Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 23, n. 1. jul. 2023
Artigo de Pesquisa

A existência de certos triângulos e pirâmides de medidas inteiras

The existence of certain triangles and pyramids of integer measures

Rogério César dos Santos
Universidade de Brasília
rogerc@unb.br

Antonio Luiz de Melo
Universidade de Brasília
almelo@unb.br

Resumo

Neste artigo, verificamos que existem triângulos, de medidas inteiras, que possuem área igual ao perímetro. Além disto, verificamos que não existem pirâmides triangulares regulares retas, de medidas inteiras, que possuem área total igual ao volume. Para os cálculos, usamos manipulações algébricas elementares de nível médio.

Palavras-chave: Triângulos. Pirâmides. Medidas inteiras. Geometria.

Abstract

In this article, we verify that there are triangles, with integer measures, that have area equal to the perimeter. In addition, we verified that there are no right regular triangular pyramids, of integer measures, which have total area equal to the volume. For the calculations, middle-level elementary algebraic manipulations were used.

Keywords: Triangles. pyramids. Integer measures. Geometry.

Artigo recebido em jun. 2022 e aceito em set. 2022

1 Introdução

Usiskin (1984) e Santos e Souza (2020) mostraram que existem dois retângulos de medidas inteiras cuja área $x \cdot y$ é igual ao perímetro $2x + 2y$: o 3 por 6 e o 4 por 4. Por sua vez, Santos e Souza (2020) mostraram que existem dez paralelepípedos de medidas inteiras cujo volume é igual à área total.

Vamos provar, neste artigo, resultados semelhantes nos triângulos e pirâmides.

2 Triângulos

Apresentaremos neste capítulo os principais resultados obtidos no estudo dos lados de triângulos.

2.1 Triângulos isósceles

Nesta seção, vamos provar que não existe triângulo isósceles de base $b > 0$ e lados congruentes $a > 0$, de medidas inteiras, cuja área é igual ao perímetro.

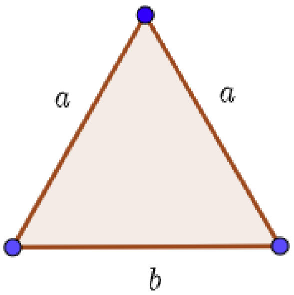

Figura 1 - Triângulo de medidas inteiras.
Fonte: feita no GeoGebra pelo autor.

Seja h sua altura. Desta forma, por Pitágoras, temos:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}.$$

Logo, a área do triângulo é

$$A = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}.$$

Igualando a área ao perímetro, temos:

$$\frac{b}{2} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = 2a + b.$$

Elevando ao quadrado:

$$\frac{b^2}{4} \cdot \frac{4a^2 - b^2}{4} = (2a + b)^2,$$

$$b^2(2a-b)(2a+b) = 16(2a+b)^2,$$
$$b^2(2a-b) = 16(2a+b),$$
$$a(2b^2-32) = 16b+b^3,$$
$$a = \frac{16b+b^3}{2b^2-32},$$
$$a = \frac{16b+b^3}{2(b^2-16)}.$$

Temos que $b \geq 5$, pois $b^2-16 > 0$. Logo,

$$a = \frac{16b+b^3}{2(b^2-16)} = \frac{b}{2}\frac{(b^2+16)}{b^2-16} = \frac{b}{2}\frac{(b^2-16+32)}{b^2-16} =$$
$$= \frac{b}{2}\left(1+\frac{32}{b^2-16}\right) = \frac{b}{2}+\frac{16b}{b^2-16}.$$

Logo,

$$a = \frac{b}{2}+\frac{16b}{b^2-16}$$

Agora, considere b par. Então, $\frac{b}{2}$ é inteiro e $\frac{16b}{b^2-16}$ deve ser inteiro.

A função $f(b) = \frac{16b}{b^2-16}$ é decrescente, pois

$$\frac{df}{db} = f'(b) = \frac{16(b^2-16)-32b^2}{(b^2-16)^2} = \frac{16b^2-16^2-32b^2}{(b^2-16)^2} = -\frac{16(b^2+16)}{(b^2-16)^2} < 0.$$

Além disso, $b \geq 5$. Logo:

$$f(6) = \frac{16\cdot 6}{6^2-16} = \frac{16\cdot 6}{36-16} = \frac{16\cdot 6}{20} = \frac{4\cdot 6}{5} = \frac{24}{5},$$
$$f(8) = \frac{16\cdot 8}{8^2-16} = \frac{16\cdot 8}{64-16} = \frac{16\cdot 8}{48} = \frac{16}{6},$$
$$f(10) = \frac{16\cdot 10}{10^2-16} = \frac{160}{84},$$
$$f(12) = \frac{16\cdot 12}{12^2-16} = \frac{16\cdot 12}{144-16} = \frac{16\cdot 12}{128} = \frac{2^4\cdot 2^2\cdot 3}{2^7},$$
$$f(14) = \frac{16\cdot 14}{14^2-16} = \frac{16\cdot 14}{196-16} = \frac{16\cdot 14}{180} = \frac{2^4\cdot 2\cdot 7}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5},$$
$$f(16) = \frac{16\cdot 16}{16^2-16} = \frac{16\cdot 16}{256-16} = \frac{16\cdot 16}{240} = \frac{256}{240}$$

não são inteiros.

$$f(18) = \frac{16\cdot 18}{18^2-16} = \frac{16\cdot 18}{324-16} = \frac{16\cdot 18}{308} = \frac{16\cdot(16+2)}{308} = \frac{256+32}{308} < 1.$$

Daí por diante, $f < 1$, pois f é decrescente. Logo, b não pode ser par.

Agora, se b for ímpar:

$$a = \frac{b}{2}+\frac{16b}{b^2-16},$$
$$a = \frac{b+1}{2}+\frac{16b}{b^2-16}-\frac{1}{2}.$$

Note que $\frac{b+1}{2}$ é inteiro e

$$\frac{16b}{b^2-16}-\frac{1}{2}$$

deve ser inteiro.

Novamente, defina a função

$$g(b)=\frac{16b}{b^2-16}-\frac{1}{2}=f(b)-\frac{1}{2}.$$

$g'(b)=f'(b)<0$, decrescente, com $b\geq 5$.

$$g(5)=\frac{80}{9}-\frac{1}{2}=\frac{160-9}{18}=\frac{151}{18},$$

$$g(7)=\frac{112}{33}-\frac{1}{2}=\frac{224-33}{66}=\frac{191}{66},$$

$$g(9)=\frac{144}{81-16}-\frac{1}{2}=\frac{144}{65}-\frac{1}{2}=\frac{288-65}{130}=\frac{223}{130},$$

$$g(11)=\frac{160+16}{121-16}-\frac{1}{2}=\frac{176}{105}-\frac{1}{2}=\frac{352-105}{210}=\frac{247}{210},$$

$$g(13)=\frac{160+48}{169-16}-\frac{1}{2}=\frac{208}{153}-\frac{1}{2}=\frac{416-153}{306}=\frac{263}{306}<1$$

não são inteiros. A partir daqui, $g(b)<1$. Logo, b também não pode ser ímpar.

Enfim, concluímos que não existem triângulos isósceles de medidas inteiras cuja área é igual ao perímetro, e, consequentemente, não existem triângulos equiláteros com esta característica, pois todo equilátero é isósceles.

2.2 Triângulos escalenos

Agora, para triângulos escalenos, inclusive retângulos, existem:

O retângulo $12, 13$ e 5: perímetro = 30 e área = $\frac{5\cdot 12}{2}=30$.

O retângulo 6, 8 e 10: perímetro = 24 e área = $\frac{6\cdot 8}{2}=24$.

O escaleno 7, 15 e 20: perímetro = 42 e área, por Heron, onde p é o semi-perímetro:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{21(21-7)(21-15)(21-20)}=$$

$$\sqrt{21(14)(6)}=\sqrt{3^2\cdot 7^2\cdot 2^2}=3\cdot 7\cdot 2=42.$$

3 Pirâmides triangulares retas

Neste capítulo vamos provar que não existe pirâmide triangular regular reta de medidas inteiras, cujo volume é igual à área total.

Considere uma pirâmide triangular regular reta de arestas b e base triangular de lado a, de medidas a e b inteiras.

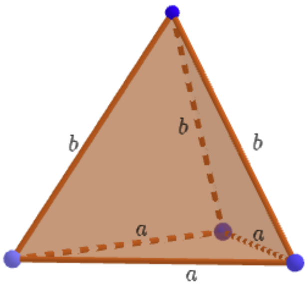

Figura 2 - Pirâmide triangular regular reta de medidas inteiras.
Fonte: feita no GeoGebra pelo autor.

Primeiramente, vamos calcular a altura da pirâmide.

Sabemos que a distância D do centro do triângulo a um vértice é igual a $\frac{2}{3}$ do comprimento da altura do triângulo. A altura do triângulo equilátero de lado a é:

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Logo,

$$D = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Assim, podemos calcular a altura H da pirâmide, por Pitágoras:

$$H = \sqrt{b^2 - D^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}.$$

A área do triângulo da base é:

$$A_B = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Por fim, o volume da pirâmide, área da base vezes altura sobre três:

$$V = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \frac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2}.$$

Para o cálculo da área total, precisamos da área lateral. A área de cada triângulo de base a e lado b é:

$$\frac{a \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}}{2}.$$

Logo, a área total da pirâmide é:

$$A_T = 3 \cdot \frac{a \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a}{2} \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{3a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Assim, para que a pirâmide tenha volume igual à área, devemos ter:

$$\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2} = \frac{3a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

$$a^2\sqrt{3b^2 - a^2} = 9a\sqrt{4b^2 - a^2} + 3a^2\sqrt{3}.$$

Dividindo ambos os lados por a e elevando ao quadrado, temos:

$$a^2(3b^2 - a^2) = 81(4b^2 - a^2) + 27a^2 + 54a\sqrt{3}\sqrt{4b^2 - a^2}.$$

Manipulando a equação, temos:

$$a^2(3b^2 - a^2) - 324b^2 + 81a^2 - 27a^2 = 54a\sqrt{3}\sqrt{4b^2 - a^2}$$

$$3a^2b^2 - a^4 - 324b^2 + 54a^2 = 54a\sqrt{3}\sqrt{4b^2 - a^2}.$$

Elevando ao quadrado:

$$9a^4b^4 + a^8 + 324^2b^4 + 54^2a^4 - 6a^6b^2 - 1944a^2b^4 + 324a^4b^2 +$$
$$648a^4b^2 - 108a^6 - 108 \cdot 324a^2b^2 = 54^2 \cdot 3a^2(4b^2 - a^2).$$

Levando para o membro esquerdo:

$$9a^4b^4 + a^8 + 104976b^4 + 2916a^4 - 6a^6b^2 - 1944a^2b^4 + 324a^4b^2 +$$
$$648a^4b^2 - 108a^6 - 34992a^2b^2 - 34992a^2b^2 + 8748a^4 = 0.$$

Operando:

$$9a^4b^4 + a^8 + 104976b^4 + 11664a^4 - 6a^6b^2 - 1944a^2b^4 + 972a^4b^2 - 108a^6 - 69984a^2b^2$$
$$= 0.$$

Vamos fatorar o primeiro membro. Primeiro, colocando os temos com b^4 à direita:

$$-6a^6b^2 + 972a^4b^2 - 69984a^2b^2 + 11664a^4 + a^8 - 108a^6 +$$

$$9a^4b^4 + 104976b^4 - 1944a^2b^4 = 0.$$

Agora, colocando $-a^2$ em evidência nas primeiras parcelas:

$$-a^2(6a^4b^2 - 972a^2b^2 + 69984b^2 - 11664a^2 - a^6 + 108a^4) +$$
$$9a^4b^4 + 104976b^4 - 1944a^2b^4 = 0.$$

Agora, desmembrando algumas parcelas em duas, dentro dos parênteses:

$$-a^2(3a^4b^2 - 648a^2b^2 + 34992b^2 - 11664a^2 - a^6 + 108a^4 +$$
$$3a^4b^2 - 324a^2b^2 + 34992b^2) +$$
$$9a^4b^4 + 104976b^4 - 1944a^2b^4 = 0.$$

Distribuindo $-a^2$ nas parcelas inseridas:

$$-a^2(3a^4b^2 - 648a^2b^2 + 34992b^2 - 11664a^2 - a^6 + 108a^4) - a^2(3a^4b^2 -$$
$$324a^2b^2 + 34992b^2) +$$
$$9a^4b^4 + 104976b^4 - 1944a^2b^4 = 0.$$

Multiplicando:

$$-a^2(3a^4b^2 - 648a^2b^2 + 34992b^2 - 11664a^2 - a^6 + 108a^4) - 3a^6b^2 +$$
$$324a^4b^2 - 34992b^2a^2 +$$
$$9a^4b^4 + 104976b^4 - 1944a^2b^4 = 0.$$

Colocando $3b^2$ em evidência nas parcelas da direita:

$$-a^2(3a^4b^2 - 648a^2b^2 + 34992b^2 - 11664a^2 - a^6 + 108a^4) +$$
$$3b^2(-a^6 + 108a^4 - 11664a^2 + 3a^4b^2 + 34992b^2 - 648a^2b^2) = 0.$$

Reagrupando dentro dos parênteses:

$$-a^2(3a^4b^2 - 648a^2b^2 + 34992b^2 - 11664a^2 - a^6 + 108a^4) +$$
$$3b^2(3a^4b^2 - 648a^2b^2 + 34992b^2 - 11664a^2 - a^6 + 108a^4) = 0.$$

As expressões dentro dos parênteses são as mesmas, logo,

$$(3b^2 - a^2)(3a^4b^2 - 648a^2b^2 + 34992b^2 - 11664a^2 - a^6 + 108a^4) = 0.$$
Fatorando:
$$(3b^2 - a^2)[3b^2(a^4 - 216a^2 + 11664) - (11664a^2 + a^6 - 108a^4)] = 0.$$
Fatorando novamente:

$$(3b^2 - a^2)[3b^2(a^2 - 108)^2 - (11664 + a^4 - 108a^2)a^2] = 0.$$
Se $3b^2 - a^2 = 0$, então
$$3b^2 = a^2,$$
$$a = b\sqrt{3},$$
que não é uma solução inteira. Logo,
$$3b^2(a^2 - 108)^2 - (11664 + a^4 - 108a^2)a^2 = 0$$
$$3b^2(a^4 - 216a^2 + 11664) - 11664a^2 - a^6 + 108a^4 = 0$$
$$3b^2a^4 - 648b^2a^2 + 34992b^2 - 11664a^2 + 108a^4 = a^6 \qquad (3.1)$$
Como o lado esquerdo é múltiplo de 3, então a^6 também o é, e a também será múltiplo de 3. Assim, $a = 3k$. Substituindo, temos:
$$3^5b^2k^4 - 648 \cdot 3^2b^2k^2 + 34992b^2 - 11664 \cdot 3^2k^2 + 108 \cdot 3^4k^4 = 3^6k^6.$$
Dividindo por 3^5:
$$b^2k^4 - 24b^2k^2 + 144b^2 - 432k^2 + 36k^4 = 3k^6,$$
$$b^2k^4 = 24b^2k^2 - 144b^2 + 432k^2 - 36k^4 + 3k^6.$$
O lado direito é múltiplo de 3, então, b^2k^4 é múltiplo de 3.
Por absurdo, suponha que b não é múltiplo de 3. Então, k é múltiplo de 3. Logo, $k = 3R$. De
$$b^2k^4 = 24b^2k^2 - 144b^2 + 432k^2 - 36k^4 + 3k^6,$$
obtemos,
$$3^4b^2R^4 = 24 \cdot 3^2b^2R^2 - 144b^2 + 432 \cdot 3^2R^2 - 36 \cdot 3^4R^4 + 3 \cdot 3^6R^6.$$
Simplificando por 3^2:
$$3^2b^2R^4 = 24b^2R^2 - 16b^2 + 432R^2 - 324R^4 + 243R^6,$$
$$16b^2 = -9b^2R^4 + 24b^2R^2 + 432R^2 - 324R^4 + 243R^6.$$
O lado direito é múltiplo de 3, então, b deve ser múltiplo de 3, uma contradição.
Logo, b é múltiplo de 3. Assim, pudemos concluir que a e b são múltiplos de 3.
Assim, temos:
$$a = 3^mA, B = 3^nB,$$

com A e B não múltiplos de 3.
De (3.1), temos:
$$3b^2a^4 - 648b^2a^2 + 34992b^2 - 11664a^2 + 108a^4 = a^6,$$
logo,
$$3 \cdot 3^{2n}B^23^{4m}A^4 - 648 \cdot 3^{2n}B^23^{2m}A^2 + 34992 \cdot 3^{2n}B^2 - 11664 \cdot 3^{2m}A^2 + 108 \cdot 3^{4m}A^4 = 3^{6m}A^6,$$
$$3^{4m+2n+1}A^4B^2 - 2^3 \cdot 3^{4+2m+2n}A^2B^2 + 2^4 \cdot 3^{7+2n}B^2 - 2^4 \cdot 3^{6+2m}A^2 + 2^2 \cdot 3^{3+4m}A^4 = 3^{6m}A^6.$$

Agora, vamos separar em 3 casos: $m = n$, $m > n$ e $m < n$:
Caso 1. $m = n$
$$3^{4m+2n+1}A^4B^2 - 2^3 \cdot 3^{4+2m+2n}A^2B^2 + 2^4 \cdot 3^{7+2n}B^2 - 2^4 \cdot 3^{6+2m}A^2 + 2^2 \cdot 3^{3+4m}A^4 = 3^{6m}A^6$$
se torna

$$3^{6m+1}A^4B^2 - 2^3 \cdot 3^{4+4m}A^2B^2 + 2^4 \cdot 3^{7+2m}B^2 - 2^4 \cdot 3^{6+2m}A^2 + 2^2 \cdot 3^{3+4m}A^4 = 3^{4m}A^6.$$

Dividindo por 3^{2m}:

$$3^{4m+1}A^4B^2 - 2^3 \cdot 3^{4+2m}A^2B^2 + 2^4 \cdot 3^7B^2 - 2^4 \cdot 3^6A^2 + 2^2 \cdot 3^{3+2m}A^4 = 3^{4m}A^6.$$

Subcaso $m = n = 1$:

$$3^{4m+1}A^4B^2 - 2^3 \cdot 3^{4+2m}A^2B^2 + 2^4 \cdot 3^7B^2 - 2^4 \cdot 3^6A^2 + 2^2 \cdot 3^{3+2m}A^4 = 3^{4m}A^6$$

se torna

$$3^5A^4B^2 - 2^3 \cdot 3^6A^2B^2 + 2^4 \cdot 3^7B^2 - 2^4 \cdot 3^6A^2 + 2^2 \cdot 3^5A^4 = 3^4A^6.$$

Dividindo por 3^4:

$$3A^4B^2 - 2^3 \cdot 3^2A^2B^2 + 2^4 \cdot 3^3B^2 - 2^4 \cdot 3^2A^2 + 2^2 \cdot 3A^4 = A^6.$$

Ou seja, 3 divide A, o que não pode ocorrer.

Subcaso $m = n = 2$:

$$3^{4m+1}A^4B^2 - 2^3 \cdot 3^{4+2m}A^2B^2 + 2^4 \cdot 3^7B^2 - 2^4 \cdot 3^6A^2 + 2^2 \cdot 3^{3+2m}A^4 = 3^{4m}A^6$$

se torna

$$3^9A^4B^2 - 2^3 \cdot 3^8A^2B^2 + 2^4 \cdot 3^7B^2 - 2^4 \cdot 3^6A^2 + 2^2 \cdot 3^7A^4 = 3^8A^6.$$

Dividindo por 3^6, e passando 2^4A^2 para o segundo membro, o mesmo se torna $3^2A^6 - 2^4A^2 = A^2$, e daí 3 divide A, absurdo.

Subcaso $m = n \geq 3$. Temos

$$3^{4m+1}A^4B^2 - 2^3 \cdot 3^{4+2m}A^2B^2 + 2^4 \cdot 3^7B^2 - 2^4 \cdot 3^6A^2 + 2^2 \cdot 3^{3+2m}A^4 = 3^{4m}A^6.$$

Dividindo por 3^6:

$$3^{4m-5}A^4B^2 - 2^3 \cdot 3^{-2+2m}A^2B^2 + 2^4 \cdot 3B^2 - 2^4A^2 + 2^2 \cdot 3^{-3+2m}A^4 = 3^{4m-6}A^6.$$

Todos os expoentes são positivos, pois $m > 2$, logo, todos os fatores são inteiros. Daí, concluísmos que 2^4A^2 é múltiplo de 3, e por isso A também o é, absurdo.

Assim, o caso $m = n$ acaba.

Caso $m > n > 0$.

Bom, $m > n \geq 1$, então, $m > 2$. Temos:

$$3^{4m+2n+1}A^4B^2 - 2^3 \cdot 3^{4+2m+2n}A^2B^2 + 2^4 \cdot 3^{7+2n}B^2 - 2^4 \cdot 3^{6+2m}A^2 + 2^2 \cdot 3^{3+4m}A^4 = 3^{6m}A^6.$$

Dividindo por 3^{2n}:

$$3^{4m+1}A^4B^2 - 2^3 \cdot 3^{4+2m}A^2B^2 + 2^4 \cdot 3^7B^2 - 2^4 \cdot 3^{6+2m-2n}A^2 + 2^2 \cdot 3^{3+4m-2n}A^4 = 3^{6m-2n}A^6.$$

Dividindo por 3^7:

$$3^{4m-6}A^4B^2 - 2^3 \cdot 3^{-3+2m}A^2B^2 + 2^4B^2 - 2^4 \cdot 3^{-1+2m-2n}A^2 + 2^2 \cdot 3^{-4+4m-2n}A^4 = 3^{6m-2n-7}A^6.$$

Analisemos os expoentes de 3. Vamos provar que são todos positivos.

Como $m \geq 2$, então $4m \geq 8 > 6$.

Também, $-3 + 2m \geq -3 + 4 = 1$.

Também, como $m > n \geq 1$, então $m - n \geq 1$ e, portanto: $-1 + 2m - 2n = -1 + m - n + m - n \geq -1 + 1 + 1 = 1$.
Também, $-4 + 4m - 2n = -4 + m - n + m - n + 2m \geq -4 + 1 + 1 + 4 = 2$.
Também, $6m - 2n - 7 = m - n + m - n + 4m - 7 \geq 1 + 1 + 8 - 7 = 3$.
Ou seja, todos os expoentes de 3 são positivos, logo, 2^4B^2 é múltiplo de 3, absurdo.
Caso $0 < m < n$. Temos:

$$3^{4m+2n+1}A^4B^2 - 2^3 \cdot 3^{4+2m+2n}A^2B^2 + 2^4 \cdot 3^{7+2n}B^2 - 2^4 \cdot 3^{6+2m}A^2 + 2^2 \cdot 3^{3+4m}A^4 = 3^{6m}A^6.$$

Dividindo por 3^{2m}:

$$3^{2m+2n+1}A^4B^2 - 2^3 \cdot 3^{4+2n}A^2B^2 + 2^4 \cdot 3^{7+2n-2m}B^2 - 2^4 \cdot 3^6A^2 + 2^2 \cdot 3^{3+2m}A^4 = 3^{4m}A^6.$$

Dividamos em sub-casos: $m = 1$ e $m \geq 2$:
Sub-caso $m = 1$. Assim, $n > m = 1, n \geq 2$. Então:

$$3^{3+2n}A^4B^2 - 2^3 \cdot 3^{4+2n}A^2B^2 + 2^4 \cdot 3^{5+2n}B^2 - 2^4 \cdot 3^6A^2 + 2^2 \cdot 3^5A^4 = 3^4A^6.$$

Dividindo por 3^4:

$$3^{-1+2n}A^4B^2 - 2^3 \cdot 3^{2n}A^2B^2 + 2^4 \cdot 3^{1+2n}B^2 - 2^4 \cdot 3^2A^2 + 2^2 \cdot 3A^4 = A^6.$$

Claramente, todos os expoentes de 3 são positivos e, assim, 3 divide A, absurdo.
Sub-caso $m \geq 2$. Assim, $n > m \geq 2$ e $n \geq 3$. Temos:

$$3^{2m+2n+1}A^4B^2 - 2^3 \cdot 3^{4+2n}A^2B^2 + 2^4 \cdot 3^{7+2n-2m}B^2 - 2^4 \cdot 3^6A^2 + 2^2 \cdot 3^{3+2m}A^4 = 3^{4m}A^6.$$

Dividindo por 3^6:

$$3^{2m+2n-5}A^4B^2 - 2^3 \cdot 3^{-2+2n}A^2B^2 + 2^4 \cdot 3^{1+2n-2m}B^2 - 2^4A^2 + 2^2 \cdot 3^{-3+2m}A^4 = 3^{4m-6}A^6.$$

Analisando os expoentes de 3:

$$2m + 2n - 5 = 2(m + n) - 5 \geq 8 - 5 = 3,$$
$$-2 + 2n \geq -2 + 6 = 4,$$
$$2n - 2m + 1 = m - n + m - n \geq 1 + 1 + 1 = 3,$$
$$-3 + 2m \geq -3 + 4 = 1,$$
$$4m - 6 \geq 8 - 6 = 2.$$

Logo, são todos positivos e 3 divide 2^4A^2, absurdo.
Logo, concluímos o último subcaso do último caso $n > m$.

Concluímos, portanto, que, não existe pirâmide triangular regular reta, de medidas inteiras, cujo volume é igual à área total.

4 Referências

SANTOS, R. C.; SOUZA, V. M. Paralelepípedos de área numericamente igual ao volume. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 1-8, jul. 2020a. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v18a01-paralelepipedos-de-area-numericamente-igual-ao-volume.pdf. Acesso em: 31 ago. 2022.

SANTOS, R. C.; SOUZA, V. M. Retângulos de área igual ao perímetro: novas provas. **Revista do Professor de Matemática,** v. 101, p. 8-10, 2020b.

USISKIN, Z. Seis problemas não triviais equivalentes. **Revista do Professor de Matemática**, n. 4, 1984.