Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 23, n. 1, jul. 2023
Artigo de Pesquisa

Sobre o notável teorema de Ptolomeu

On Ptolemy's remarkable theorem

Chico Nery
Colégio San Conrado - Campinas
chiconery@sanconrado.com.br

Edmundo Capelas de Oliveira
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica/Imecc
Unicamp, Campinas/SP
capelas@unicamp.br

Resumo

A geometria elementar do plano foi proposta por Euclides em sua monumental obra *Os Elementos*, mediante um método axiomático-dedutivo. Assim, partindo de entes fundamentais, axiomas e postulados, resultados são demonstrados por meio de uma estrutura lógica, dentre eles os teoremas, formalizados como o binômio hipótese-tese, ou ainda afirmações que podem ser provadas como verdadeiras.
Existem muitos teoremas e talvez o mais famoso, por uma ou outra razão, seja o teorema de Pitágoras associado ao triângulo retângulo. Aqui, vamos abordar o teorema de Ptolomeu, relacionado a um quadrilátero inscrito numa circunferência, também conhecido pelo nome de quadrilátero cíclico.
A notabilidade do teorema de Ptolomeu é evidenciada por suas aplicações, dentre outras citamos, os teoremas de Stewart, de Hiparco e de Chadu; relações com polígonos regulares; com a trigonometria, recuperando as expressões para o seno e o cosseno da soma de arcos e, por fim, interessantes relações envolvendo cordas.
Palavras-chave: Teorema de Ptolomeu. Quadrilátero cíclico. Stewart. Hiparco. Trigonometria.

Abstract

The elementary geometry of the plane was proposed by Euclides in his monumental work *The Elements*, through an axiomatic-deductive method. Thus, starting from fundamental entities, axioms and postulates, results are demonstrated through a logical structure, among them theorems, formalized as the binomial hypothesis-thesis, or even statements that can be proven to be true.
There are many theorems and perhaps the most famous one, for one reason or another, is the Pythagorean theorem be associated with the right triangle. Here, we will address Ptolemy's theorem, related to a quadrilateral inscribed in a circle, also known as a cyclic quadrilateral.
The notability of Ptolemy's theorem is evidenced by its applications, among others, the theorems of Stewart, Hipparchus and Chadu; relations with regular polygons; with trigonometry, recovering the expressions for the sine and cosine of the sum of arcs and, finally, interesting relation involving chords.
Keywords: Ptolemy's theorem. Cyclic quadrilateral. Stewart. Hipparchus. Trigonometry.

Artigo recebido em dez. 2022 e aceito em jul. 2023

1 Introdução

São muitos os notáveis teoremas da geometria euclideana, como o teorema de Pitágoras, por exemplo, os teoremas de Menelau, Ceva, Stewart, dentre outros. Aqui estamos interessados num outro não menos notável, o teorema de Ptolomeu.

Ptolomeu [100 – Claudius Ptolomeu – 170] é lembrado, dentre outros, pelo clássico trabalho da estruturação de um estudo de cordas que culminou com uma tabela trigonométrica utilizada na astronomia, a famosa *Syntaxis mathematica*, mais conhecida pelo título em árabe, *Almagest*o, uma obra fundamental onde, pela primeira vez, é apresentado um estudo sobre o movimento aparente das estrelas. Por fim, também não menos importante, mencionamos que, depois de Arquimedes, foi Ptolomeu a apresentar uma aproximação para o número π, propondo o quociente $377 : 120$ (EVES, 2011).

O teorema de Ptolomeu está relacionado a um quadrilátero cíclico, isto é, a um quadrilátero inscrito numa circunferência. Como essa configuração é frequente na geometria, seu valor utilitário já se mostra grande, mas esse belo teorema também se apresenta com notável regularidade, não apenas na resolução de exercícios, mas também como teorema auxiliar na dedução de várias propriedades geométricas importantes (COXETER; GREITZER, [1967]).

O presente trabalho está disposto do seguinte modo: na primeira seção apresentamos e demonstramos o teorema de Ptolomeu para, nas próximas seções discutir resultados advindos desse teorema, dentre eles, teoremas de Stewart, de Hiparco e de Chadu; relações com polígonos regulares, pentágono, heptágono e eneágono; relação envolvendo um polígono regular de n lados versus um polígono regular de $2n$ lados; relações com a trigonometria, em particular, recuperando as expressões para o seno e o cosseno da soma de arcos e, por fim, relações envolvendo cordas.

2 Teorema de Ptolomeu

O teorema de Ptolomeu relaciona os lados de um polígono cíclico com as suas diagonais e, como vamos ver na próxima seção, apresenta uma vasta lista de aplicações e consequências $ALTSHILLER-COURT, 2007)$.

Teorema 1 *(Ptolomeu) Se um quadrilátero convexo $ABCD$ está inscrito numa circunferência, então o produto das suas diagonais é igual à soma dos produtos dos dois pares de lados opostos.*

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$$

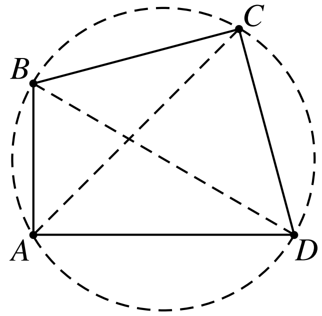

Figura 1: Quadrilátero inscrito na circunferência.

Convém ressaltar que há várias maneiras de demonstrar esse teorema, dentre elas, via trigonometria, números complexos, semelhança de triângulos, que é nossa opção, por entendermos ser o mais básico. Ainda, em relação à demonstração por meio de semelhança de triângulos, apresentamos uma demonstração utilizando o conceito de antiparalelismo que, por mais que tenhamos conhecimento, julgamos ser nova. Com o uso de programas computacionais, existem as chamadas provas sem palavras e/ou fórmulas, apenas fazendo uso de figuras, como pode ser visto no recente trabalho (DERRICK; HIRSTEIN, 2012).

Demonstração 1 *Consideremos um quadrilátero convexo $ABCD$ inscrito numa circunferência, conforme* Figura 2*, onde introduzimos a nomenclatura envolvendo os ângulos α, β e θ.*

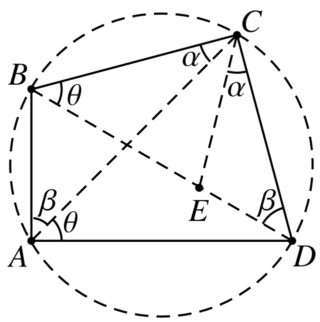

Figura 2: Quadrilátero $ABCD$ inscrito na circunferência.

Suponhamos $B\widehat{C}A < A\widehat{C}D$, e tracemos um segmento CE, com $E \in BD$, tal que $B\widehat{C}A = D\widehat{C}E$. Desse modo obtemos os seguintes pares de triângulos semelhantes:

$$\Delta ABC \sim \Delta DEC: \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \quad \longrightarrow \quad \overline{AB}\cdot\overline{CD} = \overline{AC}\cdot\overline{DE} \tag{1}$$

e

$$\Delta ACD \sim \Delta BCE: \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BE}} \quad \longrightarrow \quad \overline{AD}\cdot\overline{BC} = \overline{AC}\cdot\overline{BE}. \tag{2}$$

Adicionando as igualdades Eq.(1) *e* Eq.(2)*, obtemos*

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD} + \overline{AD}\cdot\overline{BC} = \overline{AC}\left(\overline{DE} + \overline{BE}\right)$$

ou ainda, na seguinte forma

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD} = \overline{AB}\cdot\overline{CD} + \overline{AD}\cdot\overline{BC}$$

que é o resultado desejado. □

Passemos agora a demonstrar o teorema de Ptolomeu, ainda por meio do conceito de semelhança de triângulos, mas fazendo uso, também, do conceito de antiparalelismo na geometria. Antes da demonstração do teorema propriamente dita, julgamos importante mencionar o que se entende por antiparalelismo de retas, o que faremos a partir da definição acompanhada da Figura 3.

Definição 2 *Considere o ângulo $x\widehat{O}y$. Se duas retas r e s são tais que o ângulo que a reta r forma com Ox é o mesmo ângulo que a reta s forma com Oy, as retas r e s são ditas antiparalelas.*

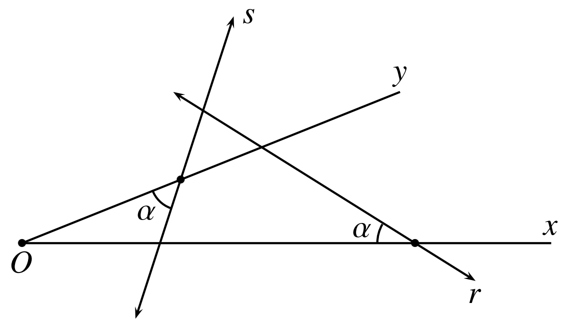

Figura 3: Retas r e s antiparalelas.

Demonstração 2 *Consideremos um quadrilátero $ABCD$ inscrito numa circunferência. Prolonguemos o segmento AB até o ponto B' e o segmento AD até o ponto D' de modo que $\overline{AB} \cdot \overline{AB'} = \overline{AD} \cdot \overline{AD'} = k$ onde k é uma constante, conforme* Figura 4.

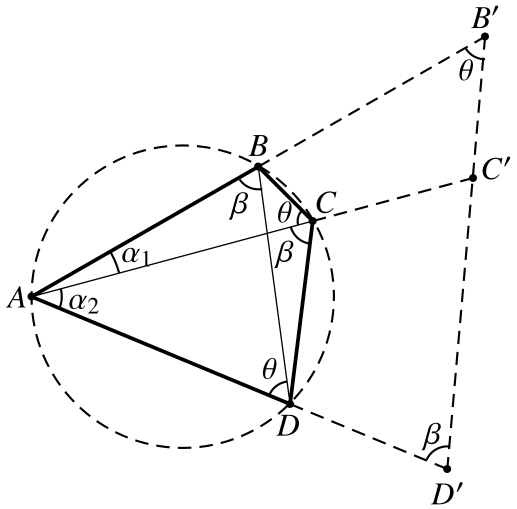

Figura 4: Quadrilátero $ABCD$ e os dois prolongamentos.

Com essa imposição, concluímos que os triângulos ABD e $AD'B'$ são semelhantes, com BD e $B'D'$ antiparalelos. Note que $A\widehat{B}D = A\widehat{D'}B'$ e $A\widehat{B'}D' = A\widehat{D}B$. Assim, temos três pares de triângulos semelhantes. Vamos escrever as razões de semelhança individualmente.

Para os triângulos $ABD \sim AD'B'$ temos:

$$\frac{B'D'}{BD} = \frac{AB'}{AD} = \frac{AD'}{AB}$$

de onde podemos escrever

$$B'D' = BD \cdot \frac{AB'}{AD} = \frac{BD}{AD} \cdot \frac{k}{AB}.$$

Em analogia ao anterior, temos para os triângulos $AB'C' \sim ACB$

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{AC'}{AB} = \frac{AB'}{AC}$$

que permite escrever, isolando $B'C'$,

$$B'C' = BC \cdot \frac{AB'}{AC} = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{k}{AB}.$$

Por fim, para os triângulos $AD'C' \sim ACD$, temos

$$\frac{C'D'}{CD} = \frac{AD'}{AC} = \frac{AC'}{AD}$$

ou ainda, isolando $C'D'$ na seguinte forma

$$C'D' = CD \cdot \frac{AD'}{AC} = \frac{CD}{AC} \cdot \frac{k}{AD}.$$

Da Figura 4 *temos $B'D' = B'C' + C'D'$. Substituindo-se os valores calculados acima temos*

$$\frac{BD}{AD} \cdot \frac{k}{AB} = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{k}{AB} + \frac{CD}{AC} \cdot \frac{k}{AD},$$

que simplificando, permite escrever

$$BD \cdot AC = BC \cdot AD + AB \cdot CD,$$

que é o resultado desejado. □

É importante mencionar que vale a recíproca do **Teorema 1**, a saber: Em um quadrilátero convexo, se a soma dos produtos das medidas de seus dois pares de lados opostos é igual ao produto das medidas de suas diagonais, então o quadrilátero pode ser inscrito em uma circunferência, ou seja, trata-se de um quadrilátero cíclico.

3 Propriedades e consequências

Vejamos algumas propriedades geométricas que surgem tendo o teorema de Ptolomeu como auxiliar. Apresentamos os teoremas de Stewart, de Hiparco e de Chadu; relações com polígonos regulares, pentágono, heptágono e eneágono; relação envolvendo um polígono regular de n lados versus um polígono regular de $2n$ lados; relações com a trigonometria, em particular, recuperando as expressões para o seno e o cosseno da soma de arcos e, por fim, relações envolvendo cordas.

3.1 Teorema de Stewart

O teorema ou relação de Stewart [1717 – Matthew Stewart – 1785], que ora deduzimos, se aplica no cálculo do comprimento de qualquer ceviana de um triângulo conhecidos os seus lados.[1]

Teorema 3 *(Stewart) Se um triângulo ABC cujas medidas dos lados são a, b, c, tal que uma ceviana x divida o lado oposto em dois segmentos n e m, conforme* Figura 5*, então*

[1]Esta é uma solução proposta por Indika Shameera Amarasinghe que aparece na seção *Problems and solutions* na revista **Mathematical Spectrum**. Sheffield: Applied Probability Trust, v. 43, n. 3, p. 138-139, 2010/2011, disponível em https://www.appliedprobability.org/publications/mathematical-spectrum.

$$ax^2 + a \cdot m \cdot n = b^2 n + c^2 m.$$

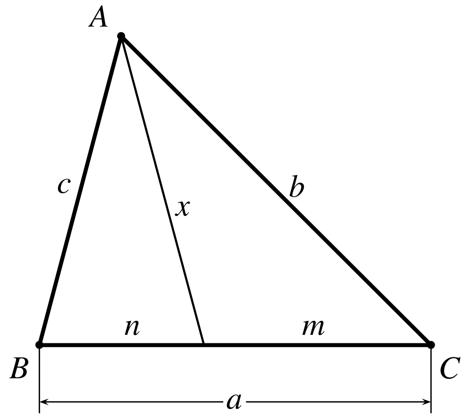

Figura 5: Triângulo ABC e a ceviana x.

Demonstração 3 *Consideremos um triângulo ABC de lados* $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ *e* $\overline{BC} = a$ *do qual queremos determinar a medida de uma ceviana AD, cuja medida procurada representamos por x.*

Prolonguemos a ceviana AD até encontrar a circunferência circunscrita ao triângulo ABC num ponto E, produzindo desse modo dois pares de triângulos semelhantes, conforme Figura 6.

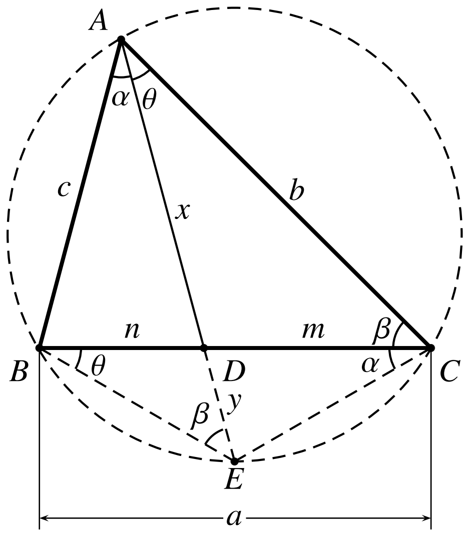

Figura 6: Circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

Da semelhança dos triângulos $\Delta ACD \sim \Delta BED$ *temos*

$$\frac{b}{\overline{BE}} = \frac{x}{n} = \frac{m}{y}$$

de onde segue, separando em duas igualdades e rearranjando

$$y = \frac{m \cdot n}{x} \qquad e \qquad \overline{BE} = \frac{b \cdot n}{x}$$

enquanto, da semelhança dos triângulos $\Delta ABD \sim \Delta CED$ *segue*

$$\frac{c}{\overline{CE}} = \frac{x}{m} \qquad \longrightarrow \qquad \overline{CE} = \frac{c \cdot m}{x}.$$

Aplicando o teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ABEC$*, encontramos*

$$\overline{AE} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BE} + \overline{AB} \cdot \overline{CE},$$

que, substituindo as expressões anteriores, fornece

$$\left(x + \frac{m \cdot n}{x}\right) a = \frac{b^2 n}{x} + \frac{c^2 m}{x}$$

ou ainda, rearranjando e simplificando, permite escrever

$$ax^2 + a \cdot m \cdot n = b^2 n + c^2 m,$$

que é o resultado desejado. □

3.2 Teorema de Hiparco

O teorema de Hiparco [190 a.C – Hiparco – 120 a.C] também é uma relação entre a medida das diagonais e a medida dos lados de um quadrilátero convexo inscrito numa circunferência.

Teorema 4 *(Hiparco) Se* $ABCD$ *é um quadrilátero convexo cujas medidas dos lados são* a, b, c, d *e das diagonais* m *e* n*, então*

$$\boxed{\frac{m}{n} = \frac{ab + cd}{ad + bc}.}$$

Demonstração 4 *A fim de efetuar a demonstração, consideramos as medidas dos lados do quadrilátero cíclico, mudando apenas a ordem de modo a formar três quadriláteros distintos, conforme* Figura 7.

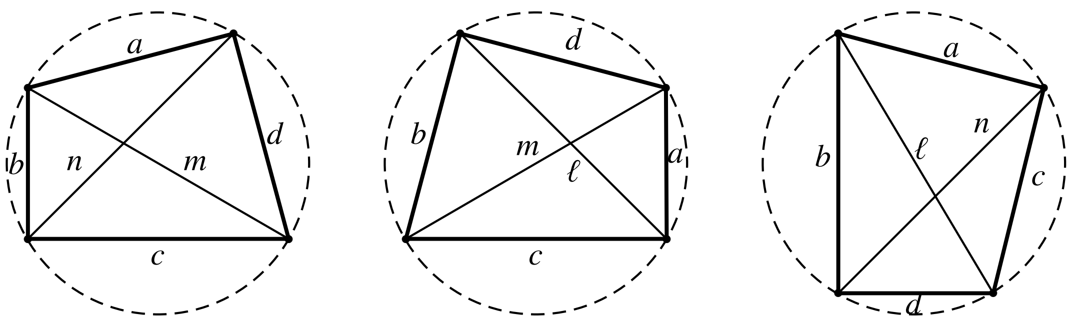

Figura 7: Três quadriláteros cíclicos.

NERY, C.; OLIVEIRA, E. C. Sobre o notável teorema de Ptolomeu. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 23, n. 1, p. 299–316, jul. 2023.
DOI: 10.21167/cqdv23n12023299316 Disponível em: `https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/index`

Aplicando o teorema de Ptolomeu nos três quadriláteros, encontramos no primeiro à esquerda

$$m \cdot n = a \cdot c + b \cdot d, \tag{3}$$

no quadrilátero ao centro,

$$m \cdot \ell = a \cdot b + c \cdot d, \tag{4}$$

e, por fim, no quadrilátero à direita

$$n \cdot \ell = a \cdot d + b \cdot c. \tag{5}$$

Dividindo a Eq.(4) *pela* Eq.(5)*, obtemos*

$$\frac{m}{n} = \frac{ab + cd}{ad + bc}, \tag{6}$$

que é o resultado desejado. □

Ainda mais, utilizando a Eq.(6) podemos determinar as medidas m e n dessas duas diagonais, efetuando, primeiro, o produto da Eq.(3) pela Eq.(6), de onde segue

$$m^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}$$

bem como, dividindo a Eq.(3) pela Eq.(6), obtemos

$$n^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}.$$

3.3 Teorema de Chadu

É sabido que ao escolhermos três vértices de um quadrilátero inscritível, temos um triângulo também inscritível. Assim, uma variante do teorema de Ptolomeu contempla esse caso. Apresentamos aqui o que é conhecido na literatura como teorema de Chadu, o qual nos mostra uma interessante relação associada ao triângulo equilátero inscrito numa circunferência.

Teorema 5 *(Chadu) Se A, B, C são os vértices de um triângulo equilátero, inscrito numa circunferência, e P um ponto pertencente a esta circunferência, no menor arco AC, então*

$$\overline{PA} + \overline{PC} = \overline{PB}.$$

Demonstração 5 *Consideremos um triângulo equilátero ABC, inscrito numa circunferência, e seja P um ponto genérico no menor arco AC, conforme* Figura 8.

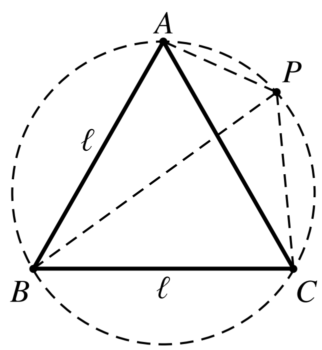

Figura 8: Triângulo equilátero inscrito na circunferência.

Sejam $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = \ell$. Apliquemos o teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ABCP$,

$$\overline{PB} \cdot \ell = \overline{PA} \cdot \ell + \overline{PC} \cdot \ell,$$

que, simplificando, fornece

$$\overline{PA} + \overline{PC} = \overline{PB},$$

que é o resultado desejado. □

3.4 Relações entre o teorema de Ptolomeu e alguns polígonos regulares

O teorema de Ptolomeu estabelece relações com todos os polígonos regulares porque sempre podemos escolher quatro vértices do polígono de modo a obter um quadrilátero cíclico. A seguir, apresentamos algumas dessas notáveis relações.

3.4.1 Pentágono regular

Seja um pentágono regular $ABCDE$ inscrito numa circunferência, e sejam ℓ a medida dos seus lados e d a medida das suas diagonais, conforme Figura 9. Vamos obter uma relação entre ℓ e d.

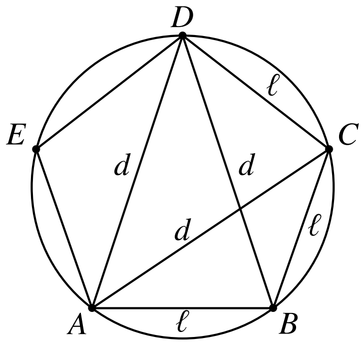

Figura 9: Pentágono regular.

Escolhendo aleatoriamente o quadrilátero $ABCD$ e aplicando o teorema de Ptolomeu, encontramos a seguinte relação

$$d \cdot d = d \cdot \ell + \ell^2$$

que pode ser escrita na forma

$$\left(\frac{d}{\ell}\right)^2 - \frac{d}{\ell} - 1 = 0$$

que nada mais é que uma equação algébrica cujas raízes são

$$\frac{d}{\ell} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{d}{\ell} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Como d e ℓ são estritamente positivos, a solução aceitável pode ser escrita na forma

$$d = \frac{\ell(\sqrt{5}+1)}{2}$$

que nos revela que no pentágono regular, o lado é o segmento áureo da diagonal.

Aproveitando esse raciocínio, merece destaque a semelhança de triângulos no pentágono regular e no decágono regular, conforme Figura 10.

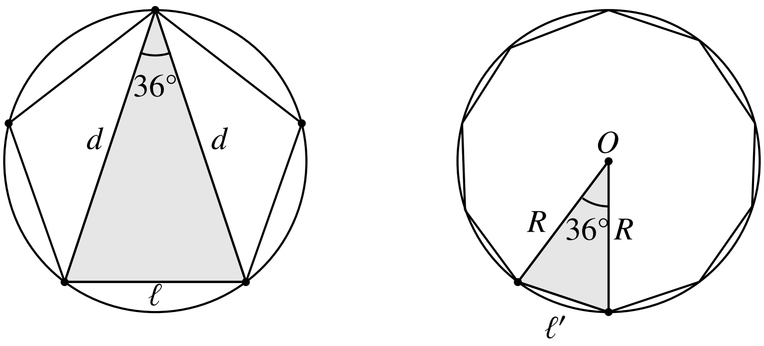

Figura 10: Pentágono e decágono regulares.

Notando que os dois triângulos destacados na Figura 10, um no pentágono regular e o outro no decágono regular, são semelhantes, podemos concluir que, analogamente: *o lado do decágono regular é o segmento áureo do raio da circunferência a eles circunscrita* e vale a expressão

$$R = \frac{\ell'(\sqrt{5}+1)}{2}.$$

3.4.2 Heptágono regular

Vamos obter uma relação métrica num heptágono regular $ABCDEFG$ inscrito numa circunferência, fazendo uso do teorema de Ptolomeu. Para tal, considerando que seus lados medem ℓ e suas diagonais b ou c, com $b < c$, conforme Figura 11.

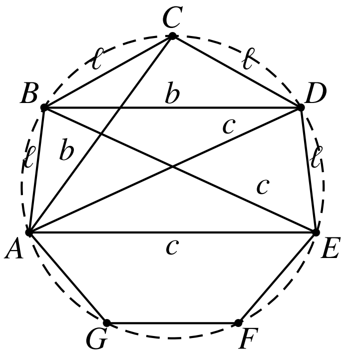

Figura 11: Heptágono regular.

Vamos escolher quatro quadriláteros diferentes e aplicar o teorema de Ptolomeu em cada um deles, obtendo assim

$$\begin{aligned} ABCD &: \ b^2 = \ell^2 + \ell \cdot c, \\ ABDE &: \ c^2 = \ell^2 + \ell \cdot b, \\ ABCE &: \ b \cdot c = \ell \cdot c + \ell \cdot b, \\ ABDF &: \ c^2 = b^2 + \ell \cdot b. \end{aligned}$$

Consideremos apenas o quadrilátero $ABCE$ onde dividimos a relação anteriormente obtida, pelo duplo produto $\ell \cdot b \cdot c$, logo

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

que é o resultado desejado, isto é, uma relação envolvendo o lado ℓ do heptágono e as diagonais b e c.

3.4.3 Eneágono regular

Consideremos um eneágono regular $ABCDEFGHI$ inscrito numa circunferência, conforme Figura 12, cujos lados medem ℓ e cujas diagonais medem d_1, d_2 e d_3, sendo $d_1 < d_2 < d_3$.

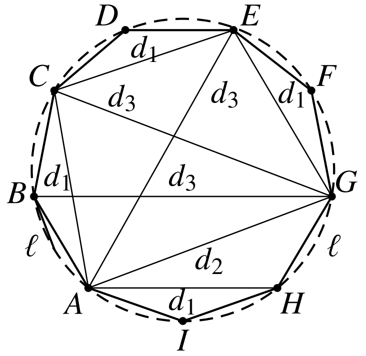

Figura 12: Eneágono regular.

Apliquemos o teorema de Ptolomeu nos quadriláteros $ABGH$ e $ACEG$ de onde podemos escrever, repectivamente

$$d_2^2 = \ell^2 + d_1 \cdot d_3 \qquad \text{e} \qquad d_3^2 = d_1 \cdot (d_1 + d_2).$$

Ainda mais, utilizando a Figura 13, podemos deduzir mais uma relação interessante do eneágono.

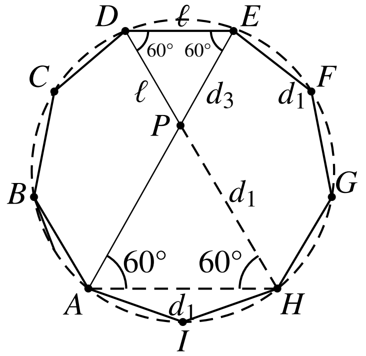

Figura 13: Eneágono regular e duas diagonais.

Da Figura 13 temos que os triângulos APH e DPE são equiláteros, de onde segue a igualdade $\overline{AE} = \overline{DH}$, logo

$$\ell + d_1 = d_3.$$

3.5 Do polígono regular de n lados ao polígono regular de $2n$ lados

Passemos agora a utilizar o teorema de Ptolomeu a fim de estabelecermos uma relação entre as medidas dos lados de dois polígonos regulares inscritos numa mesma circunferência, sendo que um deles tem o dobro do número de lados do outro.

Consideremos então uma circunferência de centro O e raio R, e dois polígonos regulares nela inscritos, um com n lados de medida L, e outro com $2n$ lados com medida ℓ, e seja a a medida do apótema do segundo deles, conforme esboço na Figura 14.

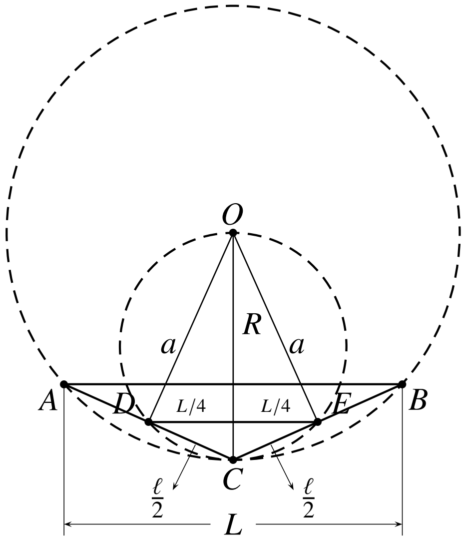

Figura 14: Polígonos regulares inscritos na circunferência.

Temos como notação $\overline{AB} = L$, lado do polígono de n lados, logo $\overline{DE} = \frac{L}{2}$. Por outro lado, temos $\overline{AC} = \overline{BC} = \ell$, lado do polígono de $2n$ lados, de onde segue $\overline{DC} = \overline{CE} = \frac{\ell}{2}$. Agora, aplicando o teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ODCE$ temos

$$\frac{L}{2} \cdot R = a \cdot \frac{\ell}{2} + a \cdot \frac{\ell}{2}, \tag{7}$$

que isolando o apótema, fornece $a = \frac{LR}{2\ell}$. Por outro lado, utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo OCD (note que esse triângulo é retângulo, inscrito numa semicircunferência cuja hipotenusa é o diâmetro), obtemos

$$R^2 = a^2 + \frac{\ell^2}{4}. \tag{8}$$

Substituindo a Eq.(7) na Eq.(8) obtemos a equação algébrica em ℓ

$$\ell^4 - 4R^2\ell^2 + L^2R^2 = 0$$

cuja raiz conveniente é dada por

$$\ell = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - L^2}},$$

que expressa o lado ℓ do polígono de $2n$ lados em função do raio da circunferência e do lado L do polígono de n lados. Por outro lado, podemos resolver a mesma equação algébrica na incógnita L de onde segue

$$L = \frac{\ell\sqrt{4R^2 - \ell^2}}{R},$$

que expressa o lado L do polígono de n lados em função do raio da circunferência e do lado ℓ do polígono de $2n$ lados.

Antes de passarmos a mais uma aplicação do teorema de Ptolomeu, utilizamos as expressões anteriores para verificarmos resultados conhecidos, associados ao triângulo equilátero e ao hexágono regular. Para tal, consideremos a Figura 15, onde temos um triângulo equilátero de lado $L = 2\sqrt{3}$ e um hexágono regular de lado $\ell = 2$, inscritos numa circunferência de raio $R = 2$.

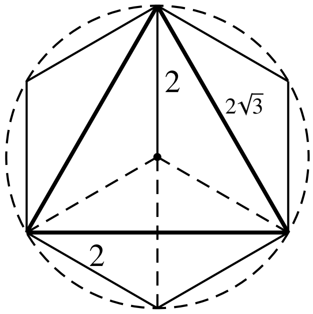

Figura 15: Triângulo equilátero e hexágono regular.

Testemos a expressão que fornece o lado do hexágono regular. Conhecidos, o lado do triângulo equilátero e o raio da circunferência circunscrita, logo

$$\ell = \sqrt{2(2)^2 - 2\sqrt{4(2)^2 - (2\sqrt{3})^2}} = 2$$

conforme mostra a Figura 15.

Por fim, se considerarmos a circunferência com raio unitário, essas fórmulas ganham muito em simplicidade, a saber

$$\ell = \sqrt{2 - \sqrt{4 - L^2}} \qquad \text{e} \qquad L = \ell\sqrt{4 - \ell^2}.$$

3.6 Trigonometria

O teorema de Ptolomeu pode contribuir para a dedução de algumas fórmulas trigonométricas, como veremos a seguir. Primeiro, reparemos numa consequência interessante sobre ângulos inscritos numa circunferência de diâmetro unitário, conforme Figura 16.

DOI: 10.21167/cqdv23n12023299316 Disponível em: `https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/index`

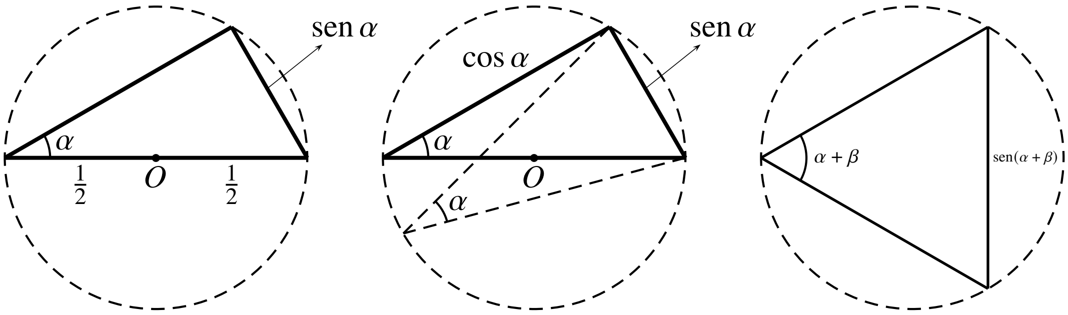

Figura 16: Circunferência de diâmetro unitário.

A corda determinada pelo ângulo inscrito representa seu próprio seno. De posse desse importante resultado, apliquemos o teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ABCD$ inscrito numa circunferência de diâmetro AC unitário, conforme Figura 17, onde $\widehat{B} = \widehat{D} = 90°$.

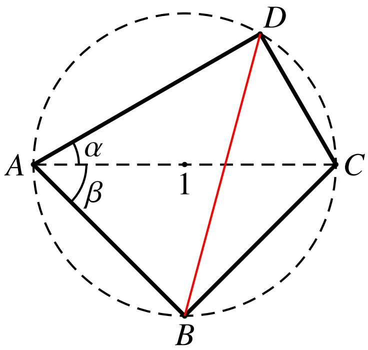

Figura 17: Quadrilátero $ABCD$ cíclico.

Então, da Figura 17, podemos escrever

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{CD} \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$$

ou ainda, substituindo pelos senos e rearranjando, temos

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

que é a expressão que fornece o seno da soma em função dos senos e dos cossenos dos ângulos.

Em analogia à expressão para o seno da soma de arcos, vamos utilizar a Figura 18 para obter a expressão para o cosseno da soma.

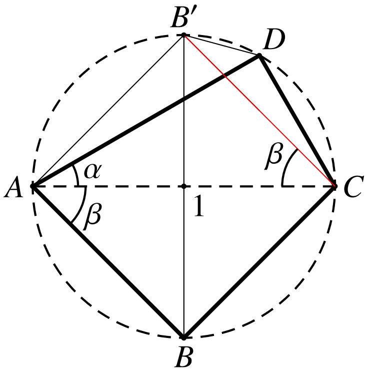

Figura 18: Quadriláteros $ABCD$ e $ABCB'$ cíclicos.

Note que os triângulos $AB'C$, ADC, BCB' e ABC são retângulos nos vértices B', D, C e B, respectivamente e são opostos aos diâmetros AC e BB' que são unitários. Assim, sendo $C\widehat{A}D = \alpha$ e $C\widehat{A}B = \beta$, temos $B\widehat{A}D = \alpha + \beta$ e $A\widehat{C}B' = \beta$. Por fim, visto que $\overline{BB'} = 1$ e $\overline{BD} = \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ temos $\overline{B'D} = \cos(\alpha + \beta)$.

Aplicando o teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ACDB'$, temos

$$\overline{AD} \cdot \overline{CB'} = \overline{AB'} \cdot \overline{CD} + \overline{DB'} \cdot \overline{AC}$$

que, substituindo os valores e simplificando, nos permite escrever

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta,$$

que é a expressão que fornece o cosseno da soma de dois arcos conhecidos: o seno e o cosseno dos arcos α e β (OLIVEIRA; NERY, 2022).

3.6.1 Teorema de Ptolomeu na trigonometria

Em analogia ao teorema de Ptolomeu apresentado na Seção 2, vamos obter um resultado similar, relativamente aos ângulos internos, mais precisamente, envolvendo o seno desses ângulos. Um esboço é apresentado na Figura 19.

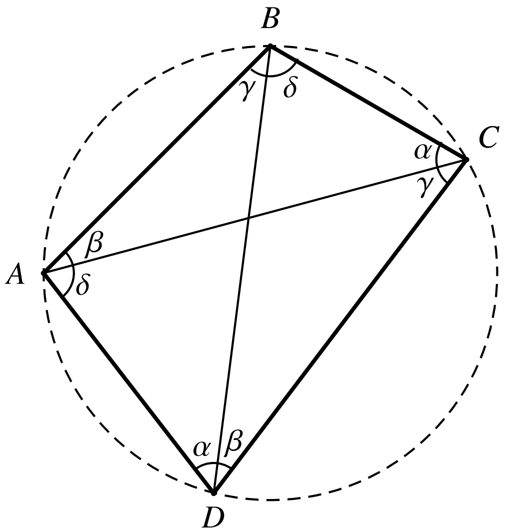

Figura 19: Quadrilátero cíclico $ABCD$ e suas diagonais AC e BD.

Teorema 6 *Sejam um quadrilátero cíclico $ABCD$ e suas diagonais AC e BD. Se $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tal que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$, são os ângulos internos, conforme* Figura 19, *então*

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \gamma) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\delta + \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma.$$

Demonstração 6 *Sendo o quadrilátero cíclico, justificamos as igualdades envolvendo os ângulos na* Figura 19, *pois encerram arcos iguais, isto é,*

$$B\widehat{C}A = B\widehat{D}A = \alpha, \qquad B\widehat{A}C = B\widehat{D}C = \beta,$$

$$A\widehat{B}D = A\widehat{C}D = \gamma, \qquad C\widehat{A}D = C\widehat{B}D = \delta.$$

Denotando por r o raio da circunferência circunscrita e utilizando a lei dos senos, obtemos as relações, relativamente aos respectivos triângulos

$$\begin{array}{llll} \Delta ABD & \longrightarrow & \dfrac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\alpha} = 2r & \text{e} \quad \dfrac{\overline{AD}}{\operatorname{sen}\gamma} = 2r, \\ \Delta BCD & \longrightarrow & \dfrac{\overline{BC}}{\operatorname{sen}\beta} = 2r & \text{e} \quad \dfrac{\overline{CD}}{\operatorname{sen}\delta} = 2r, \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \Delta ABC & \longrightarrow & \dfrac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}(\gamma+\delta)} = 2r, & \Delta ACD & \longrightarrow & \dfrac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} = 2r, \\ \Delta ABD & \longrightarrow & \dfrac{\overline{BD}}{\operatorname{sen}(\beta+\delta)} = 2r, & \Delta BCD & \longrightarrow & \dfrac{\overline{BD}}{\operatorname{sen}(\alpha+\gamma)} = 2r. \end{array}$$

Dessas relações expressamos os lados do quadrilátero em função dos ângulos e do raio da circunferência circunscrita, a saber:

$$\overline{AB} = 2r \cdot \operatorname{sen}\alpha, \ \overline{BC} = 2r \cdot \operatorname{sen}\beta, \ \overline{AD} = 2r \cdot \operatorname{sen}\gamma, \ \overline{CD} = 2r \cdot \operatorname{sen}\delta, \tag{9}$$

bem como, analogamente, as diagonais

$$\overline{AC} = 2r \cdot \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = 2r \cdot \operatorname{sen}(\gamma+\delta), \tag{10}$$

$$\overline{BD} = 2r \cdot \operatorname{sen}(\alpha+\gamma) = 2r \cdot \operatorname{sen}(\beta+\delta). \tag{11}$$

O teorema de Ptolomeu assegura que

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$$

e, substituindo as Eq.(9)*,* Eq.(10) *e* Eq.(11) *e simplificando obtemos*

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \cdot \operatorname{sen}(\alpha+\gamma) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\delta + \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma,$$

que é o resultado desejado. □

É interessante notar que esse resultado apresenta no primeiro membro apenas três dos ângulos, enquanto no segundo membro estão presentes quatro. Isso se deve ao fato de haver uma relação entre eles, a saber $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$.

3.7 Relações envolvendo cordas

Consideremos, numa circunferência de diâmetro conhecido, dois arcos determinados por suas respectivas cordas. O teorema de Ptolomeu permite que calculemos com relativa facilidade os comprimentos das cordas correspondentes à soma e à diferença desses dois arcos.

Seja uma circunferência de diâmetro D e tomemos nela dois arcos AB e BC, considerados nas suas menores medidas, cujas respectivas cordas têm medidas p e q, com $p > q$. Ver Figura 20.

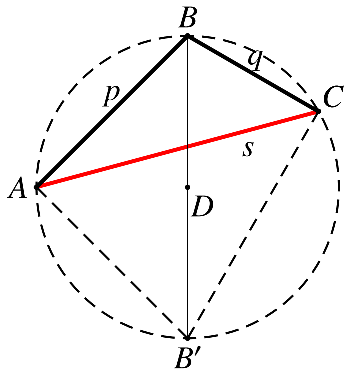

Figura 20: Duas cordas relativas aos dois arcos AB e BC.

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos ABB' e BCB', temos

$$\overline{AB'} = \sqrt{D^2 - p^2} \qquad \text{e} \qquad \overline{CB'} = \sqrt{D^2 - q^2}.$$

Denominamos por s, conforme Figura 20, e d, conforme Figura 21, as medidas das cordas correspondentes à soma e à diferença dos arcos AB e BC.

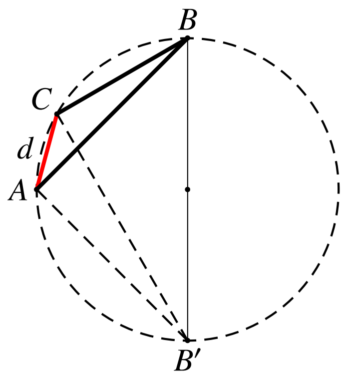

Figura 21: Duas cordas e a diferença entre elas.

Aplicando o teorema de Ptolomeu nos quadriláteros $ABCB'$, conforme Figura 20, e $ACBB'$, conforme Figura 21, temos, respectivamente

$$s \cdot D = p \cdot \sqrt{D^2 - q^2} + q \cdot \sqrt{D^2 - p^2}$$

e

$$d \cdot D + q \cdot \sqrt{D^2 - p^2} = p \cdot \sqrt{D^2 - q^2}.$$

A partir dessas duas expressões, isolando s e d, obtemos, respectivamente

$$s = \frac{p \cdot \sqrt{D^2 - q^2} + q \cdot \sqrt{D^2 - p^2}}{D},$$

a medida da corda correspondente à soma dos arcos, bem como

$$d = \frac{p \cdot \sqrt{D^2 - q^2} - q \cdot \sqrt{D^2 - p^2}}{D},$$

a medida da corda correspondente à diferença dos arcos.

4 Conclusões

Neste trabalho discorremos sobre várias aplicações do clássico teorema de Ptolomeu, dentre elas, os teoremas de Hiparco, Stewart e Chadu, bem como a relação com os polígonos regulares, além da direta correlação com a trigonometria, em particular, mostrando a expressão que calcula o seno/cosseno da soma/diferença de dois arcos, e o que chamamos de teorema de Ptolomeu na trigonometria. É importante ressaltar que este número de aplicações não tem a intenção de contemplar todas, pois, outras, recentes ou não, emergem de forma natural, direta ou indiretamente, consagrando a força deste teorema que, em geral, não é contemplado no ensino médio e muitas vezes sequer é postergado para o ensino superior.

Agradecimento

Somos gratos ao Dr. Quintino A. G. Sousa, por profícuas discussões que contribuíram para a melhoria do texto e aos referees pelos comentários e sugestões que deixaram o texto mais didático.

5 Bibliografia

ALTSHILLER-COURT, N. **College geometry**: an introduction to the modern geometry of the triangle and the circle. 2nd. Mineola, NY: Dover Publications, New York, 2007.

COXETER, H. S. M.; GREITZER, S. L. **Geometry revisited**. [New York]: Random House, [1967]. (New mathematical library; 19).

DERRICK, W.; HIRSTEIN, J. Proof without words: Ptolomey's theorem. **The College Mathematics Journal**, v. 43, n. 5, p. 386, 2012.

EVES, H. W. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

OLIVEIRA, E. C. de; NERY, C. Do triângulo às fórmulas de prostaférese. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 22, n. 3, p. 1-10, 2022. Disponível em https://sistemas.fc.unesp.br/ ojs/index.php/revistacqd/article/view/355. Acesso em: 28 dez. 2022.