C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1119–1124

Probabilités/*Probability Theory*

Réflexion entre deux diffusions conjuguées

Florin Soucaliuc

Laboratoire de mathématiques, bât. 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France

Reçu le 14 mars 2002 ; accepté le 14 mars 2002

Note présentée par Marc Yor.

Résumé Nous avions observé dans un travail précédent qu'un mouvement brownien réfléchi sur un mouvement brownien rétrograde indépendant est encore un mouvement brownien. Nous présentons ici la généralisation de ce résultat à des couples de diffusions *conjuguées* (qui sont aussi *duales* au sens de Siegmund). ***Pour citer cet article : F. Soucaliuc, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1119–1124.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Reflection between two conjugate diffusions

Abstract We observed, in a previous work, that Brownian motion reflected on an independent time-reversed Brownian motion is again Brownian motion. We present the generalisation of this result to pairs of conjugate diffusions (which are also dual, in the sense of Siegmund). ***To cite this article: F. Soucaliuc, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1119–1124.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Denote by $E_x(\sigma, b)$ the *stochastic differential equation* (SDE)

$$\mathrm{d}X(t) = \sigma\big(X(t)\big)\,\mathrm{d}B(t) + b\big(X(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

(in dimension 1) with starting point $X_0 = x$. Its solution is a diffusion associated with the infinitesimal generator G of coefficients a and b (i.e., $Gf = af'' + bf'$) where $a := \frac{1}{2}\sigma^2$. Assume a is C^1-continuous. The *conjugate* diffusion is by definition associated with the generator G^* of coefficients a and b^*, where $b^* := a' - b$.

Consider the following *SDE with reflection* on a continuous "barrier" curve Z:

$$\mathrm{d}X(t) = \sigma\big(X(t)\big)\,\mathrm{d}B(t) + b\big(X(t)\big)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}L(t),$$

denoted by $RE_x(\sigma, b)$ when the starting point is $X_0 = x$. Here the time interval is $[0, 1]$ and the barrier $Z = (Z(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$ is *any* continuous curve in $\mathbb{R}$. Z may also be *random* but is then assumed to be *independent* of the Brownian motion B driving the "reflected diffusion" X. We say that a pair of continuous processes (X, L) is a solution of $RE_x(\sigma, b)$ with barrier Z if

- $X_0 = x$ and for $0 \leqslant t \leqslant 1$, $X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}s + L_t$;
- If $x > Z_0$ (resp. $x < Z_0$), then L is *non-decreasing* (resp. *non-increasing*) and $X_t \geqslant Z_t$ (resp. $X_t \leqslant Z_t$) for $0 \leqslant t \leqslant 1$; and, in both cases, $\int_0^1 1_{(X_t \neq Z_t)}\,\mathrm{d}L_t = 0$.

Adresse e-mail : Florin.Soucaliuc@math.u-psud.fr (F. Soucaliuc).

S1631-073X(02)02376-2/FLA

We assume that $a \equiv \sigma^2/2$ is C^1-continuous and does not vanish on $\mathbb{R}$ (i.e., $a(x) > 0$ for all $x \in \mathbb{R}$), and that b is continuous. We also assume that, for any $x \in \mathbb{R}$, path uniqueness holds for $RE_x(\sigma, b)$ and $RE_x(\sigma, b^*)$, and there exists a solution for the SDE $E_x(\sigma, b)$, resp. $E_x(\sigma, b^*)$. (For example, path uniqueness holds for $RE_x(\sigma, b)$ if b est Lipschitz-continuous and if σ is Höldér-continuous of index $\geqslant 1/2$.) One may then define (uniquely) the following solutions (x and z are two fixed points in $\mathbb{R}$):

– (X, L) is a solution of $RE_x(\sigma, b)$ with barrier Z, and on the other hand Z is a time-reversed [1] solution of $E_z(\sigma, b^*)$;
– (Z', L') is a time-reversed solution of $RE_z(\sigma, b^*)$ with barrier $\check{X}'$, and on the other hand X' is a solution of $E_x(\sigma, b)$.

THEOREM. – *Under the above assumptions, the two pairs of processes* (X, Z) *and* (X', Z') *have the same law.*

In particular, X is a diffusion associated with (a generator of coefficients) $a = \sigma^2/2$ and b, and Z' is a time-reversed diffusion associated with a and b^*. Our central case is concerned with pairs of conjugate squared Bessel processes (i.e., of respective dimensions δ and $2 - \delta$).

1. Introduction

Soit un mouvement brownien $B = (B(t), 0 \leqslant t \leqslant 1)$ issu d'un point $B(0) = x$ de $\mathbb{R}$, et soit d'autre part g une courbe quelconque de C[0, 1] (l'espace des fonctions continues de [0, 1] dans $\mathbb{R}$), telle que $g(0) \neq x$. Supposons tout d'abord que $g(0) < x$. La *réflexion* (au sens de Skorokhod) de B sur la « barrière » g est alors l'unique processus *continu* $X = (X(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$ tel que, en posant $L := X - B$, on ait

(i) $X(0) = x$ et $X(t) \geqslant g(t)$ pour tout $0 \leqslant t \leqslant 1$;
(ii) Le processus $L = (L(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$ est (continu) croissant et $\int_0^1 1_{X(t) \neq g(t)}\, \mathrm{d}L(t) = 0$.

Heuristiquement, on conçoit $X \equiv B + L$ comme un mouvement brownien « perturbé » aux seuls instants où il touche la barrière g par l'addition de « poussées » $\mathrm{d}L(t)$, et contraint de cette façon de rester « du même côté » de g.

Le lemme de Skorokhod (*voir* par exemple [6]) montre que le processus X (que nous noterons B_g dans la suite) est déterminé par la description précédente et qu'il peut aussi être décrit de façon explicite par

$$B_g(t) = B(t) + \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \bigl(B(s) - g(s)\bigr)_- \tag{1}$$

(a_- désigne la partie négative du nombre réel a). On étend de façon symétrique et similaire la définition de B_g au cas où $g(0) > x$.

Soit $\beta = (\beta(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$ un mouvement brownien *rétrograde* issu d'un point $\beta(1) = x'$ (c'est-à-dire, $(\beta(1 - t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$ est un mouvement brownien issu de x') indépendant de B. Dans l'article [10], nous avons observé que B_β *est lui-même un mouvement brownien*. En fait, il s'avère que B et β jouent des rôles symétriques : si on considère de plus la réflexion *rétrograde* (i.e. effectuée « à rebours ») de β sur B — notons-la β^B — alors les lois des couples (B_β, β) et (B, β^B) sont identiques. Dans [10], la preuve (simple) procède par « discrétisation » : un argument combinatoire permet d'observer une identité en loi analogue lorsque les mouvements browniens sont remplacés par des marches aléatoires discrètes, puis le résultat s'en déduit par passage à la limite. Dans [9], des preuves alternatives sont proposées directement dans le cadre « continu », au moyen de calculs explicites de certaines lois et d'une idée de réflexion bidimensionnelle.

L'objet de cette Note est de présenter la généralisation de ce résultat au cas où B et β sont remplacés par des diffusions. Dans ce cas, comme nous allons le voir, il faut que ces diffusions soient *conjuguées* (ou encore *duales*, au sens de Siegmund). Notons que les preuves proposées dans [10,9] ne se généralisent pas simplement au-delà du cas des mouvements browniens : une expression « simple » telle (1) par exemple n'existe plus. Les preuves détaillées des résultats généralisés se trouvent dans la thèse [11].

Pour citer cet article : F. Soucaliuc, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1119–1124

2. Diffusions réfléchies

Les *équations différentielles stochastiques* (EDS) *avec réflexion* ont fait depuis Skorokhod [8] l'objet de nombreuses études sous des angles divers (e.g., [1,2,4]). Leur prototype correspond généralement à une « EDS » formelle du type

$$\mathrm{d}X(t) = \sigma\big(X(t)\big)\,\mathrm{d}B(t) + b\big(X(t)\big)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}L(t), \tag{2}$$

dont une solution X est un processus continu issu d'un point prescrit $X(0) = x$ et sous la contrainte de propriétés trajectorielles pour X, L et et la barrière (donnée) g comme dans le paragraphe précédent (par exemple, dans le cas où $x > g(0)$, les conditions (i), (ii)).

Un formalisme possible (inspiré pour l'essentiel de [5] et [3]) est le suivant. Par un *contexte* (*set-up* en anglais)

$$\big\{(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}, P), B;\ (U, Z)\big\} \tag{3}$$

on entendra que : $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ est un espace de probabilité filtré satisfaisant les *conditions habituelles* (*cf.* e.g. [5]) et $B = (B_t, 0 \leqslant t \leqslant T)$ est un $(\mathcal{F}_t)$-*mouvement brownien* sur cet espace ; de plus, le couple (U, Z) (où $Z = (Z_t,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$) est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-*mesurable* sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\{(x, g);\ x \in \mathbb{R},\ g \in C[0, T],\ g(0) \neq x\}$.

On appelle le couple (U, Z) les *conditions initiales* du contexte : U et Z correspondent respectivement à la position initiale (de la « diffusion réfléchie » X) et à la courbe-barrière, et ce sont des *données* du problème, tout comme les coefficients σ et b (mesurables, localement bornés). L'*EDS avec réflexion* associée sera désignée par $RE(\sigma, b)$. Plus précisément, par une *solution* (X, L) de $RE(\sigma, b)$ on entend la donnée d'un *contexte* (3), et sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}, P)$ d'un couple de processus réels continus, $(\mathcal{F}_t)_t$-adaptés $((X_t, L_t),\ 0 \leqslant t \leqslant T)$, tels que, p.s.,

– $X_0 = U$ et pour $0 \leqslant t \leqslant T$, $X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}s + L_t$;
– Si $X_0 > Z_0$ (resp. $X_0 < Z_0$), alors L est *non-décroissant* (resp. *non-croissant*) et $X_t \geqslant Z_t$ (resp. $X_t \leqslant Z_t$) pour $0 \leqslant t \leqslant T$; dans tous les cas, $\int_0^T 1_{(X_t \neq Z_t)}\,\mathrm{d}L_t = 0$.

On peut alors étendre les notions d'existence/unicité faible/forte, unicité trajectorielle dans ce formalisme [11] de manière similaire à leurs homonymes en théorie des EDS sans réflexion. De même, on peut montrer pour les EDS avec réflexion :

– *l'existence et unicité d'une solution forte dans le cas des coefficients lipschitziens* (celle-ci pouvant se construire par la méthode des approximations successives de Picard) ;
– *le théorème de Yamada–Watanabe, assurant en particulier que l'unicité trajectorielle implique l'unicité en loi* ;
– *l'unicité trajectorielle pour σ höldérien d'indice supérieur ou égal à* $1/2$ *et b lipschitzien* (permettant notamment de traiter le cas des processus de Bessel) ;
– *l'existence faible d'une solution pour des coefficients continus bornés avec $\sigma > 0$.*

Accessoirement un théorème d'approximation de solutions d'*EDS avec réflexion* par des processus discrets peut être établi. Les preuves de ces résultats sont essentiellement une réécriture de celles du cadre classique (i.e. de la théorie des EDS sans réflexion). Elles se trouvent dans [11], mais il est fort probable qu'elles aient été rédigées sous une forme voisine (ou dans des cas particuliers) auparavant.

3. Réflexion entre diffusions conjuguées

Une solution Y de l'EDS « classique » (sans réflexion)

$$\mathrm{d}Y_t = \sigma(Y_t)\,\mathrm{d}B_t + b(Y_t)\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

est une diffusion de générateur infinitésimal G de coefficients a et b :

$$Gf(x) = a(x)\,\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) + b(x)\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x), \tag{5}$$

où $a := \frac{1}{2}\sigma^2$. Supposons a de classe C^1. La diffusion *conjuguée* (*cf.* [12]) est alors par définition associée au générateur G^* de coefficients a et b^*, où $b^*(x) = a'(x) - b(x)$. On désignera par $E(\sigma, b)$ l'EDS (4), par $E_y(\sigma, b)$ si la position initiale $Y_0 = y$ était prescrite. Pour simplifier on se limite dorénavant, sans perte de généralité, au cas $T = 1$.

Dans le théorème suivant, on supposera que $a \equiv \sigma^2/2$ est de classe C^1 et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (i.e. $a(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), et que b est continu. On suppose qu'il y a unicité trajectorielle pour $RE(\sigma, b)$ et resp. $RE(\sigma, b^*)$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une solution de l'EDS classique $E_x(\sigma, b)$, resp. $E_x(\sigma, b^*)$.

Notons que la condition d'unicité trajectorielle pour $RE(\sigma, b)$ est satisfaite dès lors que b est lipschitzienne (i.e. $|b(x) - b(x')| \leqslant K|x - x'|$ pour un $K > 0$ et tous $x, x' \in \mathbb{R}$) et que σ vérifie

$$\left|\sigma(x) - \sigma(x')\right|^2 \leqslant \rho\left(|x - x'|\right) \quad \text{pour tous } x, x' \in \mathbb{R},$$

où ρ est une fonction borélienne sur $\mathbb{R}_+$ qui envoye $]0, +\infty[$ dans lui-même et vérifiant $\int_{0+} \rho(u)^{-1}\,\mathrm{d}u = +\infty$ (par exemple σ höldérienne d'indice supérieur ou égal à $1/2$).

On peut alors affirmer que les équations $RE(\sigma, b)$, et $RE(\sigma, b^*)$, ainsi que $E(\sigma, b)$ et $E(\sigma, b^*)$ sont *exactes*.[2] On peut donc définir les deux solutions suivantes (x et z désignant deux points fixés de $\mathbb{R}$) :

- (X, L) est solution de $RE(\sigma, b)$ relativement à un certain contexte de condition initiale (x, Z), et par ailleurs Z est solution rétrograde de $E_z(\sigma, b^*)$;
- (Z', L') est solution rétrograde de $RE(\sigma, b^*)$ relativement à un certain contexte de condition initiale $(z, \check{X}')$, et par ailleurs X' est solution de $E_x(\sigma, b)$.

Par solution *rétrograde* on entend tout simplement le *retournement* dans le temps d'une solution. Plus précisément, si (X, L) est solution de $RE(\sigma, b)$ associée à un contexte (3), alors on dira que $(\check{X}, \check{L})$ est solution *rétrograde* de la même équation (et relativement au même contexte), ou pour toute fonction $f(t)$ de $C[0, 1]$ on désigne par $\check{f}$ la fonction $\check{f} : t \mapsto f(1 - t)$. De même si Y est solution de $E_y(\sigma, b)$) alors on dira que $\check{Y}$ est solution *rétrograde* de la même équation.

THÉORÈME 3.1. – *Sous les hypothèses précédentes, on a l'identité en loi suivante* :

$$\left((X_t, Z_t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\right) \overset{\text{(en loi)}}{=} \left((X'_t, Z'_t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\right). \tag{6}$$

En particulier, X est une diffusion associée à (un générateur de coefficients) $a = \sigma^2/2$ et b, et Z' est une diffusion rétrograde associée à a et b^*.

Une motivation pour étudier ces problèmes provient du lien avec certains processus auto-répulsifs qui sont limite d'échelle de marches aléatoires renforcées discrètes [12]. Les limites ont alors des propriétés d'invariance par changement d'échelle, et ceci amène naturellement à considérer le cas où les diffusions en jeu sont des *carrés de processus de Bessel* (e.g., [5]), c'est-à-dire que $\sigma(x) = 2\sqrt{x}$ (sur l'espace d'états $[0, +\infty)$) et $b(x) = \delta$, où $\delta \in \mathbb{R}$ correspond à la dimension. À cause de la forme de l'espace des états une condition de réflexion/absorption au point frontière 0 est maintenant nécessaire. Dans l'enoncé suivant on désigne par l'abréviation BESQ^δ un carré de processus de Bessel de dimension $\delta \in \mathbb{R}$ et on suppose que $\delta < 2$.

THÉORÈME 3.2. – *Considérons un couple* (X, Z) *qui est tel que* Z *est un* $\mathit{BESQ}^{2-\delta}$ rétrograde *et que* X *est un* BESQ^δ *indépendant* réfléchi sur Z *et* absorbé en 0. *Considérons, d'autre part, la situation symétrique qui consisterait à inverser les rôles du* BESQ^δ *et resp. du* $\mathit{BESQ}^{2-\delta}$: *c'est-à-dire, on suppose cette fois que que* X' *est un* BESQ^δ absorbé en 0, *et que* Z' *est un* $\mathit{BESQ}^{2-\delta}$ rétrograde *réfléchi sur* $\widetilde{X}$. *On a alors l'identité en loi suivante* :

$$(X, Z) \overset{\text{(en loi)}}{=} (X', Z'). \tag{7}$$

Ci-dessus, les points dont sont issus les processus sont respectivement $X_0 = X'_0 = a$ et $Z_1 = Z'_1 = a'$, avec a, a' deux points quelconques de $\mathbb{R}_+$. En particulier, les diffusions réfléchies X et Z' sont elles-mêmes des carrés de processus de Bessel (X est un BESQ^δ absorbé en 0, et Z' est un $\mathrm{BESQ}^{2-\delta}$ rétrograde).

Avec $\delta = 1$ on retrouve le cas des mouvements browniens de l'introduction (sous une condition de réflexion/absorption en 0, *cf.* [10]).

La notion de conjugaison rejoint celle de *dualité* au sens de Siegmund [7]. Deux diffusions X et Y sont duales au sens de Siegmund si la relation

$$P\big(X(T) > a' \mid X(0) = a\big) = P\big(Y(T) < a \mid Y(0) = a'\big) \tag{8}$$

est valable pour tous $a, a' \in \mathbb{R}$ et $T > 0$. (En fait, cette notion se réfère chez Siegmund uniquement à des diffusions positives, donc a, a' sont limités à $\mathbb{R}_+$ et à (8) correspond alors une condition de réflexion/absorption en 0 ; il en est d'ailleurs de même pour la notion de dualité chez Tóth [12].) L'identité (p.s.) triviale $\{X(T) > a'\} = \{Z(0) < a\}$ dans le Théorème 3.1 montre que X et $Y = \check{Z}$ sont nécessairement duales. On constate ainsi l'identification *conjugaison-dualité* : on atteint la généralisation « maximale » envisageable pour notre résultat de départ (le cas des mouvements browniens rappelé dans le premier paragraphe).

Une observation concernant les preuves des Théorèmes 3.1 et 3.2. – Ces preuves sont basées sur des constructions comme limites d'approximations discrètes. Pour prouver l'équivalent discret de l'identité en loi (6), l'argument est similaire à celui déjà employé dans le cas des mouvements browniens [10], mais il s'avère qu'il n'est appliquable qu'à des processus discrets du type *« marches aléatoires »* (i.e. ne faisant que des sauts de 1 ou -1 modulo changement d'echelle). Les résultats d'approximations discrètes mentionnés dans la section prédédente (qui utilisent des processus discrets faisant des pas de $+1$, -1, *ou* 0), doivent donc être spécialisés de manière à éviter les sauts nuls. Notons que, déjà pour une diffusion (sans réflexion) de générateur (5) « convenable », il est relativement facile de l'approcher par des chaînes de Markov S^N faisant seulement des pas de $+1$, -1, ou 0 (il suffit de faire en sorte que

$$\big(p_x^N + q_x^N\big)/2 \to a(x) \quad \text{et} \quad \sqrt{N}\big(p_x^N - q_x^N\big) \to b(x) \quad \text{quand } N \to \infty,$$

où p_x^N, q_x^N et $r_x^N = 1 - p_x^N - q_x^N$ désignent les probabilités d'une transition de x vers $x + \frac{1}{\sqrt{N}}$, $x - \frac{1}{\sqrt{N}}$ et resp. x pour S^N, les instants des transitions étant $t_i^N = \frac{i}{N}$, $i = 0, 1, \ldots, N$) ; mais qu'en revanche cela est un peu plus délicat si on souhaite que S^N soit une *marche aléatoire*, c'est-à-dire, que des transitions $x \to x$ soient exclues. (Si on prend simplement $r_x = 0$ ci-dessus, on constate qu'une telle construction ne peut convenir qu'au cas où a est constant, à cause de $p_x^N + q_x^N \equiv 1$.) Pour dépasser cette restriction on utilise l'expédient suivant. On fait pour les probabilités de transition de la marche aléatoire S^N un choix judicieux, *différent* sur les temps *pairs* de celui sur les temps *impairs*. Alors, en regardant S^N *seulement sur les instants pairs*, on observe une chaîne de Markov faisant des pas de $+1$, -1, *ou* 0 (modulo changements d'échelle) ce qui nous ramène au cas où on sait assurer la convergence faible vers la diffusion souhaitée.

[1] For any continuous path f the *time-reversed* path $\check{f}$ is defined as $\check{f} : t \mapsto f(1-t)$.

[2] $RE(\sigma, b^*)$ est dite *exacte* si pour tout contexte (3) il existe (à indistinguabilité près) exactement *une* solution associée à ce contexte (*cf.* [5] pour la notion correspondante dans le cadre classique).

Références bibliographiques

[1] E. Cépa, Problème de Skorokhod multivoque, Ann. Probab. 26 (2) (1998) 500–532.

[2] N. El Karoui, I. Karatzas, A new approach to the Skorokhod problem and its applications, Stochastics Stochastics Rep. 34 (1991) 57–82. Correction in 36 (1991) 265.

[3] N. Ikeda, S. Watanabe, Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, North-Holland, Amsterdam, 1989.

[4] H.P. McKean Jr., Skorokhod's stochastic integral equation for a reflecting barrier diffusion, J. Math. Kyoto Univ. 3 (1963) 85–88.

[5] L.C.G. Rogers, D. Williams, Diffusions, Markov Processes, and Martingales, Vol. II, Wiley Ser. Probab. Math. Statist., Wiley, New York, 1987.

[6] D. Revuz, M. Yor, Continuous Martingales and Brownian Motion, Springer, 1991.
[7] D. Siegmund, The equivalence of absorbing and reflecting barrier problems for stochastically monotone Markov processes, Ann. Probab. 4 (6) (1976) 914–924.
[8] N. Skorohod, Stochastic differential equations in bounded regions, Theory Probab. Appl. VI (1) (1961–1962) 264–274; VII (1) 7–23.
[9] F. Soucaliuc, W. Werner, Remarks on reflecting Brownian motions, Elec. Comm. Probab. (2002), à paraître.
[10] F. Soucaliuc, B. Tóth, W. Werner, Reflection and coalescence between one-dimensional Brownian paths, Ann. Inst. H. Poincaré 36 (2000) 509–536.
[11] F. Soucaliuc, Réflexion, coalescence et retournement du temps pour certaines familles de diffusions, Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, 2001.
[12] B. Tóth, Generalized Ray–Knight theory and limit theorems for self-interacting walks on $\mathbb{Z}$, Ann. Probab. 24 (1996) 1324–1367.