

**Teorema 1:** A quantidade de maneiras de se cobrir um tabuleiro  $1 \times n$  com quadrados  $1 \times 1$  e dominós  $1 \times 2$  é igual a  $f_n = F_{n+1}$  (SPIVEY, 2019).

Demonstração: Vamos definir como  $f_n$  como o número de maneiras de cobrir um tabuleiro  $1 \times n$  com quadrados  $1 \times 1$  e dominós  $1 \times 2$ . Para um  $1$ -tabuleiro do tipo  $1 \times 1$  utilizamos um quadrado  $1 \times 1$ , isto é, temos  $f_1 = 1 = F_2 = F_{1+1}$ . Para um  $2$ -tabuleiro teremos duas coberturas possíveis, com dois quadrados ou com um dominó  $1 \times 2$ . Neste caso, reparamos que  $f_2 = 2 = F_3 = F_{2+1}$ . Em seguida, quando consideramos  $f_n$ , visando cobrir um tabuleiro  $1 \times n$ , teremos apenas duas possibilidades, a saber: (i) um conjunto de parti-

ções cuja primeira peça é justamente um quadrado  $1 \times 1$ ; (ii) um conjunto de partições cuja primeira peça é justamente um retângulo  $1 \times 2$ . Se ocorrer (i), isto é, a primeira peça é um quadrado, então as demais posições  $(n-1)$  restantes devem corresponder a  $f_{n-1} = F_n$ . Com o mesmo raciocínio, se ocorrer (ii), isto é, as demais posições  $(n-2)$  restantes devem corresponder ao termo  $f_{n-2} = F_{n-1}$ . Para considerar o conjunto  $f_n$  como o número total de maneiras de cobrir completamente um tabuleiro unidimensional  $1 \times n$ , por um princípio aditivo, somaremos  $f_n = (f_{n-1} + f_{n-2}) = F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ ,  $n \geq 1$ . ■

Benjamin e Quinn (2003b) introduzem, ainda, uma outra noção, a partir do exame do comportamento de ladrilhamento que indicamos a seguir. Podemos visualizar que, para determinadas posições o 10 – tabuleiro é ‘quebrável’ e em outras é ‘inquebrável’. Com efeito, para exemplificar, entre a posição 3 e 4 é quebrável e, conforme a Figura 4, podemos identificar dois novos ladrilhamentos. Logo, a seguir, na Definição 2, apresentamos uma definição formal sobre o processo há pouco descrito em um caso particular.

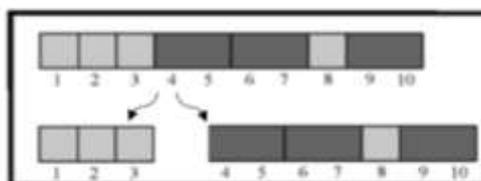


Figura 4: Benjamin e Quinn (2003b) introduzem a noção de ladrilhamento ‘quebrável’ e ‘inquebrável’. Fonte: Benjamin e Quinn (2003b).

**Definição 2:** (Ladrilhamento quebrável e inquebrável) Um  $n$  – tabuleiro se denomina como quebrável na posição ‘k’ se puder ser dividido em dois ladrilhamentos, de modo que o primeiro cobre as posições de ‘1’ até ‘k’, e outro ladrilhamento cobre as posições de ‘k+1’ até ‘n’. De outro modo, dizemos que o ladrilhamento é inquebrável, (BENJAMIN; QUINN, 2003b, p. 3).

Resgataremos agora uma identidade clássica:  $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$ ,  $m \geq 1, n \geq 1$  (SPIVEY, 2019). Seguindo os argumentos de Benjamin e Quinn (2003b) passaremos a considerar um  $n+m$  – tabuleiro e buscamos responder à pergunta: Com quantos ladrilhamentos  $f_{n+m}$  conseguimos preencher tal tabuleiro?

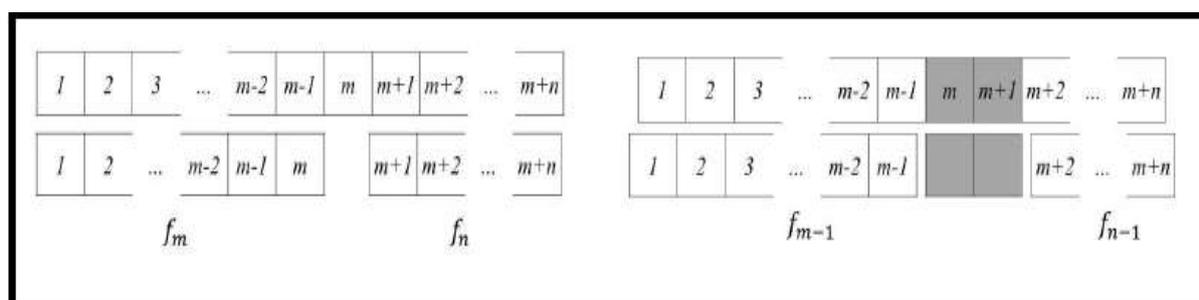


Figura 5: Benjamin e Quinn (2003b) demonstram algumas identidades com o recurso do modelo combinatório e a noção de  $n$  – tabuleiro. Fonte: Benjamin e Quinn (2003b).

**Teorema 2:** Para  $m, n \geq 1$  a quantidade de maneiras de se cobrir um  $m+n$  – tabuleiro com quadrados  $1 \times 1$  e dominós  $1 \times 2$  é igual a  $F_{m+n} = F_{m+1} F_n + F_m F_{n-1}$ ,  $m \geq 1, n \geq 1$ . (BENJAMIN; QUINN, 2003b).

Demonstração: Os autores Benjamin e Quinn (2003b) separam em dois casos: (i) se o  $m+n$  – tabuleiro é quebrável na posição ‘m’; (ii) se o  $m+n$  – tabuleiro não é quebrável na posição ‘m’. Na Figura 5, no lado esquerdo divisamos quando ocorre o caso (i) e, ao lado direito o



caso (ii). Em seguida, consideramos se ocorrer o caso (i) então, na posição  $(m-1, m)$  deve ocorrer um quadrado  $1 \times 1$  e, em seguida, separamos dois tabuleiros. O primeiro trata-se de um  $m$ -tabuleiro, enquanto que, o segundo, com início na posição  $(m+n-1, m+n)$  trata-se de um  $n$ -tabuleiro. De imediato, sabemos que  $f_m$  corresponde ao número de formas de ladrilhar o 1º tabuleiro, enquanto que  $f_n$  corresponde ao número de formas de ladrilhar o 2º tabuleiro, por um princípio fundamental da Contagem, existem  $f_m \times f_n$  formas de ladrilhar o  $m+n$ -tabuleiro. No segundo caso, prosseguindo com o argumento dos autores Benjamin e Quinn (2003b) deve ocorrer um dominó na posição  $(m, m+1)$  e, conseqüentemente, o tabuleiro será quebrável nas posições  $m-1$  e  $m+2$ . Passamos, então, a desconsiderar (retirar) o dominó correspondente, restando, assim, um  $m-1$ -tabuleiro e o outro um  $n-1$ -tabuleiro. Mais uma vez, por um argumento em contagem, determinamos  $f_{m-1} \times f_{n-1}$  como sendo a quantidade total de formas de ladrilhar o tabuleiro  $m+n$ -tabuleiro, para o segundo caso. Por fim, contamos, aditivamente e de forma independente, todas as contribuições, da forma:  $f_{m+n} = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}$ . Para concluir, vamos considerar, tendo em vista o Teorema 1, que vale  $F_{m+n} = f_{m+n-1} = f_{m+(n-1)} = f_m f_{n-1} + f_{m-1} f_{n-2} = F_{m+1} F_n + F_m F_{n-1}$ ,  $m \geq 1, n \geq 1$ . ■

**Definição 3:** Considerando dois  $n$ -tabuleiros, definiremos a ‘cauda’ de tabuleiros como sendo as peças que ocorrem após a última falha (BENJAMIN; QUINN, 2003b).

Logo na sequência, apresentamos o Teorema 3 que envolve uma outra identidade clássica, recorrentemente discutida no estudo amplo de generalização de seqüências recursivas e atribuída ao matemático italiano Giovanni Domenico Cassini (1625 – 1712). Em sua demonstração, empregaremos uma técnica denominada de “*tail swapping*” (troca de cauda).

**Teorema 3:** Para  $n \geq 0$ . Então  $f_n^2 = f_{n+1} f_{n-1} + (-1)^n$  (Identidade de Cassini).

**Demonstração:** De forma geral, passaremos a considerar dois  $n$ -tabuleiros, de sorte que, o primeiro enumerado com células de 1 até  $n$  e o segundo com células enumeradas de 2 até  $n+1$ . De modo geral, se ocorrer uma falha na posição ‘i’, na condição em que ambos os tabuleiros sejam quebráveis na posição ‘i’, isto é, não ocorram dominós, então, a técnica do “*tail swapping*” (troca de cauda) poderá ser empregada. Na etapa seguinte, quando consultamos a Figura 6, ao lado direito, deslocamos os mesmos, considerando uma célula. Para verificar a identidade de Cassini, de modo geral, o expediente envolverá em determinar dois novos tabuleiros: um  $n+1$ -tabuleiro e um  $n-1$ -tabuleiro. Com efeito, na Figura 6 ao lado esquerdo auxiliará em contar a quantidade de dois ladrilhos, independentes um do outro, por conseguintes, sabemos que  $f_n$  para cada tabuleiro e, por um princípio da contagem, segue que  $f_n \times f_n = f_n^2$ . Agora, para determinar uma contagem que corresponde à expressão  $f_{n+1} f_{n-1} + (-1)^n$  consideraremos dois casos: (a) se  $n$  for par; (b) se  $n$  for ímpar. Se ocorrer o item (a) se  $n$  for par e, além disso, todos os ladrilhos são dominós, então não poderemos realizar um “*tail swapping*” (troca de cauda). Mas, se ocorrer pelo menos um quadrado, então, teremos pelos menos uma falha garantida em uma posição ‘i’. Considerando, então, esta falha na posição ‘i’, trocaremos as caudas de ambos, sem desconsiderar a posição deslocada do tabuleiro inferior. Realizado o procedimento, devemos determinar dois novos tabuleiros: um  $n+1$ -tabuleiro (na parte superior) e um  $n-1$ -tabuleiro (na parte inferior). Em seguida, passamos a repetir o princípio combinatório anterior, para ambos independentes um do outro, isto é, determinamos  $f_{n+1} f_{n-1}$ . Não obstante, recordamos que, acrescentaremos um caso particular dos ladrilhos apenas com dominós, resulta então na expressão

$f_{n+1}f_{n-1} + 1 = f_{n+1}f_{n-1} + (+1)^{par}$ . Agora, se ocorrer o item (b) se  $n$  for ímpar, quando examinarmos, de novo todas as possibilidades iniciais de ladrilhamentos  $f_n \times f_n$  então, necessariamente, não pode ocorrer ladrilhos preenchidos completamente por dominós (pois  $n$  é ímpar!). Por conseguinte, todo ladrilhamento possuirá pelo menos um quadrado e, poderemos determinar pelo menos uma falha. Uma vez identificada a posição da falha, empregaremos a técnica do “tail swapping” (troca de cauda), determinando, de forma precisa, um  $n + 1$  - tabuleiro (na parte superior) e um  $n - 1$  - tabuleiro (na parte inferior), com ambos de ordem  $n + 1$  e  $n - 1$  pares. Efetuaremos nova contagem de todas as possibilidades  $f_{n+1}f_{n-1}$  mas, recordando que estamos no caso em que não podem ocorrer ladrilhos preenchidos completamente por dominós e, neste caso, excluiremos o caso, considerando a expressão  $f_{n+1}f_{n-1} - 1 = f_{n+1}f_{n-1} + (-1)^n$ ,  $n$  ímpar. Considerando, por fim, com amparo dos casos (a) e (b) determinaremos a identidade de Cassini  $f_n^2 = f_{n+1}f_{n-1} + (-1)^n$ , para  $n \geq 0$ . ■

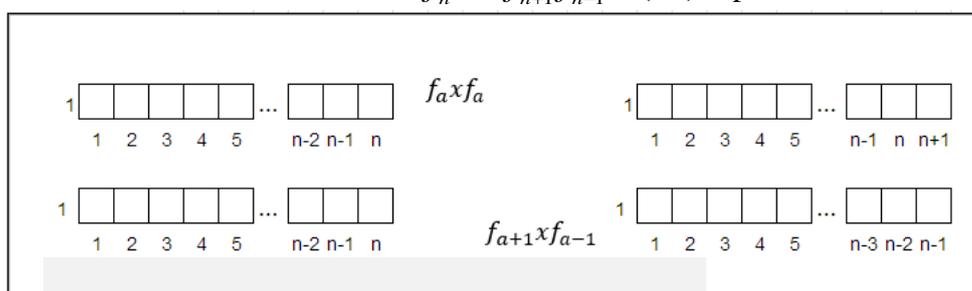


Figura 6: Demonstração da identidade de Cassini via tabuleiro (Adaptado pelos autores). Fonte: Benjamin e Quinn (2003b).

Antes de finalizarmos a seção atual, se mostra imprescindível assinalar que, diante dos limites de um trabalho científico, optamos por não examinar outras propriedades combinatórias e/ou identidades mais gerais envolvendo a Sequência de Fibonacci e que podem ser demonstradas, por um processo semelhante, com o expediente de argumentos combinatórios (KOSHY, 2001; 2019), como por exemplo  $\sum_{i=0}^n f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$ ,  $n \geq 0$ . Ao leitor mais interessado, indicamos os trabalhos de Benjamin e Quinn (1999; 2003a; 2003b) e Benjamin; Eustis e Shattuck (2009). Isso posto, na seção subsequente, apresentaremos uma definição que permite estabelecer uma recorrência correspondente aos polinômios de Fibonacci.

## 2.1 Um modelo combinatório para os polinômios de Fibonacci

Seguiremos as indicações apontadas por Koshy (2001), quando examina o comportamento da seguinte definição introduzida, de forma pioneira, no trabalho de Bicknell (1970).

**Definição 4:** Os polinômios de Fibonacci  $\{F_n(x)\}$  são definidos pela seguinte relação de recorrência  $F_{n+1} = x \cdot F_n(x) + F_{n-1}(x)$ , e as seguintes condições iniciais  $F_1(x) = 1, F_2(x) = x$ . (BICKNELL, 1970)

Tabela I: Descrição de alguns termos iniciais dos polinômios de Fibonacci.

$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$	$F_5(x)$	$F_6(x)$	$F_7(x)$	...	$F_n(x)$
1	$x$	$x^2 + 1$	$x^3 + 2x$	$x^4 + 3x^2 + 1$	$x^5 + 4x^3 + 3x$	$x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1$	...	.....

Fonte: Elaboração dos autores.

Para estabelecer sua interpretação combinatória, Koshy (2001) considera o quadrado  $\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$   $1 \times 1$ , com peso  $x$ , e um dominó  $1 \times 2$ , de peso  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  de peso 1. Na Figura 7, ao lado esquerdo, o autor fornece alguns exemplos visando preencher um  $n$  - tabuleiro correspondente com a sequência polinomial. Divisamos, ainda, ao lado direito, que as expressões correspondentes podem ser comparadas com os elementos indicados na Tabela I e, em seguida, o Teorema 4 proporciona um fundamento combinatório para contarmos a quantidade de formas de preencher, via ladrilhos da forma indicada há pouco, fazendo corresponder ao número de formas de ladrilhos para cada tabuleiro uma expressão algébrica correspondente ao peso.

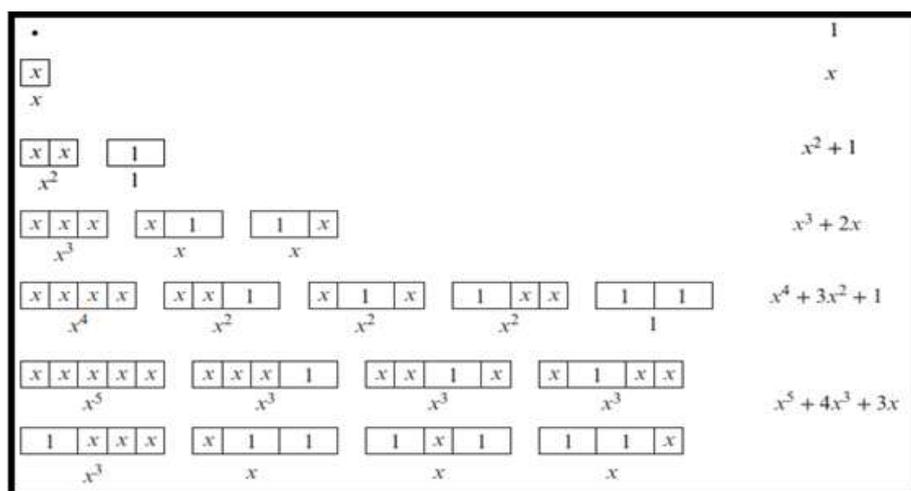


Figura 7: Koshy (2001) introduz representações combinatórias visando o preenchimento de um tabuleiro que resulta na Sequência Polinomial de Fibonacci. Fonte: Koshy (2001).

Para verificar o Teorema 4, vale assinalar que Koshy (2019) emprega o princípio de Fubini, em homenagem ao matemático italiano Guido Fubini (1879–1943): Contar os objetos em um conjunto de duas maneiras diferentes produz o mesmo resultado.

**Teorema 4:** Considerando um tabuleiro do tipo  $1 \times n$  e o quadrado  $\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$   $1 \times 1$ , com peso  $x$ , enquanto que, o dominó  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$   $1 \times 2$ , de peso 1, como sendo formas de ladrilhos. Então, considerando o número de maneiras de preenchê-lo, fazendo corresponder ao respectivo ‘peso’ de cada tabuleiro, será determinado por  $f_n(x)$ . (KOSHY, 2019).

Demonstração: De forma preliminar, vamos considerar  $S_n$  o conjunto dos pesos dos ladrilhos em um tabuleiro do tipo  $1 \times n$  e o quadrado  $\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$   $1 \times 1$ , com peso  $x$ , e um dominó de peso  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$   $1 \times 2$ , de peso 1. De forma trivial, quando consultamos a Figura 7, constatamos que  $S_0 = 1 = F_1(x)$  e que  $S_2 = x = F_2(x)$ . Em seguida, Koshy (2019) busca mostrar que  $S_n$  o conjunto dos pesos goza de propriedade semelhante de recorrência, isto é,  $S_n = x \cdot S_{n-1} + S_{n-2}$ . Com efeito, o autor considera um ladrilho qualquer do tabuleiro, de sorte que, ao final, o mesmo termine por um  $\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$   $1 \times 1$  e ocorreria algo da forma  $\underbrace{\text{sub-ladrilhos}}_{n-1}$ .

$\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$ . Ou seja, a soma final correspondente dos pesos seria de  $x \cdot S_{n-1}$ . No outro caso, Koshy (2019) considera os ladrilhos que terminam em um dominó  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$   $1 \times 2$ , de peso 1, da forma  $\underbrace{\text{sub-ladrilhos}}_{n-2}$ . Decorre, de forma semelhante, que a soma final correspondente dos



pesos seria de  $1 \cdot S_{n-2}$ . Finalmente, como ambas as formas de ladrilhos são independentes uma da outra e, por intermédio de um princípio de contagem, determinamos todos os pesos da forma:  $S_n = x \cdot S_{n-1} + 1 \cdot S_{n-2} = x \cdot S_{n-1} + S_{n-2}$ , para  $n \geq 0$ . Fato que coincide com a recorrência de Fibonacci. ■

### 3 A sequência Tribonacci

Logo a seguir, passaremos a examinar uma extensão da sequência de Fibonacci. Na Tabela II vamos considerar a sequência descrita pela seguinte recorrência  $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ , com valores iniciais definidos por  $T_0 = 0, T_1 = 1, T_2 = 1$ . Alguns escritores usaram o nome "Quadranacci" (latim) em vez de "Tetranacci" (grego), segundo as explicações de Wadill (1992). Quando consideramos a recorrência  $T_{n-1} = T_{n-2} + T_{n-3} + T_{n-4}$  e, subtraindo da relação anterior, determinaremos a seguinte identidade  $T_n + T_{n-4} = T_{n-1} + T_{n-1}$  (FENG, 2011). Na Tabela II apresentamos alguns valores numéricos iniciais da "Tetranacci" (grego). Uma grande quantidade de propriedades pode ser imediatamente generalizadas, quando comparamos as Sequências de Fibonacci e Tribonacci (SPICKERMAN, 1982).

**Tabela II: Descrição de alguns termos iniciais da sequência Tribonacci.**

$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$	$T_7$	$T_8$	$T_9$	$T_{10}$	...	$T_n$
1	1	2	4	7	13	24	44	81	149	...	...

Fonte: Elaboração dos autores.

Agora, seguindo as indicações fornecidas por Mehdaoui (2021), vamos considerar um  $n$  - tabuleiro unidimensional e indicar/estabelecer as seguintes formas de ladrilhos: com quadradinhos azuis   $1 \times 1$ , com retângulos verdes claros   $1 \times 2$ , com retângulos vermelhos   $1 \times 3$ , todos com peso 1. Na Figura 8, de imediato, considerando o termo  $t_n$  como a quantidade de formas de ladrilhos do  $n$  - tabuleiro, seguindo as regras supracitadas, poderemos determinar que teremos a seguinte relação  $t_n = T_{n+1}, n \geq 0$ . Logo em seguida, no Teorema 5, poderemos constatar que o expediente de demonstração desenvolve, de forma semelhante, ao caso do Teorema 1.

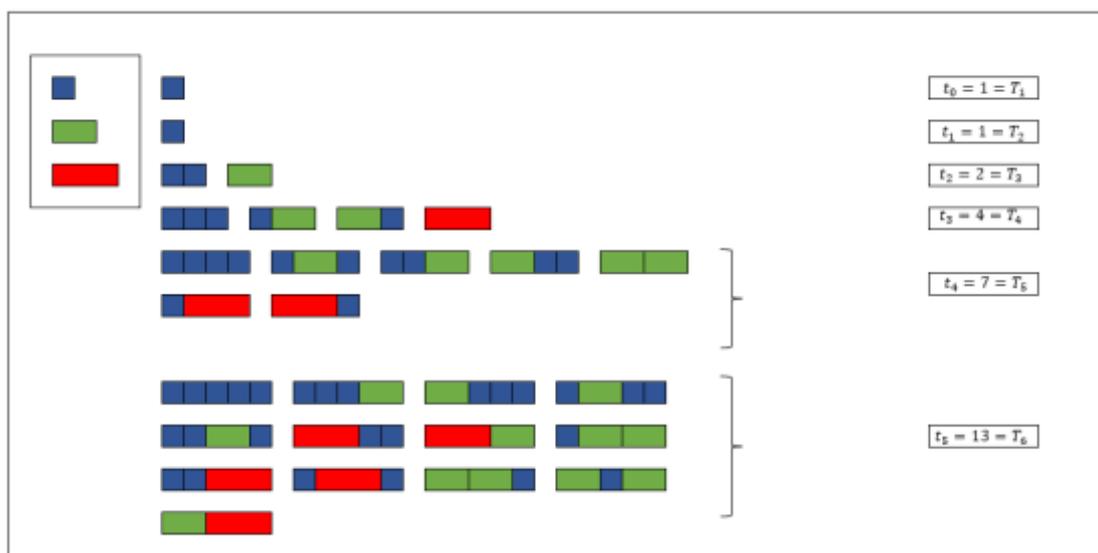


Figura 8: Mehdaoui (2021) fornece uma interpretação via tabuleiro para a sequência Tribonacci. Fonte: Adaptado de Mehdaoui (2021).

**Teorema 5:** A quantidade de maneiras de se cobrir um tabuleiro  $1 \times n$  com quadrados azuis  $1 \times 1$ , com retângulos verdes claros  $1 \times 2$ , com retângulos vermelhos  $1 \times 3$  é igual a  $t_n = T_{n+1}$ , para  $n \geq 1$ .

Demonstração: Vamos definir como  $t_n$  como o número de maneiras de cobrir um tabuleiro  $1 \times n$  com quadrados azuis  $1 \times 1$ , com retângulos verdes claros  $1 \times 2$ , com retângulos vermelhos  $1 \times 3$ . Para um 1 - tabuleiro do tipo  $1 \times 1$  utilizamos um quadrado  $1 \times 1$ , isto é, temos  $t_1 = 1 = T_2 = T_{1+1}$ . Para um 2 - tabuleiro teremos duas coberturas possíveis, com dois quadrados  $1 \times 1$  ou com um dominó  $1 \times 2$ . Neste caso, reparemos que  $t_2 = 2 = T_3 = T_{2+1}$ . Em seguida, quando consideramos  $t_n$  visando cobrir um tabuleiro  $1 \times n$  teremos apenas duas possibilidades, a saber: (i) um conjunto de partições cuja primeira peça é justamente um quadrado  $1 \times 1$ ; (ii) um conjunto de partições cuja primeira peça é justamente um retângulo  $1 \times 2$ ; (iii) um conjunto de partições cuja primeira peça é justamente um retângulo  $1 \times 3$ . Se ocorrer (i), isto é, a primeira peça é um quadrado então as demais posições  $(n-1)$  restantes devem corresponder a  $t_{n-1} = T_n$ . Com o mesmo raciocínio, se ocorrer (ii), isto é, as demais posições  $(n-2)$  restantes devem corresponder ao termo  $t_{n-2} = T_{n-1}$ . Finalmente, se ocorrer (iii), isto é, a primeira peça é um  $1 \times 3$ , então, vale que  $t_{n-3} = T_{n-2}$ . Para considerar o conjunto  $t_n$  como o número total de maneiras de cobrir um tabuleiro  $1 \times n$ , por um princípio aditivo e o caráter de independência dos casos, somaremos  $t_n = (t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3}) = T_n + T_{n-1} + T_{n-2} = T_{n+1}$ ,  $n \geq 1$ . ■

### 3.1 Um modelo combinatório para os polinômios Tribonacci

A seguir, é estudado o modelo combinatório polinomial de Tribonacci, com os termos apresentados na Tabela III.



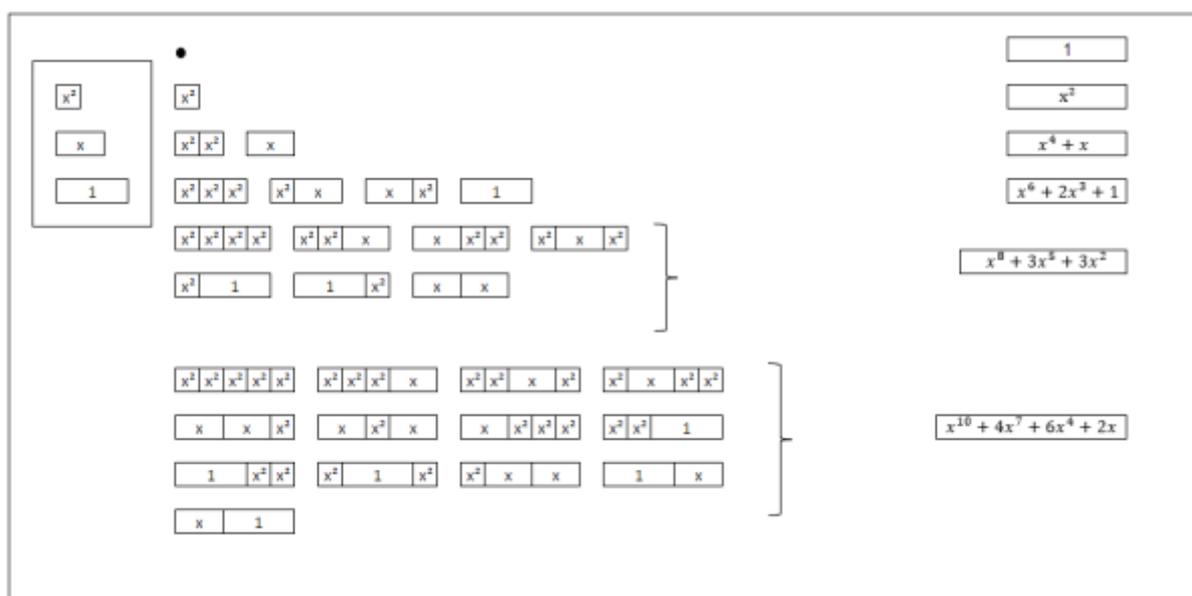
**Definição 5:** Os polinômios de Tribonacci  $\{T_n(x)\}$  são definidos pela seguinte relação de recorrência  $T_n = x^2 \cdot T_{n-1}(x) + x \cdot T_{n-2}(x) + T_{n-3}(x)$ , e as seguintes condições iniciais  $T_0(x) = 0, T_1(x) = 1, T_2(x) = x^2$  (BICKNELL, 1970).

**Tabela III: Descrição de alguns termos iniciais da sequência polinomial Tribonacci.**

$T_0(x)$	$T_1(x)$	$T_2(x)$	$T_3(x)$	$T_4(x)$	$T_5(x)$	$T_6(x)$	$T_n(x)$
0	1	$x^2$	$x^4 + x$	$x^6 + 2x^3 + 1$	$x^8 + 3x^5 + 3x^2$	$x^{10} + 4x^7 + 6x^4 + 2x$	...

Fonte: Elaboração dos autores.

Para estabelecer sua interpretação combinatória, consideraremos o quadrado  $\boxed{x^2}$  com peso  $x^2$ , enquanto que, o dominó  $1 \times 2$  de peso  $\boxed{x}$  de peso  $x$  e um o dominó  $1 \times 3$   $\boxed{1}$  de peso 1. Fixando essas peças de forma preliminar, na Figura 9 o leitor poderá visualizar algumas configurações e tabuleiros iniciais que, ao lado direito, fazemos corresponder seu peso final aos polinômios de Tribonacci  $\{T_n(x)\}$ .



**Figura 9: Descrição combinatória para a Sequência Polinomial Tribonacci via Tabuleiro. Fonte: Elaboração dos autores.**

**Teorema 6:** Considerando um tabuleiro do tipo  $1 \times n$  e o quadrado  $\boxed{x^2}$  com peso  $x^2$ , enquanto que, o dominó  $1 \times 2$  de peso  $\boxed{x}$  de peso  $x$  e um o dominó  $1 \times 3$   $\boxed{1}$  de peso 1, como sendo as peças dos ladrilhos. Então, considerando o número de maneiras de preenchê-lo, fazendo corresponder ao respectivo ‘peso’ de tabuleiro do tipo  $1 \times n$ , será determinado por  $t_n(x) = T_{n+1}(x)$ , para  $n \geq 0$ .

Demonstração: Basta repetir os argumentos do Teorema 4.

## 4 A sequência Tetranacci

Na tabela abaixo vamos considerar a sequência Tetranacci (WADDILL, 1992) descrita pela seguinte recorrência  $Te_n = Te_{n-1} + Te_{n-2} + Te_{n-3} + Te_{n-4}$ , com valores iniciais definidos da seguinte forma  $Te_0 = 0, Te_1 = 1, Te_2 = 1, Te_3 = 2$  (ver Tabela IV).

**Tabela IV: Descrição de alguns termos iniciais da sequência Tetranacci.**

ALVES, F. R. V.; VIEIRA, R. P. M.; CATARINO, P. M. M. C.; SPREAFICO, E. V. P. Abordagem combinatória para a sequência Fibonacci, Tribonacci, Tetranacci, Pentanacci, ... etc e a noção de tabuleiro. **C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauri, v. 23, n. 1, p. 182-204, jul. 2023. Edição Iniciação Científica.  
DOI: 10.21167/cqdv23n1ic2023182204 Disponível em: <https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/index>

$Te_1$	$Te_2$	$Te_3$	$Te_4$	$Te_5$	$Te_6$	$Te_7$	$Te_8$	$Te_9$	...	$T_n$
0	1	1	2	4	8	15	29	56	...	...

Fonte: Elaboração dos autores.

Agora, vamos considerar um  $n$  - tabuleiro e indicas as seguintes formas de ladrilhos: com quadrados azuis  $\blacksquare$   $1 \times 1$ , com retângulos verdes claros  $\square$   $1 \times 2$ , com retângulos vermelhos  $\blacksquare$   $1 \times 3$ , com retângulos na cor rosa  $\blacksquare$   $1 \times 4$ , todos com peso 1. Na Figura 10, de imediato, considerando o termo  $te_n$  como a quantidade de formas de ladrilhos do  $n$  - tabuleiro, seguindo as regras supracitadas, poderemos determinar que  $te_n = Te_{n+1}, n \geq 0$ .

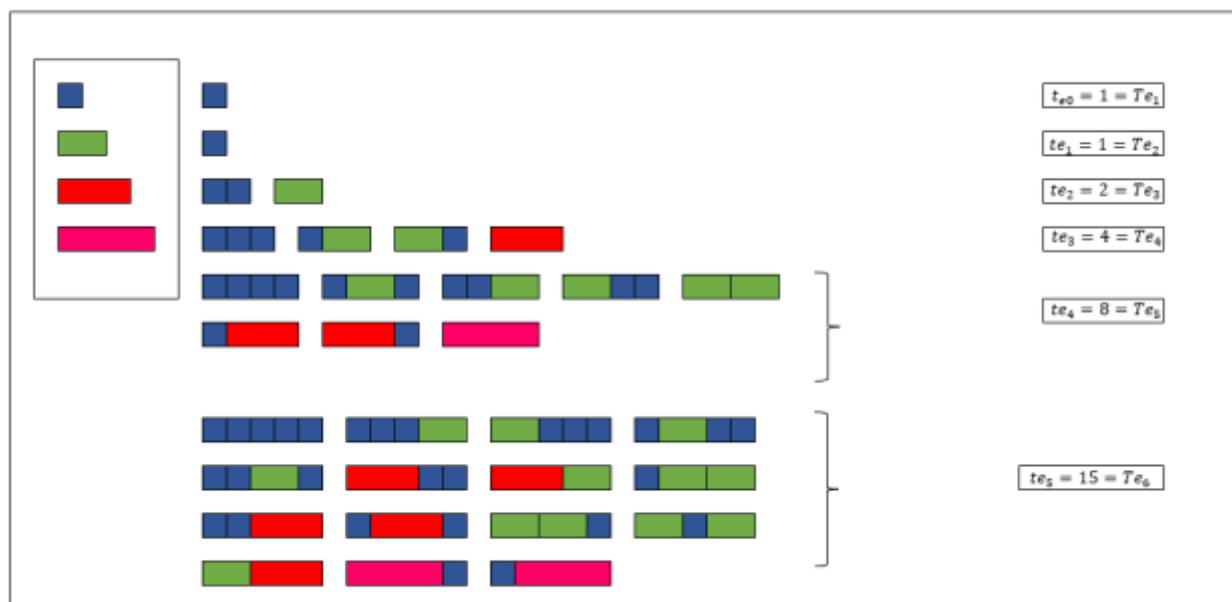


Figura 10: Descrição combinatória – via tabuleiro – para a Sequência Tetranacci. Fonte: Elaboração dos autores.

**Teorema 7:** A quantidade de maneiras de se cobrir um tabuleiro  $1 \times n$  com quadrados azuis  $\blacksquare$   $1 \times 1$ , com retângulos verdes claros  $\square$   $1 \times 2$ , com retângulos vermelhos  $\blacksquare$   $1 \times 3$ , com retângulos na cor rosa  $\blacksquare$   $1 \times 4$  é igual a  $te_n = Te_{n+1}$ .

Demonstração: Basta repetir os argumentos indicados no Teorema 5.

#### 4.1 Um modelo combinatório para os polinômios Tetranacci

Iniciando os estudos do modelo combinatório polinomial de Tetranacci, tem-se os termos da sequência polinomial na Tabela V.

**Definição 6:** Os polinômios de Tetranacci  $\{Te_n(x)\}$  são definidos pela seguinte relação de recorrência  $Te_n = x^3 \cdot Te_{n-1}(x) + x^2 \cdot Te_{n-2}(x) + x \cdot Te_{n-3}(x) + Te_{n-4}(x)$ , e as seguintes condições iniciais  $Te_0(x) = 0, Te_1(x) = 1, Te_2(x) = x^3, Te_3(x) = x^6 + x^2$ .

**Tabela V: Descrição de alguns termos iniciais da sequência Tetranacci.**



$Te_0(x)$	$Te_1(x)$	$Te_2(x)$	$Te_3(x)$	$Te_4(x)$	$Te_5(x)$	$Te_6(x)$	...
0	1	$x^3$	$x^6 + x^2$	$x^9 + 2x^5 + x$	$x^{12} + 3x^8 + 3x^4 + 1$	$x^{15} + 4x^{11} + 6x^7 + 4x^3$	...

Fonte: Elaboração dos autores.

Para estabelecer sua interpretação combinatória, consideraremos o quadrado  $\boxed{x^3}$  com peso  $x^3$ , enquanto que, o dominó  $1 \times 2$  de peso  $\boxed{x^2}$  de peso  $x^2$ , um o dominó  $1 \times 3$   $\boxed{x}$  de peso  $x$  e, finalmente, um dominó  $1 \times 4$   $\boxed{1}$ , com peso 1. Fixando essas peças de forma preliminar, na Figura 11 o leitor poderá visualizar algumas configurações e tabuleiros iniciais que, ao lado direito, fazemos corresponder seu peso final aos polinômios de Tetranacci  $\{Te_n(x)\}$ .

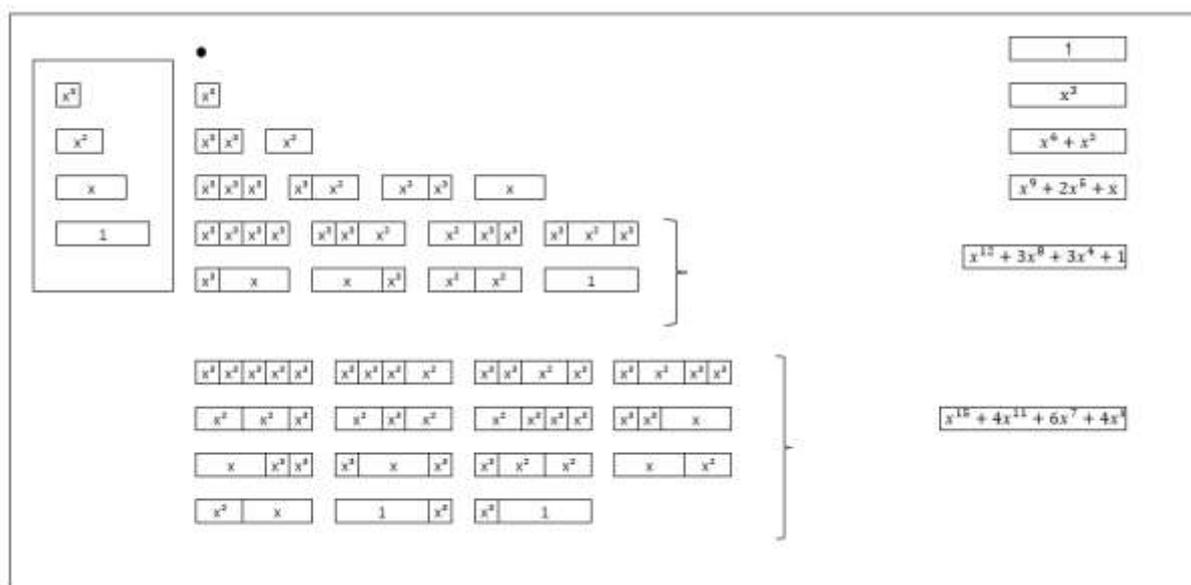


Figura 11: Descrição via tabuleiro para a Sequência Polinomial Tetranacci (elaboração dos autores).

**Teorema 8:** Considerando um tabuleiro do tipo  $1 \times n$  e o quadrado  $\boxed{x^3}$  com peso  $x^3$ , enquanto que, o dominó  $1 \times 2$  de peso  $\boxed{x^2}$  de peso  $x^2$ , um o dominó  $1 \times 3$   $\boxed{x}$  de peso  $x$  e, finalmente, um dominó  $1 \times 4$   $\boxed{1}$ , com peso 1, como sendo as peças dos ladrilhos. Então, considerando o número de maneiras de preenchê-lo, fazendo corresponder ao respectivo ‘peso’ de tabuleiro do tipo  $1 \times n$ , será determinado por  $te_n(x) = Te_{n+1}(x)$ , para  $n \geq 0$ .

Demonstração: Basta repetir os argumentos do Teorema 4.

## 5 A sequência Pentanacci

Na Tabela VI vamos considerar a sequência descrita pela seguinte recorrência  $Pe_n = Pe_{n-1} + Pe_{n-2} + Pe_{n-3} + Pe_{n-4} + Pe_{n-5}$ , para  $n \geq 5$  e com valores iniciais definidos por  $Pe_0 = 0, Pe_1 = 1, Pe_2 = 1, Pe_3 = 2, Pe_4 = 4$ .  $Pe_n$  é a sequência (A001591), consultada em OEIS Foundation INC.

**Tabela VI: Descrição de alguns termos iniciais da sequência Pentanacci.**



$Pe_1$	$Pe_2$	$Pe_3$	$Pe_4$	$Pe_5$	$Pe_6$	$Pe_7$	$Pe_8$	$Pe_9$		$Pe_n$
1	1	2	4	8	16	31	61	120		...

Fonte: Elaboração dos autores.

Agora, vamos considerar um  $n$  - tabuleiro e indicas as seguintes formas de ladrilhos: com quadrados azuis  $1 \times 1$ , com retângulos verdes claros  $1 \times 2$ , com retângulos vermelhos  $1 \times 3$ , com retângulos na cor rosa  $1 \times 4$ , com retângulos na cor amarela  $1 \times 5$  todos com peso 1. Na Figura 12, de imediato, considerando o termo  $t_n$  como a quantidade de formas de ladrilhos do  $n$  - tabuleiro, seguindo as regras supracitadas, poderemos determinar que  $pe_n = Pe_{n+1}, n \geq 0$ .

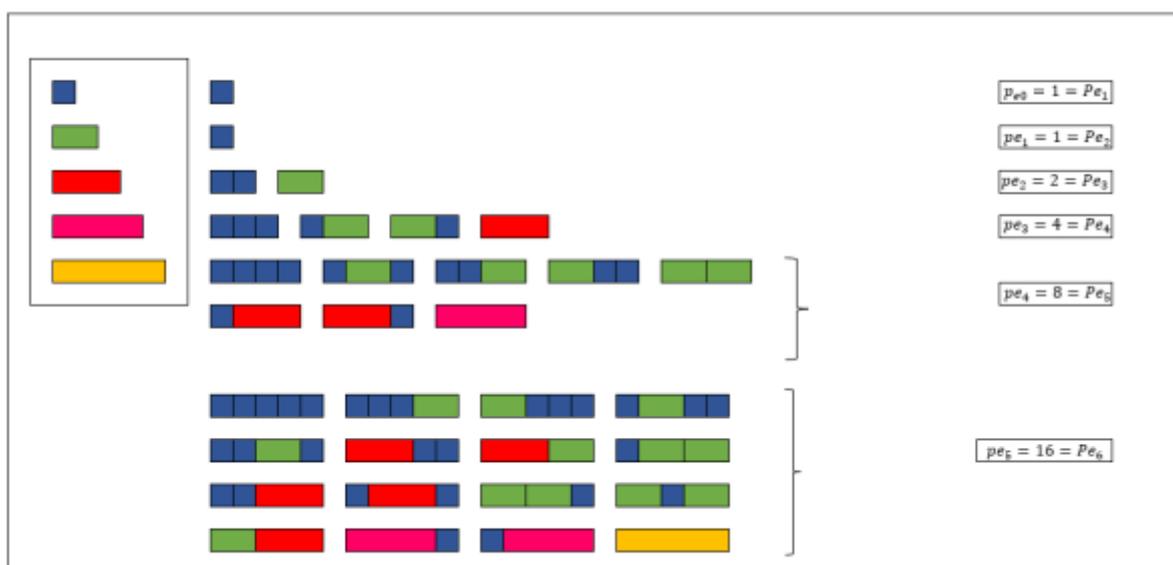


Figura 12: Descrição combinatória – via tabuleiro – para a Sequência Pentanacci. Fonte: Elaboração dos autores.

**Teorema 9:** A quantidade de maneiras de se cobrir um tabuleiro  $1 \times n$  com quadrados azuis  $1 \times 1$ , com retângulos verdes claros  $1 \times 2$ , com retângulos vermelhos  $1 \times 3$ , com retângulos na cor rosa  $1 \times 4$ , com retângulos na cor amarela  $1 \times 5$  é igual a  $pe_n = Pe_{n+1}$ .

Demonstração: Basta repetir os argumentos do Teorema 7.

## 5.1 Um modelo combinatório para os polinômios Pentanacci

De maneira similar aos modelos anteriormente discutidos, seguiremos a definição dos polinômios Pentanacci.

**Definição 6:** Os polinômios de Pentanacci  $\{Pe_n(x)\}$  são definidos pela seguinte relação de recorrência  $Pe_n = x^4 \cdot Pe_{n-1}(x) + x^3 \cdot Pe_{n-2}(x) + x^2 \cdot Pe_{n-3}(x) + xPe_{n-4}(x) + Pe_{n-5}(x)$ , e as seguintes condições iniciais:

$$Pe_0(x) = 0, Pe_1(x) = 1, Pe_2(x) = x^4, Pe_3(x) = x^8 + x^3, Pe_4(x) = x^{12} + 2x^7 + x^2.$$

Tabela VII: Descrição de alguns termos iniciais da sequência Pentanacci.



$Pe_0(x)$	$Pe_1(x)$	$Pe_2(x)$	$Pe_3(x)$	$Pe_4(x)$	$Pe_5(x)$	$Pe_6(x)$	..
0	1	$x^4$	$x^8 + x^3$	$x^{12} + 2x^7 + x^2$	$x^{16} + 3x^{11} + 3x^6 + x$	$x^{20} + 4x^{15} + 6x^{10} + 4x^5 + 1$	..
							.
							.

Fonte: Elaboração dos autores.

Visando realizar a interpretação combinatória, consideraremos o quadrado  $\boxed{x^4}$  com peso  $x^4$ , enquanto que, o dominó  $1 \times 2$  de peso  $\boxed{x^3}$  de peso  $x^3$ , um o dominó  $1 \times 3$   $\boxed{x^2}$  de peso  $x^2$ , um o dominó  $1 \times 4$   $\boxed{x}$  de peso  $x$  e, finalmente, um dominó  $1 \times 5$   $\boxed{1}$ , com peso 1. Fixando essas peças de forma preliminar, na Figura 13 o leitor poderá visualizar algumas configurações e tabuleiros iniciais que, ao lado direito, fazemos corresponder seu peso final aos polinômios de Pentanacci  $\{Pe_n(x)\}$ .

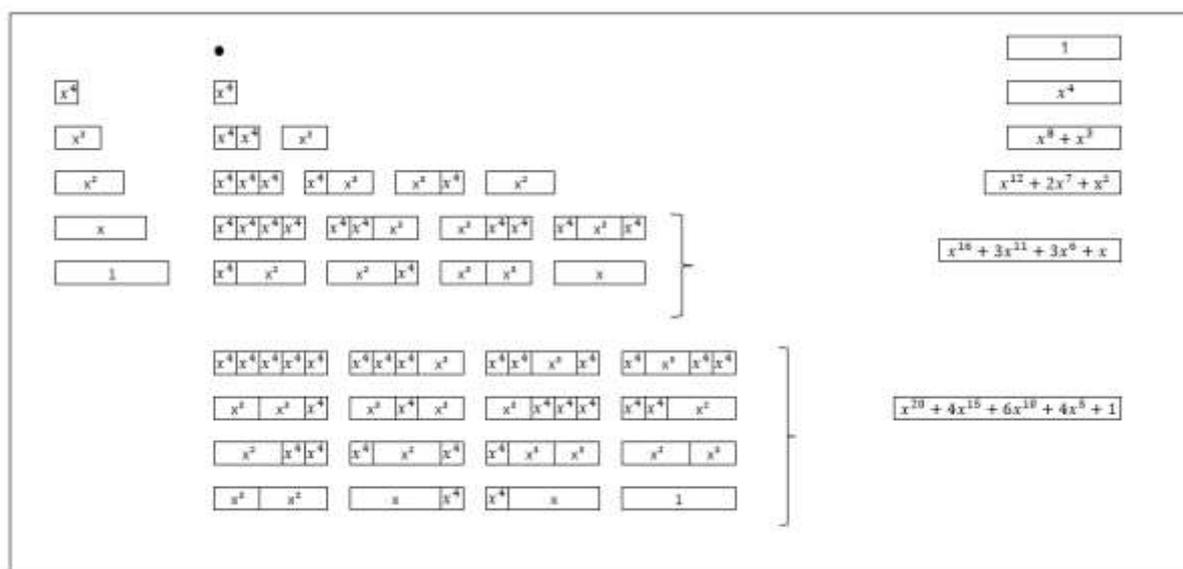


Figura 13: Descrição via tabuleiro para a Sequência Polinomial Pentanacci. Fonte: Elaboração dos autores.

**Teorema 10:** Considerando um tabuleiro do tipo  $1 \times n$  e o quadrado  $\boxed{x^4}$  com peso  $x^4$ , enquanto que, o dominó  $1 \times 2$  de peso  $\boxed{x^3}$  de peso  $x^3$ , um o dominó  $1 \times 3$   $\boxed{x^2}$  de peso  $x^2$ , um o dominó  $1 \times 4$   $\boxed{x}$  de peso  $x$  e, finalmente, um dominó  $1 \times 5$   $\boxed{1}$ , com peso 1, como sendo as peças dos ladrilhos. Então, considerando o número de maneiras de preenchê-lo, fazendo corresponder ao respectivo ‘peso’ de tabuleiro do tipo  $1 \times n$ , será determinado por  $pe_n(x) = Pe_{n+1}(x)$ , para  $n \geq 0$ .

Demonstração: Basta repetir os argumentos do Teorema 4.

Para concluir, de forma natural, o leitor poderá inferir que, com o amparo das propriedades abordadas anteriormente, poderemos definir as sequências Hexanacci, Heptanacci, Octanacci, etc. (BENJAMIN; HANUSA; SU, 2003). E, de igual modo, quando ampliamos e generalizamos os argumentos de Koshy (2001), podemos determinar, para cada tabuleiro, tomando suas representações polinomiais correspondentes, conseguimos estabelecer demais teoremas, semelhantes aos casos dos Teoremas 6 e 8. Deixamos tal tarefa para o leitor mais interessado!

## 6 A pesquisa atual sobre seqüências recorrentes e outros tabuleiros

Nas seções predecessoras discutimos, de forma predominante, algumas propriedades combinatórias em torno da Sequência de Fibonacci que, depois dos anos 60 passou a atrair um conjunto cada vez maior de pesquisadores (BICKNELL-JOHNSON, 1987). Não obstante, quando consideramos, por exemplo, propriedades combinatórias envolvendo tabuleiros, não necessariamente unidimensionais, podemos recordar o estudo de tabuleiros circulares relacionados com a Sequência de Lucas e a Sequência Gibonacci (BENJAMIN; DERKS; QUINN, 2011; BENJAMIN; HANUSA; SU, 2013; BENJAMIN; QUINN, 2003b; BRIGGS; LITTLE; SELLERS, 2010), o estudo de tabuleiros relacionados com a Sequência de Pell (BENJAMIN; PLOTT; SELLERS, 2008) e de Pell – Lucas, inclusive suas representações polinomiais via tabuleiro (KOSHY, 2001) e outros exemplos que confirmam o vigor da abordagem combinatória (BENJAMIN; WALTON, 2009; VAJDA, 1989).

Por exemplo, a Sequência de Lucas que, forma *standard*, se define por  $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ , e valores iniciais  $L_0 = 1, L_1 = 3$ . Por intermédio de configurações circulares, do tipo: um qua-

drado curvo  e um retângulo curvo , o expediente envolve em contar a quantidade de maneiras, que denotaremos por  $l_n$  de preencher um  $n$  - tabuleiro circular, com células enumeradas em um sentido anti-horário como podemos visualizar na Figura 14. Benjamin e Quinn (2003b) explicam o comportamento de um 4 - tabuleiro e sugerem o seguinte comportamento de recorrência  $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$ , para  $n \geq 3$ .

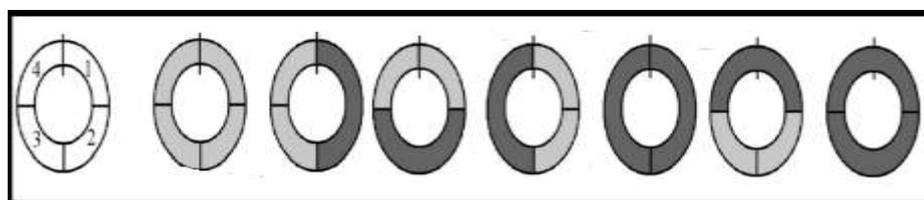


Figura 14: Benjamin e Quinn (2003b) explicam propriedades sobre o tabuleiro circular e suas relações com a seqüência de Lucas. Fonte: Benjamin e Quinn (2003b).

**Teorema 11:** A quantidade de maneiras  $l_n$  de se cobrir um  $n$  - tabuleiro circular

(bracelete) com quadrados curvos  (na cor cinza claro) ou retângulos curvos  (na cor cinza escuro) é igual a  $l_n = L_n$  (BENJAMIN; QUINN, 2003b).

Demonstração: Sugerimos consultar Benjamin e Quinn (2003b).

Em outro trabalho, Benjamin, Plott e Sellers (2008) abordam a forma de preencher um tabuleiro com os valores correspondentes com a Sequência de Pell que, de modo *standard*, é descrita pela seguinte relação  $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$ , para os valores  $P_0 = 0, P_1 = 1$ . Assim, considerando um quadrado branco , um quadrado preto  e um dominó na cor cinza . Para tanto, os autores denotam  $p_0 = 1 = P_1$  que corresponde a nenhum ladrilhamento inicial. Para  $p_1 = 2 = P_2$  que corresponde preencher um 1 - tabuleiro de duas formas, com um quadrado branco e um quadrado preto. Na seqüência, para um 2 - tabuleiro, podemos verificar na Figura 15, inclusive os ladrilhamentos para um 3 - tabuleiro e 4 - tabuleiros que determinam

ALVES, F. R. V.; VIEIRA, R. P. M.; CATARINO, P. M. M. C.; SPREAFICO, E. V. P. Abordagem combinatória para a seqüência Fibonacci, Tribonacci, Tetranacci, Pentanacci,... etc e a noção de tabuleiro. C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 23, n. 1, p. 182-204, jul. 2023. Edição Inicial Científica.

as relações  $p_2 = 5 = P_3$ ,  $p_3 = 12 = P_4$  e  $p_4 = 29 = P_5$ . (ver Figura 15). Com amparo em um argumento combinatório, determinaremos que o respectivo tabuleiro pode ser contado a partir do número  $P_n, n \geq 1$ .

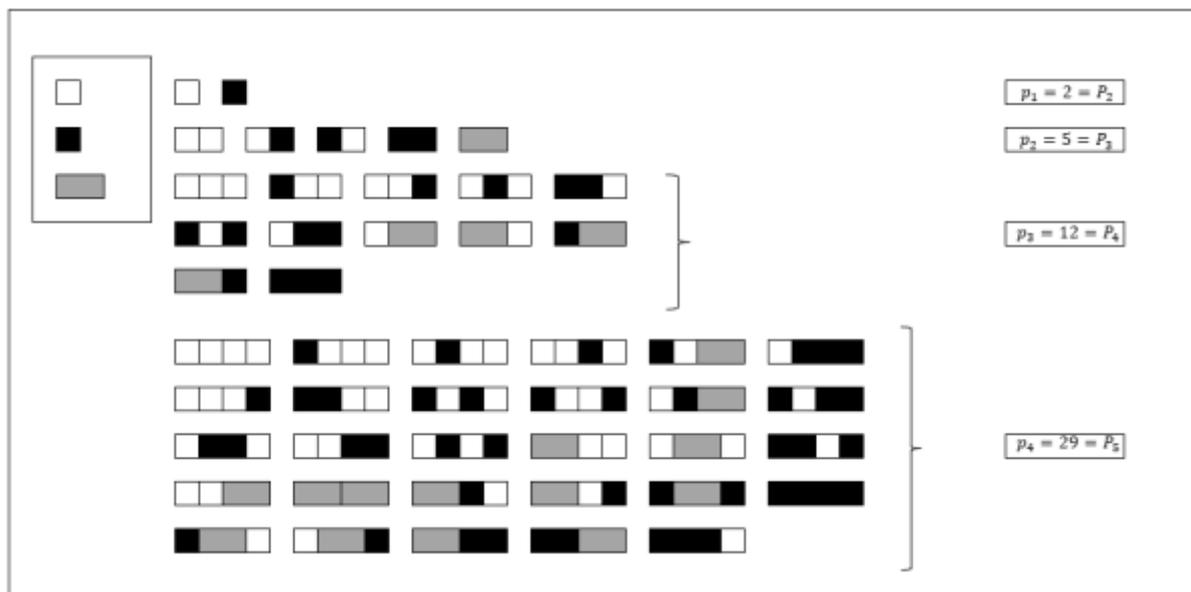


Figura 15: Benjamin, Plott e Sellers (2008) introduzem uma noção de tabuleiro para o estudo da Sequência de Pell. Fonte: Adaptada pelos autores de Benjamin, Plott e Sellers (2008).

Sabemos que a relação de recorrência que permite determinar os números de Jacobsthal (HORADAM, 1996) é definida pela seguinte relação  $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$ ,  $J_0 = 1, J_1 = 1$ . Em seguida, de forma semelhante ao que estabelecemos nas seções predecessoras, assumiremos o interesse em calcular o número de ladrilhamentos possíveis em um tabuleiro do tipo  $3 \times n$ , com apenas dois tipos de ladrilhos: um ladrilho  $1 \times 1$  na cor branca e um ladrilho  $2 \times 2$  na cor vermelha. Na Figura 16 indicamos nosso tabuleiro e, para efeito notacional, denotaremos por  $j_n$  para o número de ladrilhamentos possíveis e, em nossa discussão sobre a última sequência empregaremos os argumentos indicados por Craveiro (2004).

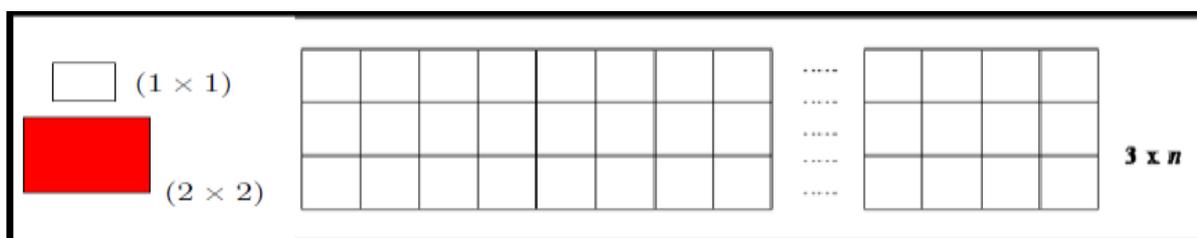


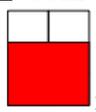
Figura 16: Craveiro (2004) formula uma regra para o preenchimento de um tabuleiro  $3 \times n$  bidimensional correlacionado com a Sequência de Jacobsthal. Fonte: Craveiro (2004).

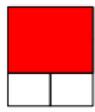
**Teorema 12:** Considerando um tabuleiro  $3 \times n$ , com apenas dois tipos de ladrilhos, um ladrilho  $1 \times 1$  na cor branca e um ladrilho  $2 \times 2$  na cor vermelha. Então,  $j_n$  para o nº de ladrilhamentos possíveis para o tabuleiro é determinado por  $j_n = J_n, n \geq 1$ . (CRAVEIRO, 2004).



Demonstração: Recorrendo aos argumentos combinatórios empregados por Craveiro (2004), vamos considerar três conjuntos, a saber: (i) um conjunto de ladrilhamentos  $3 \times n$  (com ladrilhos dos dois tipos definidos  $1 \times 1$  e  $2 \times 2$ ) e que contém, pelo menos um ladrilhamento (à

direita)  $3 \times 1$  e com ladrilhos de cor branca  $1 \times 1$  ; (ii) um conjunto de ladrilhamentos  $3 \times n$  (com ladrilhos dos dois tipos definidos  $1 \times 1$  e  $2 \times 2$ ) e que contém, pelo menos um ladrilhamento (à direita)  $3 \times 2$  com dois ladrilhos de cor branca e um vermelha, de acordo

com a seguinte configuração ; (iii) um conjunto de ladrilhamentos  $3 \times 2$  (com ladrilhos dos dois tipos definidos  $1 \times 1$  e  $2 \times 2$ ) e que contém, pelo menos um ladrilhamento (à direita)  $3 \times 2$  com dois ladrilhos de cor branca e um vermelha, de acordo com a seguinte

configuração . Em seguida, Craveiro (2004) examina a cardinalidade do primeiro conjunto de ladrilhos definidos em (i), isto é,  $j_{n-1}$ . Por sua vez, quando examina o conjunto dos ladrilhos seguindo a configuração dos ladrilhos como indicados em (ii) e (iii), depreendemos que ambos possuem a mesma cardinalidade indicada por  $j_{n-2}$ . Mais uma vez, como todos os três conjuntos (i), (ii) e (iii) representam casos independentes, Craveiro (2004) estabelece a

relação 
$$\begin{cases} j_0 = 1, j_1 = 1 \\ j_n = j_{n-1} + 2 \cdot j_{n-2} \end{cases}$$
 e que tal relação de recorrência fornece, de forma precisa, os números de Jacobsthal e estabelecemos que  $j_n = J_n, n \geq 1$ . ■

Vejam um pequeno exemplo. Na Figura 17, em (a) identificamos o total de ladrilhamentos possíveis para o tabuleiro  $3 \times n$ . De imediato, podemos contar, da seguinte forma:  $j_4 = 11 = 5 + 6 = 5 + 2 \cdot 3 = j_3 + 2 \cdot j_2$ . Por um princípio da contagem, poderemos verificar que, em casos particulares e por intermédio de um exame ‘visual’ e heurístico das configurações dos ladrilhos, depreendemos as relações estabelecidas no teorema anterior.

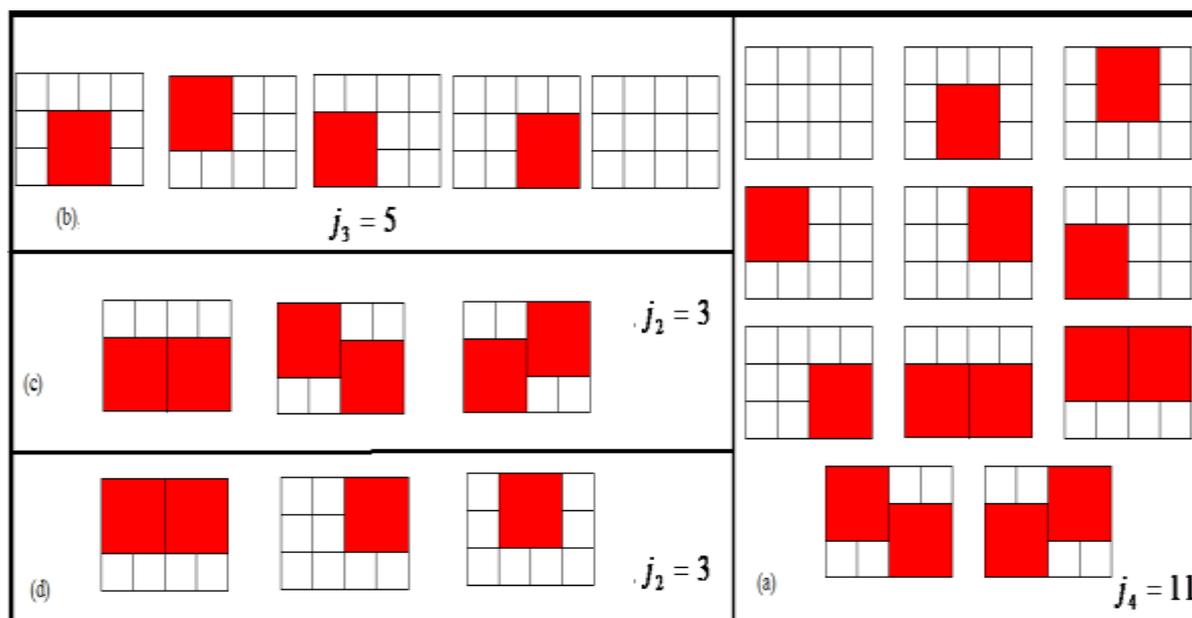


Figura 17: Algumas relações combinatórias identificadas via a visualização de ladrilhos para o caso da Sequência de Jacobsthal. Fonte: Elaboração dos autores.

Em nosso último exemplo, os autores Benjamin e Walton (2009) descrevem um modelo de representação combinatória, via tabuleiro, para os polinômios de Chebyshev que, segundo os autores, “eles aparecem em quase todos os ramos de matemática, incluindo Geometria, Combinatória, Teoria dos números, Equações diferenciais, Teoria da aproximação, Análise numérica e Estatística” (BENJAMIN; WALTON, 2009, p. 1).

Benjamin e Walton (2009) distinguem duas classes de polinômios de Chebyshev a saber: (a) classes de polinômios de Chebyshev de primeira espécie, caracterizados pela relação de recorrência indicada por  $T_n(x) = 2x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ , com as condições iniciais  $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$ ; (b) classes de polinômios de Chebyshev de segunda espécie, caracterizados pela relação de recorrência indicada por  $U_n(x) = 2x \cdot U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$ , com as condições iniciais  $U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x$ . O caráter de proficuidade destas sequências, segundo os autores, reside no fato de que “os polinômios de Chebyshev geram muitas sequências fundamentais, incluindo os números de Fibonacci” (BENJAMIN; WALTON, 2009, p. 2).

Com efeito, por intermédio de um expediente comparativo e que emerge, diretamente do modelo do tabuleiro que indicamos na Figura 3, correspondente ao caso de Fibonacci,

Benjamin e Walton (2009) designam os seguintes dominós:  quadrado rosa com peso  $2x$

,  dominó verde, com peso  $-1$ . Na Figura 18, ao lado esquerdo, divisamos classes de polinômios de Chebyshev de segunda espécie e, ao lado direito, classes de polinômios de Chebyshev de primeira espécie, com emprego da noção de tabuleiro.

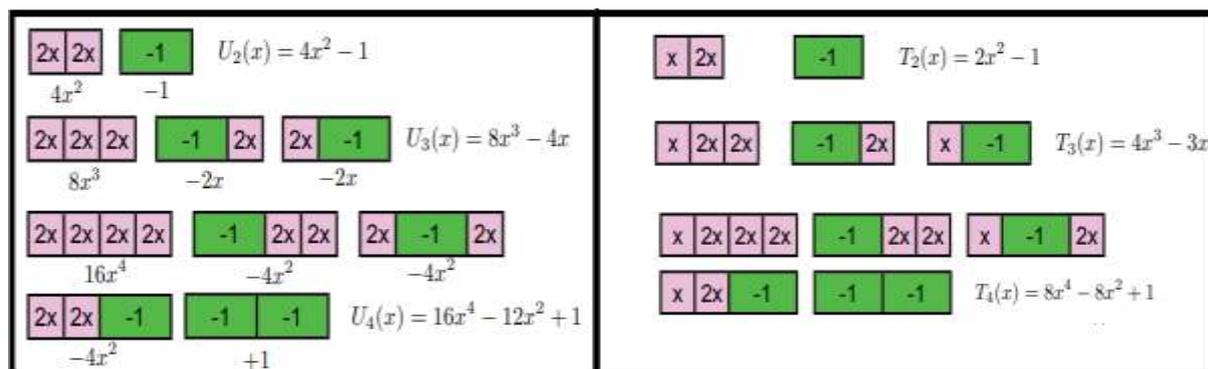


Figura 18: Benjamin e Walton (2009) fornecem uma interpretação combinatória – via tabuleiro – para os polinômios de Chebyshev. Fonte: Benjamin e Walton (2009).

**Teorema 13:** Considerando a classes de polinômios de Chebyshev de segunda espécie. E os seguintes dominós:  $2x$  quadrado rosa com peso  $2x$ ,  $-1$  dominó verde, com peso  $-1$  para efeito do preenchimento com ladrilhos um tabuleiro de comprimento  $n$ . (BENJAMIN; WALTON, 2009).

Demonstração: Considerando o termo  $w_n$  correspondente ao peso total dos ladrilhos de comprimento  $n$ . De imediato, com amparo dos resultados particulares da Figura 18, depreendemos que  $w_0 = 1 = U_0(x)$ ,  $w_1 = 2x = U_1(x)$ . Além disso, quando consideramos os tabuleiros de comprimento  $n = 2$ , sabemos ainda que  $w_2 = 4x^2 - 1 = U_2(x)$ . Logo em seguida, observamos que, todos ladrilhos de comprimento  $n \geq 2$  se torna um ladrilho de comprimento  $n - 1$ , se terminar com um  $2x$  quadrado rosa com peso  $2x$ . De igual modo, todos ladrilhos de comprimento  $n \geq 2$  se torna um ladrilho de comprimento  $n - 2$ , se terminar com um  $-1$  quadrado rosa com peso  $-1$ . Desde que, temos dois conjuntos de ladrilhos independentes, para ambos os casos, contamos o total de ladrilhos por intermédio da soma  $w_n = 2x \cdot w_{n-1} + (-1) \cdot w_{n-2} = 2x \cdot w_{n-1} - 1w_{n-2}$ . Por indução, poderemos escrever ainda que  $w_n = 2x \cdot w_{n-1} - 1w_{n-2} = 2x \cdot U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) = U_n(x)$ ,  $n \geq 0$ . ■

## 7 Conclusão

Nas seções predecessoras abordamos determinadas propriedades relacionadas com a sequência de Fibonacci e suas formas de recorrência generalizadas. Ademais, devido a um amplo cenário e a pesquisa atual que confirma o interesse contemporâneo e variadas formas de generalização da referida sequência, a abordagem combinatória se apresenta como uma vertente de importantes avanços da pesquisa (WILSON; WATKINS, 2013).

Como podemos constatar, por intermédio de um conjunto dos teoremas e definições apresentados, a noção de tabuleiro, quer sejam de natureza unidimensional ou não, proporcionam um expediente de descoberta ou ‘contagem heurística’ que revela relações e significados inesperados com muitas sequências recorrentes e, de modo especial, discutimos o caso da sequência de Fibonacci, Tribonacci, Tetranacci, Pentanacci, etc., sem desconsiderar suas correspondentes recorrências polinomiais, que há pouco tempo, foram incorporadas a toda uma cultura matemática que reúne vários entusiastas da referida sequência e suas especializações (KOSHY, 2014, 2019).



De certo que muitas identidades elementares do tipo  $\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1$ ,  $\sum_{i=1}^n F_{2i} = F_{2n+1}$  admitem uma verificação, nem sempre imediata, por intermédio das propriedades formuladas para um tabuleiro e, nesse contexto, merecem destaque, os resultados introduzidos nos trabalhos de Benjamin e Quinn (2003a, 2003b) e Benjamin; Derks e Quinn (2011) que proporcionam expandir um amplo universo de descobertas.

Ademais, podemos constatar que a noção de tabuleiro, a despeito de sua dimensão ou configuração (linear ou circular) permite o incremento de resultados e interpretações de uma profusão de propriedades (DETEMPLE; WEBB, 2014) correlacionadas com a sequência de Fibonacci e que, por vezes, envolvem uma abordagem superficial ou restritiva, quando consultamos alguns compêndios de História da Matemática (HEMENWAY, 2005; VOROBIEV, 2000) e perdem a oportunidade de desvelar um cenário ampliado de aplicações.

Por fim, certamente que não buscamos apresentar resultados com substancial viés de ineditismo envolvendo uma abordagem combinatória para o estudo de certas sequências recorrentes e, de modo especial, para o caso da Sequência de Fibonacci e suas extensões. Não obstante, resgatando o questionamento inicial, constatamos que existem inúmeras formas de sua representação combinatória (para Fibonacci e outras sequências) e, de modo invariante, o leitor deve perceber que a noção abstrata de ‘ $n$  - tabuleiro’ se apresenta como um objeto matemático com ampla interface heurística e intuitiva.

## Agradecimentos

Agradecemos o apoio e suporte financeiro concedido no Brasil pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq e a Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap).

## Referências

- ALVES, F. R. V. Fórmula De Moivre, ou de Binet ou de Lamé: demonstrações e generalidades sobre a sequência generalizada de Fibonacci - SGF. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 17, n. 33, p. 1-16, 2017.
- BENJAMIN, A. T.; DERKS, H.; QUINN, J. J. The combinatorialization of linear recurrences. **The Electronic Journal of Combinatorics**, v. 18, n. 2, article P12, p. 1-18, 2011. Disponível em: <https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v18i2p12/pdf>. Acesso em: 12 jan. 2023.
- BENJAMIN, A. T.; EUSTIS, A. K.; SHATTUCK, M. A. Compression theorems for periodic tilings and consequences. **Journal of Integers Sequences**, v. 12, n. 6, article 09.6.3, p. 1-15, 2009. Disponível em: <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL12/Shattuck/shattuck20.html>. Acesso em: 12 jan. 2023.
- BENJAMIN, A. T.; HANUSA, C. R. H.; SU, F. E. Linear recurrences through tilings and Markov chains, **Utilitas Mathematica**, v. 64, n. 1, p. 3-17, 2003.
- BENJAMIN, A. T.; PLOTT, S. S.; SELLERS, J. A. Tiling proofs of recent sum identities involving Pell numbers. **Annals of Combinatorics**, v. 12, n. 3, p. 271-278, 2008.



- BENJAMIN, A. T.; QUINN, J. J. The Fibonacci numbers: exposed more discretely. **Mathematics Magazine**, v. 76, n. 3, p. 182-192, 2003a.
- BENJAMIN, A. T.; QUINN, J. J. **Proofs that really count**: the art of combinatorial proof. [Washington, DC]: Mathematical Association of America. 2003b. (Dolciani mathematical expositions, n. 27).
- BENJAMIN, A. T.; QUINN, J. J. Recounting Fibonacci and Lucas Identities. **The College Mathematics Journal**, v. 30, n. 5, p. 359-366, 1999.
- BENJAMIN, A. T.; WALTON, D. Counting on Chebyshev polynomials. **Mathematics Magazine**, v. 82, n. 2, p. 117-126, 2009.
- BICKNELL, M. A primer for the Fibonacci numbers: part VII. **The Fibonacci Quarterly**, v. 8, n. 4, p. 407-420, 1970.
- BICKNELL-JOHNSON, M. A short history of The Fibonacci Quarterly. **The Fibonacci Quarterly**, v. 25, n. 1, p. 2-5, 1987.
- BRIGGS, K. S.; LITTLE, D. P.; SELLERS, J. A. Combinatorial proofs of various  $q$ -Pell identities via tilings. **Annals of Combinatorics**, v. 14, n. 4, p. 407-418, 2010.
- BRIGHAM, R. C.; CARON, R. M.; CHINN, P. Z.; GRIMALDI, R. P. A tiling scheme for the Fibonacci numbers. **Journal of Recreational Mathematics**, v. 28, n. 1, p. 10-16, 1996.
- BURTON, D. M. **The history of mathematics**: an introduction. 6th ed. New York: McGraw-Hill, 2007.
- CRAVEIRO, I. M. **Extensões e interpretações combinatórias para os números de Fibonacci, Pell e Jacobsthal**. 2004. 108f. Tese (Doutorado em Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.
- DETEMPLE, D.; WEBB, W. **Combinatorial reasoning**: an introduction to the art of counting. New Jersey: John Wiley & Sons, [2014].
- FEINBERG, M. Fibonacci-Tribonacci. **The Fibonacci Quarterly**, v. 1, n. 3, p. 71-74, 1963.
- FENG, J. More identities on the Tribonacci numbers. **Ars Combinatoria**. v. 100, p. 73-78, 2011.
- GOULD, H. W. A history of the Fibonacci  $Q$ -matrix and a higher-dimensional problem. **The Fibonacci Quarterly**, v. 19, n. 3, p. 250-257, 1981.
- GRIMALDI, R. P. **Fibonacci and Catalan numbers**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2012.
- GULLBERG, J. **Mathematics**: from the birth of numbers. New York: W. W. Norton, 1997.



- HEMENWAY, P. **Divine proportion: Phi in art, nature and science**, New York: Sterling, 2005.
- HOGGATT, V. E.; LIND, D. A. Compositions and Fibonacci numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v. 7, n. 3, p. 253-266, 1969.
- HORADAM, A. F. Jacobsthal representation numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v. 34, n. 1, p. 40-54, 1996.
- KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas numbers with applications**. 2nd ed. Hoboken: Wiley & Sons, 2019. v. 2.
- KOSHY, T. **Pell and Pell-Lucas numbers with applications**. New York: Springer, 2014.
- KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas numbers with applications**. New York: Wiley, 2001.
- LAGRANGE, J. D. A combinatorial development of Fibonacci numbers in graph spectra. **Linear Algebra its Applications**, v. 438, n. 11, p. 4335-4347, 2013.
- MEHDAOUI, A. **Combinatoire des transversales de la pyramide de Pascal**. 2021. 82p. Thèse (Doctorat en Mathématiques) – Faculté de Mathématiques, University des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, [Bab Ezzouar], 2021.
- OEIS FOUNDATION INC. **The on-line encyclopedia of integer sequences**. [S. l.]: The OEIS Foundation Inc., 2022. Disponível em: <http://oeis.org/>. Acesso em: 10 set. 2022.
- SINGH, P. The so-called Fibonacci numbers in ancient and medieval India. **Historia Mathematica**, v. 12, n. 3, p. 229-244, 1985.
- SPICKERMAN, W. R. Binet's formula for the Tribonacci sequence. **The Fibonacci Quarterly**, v. 20, n. 2, p. 118-120, 1982.
- SPIVEY, M. Z. **The art of proving binomial identities**. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2019.
- SPREAFICO, E. V. P. **Novas identidades envolvendo os números de Fibonacci, Lucas e Jacobsthal via ladrilhamentos**. 2014. 132f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.
- STILLWELL, J. **Mathematics and its history**. 3rd ed. New York: Springer, 2010.
- VAJDA, S. **Fibonacci & Lucas numbers and the golden section**. New York: Halsted Press, 1989.
- VOROBIEV, N. N. **Fibonacci Numbers**. 3rd ed. New York: Springer, 2000.
- WADDILL, M. E. The Tetranacci sequence and generalizations. **The Fibonacci Quarterly**, v. 30, n. 1, p. 9-20, 1992.



---

WILSON. R.; WATKINS. J. (ed.). **Combinatorics**: ancient and modern. Oxford: Oxford University Press, 2013.