

Astérisque

ALAIN GENESTIER

JACQUES TILOUINE

Systèmes de Taylor-Wiles pour GSp_4

Astérisque, tome 302 (2005), p. 177-290

http://www.numdam.org/item?id=AST_2005__302__177_0

© Société mathématique de France, 2005, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SYSTÈMES DE TAYLOR-WILES POUR GSp_4

par

Alain Genestier & Jacques Tilouine

Résumé. — Dans cet article, nous mettons en œuvre la méthode des systèmes de Taylor-Wiles dans le cas du groupe GSp_4 . Nous démontrons ainsi que certaines représentations galoisiennes symplectiques ρ de rang quatre à valeurs p -adiques, de poids de Hodge-Tate réguliers et p -petits, proviennent de formes modulaires de Siegel cuspidales propres cohomologiques. On doit supposer pour cela un certain nombre d'hypothèses. Elles concernent la modularité de la représentation résiduelle $\bar{\rho} = \rho \pmod{p}$, la grande taille de son image, le caractère ordinaire ou cristallin de la représentation ρ en p , et, si l'on inclut un conducteur auxiliaire, des conditions de minimalité aux premiers divisant le conducteur, qui généralisent celles introduites par Wiles pour GL_2 . Nos hypothèses sont naturelles mais certaines (principalement la modularité résiduelle) semblent difficiles à vérifier.

Abstract (Taylor-Wiles systems for GSp_4). — In this paper, we apply the method of Taylor-Wiles systems in the case of the group GSp_4 . We thus show that certain symplectic rank four Galois representations ρ with p -adic values and p -small regular Hodge-Tate weights, do come from cohomological cuspidal Siegel eigenforms. For this purpose, one needs to assume certain assumptions. They deal with the residual modularity of $\bar{\rho} = \rho \pmod{p}$, the large size of its image, the ordinarity or crystallineness of ρ at p , and, if one includes an auxiliary conductor, some minimality conditions for ρ at primes dividing the conductor, which generalize those introduced by Wiles for GL_2 . Our assumptions are natural, but some (mainly the residual modularity) are difficult to verify.

1. Introduction

Soit $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Le but de ce travail est d'établir, sous un certain nombre d'hypothèses, que les représentations galoisiennes $\rho' : \Gamma \rightarrow \mathrm{GSp}_4(\bar{\mathbb{Z}}_p)$ congrues à une représentation provenant d'une forme modulaire de Siegel cohomologique, proviennent

Classification mathématique par sujets (2000). — 11F32, 11F46, 11F80, 11G18, 11R34, 11R39.

Mots clefs. — Représentations galoisiennes, variétés de Siegel, mauvaise réduction, cycles évanescents, niveau parahorique, relations d'Eichler-Shimura, formes modulaires de Siegel.

elles-même de telles formes de Siegel. Notre approche suit de près celle de Harris-Taylor [24] elle-même inspirée de [65] et [57]. Plusieurs étapes de ce travail valent pour le groupe GSp_{2g} , $g \geq 2$. Nous essaierons de garder cette généralité dans les sections qui le permettent ; ce sont celles qui (voir Sect. 4) traitent de la cohomologie des variétés de Siegel. Par contre, pour les propriétés locales des représentations galoisiennes et de la cohomologie galoisienne, nous nous limiterons à $g = 2$. Soit $\pi = \pi_N \otimes \pi^N$ une représentation cuspidale cohomologique de $G = \mathrm{GSp}_4$ de niveau N (*i.e.* telle que π^N soit non ramifiée) ; soit p un nombre premier et un plongement $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. On peut associer à π et ι_p une représentation galoisienne p -adique (voir [33], [34], [56] et [63]). Plus précisément, il existe un corps p -adique F contenant les valeurs propres des opérateurs de Hecke sur π et un homomorphisme continu

$$\rho_\pi : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}_4(F)$$

non ramifié hors de Np et tel que pour tout premier ℓ ne divisant pas Np , le polynôme caractéristique du Frobenius géométrique en ℓ est égal au polynôme de Hecke (unitaire et de degré 4) $P_{\pi,\ell}(X) = \det(X \cdot 1_4 - t_{\pi,\ell})$ où $t_{\pi,\ell}$ désigne le paramètre de Hecke de π_ℓ (qui est le produit du paramètre de Satake par $\ell^{3/2}$). Supposons que p ne divise pas N , que $p-1$ soit plus grand que le poids motivique w_π de π et que π soit ordinaire en p (on dira aussi, plus correctement, que π_p est ordinaire pour ι_p). Soit \mathcal{O} l'anneau de valuation de F , ϖ une uniformisante de \mathcal{O} , k son corps résiduel.

On sait que ρ_π — si elle est semi-simple, *a fortiori*, irréductible — est autoduale à un facteur de similitude près (c'est en effet le cas pour les paramètres de Hecke) ; elle respecte donc, à un scalaire près, une forme bilinéaire non dégénérée ; on conjecture que cette forme est symplectique. Nous aurons besoin dans ce travail d'une hypothèse (RLI₂) de grande image pour la représentation résiduelle $\bar{\rho} = \rho_\pi \pmod{\varpi}$ (Sect. 2.2) ; cette hypothèse entraînera que $\bar{\rho}$ est à valeurs dans $G(k)$ et que ρ_π est à valeurs dans $G(\mathcal{O})$.

La représentation $\bar{\rho}$ est cristalline en p au sens de Fontaine-Laffaille [15] ; on la suppose minimale aux places de ramification, et ordinaire en p (voir Section 2). En fait, E. Urban a démontré pour $g = 2$ (voir [61]) que la condition d'ordinarité de ρ_π et donc de $\bar{\rho}$ est satisfaite si π_p est ordinaire et π_∞ est stable. Cette dernière condition est remplie pour π (*cf.* Th. 3.4.3 ci-dessous).

Le théorème principal de ce travail (voir Th. 2.2.7) affirme que l'anneau de déformations minimales de $\bar{\rho}$ s'identifie à une algèbre de Hecke localisée en l'idéal maximal associé à π et p et qu'un groupe de cohomologie de la variété de Siegel localisé en ce même idéal maximal est libre sur cette algèbre de Hecke. Pour le montrer, on introduit un système de Taylor-Wiles et on vérifie les conditions posées -indépendamment, par Diamond et Fujiwara. On utilise le résultat principal de [36] sur l'absence de torsion de la cohomologie à coefficients dans \mathcal{O} , localisée en un idéal maximal non-Eisenstein de l'algèbre de Hecke. Notre construction d'un système de Taylor-Wiles suit de près celle de [24]. Cependant plusieurs différences substantielles sont à noter. D'abord,

dans notre cas comme dans le travail original de Wiles [65], les variétés de Shimura considérées ne sont pas propres. Les cas traités dans [24] concernent des variétés de Shimura propres. Les difficultés causées par le bord sont résolues dans la section 7 de la manière suivante. Le problème de changement de base pour les cycles proches est en fait local : il s'agit de montrer qu'un morphisme de complexes de faisceaux est un quasi-isomorphisme. On utilise alors un Théorème de Berkovich pour se ramener à des schémas formels et on généralise la description des cartes formelles de la compactification toroïdale arithmétique de [13] de la variété de Siegel du cas de bonne réduction au cas de mauvaise réduction pour le parahorique de Klingen Π . Un lemme dont la preuve nous a été communiquée par G. Laumon permet alors de conclure.

Une autre différence tient au choix du niveau auxiliaire. Dans le présent travail, il est essentiellement de nature parahorique (à l'exception du cas S_1 si p ne divise pas $\ell^4 - 1$), voir Sect. 2.2.

La vérification des propriétés locales de la représentation galoisienne « modulaire universelle » en chaque nombre premier de Taylor-Wiles q occupe une grande partie de ce travail (Sect. 6-9). Suivant l'approche de [25], elle repose sur une « relation d'Eichler-Shimura » qui décrit l'action du groupe de décomposition D_q en q sur la χ -partie $H^{\bullet, \langle \cdot \rangle = \chi}$ de la cohomologie de la variété de Siegel $X_1(q)$ de niveau q (de type parahorique de Klingen), pour tout caractère non trivial $\chi : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathcal{O}^\times$ et où $\langle a \rangle$ désigne l'opérateur diamant de $a \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. Plus précisément, on a $H^{\bullet, \langle \cdot \rangle = \chi} = H_e \oplus H_m$ où H_e et H_m sont des espaces stables par D_q donnés par la cohomologie des composantes irréductibles X^e et X^m de la fibre spéciale de la mauvaise réduction de $X_1(q)$ (cf. Prop. 7.2.2). L'action du sous-groupe d'inertie I_q est triviale sur H_e et donnée par χ sur H_m . La relation d'Eichler-Shimura s'énonce alors : $P_q^e(\mathrm{Fr}_q) = 0$ sur H_e , et $P_q^m(\mathrm{Fr}_q) = 0$ sur $\chi^{-1} \otimes H_m$. Les polynômes P_q^e et P_q^m se définissent à l'aide de « transformations de Satake parahoriques » (voir section 3).

Les calculs de cohomologie galoisienne locale et globale (Section 10), dont le but est de vérifier les conditions de contrôle (CR) et (CG) de Sect. 5.1, doivent être modifiés pour tenir compte de l'autodualité symplectique.

La condition de contrôle des modules M_Q avec action fidèle des algèbres de Hecke est vérifiée dans la Section 11. L'argument (Prop. 11.1.2) utilise de façon essentielle l'absence de torsion démontrée dans [36] et les calculs algébriques sur les algèbres de Hecke parahoriques établis dans la Section 3.

Nous donnons dans la Section 12 une application de notre résultat au calcul de l'ordre du groupe de Selmer de la représentation adjointe d'une forme de Siegel f propre nouvelle (au sens de [49]) de multiplicité un, en termes de produits de Petersson et d'une période, dans l'esprit d'une formule de Bloch-Kato pour ce motif. Le lien explicite avec une telle formule reste cependant à préciser (voir Sect. 12, remarque finale). Des calculs de Yoshida [68] et un travail récent d'Ichino [29] prédisent la forme de la période de Deligne pour la valeur critique en $s = 1$ de la fonction L du

motif adjoint de f en termes du carré de Petersson d'une forme non holomorphe f^{Whitt} de même système de valeurs propres de Hecke que f . Ceci fournit un lien conjectural entre les périodes que nous obtenons et les carrés de Petersson pour f et f^{Whitt} .

D'autre part, notre théorème fournit un outil qui devrait permettre de répondre dans certains cas — sous l'hypothèse que pour un certain nombre premier p , la représentation galoisienne p -adique de ce motif est congrue modulo p à celle d'une forme de Siegel — à la question (formulée en termes un peu vagues) : un motif défini sur \mathbb{Q} symplectique de rang 4 de type de Hodge adéquat provient-il d'une forme de Siegel de genre 2 ?

L'un de nous reviendra sur ces applications dans un travail ultérieur.

Les auteurs souhaitent témoigner leur reconnaissance à M. Harris et R. Taylor qui leur ont généreusement communiqué leur preprint [24], ainsi qu'à G. Laumon qui a fourni la démonstration du Lemme 7.1.4. Des échanges avec A. Abbès, M. Dimitrov, H. Hida, A. Mokrane et F. Oort ont également été très utiles. Le premier auteur remercie l'IHES, où il a séjourné deux ans pendant lesquels une partie appréciable de sa contribution a été rédigée, ainsi que le Fields Institute et le TIFR. Le second auteur remercie les Universités de Muenster, Rome Tor Vergata, UCLA et le Harish-Chandra Institute. Tous deux ont apprécié les excellentes conditions de travail dont ils ont bénéficié dans ces institutions.

Enfin, la lecture détaillée et critique du texte par le rapporteur a été fort utile ; nous l'en remercions. Les erreurs et obscurités restantes sont bien sûr de la seule responsabilité des auteurs.

Table des matières

1. Introduction	177
2. Notations, Hypothèses et Théorème	181
3. Algèbres de Hecke et représentations induites	188
4. Déformations de la représentation résiduelle	203
5. Systèmes de Taylor-Wiles	212
6. Modèles entiers, modèles locaux	217
7. Cycles proches et monodromie	230
8. Congruences d'Eichler-Shimura	239
9. Relation entre $R_{*,Q}$ et T_Q	264
10. Cohomologie galoisienne	267
11. Fin de la démonstration du Théorème 2.2.7	278
12. Application au calcul de l'ordre du groupe de Selmer	283
Appendice	285
Références	287

2. Notations, Hypothèses et Théorème

2.1. Notations. — Soit

$$G = \mathrm{GSp}_{2g} = \{X \in \mathrm{GL}_{2g}; {}^tXJX = \nu \cdot J\}$$

le schéma en groupes réductif défini sur \mathbb{Z} par la matrice antisymétrique $2g \times 2g$ $J = \begin{pmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{pmatrix}$ donnée par blocs $g \times g$, où s est antidiagonale de coefficients non nuls égaux à 1; $\nu = \nu(X) \in \mathbb{G}_m$ est le facteur de la similitude symplectique X . Le sous-groupe de Borel standard B , resp. son radical unipotent N , resp. le tore maximal standard T de G consiste en les matrices triangulaires supérieures, resp. unipotentes supérieures, resp. diagonales de G . On note

$$T \ni t = \mathrm{diag}(t_g, \dots, t_1, \nu \cdot t_1^{-1}, \dots, \nu \cdot t_g^{-1})$$

Soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}$ le système de racines simples associées à (G, B, T) où α_1 désigne la première racine courte et α_g la racine longue. Soit W_G le groupe de Weyl de G ; on note $s_i \in W_G$ la réflexion associée à la racine simple α_i . On note P_i le parabolique maximal standard (*i.e.* contenant B) associé à la racine simple α_i . P_1 s'appelle le parabolique de Klingen et P_g le parabolique de Siegel. Pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_g$ on note $A' = s^t A^{-1} s$. On a

$$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \mathrm{GSp}_{2g-2} & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in G \right\}, \quad P_g = \left\{ \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & \nu A' \end{pmatrix} \in G; A \in \mathrm{GL}_g, \nu \in \mathbb{G}_m \right\}$$

La décomposition de Levi standard de P_i est notée $P_i = M_i U_i$; on a $M_i \cong \mathrm{GL}_i \times \mathrm{GSp}_{2g-2i}$ (on identifie GSp_0 et \mathbb{G}_m). Le parabolique maximal de Siegel standard est associé à la racine longue. Son Levi standard est isomorphe à $\mathbb{G}_m \times \mathrm{GL}_g$. Les algèbres de Lie des groupes G, B, N, T sont notées $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{n}, \mathfrak{t}$. On note \mathfrak{n}^- l'algèbre nilpotente opposée à \mathfrak{n} . On a

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}.$$

Pour tout poids dominant λ pour (G, B, T) , on note λ^* son dual (*i.e.* le poids dominant associé à la représentation de Weyl duale). Soit Φ^+ l'ensemble des racines positives; on pose $\rho = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$. Tout caractère λ de T est donné par un $(g+1)$ -uplet $(a_g, \dots, a_1; c) \in \mathbb{Z}^{g+1}$, où $c \equiv a_g + \dots + a_1 \pmod{2}$ via

$$\lambda(t) = t_g^{a_g} \dots t_1^{a_1} \cdot \nu^{(c-s)/2}$$

Ici et dans la suite, s désigne le degré $|\lambda| = a_g + \dots + a_1$ de la partie semi-simple de λ . Le caractère est dominant si $a_g \geq \dots \geq a_1 \geq 0$. Soit $d = |\rho| = g(g+1)/2$. On pose

$$\mathbf{w} = |\lambda + \rho| = d + s = \sum_{i=1}^g (a_i + i)$$

Soit C_∞ le composé du compact maximal standard K_∞ et du centre de $G_\infty = G(\mathbb{R})$. Soit $\mathbb{A} = \mathbb{A}_f \times \mathbb{Q}_\infty$ l'anneau des adèles rationnelles; on décompose le groupe des \mathbb{A} -points de G en $G(\mathbb{A}) = G_f \times G_\infty$. Pour tout sous-groupe ouvert compact net L

de $G(\widehat{\mathbb{Z}})$ considérons la variété de Siegel adélique $S_L = G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}) / LC_\infty$; c'est une variété complexe lisse de dimension d . Si $L \subset L'$ sont deux sous-groupes ouverts compacts de $G(\widehat{\mathbb{Z}})$, on a un morphisme de transition $\phi_{L,L'} : S_L \rightarrow S_{L'}$ qui est fini.

Soit $S = \varinjlim S_L$ la provariété associée au système filtrant $(S_L, \phi_{L,L'})$. Soit λ un poids dominant de G et $V_{\lambda/\mathbb{Z}}$ une structure entière de la représentation de Weyl associée. Soit p premier, $p - 1 > d + s$, p premier à N . Pour tout module A sur \mathbb{Q} ou \mathbb{Z}_p , et pour tout sous-groupe compact ouvert net L non ramifié en p de $G(\widehat{\mathbb{Z}})$, on note $V_\lambda(A)$ le système local sur S_L associé à $V_\lambda \otimes A$.

Soit K un sous-groupe ouvert compact de $G(\widehat{\mathbb{Z}})$, non ramifié en p , non nécessairement net. Soit $\pi = \pi_f \otimes \pi_\infty$ une représentation cuspidale telle que $\pi^K \neq 0$ et que π_∞ soit dans la série discrète de paramètre de Harish-Chandra $\lambda^* + \rho$. π intervient donc dans $H^d(S, V_\lambda(\mathbb{C}))^K$. On se permet de noter $H^d(S_K, V_\lambda(\mathbb{C}))$ cet espace d'invariants (notation cohérente avec le cas où K est net). Soit E le corps de nombres engendré par les valeurs propres des opérateurs de Hecke hors de N . On fixe un plongement p -adique ι_p de $\overline{\mathbb{Q}}$ et un corps p -adique F contenant $\iota_p(E)$. On suppose π unitaire, le paramètre central c de λ satisfait donc $c = s$.

Le poids de Deligne du système local $V_\lambda(F)$ est égal à $c = s$ et celui de la représentation F -rationnelle $W_\pi = \text{Hom}_{\text{Hecke}}(\pi_f^K, H^d(S_K, V_\lambda(F)))$ est $\mathbf{w} = d + s$. Par exemple, si $g = 2$, on a :

$$\mathbf{w} = a_1 + a_2 + 3.$$

On peut en outre montrer que W_π est E -rationnelle et pure de poids \mathbf{w} . On suppose que la représentation p -adique ρ_π associée à π est définie sur F . Soit \mathcal{O} l'anneau des entiers de F ; ϖ une uniformisante de \mathcal{O} et $k = \mathcal{O}/\varpi\mathcal{O}$ son corps résiduel.

Dans [36] pour g quelconque, est formulée une l'hypothèse de grande image résiduelle notée (RLI) pour ρ_π . On suppose pour le reste de cette section que $g = 2$. Fixons un \mathcal{O} -réseau stable de ρ_π et formons la représentation résiduelle $\bar{\rho} = \rho_\pi \pmod{\varpi}$. Dans cet article, nous formulons et utilisons une version plus forte (RLI₂) de l'hypothèse (RLI) (qui s'avère nécessaire pour certains calculs galoisiens du présent travail) :

Soit H le sous-groupe réductif de $G = \text{GSp}_4$ sur \mathbb{Z} égal au normalisateur dans G de $(\text{GL}_2 \times \text{GL}_2)^0$, ou à G tout entier. Noter que H n'est pas nécessairement connexe. On note H^0 sa composante neutre. Soit k' le sous-corps de k engendré par les réductions mod. ϖ des valeurs propres des opérateurs de Hecke non ramifiés agissant sur π . Soit $H' = \{h \in H(k') ; \nu(h) \in \text{Im } \nu \circ \bar{\rho}\}$. Notre hypothèse est alors

$$\text{(RLI}_2) \quad \text{Im } \bar{\rho} \sim H' \quad \text{dans } G(k')$$

et $\bar{\rho}(I_p) \subset H^0(k')$.

Remarques

(1) Cette hypothèse entraîne que ρ_π est symplectique (voir Lemme 4.2.4 du texte) ; on peut alors former $\nu \circ \rho_\pi$. Le caractère central de π s'exprime comme une puissance du module par un caractère de Dirichlet ω_π de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. Si l'on note encore ω_π son

avatar galoisien donné par $\omega_\pi(\text{Fr}_\ell) = \omega_\pi(\ell)$, et χ_p le caractère cyclotomique p -adique, on a la formule :

$$\nu \circ \rho_\pi = \chi_p^{-\mathbf{w}} \omega_\pi.$$

(2) Un résultat récent de D. Ramakrishnan [44] entraîne que pour $g = 2$, la représentation ρ_π est absolument irréductible pourvu que $(p + 1)/2 > \mathbf{w}_\pi = \mathbf{w}$.

(3) Soit $\omega : \Gamma \rightarrow \mathbb{F}_p^*$ le caractère cyclotomique modulo p . Comme $\nu \circ \bar{\rho} = \omega^{-\mathbf{w}} \cdot \bar{\omega}_\pi$, on voit que l'image de $\nu \circ \bar{\rho}$ contient le sous-groupe $\mathbb{F}_p^{*\mathbf{w}}$ des puissances \mathbf{w} -ièmes dans \mathbb{F}_p^* . On le voit en appliquant le théorème de la progression arithmétique : soit r un nombre premier représentant un élément quelconque de \mathbb{F}_p^* et congru à 1 mod. N . On a $\omega^{-\mathbf{w}}(\text{Fr}_r) \cdot \bar{\omega}_\pi(\text{Fr}_r) = r^\mathbf{w}$.

En particulier, si $p - 1 > \mathbf{w}$, on a $\nu \circ \bar{\rho} \neq 1$.

2.2. Conditions locales, énoncé du Théorème. — Soit $\chi_p : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique p -adique. Soit A une \mathcal{O} -algèbre.

Définition 2.2.1. — On dit qu'une représentation $\rho : \Gamma \rightarrow G(A)$ est ordinaire en p de poids $\underline{i} = (i_0, i_1, i_2, i_3)$ avec $i_0 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3$ (entiers de \mathbb{Z}) s'il existe une base symplectique dans laquelle

$$\rho|_{I_p} = \begin{pmatrix} \chi_p^{-i_0} & * & * & * \\ 0 & \chi_p^{-i_1} & * & * \\ 0 & 0 & \chi_p^{-i_2} & * \\ 0 & 0 & 0 & \chi_p^{-i_3} \end{pmatrix}$$

Soit $\Pi_\mathbf{w} = (0, a_1 + 1, a_2 + 2, a_1 + a_2 + 3)$. On s'intéressera dans ce texte à des représentations ordinaires de poids $\underline{i} = \Pi_\mathbf{w}$.

Soit D_p un groupe de décomposition en p . Pour toute $\alpha \in \mathcal{O}^\times$, soit $\xi(\alpha) : D_p \rightarrow \mathcal{O}^\times$ le caractère non ramifié d'un groupe de décomposition en p appliquant un Frobenius géométrique Fr_p sur α . Eric Urban a montré [61] le résultat suivant. Soit π une représentation cuspidale cohomologique de poids $a_2 \geq a_1 \geq 0$ non ramifiée en p et ordinaire en p au sens automorphe, c'est-à-dire que ses paramètres de Hecke $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p, \delta_p$ ont pour valuations p -adiques respectives 0, $a_1 + 1$, $a_2 + 2$, \mathbf{w} . Alors, la restriction de ρ_π à D_p est conjuguée à :

$$\begin{pmatrix} \xi(\alpha_p) & * & * & * \\ 0 & \xi(p^{-a_1-1}\beta_p)\chi_p^{-a_1-1} & * & * \\ 0 & 0 & \xi(p^{-a_2-2}\gamma_p)\chi_p^{-a_2-2} & * \\ 0 & 0 & 0 & \xi(p^{-\mathbf{w}}\delta_p)\chi_p^{-\mathbf{w}} \end{pmatrix}$$

On introduit la condition suivante qui jouera un rôle dans un corollaire du théorème principal.

(ORR) On dit que (π, p) satisfait la condition d'ordinarité régulière résiduelle si π est non ramifiée ordinaire en p et que l'on a soit $a_2 > a_1 > 0$, soit $a_1 = 0$ et $\alpha_p \not\equiv p^{-1}\beta_p \pmod{\varpi}$, soit $a_2 = a_1$ et $\beta_p \not\equiv p^{-1}\gamma_p \pmod{p^{a_1+1}\varpi}$.

Remarque. — Notons qu’il résulte de [49] Table 2, que si π est non ramifiée ordinaire en p , π est ordinaire régulière en p ; c’est-à-dire qu’on a (OR) soit $a_2 > a_1 > 0$, soit $a_1 = 0$ et $\alpha_p \neq p^{-1}\beta_p$, soit $a_2 = a_1$ et $\beta_p \neq p^{-1}\gamma_p$.

Soit S l’ensemble des facteurs premiers de N .

Définition 2.2.2. — On dira que la représentation $\bar{\rho} : \Gamma \rightarrow G(k)$ est S -bien ramifiée, si l’on a une partition $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ en sous-ensembles tels que

- (1) Si $\ell \in S_1$, $\bar{\rho}$ restreinte à I_ℓ est absolument irréductible;
- (2) Si $\ell \in S_2$, $\bar{\rho}|_{I_\ell}$ est de type $UN_{2,2}$ ou PR_2 :
 - $UN_{2,2}$ (unipotent à deux blocs de Jordan) : l’image de I_ℓ par $\bar{\rho}$ est engendrée par un conjugué de

$$\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- PR_2 (le cas peu ramifié)

$$\bar{\rho}|_{I_\ell} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\chi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\chi} \end{pmatrix}$$

où $\bar{\chi}$ est un caractère non trivial de $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell)/\mathbb{Q})$ et où le plan fixé par l’inertie et celui qui est χ -variant sont totalement isotropes.

- (3) Si $\ell \in S_3$, l’image de I_ℓ par $\bar{\rho}$ est engendrée par un conjugué de l’unipotent régulier standard

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 2.2.3

- (1) Noter que la matrice ε_2 est conjuguée dans G à

$$\varepsilon'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En fait il y a deux classes de conjugaison de matrices unipotentes d'ordre 2 dans $G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$: celle de ε_2 et celle de

$$\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & 0 & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

(2) On pourrait introduire l'ensemble S_4 des premiers ℓ pour lesquels l'image de l'inertie est de type $\mathrm{UN}_{1,2,1}$ (unipotente avec trois blocs de Jordan) c'est-à-dire que l'image de I_ℓ par $\bar{\rho}$ est engendrée par un conjugué de

$$\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cependant nous ne sommes pour le moment pas en mesure de montrer que les formes nouvelles pour le parahorique de Siegel en ℓ ont cette propriété, bien que cela soit prédit par la compatibilité des correspondances de Langlands locales et globales. C'est pourquoi nous ne considérons pas ce cas dans ce travail.

On suppose désormais que la représentation $\bar{\rho}_\pi$ est S -bien ramifiée.

Définition 2.2.4. — On dira qu'une déformation S -ramifiée $\rho : \Gamma \rightarrow G(A)$ de $\bar{\rho}_\pi$ est S -minimale si

- (1) Pour tout ℓ de S_1 , ρ restreinte à I_ℓ est géométriquement irréductible
- (2) Pour tout ℓ de S_2 , $\rho(I_\ell)$ est unipotent d'ordre deux ou

$$\rho|_{I_\ell} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi \end{pmatrix}$$

pour un caractère χ non trivial de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\ell(\zeta)/\mathbb{Q}_\ell)$.

- (3) Pour tout ℓ de S_3 , l'image de I_ℓ par ρ est engendrée par un conjugué de l'unipotent régulier standard ε

La compatibilité conjecturale de la correspondance de Langlands globale et de la correspondance locale en ℓ entraîne que les types S_i ci-dessus pour la restriction à I_ℓ de la représentation galoisienne p -adique ρ_π restreinte sont déterminés par la ℓ -composante π_ℓ de π . La liste complète des possibilités pour π_ℓ admettant un vecteur fixe par un sous-groupe parahorique, et la représentation du groupe de Weil-Deligne associée est donnée dans [49] (Table 3). On extrait de cette liste l'information suivante.

Conjecture

(1) Si π_ℓ et son changement de base à GL_4 restent supercuspidales pour tout changement de base à une extension non ramifiée de \mathbb{Q}_ℓ , ρ_π est de type 1 en ℓ .

(2) Si π_ℓ a une unique droite fixe par le parahorique de Klingen, ρ_π est de type $UN_{2,2}$ en ℓ si π_ℓ a un vecteur χ -propre pour un caractère χ non trivial de $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$: $\pi_\ell(x)v = \chi(a_{11}(x)) \cdot v$, pour tout $x \in G(\mathbb{Z}_\ell)$ tel que

$$x \equiv \begin{pmatrix} a_{11}(x) & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \pmod{\ell},$$

alors ρ_π est de type PR_2 en ℓ pour l'avatar galoisien de χ (normalisé par $\chi(\text{Fr}_q) = \chi(q^{-1})$ pour tout premier $q \neq \ell$).

(3) Si π_ℓ est de Steinberg i.e. possède un vecteur fixe par l'Iwahori et par aucun parahorique contenant strictement I , ρ_π est de type 3 en ℓ .

(4) Si π_ℓ a une unique droite fixe par le parahorique de Siegel, ρ_π est de type $UN_{1,2,1}$ en ℓ .

Le théorème suivant donne quelques informations sur cette conjecture ; il ne sera pas utilisé dans le texte.

Théorème 2.2.5. — Pour toute représentation cuspidale cohomologique π telle que sa représentation galoisienne associée ρ_π soit irréductible (et symplectique), on a les faits suivants :

(1) Si $\dim \pi_\ell^\Pi = 1$, Π désignant le parahorique de Klingen ou celui de Siegel, alors $\rho_\pi(I_\ell)$ est unipotent d'ordre au plus 2.

(2) Si π_ℓ possède un vecteur χ -variant pour le parahorique de Klingen (χ non trivial), alors ρ_π est de type PR_2 en ℓ .

Esquisse de démonstration. — La démonstration du point (1) du Théorème est donnée pour le parahorique de Klingen en 9.2.2, comme conséquence immédiate de l'analyse de la section 6.4 ; pour le parahorique de Siegel, on obtient d'abord que l'inertie est unipotente d'ordre au plus trois comme corollaire de l'analyse donnée dans l'appendice ; on en déduit qu'elle est d'ordre au plus deux par la condition de symplecticité.

Le point (2) résulte facilement de la Prop. 7.2.3. □

Remarques

(1) L'un de nous a établi [19] que lorsque π_ℓ est de Steinberg, ρ_π est de type S_3 en ℓ .

(2) Étant donnée une représentation cuspidale π' de représentation galoisienne associée $\rho_{\pi'}$, dans le cas (1) du Théorème, la question de discerner entre les deux classes de conjugaison d'unipotents d'ordre 2 ε_2 et η_2 dans $G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est délicate du

point de vue géométrique, mais devient triviale si on suppose que $\rho_{\pi'}$ est congrue à $\bar{\rho}_{\pi}$ supposée bien S -ramifiée.

(3) Dans un travail en préparation, on espère montrer que pour le parahorique de Klingen Π en ℓ , et une forme π' cuspidale cohomologique Π -nouvelle en ℓ (i.e. de type IIIa au sens de R. Schmidt [49]) et de représentation galoisienne irréductible symplectique, l'image de l'inertie est engendrée par ε_2 .

Pour tout nombre premier ℓ , notons

$$\Pi = \Pi_{1,\ell} \text{ resp. } \Pi^+ = \Pi_{1,\ell}^+ = \{x \in \Pi; a_{1,1}(x) \equiv 1 \pmod{\ell}\}, \text{ resp. } I = I_{\ell},$$

le parahorique de Klingen, resp. le parahorique de Klingen strict, resp. le sous-groupe d'Iwahori de $G(\mathbb{Z}_{\ell})$.

On a fixé un sous-groupe de niveau tel que $\pi^K \neq 0$. On décompose K en $K_{S_1} \times K_{UN_{2,2}} \times K_{PR_2} \times K_{S_3} \times K^S$. On pose la

Définition 2.2.6. — On dit que (π, p) est S -bon si :

- pour tout ℓ de type $UN_{2,2}$, $K_{\ell} = \Pi = \Pi_{1,\ell}$ et $\dim \pi_{\ell}^{\Pi} = 1$,
- pour tout ℓ de type PR_2 , $K_{\ell} = \Pi_{1,\ell}^+$ et π_{ℓ} possède un vecteur non nul χ -variant ($\chi \neq 1$) par $\Pi = \Pi_{1,\ell}$,
- pour tout ℓ de S_3 , $K_{\ell} = I_{\ell}$ et $\dim \pi_{\ell}^{\Pi} = 1$.

Remarque. — Notons qu'on ne pose aucune condition pour $\ell \in S_1$.

On se propose de démontrer le théorème suivant

Théorème 2.2.7. — Soit M un motif défini sur \mathbb{Q} , symplectique de rang 4 sur un corps de nombres E , de poids de Hodge $0, a_1 + 1, a_2 + 2, a_1 + a_2 + 3$ pour chaque plongement $E \hookrightarrow \mathbb{C}$ ($a_2 \geq a_1 \geq 0$). Soit $S = \text{Ram}(M)$. Soit \mathfrak{p} un idéal premier de $\overline{\mathbb{Q}}$ au-dessus d'un nombre premier p rationnel tel que

- $p - 1 > \max(4, \mathbf{w})$
- M a bonne réduction en p et est ordinaire en p de poids $\Pi_{\mathbf{w}}$

Soit $\rho = \rho_{M,\mathfrak{p}}$ la réalisation \mathfrak{p} -adique de M ; elle est en particulier cristalline en p . On suppose en outre

- $\bar{\rho} = \rho \text{ mod. } \mathfrak{p}$ satisfait (RLI₂).
- $\bar{\rho}$ est S -bien ramifiée et ρ est S -minimale pour $\bar{\rho}$,
- Pour chaque premier $\ell \in S_1$, on suppose de plus que p ne divise pas $\ell^4 - 1$,
- il existe une forme de Siegel π de poids cohomologique $(a_2, a_1; a_2 + a_1)$, telle que le couple (π, p) soit S -bon et tel que $\bar{\rho}$ coïncide avec la réduction modulo \mathfrak{p} de la représentation galoisienne ρ_{π} associée à (π, p) représentation de type minimal, associée à

Alors, il existe une représentation cuspidale cohomologique π' avec π'_{∞} dans le même paquet de Harish-Chandra que π_{∞} et un anneau de valuation discrète $\mathcal{O} \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$, tels que $\rho_{M,\mathfrak{p}}$ et $\rho_{\pi'}$ soient conjugués dans $G(\mathcal{O}) = \mathrm{GSp}_4(\mathcal{O})$.

Si on suppose de plus que (π, p) satisfait **(ORR)**, on peut supprimer l'hypothèse que le motif a bonne réduction en p à condition de supposer que sa réalisation p -adique ρ soit ordinaire en p (sans être nécessairement cristalline).

Remarques

(1) Soit $A(M) = A_1 A_2 A_3$ le conducteur d'Artin de $\rho_{M,p}$, décomposé en produit de ses facteurs premiers de type 1, 2 et 3. L'hypothèse de minimalité entraîne que les facteurs premiers de A_2 et A_3 sont des premiers de ramification modérée; plus précisément, la formule du conducteur d'Artin entraîne que A_2 , resp. A_3 est le carré, resp. le cube d'un entier sans facteurs carrés.

(2) Le couple (π', p) où π' désigne la représentation cuspidale fournie par le Théorème est S -bon.

Si $m = 1$, on peut aussi traiter le cas $p = 5$ et $w = 3$ et $H' = G(k')$.

(3) Rappelons que l'hypothèse **(ORR)** est satisfaite par exemple si $a_2 > a_1 > 0$; cependant, sous cette dernière condition, il résulte d'un théorème de B. Perrin-Riou [42] que la représentation ordinaire $\rho|_{D_p}$ est cristalline, et il n'y a rien de nouveau par rapport à l'énoncé principal.

Pour démontrer le théorème, on va comparer, suivant une stratégie désormais classique (cf. [65] et [57]), l'anneau R des déformations p -ordinaires (et cristallines, sauf dans le cas **(ORR)**) S -minimales de $\bar{\rho}$, de poids de Hodge fixés comme précédemment, avec une algèbre de Hecke localisée \mathbf{T} (voir définition ci-dessous), et montrer que ces \mathcal{O} -algèbres locales sont canoniquement isomorphes d'intersection complète. On obtiendra également la liberté sur \mathbf{T} d'un module de cohomologie de la variété de Siegel.

3. Algèbres de Hecke et représentations induites

3.1. Algèbres de Hecke parahoriques. — On utilise les notations de la section 2.1. En particulier, on fixe le Borel triangulaire supérieur $B = TN$ et on considère les paraboliques standards $P_1 = M_1 U_1$, $P_g = M_g U_g$ et $\bar{P}_g = M_g \bar{U}_g$ dits respectivement de Klingen, de Siegel supérieur et de Siegel inférieur, ainsi que l'intersection $P_{1,g} = P_1 \cap P_g = M_{1,g} U_{1,g}$. On notera plus brièvement $M_{1,g} = M$ et $B_M = B \cap M$. Pour tout $h \geq 1$ soit K_h resp. \mathbb{K}_h le compact maximal hyperspécial standard de G_h resp. $\mathrm{GL}(h)$.

Soit q un nombre premier. Si L désigne le Levi standard d'un des paraboliques ci-dessus, on note K_L le compact maximal hyperspécial standard de $L(\mathbb{Q}_q)$. Par exemple, $K_T = T(\mathbb{Z}_q)$. Les compacts hyperspéciaux standards correspondant à K_{M_1} , K_{M_g} et

K_M par les identifications

$$\begin{aligned} M_1 &= \mathrm{GL}_1 \times G_{g-1}, & \mathrm{diag}(a, A, \nu(A)a^{-1}) &\longmapsto (a, A) \\ M_g &= \mathrm{GL}_g \times \mathrm{GL}_1, & \mathrm{diag}(B, \nu s^t B s) &\longmapsto (B, \nu) \\ M &= \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_{g-1} \times \mathrm{GL}_1, & \mathrm{diag}(a, B', \nu' s'^t B' s', \nu' a^{-1}) &\longmapsto (a, B', \nu') \end{aligned}$$

sont alors respectivement $\mathbb{Z}_q^* \times K_{g-1}$, $\mathbb{K}_g \times \mathbb{Z}_q^*$ et $\mathbb{Z}_q^* \times \mathbb{K}_{g-1} \times \mathbb{Z}_q^*$.

Rappelons qu'on note Φ^+ , resp. Φ_L^+ l'ensemble des racines positives pour (G, B, T) resp. (L, B_L, T) , si L désigne le sous-groupe de Lévi de l'un des paraboliqes ci-dessus.

On note $\Pi \subset K_g$ et $\Pi_{M_g} \subset K_{M_g}$ les parahoriques associés à P_1 et $P_1 \cap M_g$; on note $I \subset K_g$ le sous-groupe d'Iwahori. On note $\Pi^+ \subset \Pi$ et $\Pi_{M_g}^+ \subset \Pi_{M_g}$ les noyaux des morphismes composés

$$\begin{aligned} \Pi &\longrightarrow P_1(\mathbb{F}_q) \longrightarrow M_1(\mathbb{F}_q) \simeq \mathbb{F}_q^\times \times G_{g-1}(\mathbb{F}_q) \longrightarrow \mathbb{F}_q^\times \\ \Pi_{M_g} &\longrightarrow (P_1 \cap M_g)(\mathbb{F}_q) \longrightarrow M(\mathbb{F}_q) \simeq \mathbb{F}_q^\times \times \mathrm{GL}_{g-1}(\mathbb{F}_q) \times \mathbb{F}_q^\times \xrightarrow{\mathrm{Pr}_1} \mathbb{F}_q^\times. \end{aligned}$$

Les sous-groupes $\Pi^+ \subset \Pi$ et $\Pi_{M_g}^+ \subset \Pi_{M_g}$ sont appelés sous-groupe parahoriques stricts de Π resp. Π_{M_g} . Soit

$$D_q^- = \{x \in M_{2g \times 2g}(\mathbb{Z}_q) \cap T(\mathbb{Q}_q); \text{ pour } \alpha \in \Phi^+ - \Phi_{M_1}^+, \text{ ord}_q(\alpha(x)) \leq 0\}$$

(appelé semigroupe diagonal dilatant car pour $d \in D_q^-$, $u \mapsto dud^{-1}$ dilate le radical unipotent U_1 de P_1).

On introduit également

$$D_{M_g, q}^- = \{x \in M_{2g \times 2g}(\mathbb{Z}_q) \cap T(\mathbb{Q}_q); \text{ pour } \alpha \in \Phi_{M_g}^+ - \Phi_M^+, \text{ ord}_q(\alpha(x)) \leq 0\}$$

On pose $\mathcal{D}_q^- = \Pi \cdot D_q^- \cdot \Pi$, $\mathcal{D}_+^- = \Pi^+ \cdot D_q^- \cdot \Pi^+$, $\mathcal{D}_{M_g}^- = \Pi_{M_g} \cdot D_{M_g, q}^- \cdot \Pi_{M_g}$ et $\mathcal{D}_{+, M_g}^- = \Pi_{M_g}^+ \cdot D_{M_g, q}^- \cdot \Pi_{M_g}^+$. Ces ensembles sont des semigroupes multiplicatifs, comme on le voit en utilisant la décomposition d'Iwahori :

$$\Pi = (U_1 \cap \Pi)K_{M_1}(\overline{U}_1 \cap \Pi) = (\overline{U}_1 \cap \Pi)K_{M_1}(U_1 \cap \Pi)$$

$$\Pi_{M_g} = (U_{1, g} \cap \Pi_{M_g})K_M(\overline{U}_{1, g} \cap \Pi_{M_g}) = (\overline{U}_{1, g} \cap \Pi_{M_g})K_M(U_{1, g} \cap \Pi_{M_g})$$

Lorsque $J \subset G_g(\mathbb{Q}_q)$ est un sous-groupe ouvert compact, on définit l'algèbre de Hecke (non commutative)

$$\mathcal{H}_J = \mathbb{Z}[J \backslash G_g(\mathbb{Q}_q) / J],$$

la structure d'algèbre étant définie par

$$JdJ \cdot Jd'J = \sum_{d''} c(Jd''J)Jd''J,$$

où $JdJd'J = \bigsqcup Jd''J$ et, notant $JdJ = \bigsqcup d_i J$, $Jd'J = \bigsqcup d'_j J$, et $Jd''J = \bigsqcup d''_k J$, l'entier $c(Jd''J)$ est défini comme le nombre de couples (i, j) tels que $d_i d'_j J = d''_k J$ (il est indépendant de k et du choix des représentants d_i et d'_j). Cette algèbre est isomorphe à l'algèbre de convolution des fonctions J -biinvariantes à valeurs entières, pour la mesure de Haar valant 1 sur $J : (1_{JdJ} \star 1_{Jd'J})(\gamma) = \int_{G_g} 1_{JdJ}(\gamma') 1_{Jd'J}(\gamma'^{-1}\gamma) d\gamma'$.

On définit les algèbres de Hecke parahorique dilatante \mathcal{H}_{Π}^- resp. parahorique dilatante stricte $\mathcal{H}_{\Pi^+}^-$ comme les sous-algèbres

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\Pi}^- &= \mathbb{Z}[\Pi \backslash \mathcal{D}_q^- / \Pi] \subset \mathcal{H}_{\Pi} \\ \mathcal{H}_{\Pi^+}^- &= \mathbb{Z}[\Pi^+ \backslash \mathcal{D}_q^- / \Pi^+] \subset \mathcal{H}_{\Pi^+}. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que \mathcal{H}_{Π}^- s'identifie à la sous-algèbre $\mathbb{Z}[\Pi^+ \backslash \mathcal{D}_+^- / \Pi^+]$ de $\mathcal{H}_{\Pi^+}^-$ et que l'on a $\mathcal{H}_{\Pi^+}^- = \mathbb{Z}[\mathbb{F}_q^\times] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{H}_{\Pi^+}^-$. Lorsque $\lambda \in \mathbb{F}_q^\times$, on note $\langle \lambda \rangle$ l'image de $[\lambda] \otimes 1$ dans $\mathcal{H}_{\Pi^+}^-$; si $\hat{\lambda}$ est un relèvement de λ dans \mathbb{Z}_q^\times , $\langle \lambda \rangle$ est simplement l'élément de $\mathcal{H}_{\Pi^+}^-$ associé à la (double-)classe $\hat{\lambda} 1_{2g} \Pi^+$.

Les algèbres $\mathcal{H}_{\Pi^+}^-$ et \mathcal{H}_{Π}^- sont commutatives (voir la proposition 3.1.1 ci-dessous).

On définit de même les algèbres parahorique dilatante resp. parahorique stricte dilatante

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\Pi_{M_g}}^- &= \mathbb{Z}[\Pi_{M_g} \backslash \mathcal{D}_{\Pi_{M_g}}^- / \Pi_{M_g}] \subset \mathcal{H}_{\Pi_{M_g}} \\ \mathcal{H}_{\Pi_{M_g}^+}^- &= \mathbb{Z}[\Pi_{M_g}^+ \backslash \mathcal{D}_{\Pi_{M_g}}^- / \Pi_{M_g}^+] \subset \mathcal{H}_{\Pi_{M_g}^+}. \end{aligned}$$

Ces algèbres ont des propriétés analogues à celles de $\mathcal{H}_{\Pi^+}^-$ et \mathcal{H}_{Π}^- .

Pour tout groupe réductif connexe H muni d'un sous-groupe compact maximal hyperspécial fixé K_H , on note $\mathcal{H}_H^{\text{nr}} = \mathcal{H}_{K_H}$ l'algèbre de Hecke non ramifiée entière de H .

On a des décompositions

$$\mathcal{H}_{M_1}^{\text{nr}} = \mathcal{H}_{\text{GL}_1}^{\text{nr}} \otimes \mathcal{H}_{G_{g-1}}^{\text{nr}} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_M^{\text{nr}} = \mathcal{H}_{\text{GL}_1}^{\text{nr}} \otimes \mathcal{H}_{\text{GL}_{g-1}}^{\text{nr}} \otimes \mathcal{H}_{\text{GL}_1}^{\text{nr}}$$

associées aux identifications $M_1 = \text{GL}_1 \times G_{g-1}$ et $M = \text{GL}_1 \times \text{GL}_{g-1} \times \text{GL}_1$.

On considère maintenant les matrices diagonales suivantes.

– Pour $i \in \{0, \dots, g\}$, on pose

$$d_i^{(g)} = \text{diag}(1_i, q \cdot 1_{2g-2i}, q^2 \cdot 1_i) \in G_g(\mathbb{Q}_q) \quad \text{si } 1 \leq i \leq g$$

et

$$d_0^{(g)} = q 1_{2g}, \quad d_g^{(g)} = \text{diag}(1_g, q \cdot 1_g)$$

(matrices diagonales par blocs).

– Pour $i \in \{0, \dots, g\}$, on pose $c_i = \text{diag}(1_i, q \cdot 1_{g-i}, 1_{g-i}, q \cdot 1_i)$. On a $c_0 = d_0^{(g)}$ et $c_g = d_g^{(g)}$.

– Finalement, on pose $\mathbf{d}_i^{(g-1)} = \text{diag}(1_i, q \cdot 1_{g-1-i}) \in \text{GL}_{g-1}(\mathbb{Q}_q)$ pour $i = 0, \dots, g-1$.

On introduit alors les opérateurs de Hecke suivants.

- $U_{q,i}^{(g)} = \Pi \cdot d_i^{(g)} \cdot \Pi \in \mathcal{H}_{\Pi}^-$, pour $i = 0, \dots, g$
- $U_{q,i}^{M_g} = \Pi_{M_g} \cdot c_i \cdot \Pi_{M_g} \in \mathcal{H}_{\Pi_{M_g}}^-$, pour $i = 0, \dots, g$
- $T_{q,i}^{(g-1)} = K_{g-1} \cdot \mathbf{d}_i^{(g-1)} \cdot K_{g-1} \in \mathcal{H}_{G_{g-1}}^{\text{nr}}$ pour $i = 0, \dots, g-1$
- $T_{q,i}^{\text{GL}_{g-1}} = \mathbb{K}_{g-1} \cdot \mathbf{d}_i \cdot \mathbb{K}_{g-1} \in \mathcal{H}_{\text{GL}_{g-1}}^{\text{nr}}$, pour $i = 1, \dots, g-1$

Rappelons ([51] Th. 1) que les algèbres de Hecke entières sont des algèbres de polynômes :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{G_{g-1}}^{\mathrm{nr}} &= \mathbb{Z}[T_{q,i}^{(g-1)}, (T_{q,0}^{(g-1)})^{\pm 1}]_{i=1, \dots, g-1} \\ \mathcal{H}_{\mathrm{GL}_{g-1}}^{\mathrm{nr}} &= \mathbb{Z}[T_{q,i}^{\mathrm{GL}_{g-1}}, (T_{q,0}^{\mathrm{GL}_{g-1}})^{\pm 1}]_{i=1, \dots, g-1}. \end{aligned}$$

Pour GL_1 on allège les notations : $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}_1}^{\mathrm{nr}} = \mathbb{Z}[T_q^{\pm 1}]$. À l'aide des identifications (2.1) on a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{M_1}^{\mathrm{nr}} &= \mathbb{Z}[T_q^{\pm 1}] \otimes \mathbb{Z}[T_{q,i}^{(g-1)}, (T_{q,0}^{(g-1)})^{\pm 1}]_{i=1, \dots, g-1} \\ \mathcal{H}_M^{\mathrm{nr}} &= \mathbb{Z}[T_q^{\pm 1}] \otimes \mathbb{Z}[T_q^{\pm 1}] \otimes \mathbb{Z}[T_{q,i}^{\mathrm{GL}_{g-1}}, (T_{q,0}^{\mathrm{GL}_{g-1}})^{\pm 1}]_{i=1, \dots, g-1}. \end{aligned}$$

Proposition 3.1.1

(1) Les algèbres de Hecke dilatantes définies ci-dessus sont commutatives et sont isomorphes à des anneaux de polynômes à coefficients dans \mathbb{Z} :

- $\mathcal{H}_{\Pi}^- = \mathbb{Z}[U_{q,i}^{(g)} (U_{q,0}^{(g)})^{\pm 1}]_{i=1, \dots, g}$
- $\mathcal{H}_{\Pi_{M_g}}^- = \mathbb{Z}[U_{q,i}^{M_g}, (U_{q,0}^{M_g})^{\pm 1}, (U_{q,g}^{M_g})^{\pm 1}]_{i=1, \dots, g-1}$
- L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_T^{\mathrm{nr}}$ est l'algèbre $\mathbb{Z}[X_*(T)]$ du groupe $X_*(T)$ des caractères de T

(2) Les applications

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{M_1}^- : \mathcal{H}_{\Pi}^- &\longrightarrow \mathcal{H}_{K_{M_1}}, & \mathrm{IId}_{\Pi} &\longmapsto K_{M_1} dK_{M_1} \\ \text{et } \mathrm{res}_M^- : \mathcal{H}_{\Pi_{M_g}}^- &\longrightarrow \mathcal{H}_{K_M}, & \mathrm{II}_{M_g} d\mathrm{II}_{M_g} &\longmapsto K_M dK_M \end{aligned}$$

données par la restriction des fonctions à M_1 resp. M sont des homomorphismes injectifs d'anneaux. L'image de \mathcal{H}_{Π}^- est engendrée par

$$(T_q \otimes T_{q,0}^{(g-1)})^{\pm 1} = \mathrm{res}_{M_1}^- ((U_{q,0}^{(g)})^{\pm 1}) \quad \text{et} \quad 1 \otimes T_{q,i-1}^{(g-1)} = \mathrm{res}_{M_1}^- (U_{q,i}^{(g)}) \quad (i = 1, \dots, g);$$

celle de $\mathcal{H}_{\Pi_{M_g}}^-$ est engendrée par

$$\begin{aligned} (T_q \otimes T_{q,0}^{\mathrm{GL}_{g-1}} \otimes 1)^{\pm 1} &= \mathrm{res}_M^- ((U_{q,0}^{M_g})^{\pm 1}), \quad 1 \otimes 1 \otimes T_q^{\pm 1} = \mathrm{res}_M^- (U_{q,g}^{M_g})^{\pm 1} \\ \text{et } 1 \otimes T_{q,i-1}^{\mathrm{GL}_{g-1}} \otimes T_q^2 &= \mathrm{res}_M^- (U_{q,i}^{M_g}) \quad (i = 1, \dots, g-1) \end{aligned}$$

Remarque. — On établira plus loin la comparaison des homomorphismes de restriction $\mathrm{res}_{M_1}^-$ et res_M^- avec des transformations de Satake tordues.

Démonstration

(1) Le premier point résulte visiblement du deuxième.

(2) Les morphismes $\mathrm{res}_{M_1}^-$ et res_M^- sont des morphismes d'anneaux : ceci est un cas particulier de la proposition II. 5 de [62].

Par ailleurs, on voit immédiatement que le morphisme $\mathrm{res}_{M_1}^-$ est injectif, et que son image est engendrée par les doubles classes

$$K_{M_1} q^{\pm 1} 1_{2g} K_{M_1} \quad \text{et} \quad K_{M_1} \mathrm{diag}(1, \gamma_{g-1}, \nu(\gamma_{g-1})) K_{M_1},$$

où $\gamma_{g-1} \in G_{g-1}(\mathbb{Q}_q) \cap M_{2g-2}(\mathbb{Z}_q)$. Il résulte de [51], Th. 1 que la sous-algèbre

$$\mathbb{Z}[G_{g-1}(\mathbb{Z}_q) \backslash G_{g-1}(\mathbb{Q}_q) \cap M_{2g-2}(\mathbb{Z}_q) / G_{g-1}(\mathbb{Z}_q)]$$

de $\mathcal{H}_{G_{g-1}}^{\text{nr}}$ n'est autre que l'algèbre de polynômes $\mathbb{Z}[T_{q,i}^{(g-1)}]_{i=0,\dots,g-1}$, ce qui démontre la partie de l'énoncé qui concerne l'image de $\text{res}_{M_1}^-$. La description de l'image de res_M^- se démontre de la même manière et sera laissée au lecteur. \square

De même que dans [62], chap. II, on note T^- l'homomorphisme inverse de $\text{res}_{M_1}^-$; il réalise un isomorphisme d'anneaux de

$$\text{Im}(\text{res}_{M_1}^-) = \mathbb{Z}[(T_q \otimes T_{q,0}^{(g-1)})^{\pm 1}, 1 \otimes T_{q,i-1}^{(g-1)}]_{i=1,\dots,g}$$

vers \mathcal{H}_{Π}^- . La source de ce morphisme est donc un sous-anneau de $\mathcal{H}_{K_{M_1}}$; on a $\mathcal{H}_{K_{M_1}} = \text{Im}(\text{res}_{M_1}^-)[(1 \otimes T_{q,0}^{(g-1)})^{-1}]$.

Proposition 3.1.2

- (1) L'élément $U_{q,1}$ admet un inverse dans $\mathcal{H}_{\Pi}[q^{-1}]$.
- (2) Le morphisme T^- se prolonge donc (de manière unique) en un morphisme

$$T^- : \mathcal{H}_{K_{M_1}} = \mathbb{Z}[(T_q \otimes T_{q,0}^{(g-1)})^{\pm 1}, (1 \otimes T_{q,0}^{(g-1)})^{\pm 1}, 1 \otimes T_{q,i-1}^{(g-1)}]_{i=2,\dots,g} \longrightarrow \mathcal{H}_{\Pi}[q^{-1}].$$

Démonstration. — Il suffit clairement de démontrer le premier point. Soit $e_{\Pi} \in \mathcal{H}_I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ l'idempotent correspondant à \mathcal{H}_{Π} , de sorte que \mathcal{H}_{Π} (resp. $\mathcal{H}_{\Pi}[q^{-1}]$) s'identifie au sous-anneau (non unitaire) $e_{\Pi}\mathcal{H}_I e_{\Pi}$ (resp. $e_{\Pi}\mathcal{H}_I[q^{-1}]e_{\Pi}$) de $\mathcal{H}_I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ (attention : l'idempotent e_{Π} n'est pas dans \mathcal{H}_I , ni même dans $\mathcal{H}_I[q^{-1}]$). Il résulte de ([62], prop. II. 4, appliquée à la sous-algèbre de $\mathcal{H}_I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ engendrée par les doubles classes des éléments dilatants vis-à-vis de U_1) que e_{Π} commute à l'opérateur de Hecke $I \text{diag}(1, q, \dots, q, q^2)I$. Ce dernier admet un inverse dans $\mathcal{H}_I[q^{-1}]$ (cf. par exemple [22]). \square

Considérons les homomorphismes de $\mathbb{Z}[q^{-1}]$ -modules

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\mathcal{S}}_{\Pi}^{\Pi M_g} &: \mathcal{H}_{\Pi}[q^{-1}] \longrightarrow \mathcal{H}_{\Pi M_g}[q^{-1}] \\ \underset{\sim}{\mathcal{S}}_{\Pi}^{K_T} &: \mathcal{H}_{\Pi}[q^{-1}] \longrightarrow \mathcal{H}_T^{\text{nr}}[q^{-1}] \\ \underset{\sim}{\mathcal{S}}_{\Pi}^{K_{M_1}} &: \mathcal{H}_{\Pi}[q^{-1}] \longrightarrow \mathcal{H}_{M_1}[q^{-1}] \\ \underset{\sim}{\mathcal{S}}_{\Pi M_g}^{K_T} &: \mathcal{H}_{\Pi M_g}[q^{-1}] \longrightarrow \mathcal{H}_T^{\text{nr}}[q^{-1}] \\ \underset{\sim}{\mathcal{S}}_{\Pi M_g}^{K_M} &: \mathcal{H}_{\Pi M_g}[q^{-1}] \longrightarrow \mathcal{H}_M[q^{-1}] \end{aligned}$$

définis respectivement par

$$\begin{aligned} \underline{S}_{\Pi}^{\Pi M_g}(\phi)(m) &= \int_{U_g} \phi(mu) du \\ \underline{S}_{\Pi}^{K_T}(\phi)(t) &= \int_N \phi(tn) dn \\ \underline{S}_{\Pi}^{K_{M_1}}(\phi)(m) &= \int_{U_1} \phi(mu) du \\ \underline{S}_{\Pi M_g}^{K_T}(\phi)(t) &= \int_{N \cap M_g} \phi(tn) dn \\ \underline{S}_{\Pi M_g}^{K_M}(\phi)(t) &= \int_{U_1 \cap M_g} \phi(tu) du \end{aligned}$$

les mesures de Haar sur les groupes unipotents étant normalisées pour donner la masse 1 au sous-groupe des \mathbb{Z}_q -points.

Ces applications seront appelées transformations de Satake tordues parahoriques.

Variante. — On peut aussi intégrer $\Phi(\bar{u}m)d\bar{u}$ (resp. $\Phi(\bar{n}t)d\bar{n}, \dots$) sur les sous-groupes unipotents $\bar{U}_g, \bar{N}, \bar{U}_1, \bar{N} \cap M_g$ et $\bar{U}_1 \cap M_g$ des paraboliqes opposés, la mesure de Haar sur ces groupes unipotents \bar{U} étant normalisée de telle sorte que la masse de $\bar{U} \cap \Pi$ soit 1. Notons provisoirement ${}_{\mathrm{opp}}\underline{S}$ ces variantes — nous verrons qu'on a en fait ${}_{\mathrm{opp}}\underline{S} = \underline{S}$. Nous verrons (cf. la remarque à la fin du chapitre 8) que ${}_{\mathrm{opp}}\underline{S}_{\Pi}^{\Pi M_g}$ et $\underline{S}_{\Pi}^{\Pi M_g}$ s'introduisent tous deux naturellement en relation avec la réduction modulo q des correspondances de Hecke, sur les variétés de Siegel avec structures de niveau de type Π en q .

La proposition suivante est probablement bien connue.

Proposition 3.1.3. — *On a*

$${}_{\mathrm{opp}}\underline{S}_{\Pi}^{K_{M_1}} = \underline{S}_{\Pi}^{K_{M_1}} = \mathrm{res}_{M_1}^- \quad \text{et} \quad {}_{\mathrm{opp}}\underline{S}_{\Pi M_g}^{K_M} = \underline{S}_{\Pi M_g}^{K_M} = \mathrm{res}_M^-$$

Remarque. — On peut rapprocher cette proposition du lemme 8.3.6.

Démonstration. — Nous nous contenterons de vérifier que ${}_{\mathrm{opp}}\underline{S}_{\Pi}^{K_{M_1}} = \underline{S}_{\Pi}^{K_{M_1}} = \mathrm{res}_{M_1}^-$, la vérification des deux autres formules étant analogue.

Pour tout groupe algébrique H défini sur \mathbb{Z}_q , et pour tout $r \geq 0$, on note $H^{(r)} = \mathrm{Ker}(H(\mathbb{Z}_q) \rightarrow H(\mathbb{Z}/q^r\mathbb{Z}))$.

Soit $d \in D_q^-$. Utilisant la décomposition d'Iwahori $\Pi = \bar{U}_1^{(1)} K_{M_1} U_1^{(0)}$ et les inclusions $U_1^{(0)} d \subset dU_1^{(0)}$ et $d\bar{U}_1^{(1)} \subset \bar{U}_1^{(1)} d$ on a $\Pi d \Pi = \bar{U}_1^{(1)} K_{M_1} d K_{M_1} U_1^{(0)}$. On voit donc que $M_1 U_1 \cap \Pi d \Pi = K_{M_1} d K_{M_1} U_1^{(0)}$ (resp. $\bar{U}_1 M_1 \cap \Pi d \Pi = \bar{U}_1^{(1)} K_{M_1} d K_{M_1}$), ce qui démontre les deux égalités. \square

Considérons maintenant les transformations de Satake tordues sphériques :

$$\begin{aligned} \underline{S}_{M_1}^M &: \mathcal{H}_{M_1}^{\text{nr}}[q^{-1}] \longrightarrow \mathcal{H}_M^{\text{nr}}[q^{-1}] \\ \underline{S}_M^T &: \mathcal{H}_M^{\text{nr}}[q^{-1}] \longrightarrow \mathcal{H}_T^{\text{nr}}[q^{-1}] \end{aligned}$$

définie par les formules

$$\underline{S}_{M_1}^M(\Phi)(m) = \int_{M_1 \cap U_g} \Phi(mu)du \quad \text{et} \quad \underline{S}_M^T(\Phi)(m) = \int_{M \cap N} \Phi(tn)dn.$$

On déduit facilement des propositions 3.1.1 et 3.1.3 la

Proposition 3.1.4

(1) On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{H}_T^{\text{nr}}[q^{-1}] \\ & \nearrow & \uparrow \\ \mathcal{H}_{\Pi_{M_g}}^- [q^{-1}] & \longrightarrow & \mathcal{H}_M^{\text{nr}}[q^{-1}] \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{H}_{\Pi}^- [q^{-1}] & \longrightarrow & \mathcal{H}_{M_1}^{\text{nr}}[q^{-1}] \end{array}$$

toutes les flèches étant données par les transformations de Satake tordues \underline{S} adéquates (parahoriques pour les quatre flèches de gauche, et sphériques pour les deux flèches verticales de droite).

(1') On a un diagramme commutatif similaire faisant intervenir des transformations de Satake tordues ${}_{\text{opp}}\underline{S}$.

(2) En particulier :

- (a) $\mathcal{H}_{\Pi}^- [q^{-1}] \rightarrow \mathcal{H}_{\Pi_{M_g}}^- [q^{-1}]$ et $\mathcal{H}_{\Pi_{M_g}}^- [q^{-1}] \rightarrow \mathcal{H}_T^{\text{nr}}[q^{-1}]$ sont injectifs,
- (b) $\mathcal{H}_{\Pi}^- [q^{-1}] \rightarrow \mathcal{H}_{\Pi_{M_g}}^- [q^{-1}]$ et $\mathcal{H}_{\Pi_{M_g}}^- [q^{-1}] \rightarrow \mathcal{H}_T^{\text{nr}}[q^{-1}]$ sont des morphismes d'algèbres,
- (c) les morphismes $\text{Frac}(\mathcal{H}_{\Pi}^- [q^{-1}]) \rightarrow \text{Frac}(\mathcal{H}_{\Pi_{M_g}}^- [q^{-1}])$ et $\text{Frac}(\mathcal{H}_{\Pi_{M_g}}^- [q^{-1}]) \rightarrow \text{Frac}(\mathcal{H}_T^{\text{nr}}[q^{-1}])$ sont finis (Frac désignant le corps des fractions).

(3) Les morphismes \underline{S} et ${}_{\text{opp}}\underline{S}$ définis plus haut coïncident ; ce sont tous des morphismes d'algèbres. □

Remarques

(1) Les transformations de Satake (sphériques) tordues \tilde{S} utilisées dans le chapitre VII de [13] sont plutôt données par des formules du type $\tilde{S}(\Phi)(m) = \int_U \Phi(um)du$, où U est le radical unipotent d'un parabolique formé de matrices triangulaires supérieures. Elles se comparent à ${}_{\text{opp}}\underline{S}$ en faisant agir (sur la source et le but) la conjugaison par $w_0 = \text{antidiag}(-1, -1, 1, 1)$ (un relèvement dans $N_{G_g}(T)$ de l'élément le plus long du groupe de Weyl). Les conventions de [13] seraient naturelles pour nous si nous

avons choisi au lieu de Π le parahorique opposé $\bar{\Pi}$ et au lieu de D_q^- le monoïde $D_q^+ = (D_q^-)^{-1}$ des éléments contractants du tore T .

(2) Les formules que nous avons obtenues portent sur des $\mathbb{Z}[q^{-1}]$ -algèbres. En fait, dans ce travail, nous fixerons un entier premier p . En revanche (cf. section 5) $q \neq p$ sera un entier premier *variable*. Nous nous intéresserons alors aux algèbres de Hecke $\mathcal{H}_{G_g(\mathbb{Q}_q), (p)}^{\text{nr}}, \mathcal{H}_{\Pi_q, (p)}^-, \dots$ obtenues après tensorisation par $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Nous allons maintenant introduire deux polynômes de degré $2g-1$ à coefficients dans \mathcal{H}_{Π} . En un sens que nous préciserons plus loin, le polynôme de Hecke est produit de ces deux facteurs.

On munit $\mathcal{H}_T^{\text{nr}}$ d'une action à droite de $W = W_G$ de la manière suivante. Pour $f \in \mathcal{H}_T^{\text{nr}}$ (vu comme une fonction sur $T(\mathbb{Q}_q)$ constante sur les classes $tT(\mathbb{Z}_q)$) et $w \in W$, on pose

$$f^w(t) = \delta(t)^{-1/2} \delta(\widehat{w}t\widehat{w}^{-1})^{1/2} f(\widehat{w}t\widehat{w}^{-1}), \quad \forall t \in T(\mathbb{Q}_q)$$

(où \widehat{w} est un relèvement de w dans $(N_{G_g}T)(\mathbb{Q}_q)$). Dans [13], une action analogue est appelée « action tordue » (cependant, comme nous l'avons déjà souligné, nos conventions diffèrent de celles de *loc. cit.*, si bien que notre action ne coïncide pas avec la leur).

Il résulte de [48] (et de la proposition 3.1.3) que les morphismes

$$\begin{aligned} \underline{S}_{G_g}^T : \mathcal{H}_{G_g}^{\text{nr}}[q^{-1}] &\longrightarrow \mathcal{H}_T^{\text{nr}}[q^{-1}] \\ \text{et } \underline{S}_{M_1}^T : \mathcal{H}_{M_1}^{\text{nr}}[q^{-1}] &\longrightarrow \mathcal{H}_T^{\text{nr}}[q^{-1}] \end{aligned}$$

sont injectifs et ont respectivement pour images les sous-algèbres formées des éléments fixes par W et par W_{M_1} via l'action tordue ci-dessus.

Pour $t \in T(\mathbb{Q})$, notons $[t]$ l'élément de $\mathcal{H}_T^{\text{nr}}$ correspondant à la classe $tT(\mathbb{Z}_q)$. Posons $t_q = \text{diag}(1, \dots, 1, q, \dots, q) \in T(\mathbb{Q}_q)$. Le stabilisateur de $[t_q]$ pour l'action tordue de W est W_{M_g} .

Remarque. — L'élément $[t_q]$ n'est autre que $\underline{S}_{\Pi M_g}^{K_T}(U_{q,g}^{M_g})$. L'élément $U_{q,g}^{M_g} \in \mathcal{H}_{M_g}^{\text{nr}}$ peut être considéré comme le Frobenius (cf. [13], Ch. VII; les conventions de Faltings et Chai diffèrent cependant des nôtres, de sorte que le Frobenius est représenté dans *loc. cit.* par l'élément $K_{M_g} \text{diag}(q, \dots, q, 1, \dots, 1) K_{M_g}$ de $\mathcal{H}_{M_g}^{\text{nr}}$).

On pose

$$\underline{P}_q(X) = \prod_{w \in W_{M_g} \backslash W} (X - [t_q]^w) \in (\mathcal{H}_T^{\text{nr}}[q^{-1}])^W[X].$$

Soit w_0 l'élément le plus long de W . On rappelle que W_{M_g} est invariant par conjugaison par w_0 . On rappelle de plus qu'on a $W_M = W_{M_g} \cap W_{M_1}$ dans W . On pose

$$\begin{aligned} \underline{P}_{q, M_1}^e(X) &= \prod_{w \in W_M \backslash W_{M_1}} (X - [t_q]^w) \in (\mathcal{H}_T^{\text{nr}}[q^{-1}])^{W_{M_1}}[X] \\ \underline{P}_{q, M_1}^m(X) &= \prod_{w \in W_M \backslash W_{M_1}} (X - [t_q]^{w w_0}) \in (\mathcal{H}_T^{\text{nr}}[q^{-1}])^{W_{M_1}}[X]. \end{aligned}$$

Le quotient $W_{M_g} \backslash W$ n'est autre que $W_M \backslash W_{M_1} \amalg W_M \backslash W_{M_1} w_0$, de sorte que \underline{P}_q est le produit des deux polynômes \underline{P}_{q, M_1}^e et \underline{P}_{q, M_1}^m .

Les polynômes \underline{P}_q , \underline{P}_{q, M_1}^e et \underline{P}_{q, M_1}^m sont alors dans l'image de $\underline{S}_{G_g}^T$ pour le premier et de $S_{M_1}^T$ pour les deux derniers. Notons P_q , P_{q, M_1}^e et P_{q, M_1}^m leurs antécédents respectifs (dans $\mathcal{H}_{G_g}^{\text{nr}}[q^{-1}]$ pour le premier et dans $\mathcal{H}_{M_1}^{\text{nr}}[q^{-1}]$ pour les deux derniers). Le polynôme P_q est alors simplement le polynôme de Hecke (cf. [13], Ch. VII). Avec l'identification $\mathcal{H}_{M_1} = \mathbb{Z}[T_q^{\pm 1}] \otimes \mathcal{H}_{G_{g-1}}^{\text{nr}}$ introduite juste avant l'énoncé de la proposition 3.1.1 et en notant $P_q^{(g-1)}$ le polynôme de Hecke pour G_{g-1} on a $P_{q, M_1}^e = 1 \otimes P_q^{(g-1)}$, de sorte que P_{q, M_1}^e est à coefficients dans l'image de $\text{res}_{M_1}^-$.

Notation 3.1.5. — On désignera par $P_q^{(1)} = P_q^e \in \mathcal{H}_{\Pi}^-[q^{-1}][X]$ et $P_q^{(2)} = P_q^m \in \mathcal{H}_{\Pi}[q^{-1}][X]$ les polynômes

$$P_q^e = T^-(P_{q, M_1}^e) \quad \text{et} \quad P_q^m = T^-(P_{q, M_1}^m)$$

On désignera encore par le symbole P_q^e l'image de $P_q^e \in \mathcal{H}_{\Pi}^-[q^{-1}][X]$ dans $\mathcal{H}_{\Pi+}^-[q^{-1}][X]$ (par l'injection $\mathcal{H}_{\Pi}^- \hookrightarrow \mathcal{H}_{\Pi+}^-[q^{-1}][X]$).

Remarques

(1) Considérons le plongement du corps des fractions $\mathcal{H}_{M_1}^{\text{nr}}$ dans celui de $\mathcal{H}_M^{\text{nr}}$ défini par la transformation de Satake tordue \underline{S} , ainsi que son conjugué par w_0 . Les polynômes P_q^e et P_q^m sont alors les polynômes minimaux de $\Pi_M \text{diag}(1, \dots, 1, q, \dots, q) \Pi_M$ vis à vis de ces deux plongements.

(2) Le polynôme P_q^e est à coefficients dans $\mathcal{H}_{\Pi}^-[q^{-1}][X]$ alors que P_q^m est seulement à coefficients dans $\mathcal{H}_{\Pi}^-[U_{q,1}^{-1}][q^{-1}][X] \subset \mathcal{H}_{\Pi}[q^{-1}][X]$.

(3) Pour $g = 2$ on a

$$\begin{aligned} P_q(X) &= X^4 - T_{q,2} X^3 + q(T_{q,1} + (q^2 + 1)T_{q,0}) X^2 - q^3 T_{q,2} T_{q,0} X + q^6 T_{q,0}^2 \\ P_q^e(X) &= X^2 - U_{q,2} X + q U_{q,1} \\ P_q^m(X) &= q^{-1} U_{q,1}^{-1} X^2 P_q^e(q^3 U_{q,0} X^{-1}) = X^2 - q^2 U_{q,1}^{-1} U_{q,0} U_{q,2} X + q^5 U_{q,1}^{-1} U_{q,0}^2. \end{aligned}$$

(4) À l'aide de la théorie du centre de Bernstein (cf. [22]) et de la proposition II.4 de [62], on peut voir qu'il existe des polynômes \mathcal{P}_q^e et \mathcal{P}_q^m à coefficients dans $\mathcal{H}_I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, commutant à l'idempotent e_{Π} , et tels que $\mathcal{P}_q^e e_{\Pi} = P_q^e$ et $\mathcal{P}_q^m e_{\Pi} = P_q^m$. Leur produit \mathcal{P}_q est alors à coefficients dans le centre de $\mathcal{H}_I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, et on a $\mathcal{P}_q e_K = P_q$ (où e_K est l'idempotent associé au compact maximal $K = G_g(\mathbb{Z}_q)$). En particulier, le produit $P_q^e P_q^m$ est à coefficients dans le centre de $\mathcal{H}_{\Pi}[q^{-1}]$ et son produit par e_K est simplement P_q .

La proposition suivante nous sera utile dans la section 8.

Proposition 3.1.6. — On a

$$(-1)^{2^{g-1}} q^{2^{g-2} g(g-1)/2} U_{q,1}^{2^{g-2}} P_q^m(X) = X^{2^{g-1}} P_q^e(q^{g(g+1)/2} U_{q,0} X^{-1}).$$

Démonstration. — Il suffit de vérifier la formule

$$(-1)^{2^{g-1}} q^{2^{g-2}g(g-1)/2} [d_1^{(g)}]^{2^{g-2}} P_{\underline{q}, M_1}^m(X) = X^{2^{g-1}} P_{\underline{q}, M_1}^e(q^{g(g+1)/2} [q \mathrm{Id}_{2g}] X^{-1})$$

(on rappelle que $d_1^{(g)}$ désigne $\mathrm{diag}(1, q, \dots, q, q^2)$). Avec les notations introduites ci-dessus (au début de (3.2); le lecteur vérifiera sans peine qu'il n'y a pas de cercle vicieux) on a

$$\begin{aligned} X^{2^{g-1}} P_{\underline{q}, M_1}^e(q^{g(g+1)/2} [q \mathrm{Id}_{2g}] X^{-1}) &= \prod_{w \in W_M \setminus W_{M_1}} (q^{g(g+1)/2} [q \mathrm{Id}_{2g}] - t_q^w X) \\ &= \prod_{\substack{\underline{\varepsilon}: \{1, \dots, g\} \rightarrow \{\pm 1\} \\ \varepsilon_1 = 1}} (q^{g(g+1)/2} [q \mathrm{Id}_{2g}] - q^{(\underline{\varepsilon})} t_{\underline{\varepsilon}} X) \end{aligned}$$

où l'on pose, pour raccourcir les formules, $\langle \underline{\varepsilon} \rangle = g(\frac{1+\varepsilon_1}{2}) + \dots + \frac{1+\varepsilon_g}{2}$.

Continuons le calcul :

$$\begin{aligned} \prod_{\underline{\varepsilon}; \varepsilon_1 = 1} (q^{g(g+1)/2} [q \mathrm{Id}_{2g}] - q^{(\underline{\varepsilon})} t_{\underline{\varepsilon}} X) &= \prod_{\underline{\varepsilon}; \varepsilon_1 = 1} t_{\underline{\varepsilon}} q^{(\underline{\varepsilon})} (q^{g(g+1)/2 - \langle \underline{\varepsilon} \rangle} [qt_{\underline{\varepsilon}}^{-1}] - X) \\ &= \prod_{\underline{\varepsilon}; \varepsilon_1 = 1} t_{\underline{\varepsilon}} q^{(\underline{\varepsilon})} (q^{(-\underline{\varepsilon})} [t_{-\underline{\varepsilon}}] - X) \\ &= \prod_{\underline{\varepsilon}; \varepsilon_1 = 1} t_{\underline{\varepsilon}} q^{(\underline{\varepsilon})} \prod_{w \in W_M \setminus W_{M_1} w_0} (t^w - X) \\ &= (-1)^{2^{g-1}} \prod_{\underline{\varepsilon}; \varepsilon_1 = 1} t_{\underline{\varepsilon}} q^{(\underline{\varepsilon})} P_{\underline{q}, M_1}^m(X). \end{aligned}$$

Groupant $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_g)$ et $(\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \dots, -\varepsilon_g)$ par paires dans le produit, on obtient la formule annoncée. \square

3.2. Vecteurs fixes d'une représentation induite. — Soit $\chi : T(\mathbb{Q}_q) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ un caractère non ramifié du tore T . On considère l'induite parabolique lisse à droite (non normalisée) $\pi = \frac{G_g}{B} \underline{\mathrm{Ind}}(\chi)$:

$$\begin{aligned} V_\pi &= \{f : G_g(\mathbb{Q}_q) \longrightarrow \mathbb{C}; f \text{ est localement constante} \\ &\quad \text{et } f(gt\bar{n}) = \chi(t)f(g), \forall g \in G_g(\mathbb{Q}_q), t \in T(\mathbb{Q}_q), \bar{n} \in \overline{N}(\mathbb{Q}_q)\}, \end{aligned}$$

munie de l'action naturelle à droite de $G_g(\mathbb{Q}_q)$ (par translation à gauche). C'est aussi l'induite à droite normalisée $\frac{G_g}{B} \underline{\mathrm{Ind}}(\chi_0)$, où χ_0 est le caractère $\chi\delta^{-1/2}$, où l'on rappelle que pour le groupe GSp_{2g} , le caractère unimodulaire δ de B vaut

$$\delta(\mathrm{diag}(t_1, \dots, t_g, \nu t_g^{-1}, \dots, \nu t_1^{-1})) = |(t_1 t_2^{g-1} \dots t_g)^2 \nu^{-g(g+1)/2}|,$$

en normalisant comme d'habitude la norme q -adique de telle sorte que $|q| = q^{-1}$.

Pour $\underline{\varepsilon} : \{1, \dots, g\} \rightarrow \{\pm 1\}$, notons

$$t_{\underline{\varepsilon}} = \mathrm{diag}(q^{\frac{1-\varepsilon_1}{2}}, \dots, q^{\frac{1-\varepsilon_g}{2}}, q^{\frac{1+\varepsilon_g}{2}}, \dots, q^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}) \in T(\mathbb{Q}_q).$$

Le paramètre de Satake de la représentation $\pi = \frac{G_g}{B} \text{Ind}(\chi_0)$ est alors la famille $(s_{q,\varepsilon} = \chi_0(t_\varepsilon))_\varepsilon$. Nous appellerons paramètre de Hecke la famille $(\alpha_{q,\varepsilon} = q^{g(g+1)/4} s_{\varepsilon})_\varepsilon$; il résulte de l'égalité $\alpha_\varepsilon = q^{g \frac{1-\varepsilon_1}{2} + \dots + \frac{1-\varepsilon_g}{2}} \chi(t_\varepsilon)$ que l'expression du paramètre de Hecke de π en fonction de χ n'utilise pas de racine carrée de q . Pour $g = 2$, nous utiliserons la notation plus simple

$$\begin{aligned} \alpha_q &= \alpha_{q,(1,1)} = \chi(\text{diag}(1, 1, q, q)) \\ \beta_q &= \alpha_{q,(1,-1)} = q\chi(\text{diag}(1, q, 1, q)) \\ \gamma_q &= \alpha_{q,(-1,1)} = q^2\chi(\text{diag}(q, 1, q, 1)) \\ \delta_q &= \alpha_{q,(-1,-1)} = q^3\chi(\text{diag}(q, q, 1, 1)). \end{aligned}$$

Remarque. — On a alors

$$\begin{aligned} \chi(\underline{S}_{G_g}^{\text{nr}}(P_q(X))) &= \prod_{\varepsilon:\{1,\dots,g\}\rightarrow\{\pm 1\}} (X - \alpha_\varepsilon) \\ \chi(\underline{S}_\Pi^{K_T}(P_q^e(X))) &= \prod_{\substack{\varepsilon:\{1,\dots,g\}\rightarrow\{\pm 1\} \\ \varepsilon_1=1}} (X - \alpha_\varepsilon) \\ \chi(\underline{S}_\Pi^{K_T}(P_q^m(X))) &= \prod_{\substack{\varepsilon:\{1,\dots,g\}\rightarrow\{\pm 1\} \\ \varepsilon_1=-1}} (X - \alpha_\varepsilon). \end{aligned}$$

Considérons maintenant un opérateur de Hecke dilatant $U \in \mathcal{H}_\Pi^-$. La proposition suivante exprime les valeurs propres pour l'action de U sur V_π^Π en fonction de χ , à l'aide de la transformation de Satake tordue $\underline{S}_\Pi^{K_T}$.

Choisissons une fois pour toutes des relèvements (encore notés w) des $w \in W$ dans $N_{G_g(\mathbb{Z}_q)}(T(\mathbb{Z}_q))$; on vérifiera aisément que ces choix sont inoffensifs. Rappelons que l'application

$$W_{M_1} \backslash W \longmapsto \Pi \backslash G_g / \overline{B}, \quad W_{M_1} w \longmapsto \Pi w \overline{B}$$

est une bijection. Lorsque $w \in W_{M_1} \backslash W$, notons e_w l'unique élément de V_π^Π supporté par $\Pi w \overline{B}$ tel que $e_w(w) = 1$. Les $2g$ éléments e_w ($w \in W_{M_1} \backslash W$) forment une base de V_π^Π . Rappelons de plus que l'ordre de Bruhat sur W induit un ordre sur $W_{M_1} \backslash W$ (si w et w' sont des représentants de longueur minimale des classes $W_{M_1} w$ et $W_{M_1} w'$, on a $W_{M_1} w \leq W_{M_1} w'$ si et seulement si $w \leq w'$; dans le cas qui nous occupe ces représentants sont

$$\begin{aligned} w_1 = 1 < w_2 = (12) < \dots < w_g = (1g) \\ < w_{g+1} = (1g)w_0 < \dots < w_{2g-1} = (12)w_0 < w_{2g} = w_0, \end{aligned}$$

en identifiant W à $\mathfrak{S}_g \times \{\pm 1\}^g$ et en notant $w_0 = (-1, \dots, -1)$ l'élément le plus long de W et que $W_{M_1} w \mapsto W_{M_1} w w_0$ est une bijection décroissante vis à vis de cet ordre.

Introduisons une action à gauche $(w, \chi) \mapsto {}^w\chi$ de W sur l'ensemble des caractères de T en posant

$${}^w\chi(t) = \delta(t)^{1/2} \delta(w^{-1}tw)^{-1/2} \chi(w^{-1}tw),$$

de sorte qu'il existe un opérateur d'entrelacement non nul

$$\frac{G_g}{B} \underline{\mathrm{Ind}}(\chi) \longrightarrow \frac{G_g}{B} \underline{\mathrm{Ind}}({}^w\chi).$$

Finalement, notons encore $\chi : \mathcal{H}_T^{\mathrm{nr}} \rightarrow \mathbb{C}$ le morphisme d'algèbres induit par le caractère χ .

Proposition 3.2.1. — Soit $U \in \mathcal{H}_\Pi^-$ un opérateur de Hecke dilatant.

(1) La matrice dans la base $(e_w)_{w \in W_{M_1} \setminus W}$ de l'endomorphisme de V_π^Π induit par U est triangulaire supérieure : on a

$$e_w | U = \sum_{w' \leq w} c(U, \chi, w, w') e_{w'}.$$

(2) Le coefficient diagonal $c(U, \chi, w, w)$ est égal à

$$\chi((S_\Pi^{K_T}(U))^w) = {}^w\chi(S_\Pi^{K_T}(U)).$$

Remarques

(1) Un énoncé analogue vaut en fait pour tout groupe réductif déployé ; on peut de plus remplacer \mathbb{C} par une $\mathbb{Z}[q^{-1}]$ -algèbre quelconque — par exemple $\mathcal{H}_T^{\mathrm{nr}}[q^{-1}]$, le caractère χ étant le caractère universel.

(2) Si au lieu d'induire à partir du groupe de Borel \overline{B} nous avons choisi d'induire à partir de B , les valeurs propres de U s'exprimeraient à l'aide de la transformation de Satake tordue $\widetilde{S}_\Pi^{K_T}$; la matrice de l'endomorphisme associé à U serait triangulaire inférieure.

(3) On a donc $c(U, \chi, ww', ww') = c(U, {}^{w'}\chi, w, w)$. Bien entendu, le fait que $\chi \mapsto {}^{w'}\chi$ permute les coefficients diagonaux peut s'obtenir sans calcul grâce à la théorie des opérateurs d'entrelacement.

(4) On peut aussi démontrer une forme un tout petit peu moins précise de cette proposition en utilisant le module de Jacquet — le résultat obtenu est qu'il existe une base dans laquelle les matrices des opérateurs dilatants sont toutes triangulaires supérieures ; on n'obtient les coefficients diagonaux qu'à l'ordre près (plus précisément, modulo permutation par un élément de W). C'est la méthode suivie dans [24].

Démonstration. — Il suffit bien entendu de traiter le cas où l'opérateur U est associé à une double-classe $\Pi d \Pi$, $d \in D_q^-$.

(1) La valeur en w' de la fonction $e_w | U$ est

$$\int_{G_g} 1_{\Pi d \Pi}(\gamma) e_w(\gamma w') d\gamma.$$

Supposons que cette valeur est non nulle, et montrons qu'on a alors $W_{M_1} w' \leq W_{M_1} w$.

On a alors $\Pi d\Pi w' \cap \Pi w\bar{B} \neq \emptyset$ et donc $\Pi w\bar{B} \subset \Pi d\Pi w'\bar{B}$. L'élément d est dilatant et on a donc $\Pi d\Pi = \bar{P}_1(\mathbb{Z}_q)dP_1(\mathbb{Z}_q) \subset \Pi P_1(\mathbb{Q}_q)$. On a donc encore $\Pi w\bar{B} \subset \Pi P_1(\mathbb{Q}_q)w'\bar{B}$. Il suffit donc de vérifier que l'on a $P_1(\mathbb{Q}_q)w'\bar{B} \subset \coprod_{W_{M_1} w'' \geq W_{M_1} w'} \Pi w''\bar{B}$.

Pour $\gamma \in G_g(\mathbb{Q}_q)$, notons $\dot{\gamma}_{\mathbb{Q}_q} \in (G_g/\bar{B})(\mathbb{Q}_q)$ le point $\gamma\bar{B}(\mathbb{Q}_q)$ de la variété de drapeaux G_g/\bar{B} . Utilisant la propriété de la variété de drapeaux, ce point se prolonge (de manière unique) en un point $\dot{\gamma}_{\mathbb{Z}_q} \in (G_g/\bar{B})(\mathbb{Z}_q)$, et induit donc par réduction modulo q un point $\dot{\gamma}_{\mathbb{F}_q} \in (G_g/\bar{B})(\mathbb{F}_q)$. L'élément γ appartient à $\Pi w''\bar{B}(\mathbb{Q}_q)$ si et seulement si $\dot{\gamma}_{\mathbb{F}_q}$ appartient à la cellule de Schubert $(P_1 w''\bar{B})(\mathbb{F}_q)$. Par ailleurs, si $\gamma \in P_1(\mathbb{Q}_q)w'\bar{B}(\mathbb{Q}_q)$, la cellule de Schubert $P_1 w''\bar{B}$ contenant $\dot{\gamma}_{\mathbb{F}_q}$ est située dans l'adhérence de la cellule de Schubert $P_1 w'\bar{B}$; notant toujours w_0 l'élément le plus long de W on a $\bar{B} = w_0 B w_0^{-1}$ et la cellule de Schubert $P_1 w'' w_0 B$ est donc contenue dans l'adhérence de $P_1 w' w_0 B$: on a donc $W_{M_1} w'' \geq W_{M_1} w'$ puisque la multiplication à droite par w_0 reverse l'ordre de Bruhat sur $W_{M_1} \setminus W$.

(2) On vérifie facilement que la fonction e_w admet la représentation intégrale suivante

$$e_w(\gamma) = \int_{T \times \bar{N}} \chi(t)^{-1} 1_{\Pi w}(\gamma t \bar{n}) dt d\bar{n}$$

(les mesures de Haar sur T et \bar{N} étant respectivement choisies de telle sorte que $\text{vol} T(\mathbb{Z}_q) = 1$ et $\text{vol}(w^{-1}\Pi w \cap \bar{N}) = 1$; une formule de ce genre apparaît par exemple dans [6], paragraphe 3.3). On a

$$\int_{G_g} 1_{\Pi d\Pi}(\gamma') 1_{\Pi w}(\gamma' \gamma) d\gamma' = 1_{\Pi d^{-1}\Pi w}(\gamma)$$

(la mesure de Haar sur G_g étant choisie de telle sorte que $\text{vol} \Pi = 1$) et donc

$$(e_w | 1_{\Pi d\Pi})(\gamma) = \int_{T \times \bar{N}} \chi(t)^{-1} 1_{\Pi d^{-1}\Pi w}(\gamma t \bar{n}) dt d\bar{n}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} c(1_{\Pi d\Pi}, \chi, w, w) &= \int_{T \times \bar{N}} \chi(t)^{-1} 1_{\Pi d^{-1}\Pi w}(wt \bar{n}) dt d\bar{n} \\ &= \int_{T \times \bar{N}} \chi(t)^{-1} 1_{w^{-1}\Pi d^{-1}\Pi w}(t \bar{n}) dt d\bar{n} \\ &= \int_{T \times \bar{N}} \chi(t) 1_{w^{-1}\Pi d\Pi w}(\bar{n}t) dt d\bar{n} \\ &= \sum_{t \in T(\mathbb{Q}_q)/T(\mathbb{Z}_q)} \chi(t) \int_{\bar{N}} 1_{w^{-1}\Pi d\Pi w}(\bar{n}t) d\bar{n} \end{aligned}$$

et la formule qu'on se propose de vérifier équivaut donc à

$$\delta(t)^{-1/2} \delta(wtw^{-1})^{1/2} {}_{\text{opp}}\mathcal{S}_{\Pi}^{K_T}(1_{\Pi d\Pi})(wtw^{-1}) = \frac{1}{\text{vol}(w^{-1}\Pi w \cap \bar{N})} \int_{\bar{N}} 1_{w^{-1}\Pi d\Pi w}(\bar{n}t) d\bar{n}$$

(dans la mesure où le membre de gauche s'écrit lui aussi à l'aide d'une intégrale sur le groupe \bar{N} , mais avec une autre normalisation de la mesure de Haar, on abandonne la normalisation utilisée quelques lignes plus haut pour raccourcir les formules et on revient à celle de (3.1) : $\text{vol}(\Pi \cap \bar{N}) = 1$).

Remarquons tout d'abord que les deux membres de l'égalité qu'on se propose de vérifier ne dépendent que de la classe de w dans $W_{M_1} \setminus W$: pour le membre de droite ceci résulte simplement du fait que $\Pi w' = \Pi$ pour $w' \in W_{M_1}$ et pour celui de gauche ceci résulte de l'invariance (cf. 3.1) de ${}_{\text{opp}}\mathcal{S}_{\Pi}^{K_T}(1_{\Pi d\Pi})$ par ${}_{\text{opp}}\mathcal{S}_{\Pi}^{K_T}(1_{\Pi d\Pi}) \mapsto {}_{\text{opp}}\mathcal{S}_{\Pi}^{K_T}(1_{\Pi d\Pi})^{w'}$ ($w' \in W_{M_1}$). On peut donc se contenter de vérifier la formule en prenant pour w un représentant particulier de sa classe dans $W_{M_1} \setminus W$. Nous choisirons pour w l'élément de longueur minimale dans la classe $W_{M_1}w$; on vérifie aisément que c'est aussi l'unique élément de $W_{M_1}w$ tel que $w\bar{B}w^{-1} \cap M_1 \subset \bar{B}$.

Écrivons $wt = wtw^{-1}$ et ${}^w\bar{N} = w\bar{N}w^{-1}$. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{vol}(w^{-1}\Pi w \cap \bar{N})} \int_{\bar{N}} 1_{w^{-1}\Pi d\Pi w}(\bar{n}t) d\bar{n} &= \frac{1}{\text{vol}(\Pi \cap {}^w\bar{N})} \int_{{}^w\bar{N}} 1_{\Pi d\Pi}({}^w\bar{n}wt) d{}^w\bar{n} \\ &= \frac{\text{vol}(\Pi d\Pi {}^w t^{-1} \cap {}^w\bar{N})}{\text{vol}(\Pi \cap {}^w\bar{N})}, \end{aligned}$$

où $d{}^w\bar{n}$ désigne une mesure de Haar sur ${}^w\bar{N}$. Les décompositions :

$$\begin{aligned} \Pi &= (\bar{U}_1 \cap \Pi) \times K_{M_1} \times (U_1 \cap \Pi) \\ \Pi d\Pi {}^w t^{-1} &= (\bar{U}_1 \cap \Pi) \times (K_{M_1} dK_{M_1} {}^w t^{-1}) \times ({}^w t(U_1 \cap \Pi) {}^w t^{-1}) \\ {}^w\bar{N} &= (\bar{U}_1 \cap {}^w\bar{N}) \times (M_1 \cap {}^w\bar{N}) \times (U_1 \cap {}^w\bar{N}) \end{aligned}$$

entraînent

$$\begin{aligned} \Pi \cap {}^w\bar{N} &= (\bar{U}_1 \cap \Pi \cap {}^w\bar{N}) \times (K_{M_1} \cap {}^w\bar{N}) \times (U_1 \cap \Pi \cap {}^w\bar{N}) \\ \Pi d\Pi {}^w t^{-1} \cap {}^w\bar{N} &= (\bar{U}_1 \cap \Pi \cap {}^w\bar{N}) \times (K_{M_1} dK_{M_1} {}^w t^{-1} \cap {}^w\bar{N}) \times ({}^w t(U_1 \cap \Pi) {}^w t^{-1} \cap {}^w\bar{N}) \end{aligned}$$

de sorte qu'on a

$$\frac{\text{vol}(\Pi d\Pi {}^w t^{-1} \cap {}^w\bar{N})}{\text{vol}(\Pi \cap {}^w\bar{N})} = \frac{\text{vol}(K_{M_1} dK_{M_1} {}^w t^{-1} \cap {}^w\bar{N})}{\text{vol}(K_{M_1} \cap {}^w\bar{N})} \frac{\text{vol}({}^w t(U_1 \cap \Pi) {}^w t^{-1} \cap {}^w\bar{N})}{\text{vol}(U_1 \cap \Pi \cap {}^w\bar{N})}$$

On a $M_1 \cap {}^w\bar{N} = M_1 \cap \bar{N}$, de sorte que

$$\frac{\text{vol}(K_{M_1} dK_{M_1} {}^w t^{-1} \cap {}^w\bar{N})}{\text{vol}(K_{M_1} \cap {}^w\bar{N})}$$

n'est autre que $\text{opp} S_{\Pi}^{K_T}(1_{\Pi d\Pi})$ (cf. 3.1.3 et le premier point de 3.1.4). Il reste donc uniquement à vérifier que

$$\frac{\text{vol}({}^w t(U_1 \cap \Pi) {}^w t^{-1} \cap {}^w \overline{N})}{\text{vol}(U_1 \cap \Pi \cap {}^w \overline{N})} = \delta(t)^{-1/2} \delta(wtw^{-1})^{1/2}.$$

Remarquons qu'on a $U_1 \cap {}^w \overline{N} = N \cap {}^w \overline{N}$ puisque $M_1 \cap {}^w N = M_1 \cap N$. Pour raccourcir les formules, on va maintenant munir les groupes unipotents qui vont suivre de la mesure de Haar telle que le volume du sous-groupe des points entiers soit 1. Le quotient des deux volumes considéré plus haut est alors

$$\text{vol}({}^w t(N \cap {}^w \overline{N})(\mathbb{Z}_q) {}^w t^{-1}) = \text{vol}(t({}^{w^{-1}} N \cap \overline{N})(\mathbb{Z}_q) t^{-1});$$

on a d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{\delta(wtw^{-1})^{1/2}}{\delta(t)^{1/2}} &= \frac{(\text{vol}(t(N \cap {}^{w^{-1}} N)(\mathbb{Z}_q) t^{-1}) \text{vol}(t(\overline{N} \cap {}^{w^{-1}} N)(\mathbb{Z}_q) t^{-1}))^{1/2}}{(\text{vol}(t(N \cap {}^{w^{-1}} N)(\mathbb{Z}_q) t^{-1}) \text{vol}(t(N \cap {}^{w^{-1}} \overline{N})(\mathbb{Z}_q) t^{-1}))^{1/2}} \\ &= \text{vol}(t({}^{w^{-1}} N \cap \overline{N})(\mathbb{Z}_q) t^{-1}) \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 3.2.1. □

On rappelle que dans la discussion précédant l'énoncé de la proposition 3.2.1, on a introduit une numérotation $w_1 = 1 \leq \dots \leq w_{2g-1} = w_{2g} w_0 \leq w_{2g} = w_0$ des éléments de $W_{M_1} \setminus W$.

Corollaire 3.2.2. — *Pour $g = 2$, les matrices (triangulaires supérieures) des endomorphismes $(\cdot | U_{1,q})$ et $(\cdot | U_{2,q})$ dans la base $(e_{w_i})_{1 \leq i \leq 4}$ ont respectivement pour éléments diagonaux*

$$\begin{aligned} & q^{-1} \alpha_q \beta_q, \quad q^{-1} \alpha_q \gamma_q, \quad q^{-1} \beta_q \delta_q, \quad q^{-1} \gamma_q \delta_q \\ \text{et} \quad & \alpha_q + \beta_q, \quad \alpha_q + \gamma_q, \quad \beta_q + \delta_q, \quad \gamma_q + \delta_q. \end{aligned}$$

Démonstration. — Comme dans 3.1, notons $[t]$ l'élément de $\mathcal{H}_T^{\text{nr}}$ associé à $t \in T(\mathbb{Q}_q)$. On a

$$S_{\Pi}^{K_T}(U_{1,q}) = [\text{diag}(1, q, q, q^2)] \text{ et } S_{\Pi}^{K_T} = [\text{diag}(1, 1, q, q)] + q[\text{diag}(1, q, 1, q)]$$

(en utilisant les propositions 3.1.3 et 3.1.4, ceci se réduit à un calcul bien connu dans GL_2). Le corollaire résulte immédiatement de ce calcul et de la proposition 3.2.1. □

Rappelons :

Proposition 3.2.3. — *Pour $g = 2$, la représentation $\pi = \frac{G_g}{B} \text{Ind } \chi_0$ est irréductible si et seulement si les quotients ζ'/ζ , $\zeta, \zeta' \in \{\alpha_q, \beta_q, \gamma_q, \delta_q\}$ sont tous différents de $q^{\pm 1}$. Lorsque c'est le cas, π^{K_g} est une droite, engendrée par $e_{w_1} + e_{w_2} + e_{w_3} + e_{w_4}$.*

Démonstration. — Ceci résulte de ([47], Lemma 3.2). □

Les représentations que nous considérerons dans la section 11 seront des représentations à coefficients dans l'anneau d'entiers d'une extension finie de \mathbb{Q}_p , où p est un entier premier divisant $q - 1$, et seront telles que la condition $\zeta'/\zeta \neq q^{\pm 1} (\equiv 1)$ soit vérifiée modulo l'idéal maximal. Le corollaire suivant nous sera donc utile.

Corollaire 3.2.4. — Pour $g = 2$, lorsque $\pi = \frac{G_g}{B} \text{Ind } \chi_0$ est irréductible, lorsque de plus $\alpha_q \beta_q \notin \{\alpha_q \gamma_q, \beta_q \delta_q, \gamma_q \delta_q\}$, l'endomorphisme de π^Π induit par

$$X_q = (qU_{1,q} - \alpha_q \gamma_q)(qU_{1,q} - \beta_q \delta_q)(qU_{1,q} - \gamma_q \delta_q)$$

réalise un isomorphisme de la droite π^{K_g} des vecteurs sphériques de π sur la droite $\langle e_{w_1} \rangle$, propre pour l'action de $\mathcal{H}_{\overline{\Pi}}$, sur laquelle $qU_{1,q}$ et $U_{2,q}$ ont respectivement pour valeurs propres $\alpha_q \beta_q$ et $\alpha_q + \beta_q$. L'isomorphisme inverse est donné par $x \mapsto [(\alpha\beta - \alpha\gamma)(\alpha\beta - \beta\delta)(\alpha\beta - \gamma\delta)]^{-1}(x \mid \sum_{1 \leq i \leq 4} \Pi w_i \Pi)$.

4. Déformations de la représentation résiduelle

4.1. L'anneau de déformations universelles. — On se limite au cas $g = 2$.

Soit $\chi_p : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique p -adique. Pour tout nombre premier ℓ , soit D_ℓ resp. I_ℓ un groupe de décomposition resp. son sous-groupe d'inertie, en ℓ .

On fixe un couple (π, p) où π est cuspidale cohomologique de poids $(a_1, a_2; a_1 + a_2)$, ordinaire en p , telle que $\bar{\rho} = \bar{\rho}_\pi$ satisfasse (RLI₂) et soit S -bien ramifiée.

Soit $\text{CNL}_{\mathcal{O}}$ la catégorie des \mathcal{O} -algèbres locales noethériennes complètes de corps résiduel k .

Soit $\varepsilon \in G(\mathbb{Z})$ la matrice unipotente régulière standard. Pour tout $\ell \in S_2$, fixons $\sigma_\ell \in I_\ell$ et $\bar{g}_\ell \in G(k)$ tels que $\bar{\rho}(\sigma_\ell) = \bar{g}_\ell \varepsilon \bar{g}_\ell^{-1}$.

Dans la suite de cette section, on pose pour abrégé $*$ = cris-ord ou ord. Pour tout $A \in \text{CNL}_{\mathcal{O}}$, soit $E_*(A)$ l'ensemble des homomorphismes continus $\rho : \Gamma \rightarrow \widehat{G}(A)$ tels que $\rho \bmod \mathfrak{m}_A = \bar{\rho}$ (appelés déformations de $\bar{\rho}$) et tels que

- ρ est non ramifié hors de $S \cup \{p, \infty\}$
- $\nu \circ \rho = \nu \circ \rho_\pi$
- ρ est cristalline et ordinaire en p (pour $*$ = cris-ord), resp. est ordinaire en p (si $*$ = ord) de poids Π_w
- si $\ell \in S_1$, l'application de réduction mod. \mathfrak{m}_A donne $\rho(I_\ell) \cong \bar{\rho}(I_\ell)$,
- Pour tout $\ell \in (\text{UN}_{2,2}) \cup S_3$, il existe $g \in G(A)$ tel que $\rho(\sigma_\ell) = g \cdot \varepsilon_* \cdot g^{-1}$ (avec $*$ = l, h, \emptyset).
- Pour tout $\ell \in \text{PR}_2$, $\rho(I_\ell)$ possède un A -plan lagrangien fixe facteur direct.

Remarque. — Si $\ell \in \text{PR}_2$, et si $\rho(I_\ell)$ possède un A -plan lagrangien fixe facteur direct, il y a automatiquement un A -plan lagrangien χ -variant en somme directe où le caractère χ désigne ici la restriction à I_ℓ de $\nu \circ \rho_\pi$.

Pour tout $A \in \text{CNL}_{\mathcal{O}}$, soit $G_1(A) = \text{Ker}(G(A) \rightarrow G(k))$. On définit le foncteur covariant \mathcal{F}_* (pour $*$ = cris-ord ou ord) sur $\text{CNL}_{\mathcal{O}}$ à valeurs dans les ensembles qui associe à un objet A de $\text{CNL}_{\mathcal{O}}$ l'ensemble $\mathcal{F}_*(A) = E_*(A)/G_1(A)$, des classes de conjugaison strictes $[\rho]$ des éléments ρ de $E_*(A)$.

L'espace tangent de \mathcal{F}_* est de dimension finie (on le calculera plus loin). Par le critère de (pro)représentabilité de Grothendieck, il suffit pour montrer que \mathcal{F}_* est représentable de vérifier que \mathcal{F}_* commute au produit fibré. C'est-à-dire que le morphisme.

$$h : \mathcal{F}_*(A_1 \times_{A_0} A_2) \longrightarrow \mathcal{F}_*(A_1) \times_{\mathcal{F}_*(A_0)} \mathcal{F}_*(A_2)$$

associé à deux morphismes $A_i \rightarrow A_0$ d'anneaux locaux artiniens ($i = 1, 2$) est un isomorphisme. On peut supposer que $A_1 \rightarrow A_0$ est surjective. L'injectivité résulte de l'hypothèse (RLI₂). Pour la surjectivité, étant données ρ_1 et ρ_2 donnant la même classe dans $\mathcal{F}_*(A_0)$, on peut après modification de ρ_1 par conjugaison, former $\rho_3 = \rho_1 \times \rho_2 \in \mathcal{F}(A_1 \times_{A_0} A_2)$; il reste à voir que cette représentation satisfait les conditions locales. En p , si $*$ = ord ou cris-ord, comme les quatre poids sont distincts modulo $p - 1$, le normalisateur de la restriction à I_p d'un $\rho \in E(A)$ est le conjugué dans $G(A)$ du groupe des A -points un sous-groupe de Borel de G . Ce groupe est lisse et la condition $*$ est encore satisfaite par ρ_3 . Si les ρ_i sont cristallines, la théorie de Fontaine-Laffaille montre, comme dans la thèse de Ramakrishna, que ρ_3 satisfait est encore cristalline.

En $\ell \in S_2$, sous l'hypothèse (PR₂), pour $\chi = \nu \circ \rho_\pi|_{I_\ell}$, et pour toute déformation ρ de $\bar{\rho}$ il ne peut y avoir au plus qu'un plan lagrangien fixe par l'inertie. Si ℓ est de type UN_{2,2} ou S₃, le normalisateur de $\rho_3|_{I_\ell}$ est un groupe lisse, et on conclut comme ci-dessus que ρ_3 satisfait la même condition en ℓ .

La surjectivité de h résulte de ces remarques. Les détails de ces vérifications figurent dans [59] Sect. 6.1.

Le foncteur \mathcal{F}_* est donc représenté par un couple universel (R_*, ρ_*^u) . Notons que ρ_π fournit un élément de $\mathcal{F}_*(\mathcal{O})$ et par conséquent des homomorphismes $R_* \rightarrow \mathcal{O}$ de \mathcal{O} -algèbres locales.

De plus, on a un homomorphisme canonique surjectif de \mathcal{O} -algèbres locales $\psi_{\text{ord}} : R_{\text{ord}} \rightarrow R_{\text{cris,ord}}$ donné par le morphismes d'oubli $\mathcal{F}_{\text{cris,ord}} \hookrightarrow \mathcal{F}_{\text{ord}}$.

4.2. Représentations symplectiques. — Soit V un espace de dimension finie sur un corps p -adique F . Soit $\rho : \Gamma \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation autoduale :

$$\rho \cong \rho^* \otimes \nu$$

pour un caractère ν de Γ . Soit L un réseau stable par ρ .

Lemme 4.2.1

(1) *Si ρ est irréductible, son image est contenue dans le groupe des similitudes pour une forme ψ , non dégénérée, orthogonale ou symplectique ;*

(2) De plus, si la représentation résiduelle $\bar{\rho}$ est irréductible, la réduction $\bar{\psi}_L$ (choisie non nulle) est non dégénérée (orthogonale ou symplectique) et (L, ψ) est unimodulaire.

(3) Sous les hypothèses de (2) si de plus $\dim_F V = 4$, si $\bar{\rho}$ préserve une (autre) forme symplectique $\bar{\psi}$ et si l'image de $\bar{\rho}$ contient le normalisateur $N(\bar{\psi})$ dans $\mathrm{Sp}(\bar{\psi})$ de $\mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SL}(2)$, alors ψ est symplectique et sa réduction est un multiple non nul de $\bar{\psi}$.

Sans l'hypothèse supplémentaire sur l'image de $\bar{\rho}$, il est facile de donner un contre-exemple à la symplecticité de ψ : prendre $\mathrm{Im} \bar{\rho} = \mathrm{O}(4) \cap \mathrm{GSp}(4)$ (intersection de groupes standards); ce groupe agit irréductiblement sur V , et contient en fait le normalisateur du tore maximal standard de $\mathrm{Sp}(\bar{\psi})$. Cependant, on peut prendre pour ψ la forme symétrique $x_1y_4 + x_4y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$, et pour $\bar{\psi}$ la forme symplectique standard $x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2$.

Démonstration

(1) La condition d'autodualité entraîne qu'il existe une forme bilinéaire non dégénérée $\psi : V \times V \rightarrow F$ telle que ρ agit sur V par ψ -similitudes. On peut supposer que ψ est symétrique ou symplectique : En effet, l'une des deux composantes de $\psi = \psi^s + \psi^a$ est non nulle; elle doit en fait être non dégénérée car si par exemple $\psi^a(v, w) = 0$ pour tout w , on a $\psi^a(\rho(g)v, w) = 0$ pour tout g et tout w , et par irréductibilité de ρ on trouve $\psi^a = 0$.

(2) On ajuste ψ pour que sa réduction $\bar{\psi}_L$ soit non nulle sur $L/\varpi L$; par l'argument précédent (lemme de Schur) on voit que cette réduction est non dégénérée; ce qui entraîne que (L, ψ) est unimodulaire.

(3) Fixons une base symplectique (e_1, \dots, e_4) de $(L/\varpi L, \bar{\psi})$; les poids du tore $T(\bar{\psi})$ agissant sur cette base sont, disons, $t_1, t_2, t_1^{-1}, t_2^{-1}$. Il est facile de voir que les seuls indices possibles pour $\bar{\psi}_L(e_i, e_j) \neq 0$ sont $(1, 4), (4, 1), (2, 3)$ ou $(3, 2)$. Pour exclure le cas $\bar{\psi}_L = a \times (x_1y_4 + x_4y_1 + x_2y_3 + x_3y_2)$, on utilise un élément unipotent de $\mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SL}(2)$; il ne préserve $\bar{\psi}_L$ à homothéties près que si cette forme est symplectique. \square

4.3. L'homomorphisme $R \rightarrow T$. — Soit $K \subset G(\widehat{\mathbb{Z}})$ tel que $K^N = G(\widehat{\mathbb{Z}}^N)$ soit le compact maximal hyperspécial standard de $G(\mathbb{Q}^N)$.

On fixe un sous-groupe de niveau $K = K_N \times K^N$. Pour décrire K_N , on fixe un sous-ensemble S_1 de l'ensemble des facteurs premiers de N . Pour $\ell \in S_1$, on ne met aucune condition sur le facteur K_ℓ ; pour ℓ divisant N mais n'appartenant pas à S_1 , K_ℓ est soit le parahorique de Klingen strict, soit le sous-groupe d'Iwahori en ℓ . On suppose en outre que $\nu(K) = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$.

Remarque. — En l'absence d'une démonstration du cas 4 de la Conjecture de compatibilité précédant Th. 2.2.5, on ne peut inclure de premiers ℓ de type S_4 dans le niveau.

Pour tout nombre premier ℓ ne divisant pas Nr , soit $\mathcal{H}_\ell = \mathcal{H}_G^{\text{nr}}$ l'algèbre de Hecke sphérique de $G_\ell = \text{GSp}(4, \mathbb{Q}_\ell)$ et soit $\mathcal{H}^{Np} = \bigotimes_{(\ell, Np)=1} \mathcal{H}_\ell$ le produit tensoriel restreint de ses composantes locales.

Soit π la représentation cuspidale de niveau K fixée au début de la Sect. 4.1 ; son type à l'infini π_∞ est dans la série discrète de paramètre de Harish-Chandra $\lambda^* + \rho$; soit p ne divisant pas N et $p > w_\pi$ en lequel π est ordinaire. On fixe un plongement p -adique $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$.

Soit $\theta_\pi : \mathcal{H}^{Np} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ l'homomorphisme d'algèbre donné par l'action de \mathcal{H}_ℓ sur la droite $\pi_\ell^{K_\ell}$ des vecteurs sphériques de π_ℓ pour chaque ℓ ne divisant pas Np .

Soit \mathcal{O} un anneau de valuation discrète dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, fini et plat sur \mathbb{Z}_p contenant les valeurs de l'homomorphisme θ_π et sur lequel ρ_π est définie ; soit ϖ une uniformisante et k son corps résiduel. On suppose que (RLI_2) est satisfaite. On suppose que pour chaque premier ℓ de S_1 , la représentation résiduelle $\bar{\rho}_\pi$ est de type S_1 en ℓ . On suppose également que (π, p) est S -bon et que $\bar{\rho}_\pi$ est S -bien ramifiée.

Soit $\mathcal{H}^{Np}(\mathcal{O}) = \mathcal{H}^{Np} \otimes \mathcal{O}$ et soit $\bar{\theta}_\pi : \mathcal{H}^{Np}(\mathcal{O}) \rightarrow k$ la réduction de $\theta_\pi \otimes \text{Id}_\mathcal{O}$ modulo ϖ . Soit \mathfrak{m} l'idéal maximal de $\mathcal{H}^{Np}(\mathcal{O})$ noyau de $\bar{\theta}_\pi$.

Soit $K(N)$ le groupe de congruences principal de niveau N ; on a $K(N) \subset K$; soit $\overline{K} = K/K(N)$. Comme on ne suppose pas que K est net, on doit prendre la précaution suivante. On définit la cohomologie $\tilde{H}^\bullet(S_K, V_\lambda(\mathcal{O}))$ comme l'hypercohomologie $H^\bullet(\overline{K}, \text{R}\Gamma(S_{K(N)}, V_\lambda(\mathcal{O})))$ par \overline{K} (cf. aussi (6.1.2)). Lorsque K est net, on retrouve donc la cohomologie habituelle.

Rappelons que pour tout $\gamma \in G(\mathbb{A}^{Np})$, on peut faire agir la classe double $[K\gamma K]$ comme une correspondance algébrique de Hecke $T_K(\gamma)$. En fait, on définit la correspondance $T_{K(N)}$ agissant sur le couple $(S_{K(N)}, V_\lambda(\mathcal{O}))$, elle agit donc sur la cohomologie de niveau $K(N)$, et on voit qu'elle préserve les \overline{K} -invariants, définissant ainsi un endomorphisme $T_K(\gamma)$ de $\tilde{H}^\bullet(S_K, V_\lambda(\mathcal{O}))$. Rappelons brièvement comment (voir Sect. 8.1.2 ci-dessous pour une définition géométrique des correspondances de Hecke).

On pose $K(N, \gamma) = K(N) \cap \gamma K \gamma^{-1}$. On a deux applications de dégénérescence $\pi_i : S_{K(N, \gamma)} \rightarrow S_{K(N)}$ ($i = 1, 2$). La première est induite par l'identité de $G(\mathbb{A})$ et la seconde par la multiplication à droite par γ sur $G(\mathbb{A})$. On pose $T_{K(N)} = \text{Tr}_{\pi_1} \circ \pi_2^*$ (au niveau du système local, on utilise seulement l'identification $\pi_2^* V_\lambda(\mathcal{O}) = \pi_1^* V_\lambda(\mathcal{O})$).

Les endomorphismes de $H^3(S_{K(N)}, V_\lambda(\mathcal{O}))$ ainsi définis commutent à l'action de \overline{K} ; on peut donc les restreindre à $\tilde{H}^3(S_K, V_\lambda(\mathcal{O}))$. Notons qu'on définit *a priori* une anti-représentation de \mathcal{H}^{Np} sur $\tilde{H}^3(S_K, V_\lambda(\mathcal{O}))$ (c'est-à-dire une action à droite), mais ceci n'a pas d'importance puisque cette algèbre de Hecke est commutative.

Localisons maintenant $\tilde{H}^\bullet(S_K, V_\lambda(\mathcal{O}))$ en l'idéal \mathfrak{m} de l'algèbre de Hecke.

Proposition 4.3.1

- (1) $\tilde{H}^\bullet(S_K, V_\lambda(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}} = \tilde{H}^3(S_K, V_\lambda(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}}$,
- (2) le \mathcal{O} -module $\tilde{H}^3(S_K, V_\lambda(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}}$ est libre,
- (3) $\tilde{H}^3(S_K, V_\lambda(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}}$ est le sous-module des \overline{K} -invariants de $\tilde{H}^3(S_{K(N)}, V_\lambda(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}}$.

Démonstration. — Soit $v \geq 3$ un entier premier tel que l'ordre de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_v)$ soit premier à p . Considérons alors le sous-groupe $K' = K \cap K(v)$.

C'est un sous-groupe net de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_f)$. Bien entendu, $\tilde{H}^\bullet(S_K, V_\lambda(\mathcal{O}))$ n'est autre que l'hypercohomologie $H^\bullet(K/K', \mathrm{R}\Gamma(S_{K(N)}, V_\lambda(\mathcal{O})))$; le groupe K/K' est d'ordre premier à p et sa cohomologie supérieure est donc nulle. On a donc $\tilde{H}^\bullet(S_K, V_\lambda(\mathcal{O})) = H^\bullet(S_{K'}, V_\lambda(\mathcal{O}))^{K/K'}$.

Grâce à l'hypothèse (RLI_2) , on peut appliquer le résultat principal de [36]; ainsi, $H^\bullet(S_{K'}, V_\lambda(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}}$ et $H^\bullet(S_{K(N)}, V_\lambda(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}}$ satisfont les deux premières conditions de la proposition. Le sous-module des invariants par K/K' les satisfait donc aussi, et du fait que $H^\bullet(S_{K(N)}, V_\lambda(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}}$ est concentrée en degré 3, la dernière condition est elle aussi satisfaite. \square

En fait, les opérateurs de Hecke en p agissent aussi sur la cohomologie (mais il faut utiliser un homomorphisme non trivial de faisceaux entre $\pi_2^*V_\lambda(\mathcal{O})$ et $\pi_1^*V_\lambda(\mathcal{O})$, voir [60] Section 2). Soit e l'idempotent ordinaire associé aux opérateurs $T_{p,2}$ et $p^{-a_1}T_{p,1}$ (voir [60] Section 2) agissant sur $\tilde{H}^3(S_K, V_\lambda(\mathcal{O}))$.

Si l'ensemble PR_2 des premiers ℓ divisant N de type S_2 tels que l'image $\rho_\pi(I_\ell)$ soit finie est non vide, on note, pour chaque $\ell \in \mathrm{PR}_2$, χ_ℓ le caractère de $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$ donnant cette ramification; soit $\chi = \otimes_{\ell \in S_2} \chi_\ell : \prod_{\ell \in \mathrm{PR}_2} (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathcal{O}^\times$. Soit $B = \mathcal{O}[\prod_{\ell \in \mathrm{PR}_2} (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times]$. Pour tout B -module Y , soit $Y_\chi = Y \otimes_{B,\chi} \mathcal{O}$.

Définition 4.3.2. — On pose

$$M = e\tilde{H}^3(S_K, V_\lambda(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m},\chi}$$

et on définit \mathbf{T} comme l'image de \mathcal{H}^{Np} dans $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)$.

Remarque. — La précaution consistant à prendre les covariants par le caractère χ est innocente pour tout ce qui suit et ne jouera un rôle que dans 9.2.3.

Par la technique des pseudo-représentations de R. Taylor [55] et par un théorème de L. Nyssen [40], on peut construire une représentation $\rho_{\mathbf{T}} : \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}_4(\mathbf{T})$ telle que $\rho_{\mathbf{T}} \bmod \mathfrak{m}_{\mathbf{T}} = \bar{\rho}$.

Lemme 4.3.3. — À conjugaison dans $\mathrm{GL}_4(\mathbf{T})$ près, $\rho_{\mathbf{T}}$ se factorise à travers $G(\mathbf{T}) \subset \mathrm{GL}_4(\mathbf{T})$.

Démonstration. — Il suffit de vérifier l'autodualité de $\rho_{\mathbf{T}}$. On compare donc $\rho_{\mathbf{T}}$ et $\rho_{\mathbf{T}}^* \otimes \nu \circ \rho_{\mathbf{T}}$. Grâce à l'hypothèse d'absolue irréductibilité de la représentation résiduelle, on peut appliquer un théorème de Carayol [5] qui affirme que si deux représentations sur \mathbf{T} ont la même pseudo-représentation, et si leurs réductions mod. $\mathfrak{m}_{\mathbf{T}}$ sont absolument irréductibles et coïncident, alors elles sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_4(\mathbf{T})$. Ceci nous ramène à vérifier l'autodualité des représentations associées aux caractères $\lambda_{\pi'} : \mathbf{T} \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. Si π' est une représentation (cuspidale) intervenant dans M , soit $M(\pi')$ la composante π' -isotypique de M (pour l'action de l'algèbre de Hecke \mathcal{H}^b ,

donc de l'algèbre \mathbf{T}). En tant que représentation galoisienne, sa semi-simplification est isomorphe à $\rho_{\pi'}^{\oplus m}$ (par irréductibilité de $\rho_{\pi'}$). Noter qu'on devrait plutôt écrire $M(\pi'^{Np})$ au lieu de $M(\pi')$ puisqu'on forme en fait des paquets de représentations cuspidales π' , indexés par les homomorphismes d'algèbre de $\mathbf{T} \otimes \mathbb{Q}$ vers \mathbb{C} , autrement dit, constitués des représentations π' dont la partie π'^{Np} hors de Np est fixée à isomorphisme près. Le cup-produit fournit une autodualité symplectique pour $M(\pi')$. On a donc une autodualité (pas forcément symplectique) pour $\rho_{\pi'}$. On trouve donc une forme bilinéaire non dégénérée sur \mathbf{T}^4 , et le Lemme 4.2.1 montre qu'elle doit être symplectique et unimodulaire.

On montrera dans la section 9 que $[\rho_{\mathbf{T}}] \in \mathcal{F}_*(\mathbf{T})$ (pour $*$ = cris-ord et ord). Par la propriété universelle de R_* , il en résulte l'existence d'un homomorphisme de \mathcal{O} -algèbres locales

$$\phi_* : R_* \longrightarrow \mathbf{T}.$$

Dans cette section on vérifie les propriétés de $\rho_{\mathbf{T}}$ nécessaires pour assurer $[\rho_{\mathbf{T}}] \in \mathcal{F}_*(\mathbf{T})$ sauf celles concernant les premiers ℓ de $S_2 \cup S_3$ et le premier r . Ces dernières nécessiteront une étude géométrique détaillée de la variété de Siegel (voir Sect. 6,7,8 ci-dessous). Admettant ces propriétés, on établit aussi dans la présente section la surjectivité de ϕ_* .

Proposition 4.3.4. — $\rho_{\mathbf{T}}$ est non ramifiée hors de $S \cup \{p, \infty\}$ et on a

- (1) $\nu \circ \rho_{\mathbf{T}} = \chi_p^{-w} \omega_{\pi} = \nu \circ \rho_{\pi}$
- (2) $\rho_{\mathbf{T}}$ est cristalline en p ,
- (3) $\rho_{\mathbf{T}}$ est ordinaire en p de poids Π_w .

Démonstration

(0) Par définition, les caractères de $\mathbf{T} \otimes \mathbb{Q}$ correspondent à des représentations automorphes π' intervenant dans M . La réalisation étale $M_{\text{ét}}$ de M est non ramifiée en tout ℓ ne divisant pas Np .

(1) Comme \mathbf{T} est réduite, le caractère $\nu \circ \rho_{\mathbf{T}}$ est déterminé par ses π' -composantes, données par les homomorphismes $\lambda_{\pi'}; \mathbf{T} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. La π' -composante vaut $\nu \circ \rho_{\pi'} = \chi_p^{-w} \omega_{\pi'}$ et ω'_{π} est S -ramifié (voir par exemple la fin de la Section 1 et le début de la Section 2 de [56]). Le lemme 4.3.6 ci-dessous implique que $\omega_{\pi', \ell} = \omega_{\pi, \ell}$ pour $\ell \in S_1$ (sous l'hypothèse que p ne divise pas $\ell^4 - 1$). Pour $\ell \in S_2 \cup S_3$, on remarque d'abord que le caractère $\omega_{\pi'}$ est la partie finie du caractère central de π' . On montrera (voir 9.2.3) que $\omega_{\pi', \ell} = \omega_{\pi, \ell}$ en établissant que les seules représentations π' qui peuvent intervenir dans M sont de type i en ℓ lorsque $\ell \in S_i$ pour $i = 2, 3$. Pour ℓ type PR₂, on utilisera que M est constitué de vecteurs χ -covariants pour $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{\times}$ pour conclure que le caractère $\chi_{\pi', \ell}$ qui décrit $\rho_{\pi'}|_{I_{\ell}}$, n'est autre que χ .

(2) Par Th. 6.2 de [13], $M_{\text{ét}}$ est cristalline, et ses poids de Hodge-Tate sont dans Π_w .

(3) Par définition, M est contenu dans la partie ordinaire du H^3 . On établit dans le théorème suivant que toutes les représentations π' intervenant dans M sont stables à l'infini. Par un théorème d'E. Urban [61] (et Section 7 de [60]), les représentations $\rho_{\pi'}$ associée aux π' intervenant dans M sont ordinaires en p avec les quatre exposants de l'énoncé. On a donc une filtration à quatre crans sur l'espace $V_{\mathbf{T}}$ de $\rho_{\mathbf{T}} \otimes \mathbb{Q}$ stable par D_p et avec action de I_p sur les gradués par χ_p^{-i} ($i \in \Pi_w$). On définit une filtration sur $\rho_{\mathbf{T}}$ en posant $\mathrm{Fil}^{\alpha+b+3} V_{\mathbf{T}} = V_{\mathbf{T}}[\chi^{-\alpha-b-3}]$ (espace propre pour le caractère $\chi^{-\alpha-b-3}$); puis on remonte en posant $\mathrm{Fil}^{\alpha+2} V_{\mathbf{T}} / \mathrm{Fil}^{\alpha+b+3} V_{\mathbf{T}} = (V_{\mathbf{T}} / \mathrm{Fil}^{\alpha+b+3} V_{\mathbf{T}})[\chi^{-\alpha-2}]$, etc. Comme les caractères sont distincts modulo $\max(\mathbf{T})$, ces gradués sont libres et la filtration ainsi construite redonne la filtration précédente après tensorisation par \mathbb{Q} . \square

On peut en fait déduire de l'ordinarité automorphe (et donc galoisienne) une conséquence purement archimédienne. Rappelons qu'on suppose $g = 2$ et qu'on a donc $H^3_{\mathrm{cusp}}(S_K, V_{\lambda}(\mathbb{C})) = H^3_{\mathrm{cusp}}(S_K, V_{\lambda}(\mathbb{C}))$ pour tout niveau K et tout poids dominant λ .

Théorème 4.3.5

(1) *Toutes les représentations automorphes intervenant dans M sont stables à l'infini.*

(2) *Pour chaque π' intervenant dans M , il existe un entier $m_{\pi'}$ tel que la π' -partie isotypique de $M \otimes \mathbb{Q}$ est de dimension $4m_{\pi'}$ sur le corps $F_{\pi'}$ égal à la π' -partie isotypique de $\mathbf{T} \otimes \mathbb{Q}$. En particulier, si $m_{\pi'}$ est indépendant de π' , égal à m , le $\mathbf{T} \otimes \mathbb{Q}$ -module $M \otimes \mathbb{Q}$ est libre de rang $4m$.*

Remarque. — Il résultera du théorème principal de l'article que sous les hypothèses du théorème 1, M est libre sur \mathbf{T} de rang $4m$ où $m = \mathrm{mult}(\pi) \cdot \dim \pi_N^{KN} = 1$. Rappelons que si π est nouvelle pour K_N , c'est-à-dire si $\dim \pi_N^{KN} = 1$, et qu'elle n'est ni CAP ni endoscopique, on conjecture que $m = 1$.

Démonstration. — (1) Montrons la stabilité à l'infini d'une représentation cuspidale π' intervenant dans M .

Par la Prop.2.2.2 de [23] reliant la $(\mathfrak{q}, K_{\infty})$ -cohomologie des représentations $W_{w \cdot (\lambda+\rho)} \otimes \pi'_{\infty}$ du parabolique de Siegel, avec la cohomologie cohérente des faisceaux automorphes $\mathcal{W}_{w \cdot (\lambda+\rho)}$ associés aux $W_{w \cdot (\lambda+\rho)}$. Le calcul de cette $(\mathfrak{q}, K_{\infty})$ -cohomologie est détaillé dans le Th. 3.2.1 de [3]. Enfin, on invoque la décomposition de Hodge-Tate de la composante π'^{Np} - isotypique $M(\pi')$ de M en termes de ces groupes de cohomologie cohérente (Th. 6.2 de [13], Chap. VI). Ceci nous fournit une description analytique des nombres de Hodge associés respectivement au poids Π_w , à savoir : $m(\pi'_f \otimes \pi_{\lambda}^{\mathrm{hol}})$, $m(\pi'_f \otimes \pi_{\lambda}^{\mathrm{Whitt}})$, $m(\pi'_f \otimes \pi_{\lambda}^{\mathrm{Whitt}})$, $m(\pi'_f \otimes \pi_{\lambda}^{\mathrm{hol}})$ multipliés par $\dim \pi'_N{}^{KN}$. On utilise la notation $\pi_{\lambda}^{\mathrm{hol}}$, resp. $\pi_{\lambda}^{\mathrm{Whitt}}$ pour les représentations de Harish-Chandra de caractère infinitésimal $\lambda + \rho$ (cf. [56]).

Par irréductibilité (résiduelle) des représentations galoisiennes $\rho_{\pi'}$, ces quatre nombres doivent être tous égaux à la multiplicité de $\rho_{\pi'}$ dans $M(\pi')$; en particulier, ils sont non nuls. On conclut que le L -paquet à l'infini de chaque π' intervenant dans M comprend effectivement deux éléments : π_λ^{hol} et $\pi_\lambda^{\text{Whitt}}$, c'est-à-dire que tous les π' intervenant dans M sont stables à l'infini. Posons $\text{mult}(\pi') = \text{mult}(\pi'_f \otimes \pi_\lambda^{\text{hol}}) = \text{mult}(\pi'_f \otimes \pi_\lambda^{\text{Whitt}})$.

(2) On a vu ci-dessus que pour tout π' , $M(\pi') = \rho_{\pi'} \oplus m_{\pi'}$ où $m_{\pi'} = \text{mult}(\pi') \dim \pi'_N^{KN}$.

On voit donc que $M(\pi')$ est localement libre de rang $4m_{\pi'}$ sur $(\mathbf{T} \otimes \mathbb{Q})(\pi')$. On peut décomposer $(M \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p)$ comme $\mathbf{T} \times \Gamma$ -module en

$$(M \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p) = \bigoplus_{\pi'_f} F_{\pi'_f} \otimes \rho_{\pi'_f} \oplus m_{\pi'}$$

où $F_{\pi'_f}$ désigne le corps de nombres engendré par les valeurs propres des opérateurs de Hecke hors de Np ; or l'algèbre de Hecke $\mathbf{T} \otimes \mathbb{Q}$ est semi-simple et se décompose en

$$\mathbf{T} \otimes \mathbb{Q} \cong \prod_{\pi'_f} F_{\pi'_f}$$

Si donc pour tout π' , on a $m_{\pi'} = m = m_\pi$, on a $M \otimes \mathbb{Q} \cong (\mathbf{T} \otimes \mathbb{Q})^{4m}$. □

Étudions maintenant le comportement de $\rho_{\mathbf{T}}$ en un premier $\ell \in S_1$. Rappelons que l'on suppose pour un tel ℓ que $p \nmid \ell^4 - 1$.

Lemme 4.3.6. — *Soit ρ une déformation de $\bar{\rho}$ sur un anneau de valuation discrète \mathcal{O}' d'uniformisante ϖ' (et corps résiduel k). Si $\ell \in S_1$, $\rho(I_\ell)$ est nécessairement fini d'ordre premier à p ; en particulier on a par réduction mod. ϖ' :*

$$\rho(I_\ell) \cong \bar{\rho}(I_\ell)$$

Démonstration. — Soit $\rho : \Gamma \rightarrow G(\mathcal{O}')$ telle que $\rho \pmod{\varpi'} = \bar{\rho}$. Il suffit de montrer que $\rho(I_\ell)$ est fini d'ordre premier à p . En effet, le groupe $\mathcal{G} = \text{Ker}(G(\mathcal{O}') \rightarrow G(k))$ est pro- p ; on aura donc $\rho(I_\ell) \cong \bar{\rho}(I_\ell)$. Soit P_ℓ le pro- ℓ -Sylow de I_ℓ ; son image par ρ est finie. Soit $\Lambda/\mathbb{Q}_\ell^{\text{mod}}$ l'extension finie galoisienne définie par $\text{Ker } \rho|_{P_\ell}$. Il existe une ℓ -extension finie L de $\mathbb{Q}_\ell^{\text{nr}}$ sauvagement ramifiée et telle que $\Lambda = L\mathbb{Q}_\ell^{\text{mod}}$. Il suffit de montrer que $\rho(I_{L,\ell})$ est fini d'ordre premier à p , sachant que l'image de $P_{L,\ell}$ par ρ est triviale.

L'irréductibilité de $\bar{\rho}|_{I_\ell}$ entraîne celle de $\rho|_{I_\ell}$.

Soit g un générateur topologique de $\mathbb{Z}_p(1) \subset I_\ell/P_\ell = I_{L,\ell}/P_{L,\ell}$. On va montrer que $\rho(g)$ est unipotent. Si $\rho(g) \neq 1$, ceci fournira un sous-espace strict fixe par $\rho(g)$ et ce sous-espace est stable par I_ℓ , ce qui contredira l'irréductibilité.

Si $\rho(g)$ n'était pas unipotent, il posséderait une valeur propre $\alpha \neq 1$ (racine de l'unité d'ordre une puissance de p). Par conjugaison par $\rho(\text{Fr}_\ell)$, les images de g et g^ℓ ont les mêmes valeurs propres (dans un ensemble fini d'ordre au plus 4). Les égalités possibles conduisent facilement à l'égalité $\alpha^{\ell^4} = \alpha$. Ceci entraîne $p|\ell^4 - 1$ ce qui contredit l'hypothèse et achève la démonstration. □

Corollaire 4.3.7. — *La déformation $\rho_{\mathbf{T}}$ satisfait la condition locale en tout $\ell \in S_1$.*

Démonstration. — Il suffit de vérifier la condition pour chaque représentation π' intervenant dans M . On applique le lemme précédent. \square

Proposition 4.3.8. — *On a des homomorphismes canoniques d'algèbres locales $\phi_{\mathrm{ord}} : R_{\mathrm{ord}} \rightarrow \mathbf{T}$ et $\phi_{\mathrm{cris,ord}} : R_{\mathrm{cris,ord}} \rightarrow \mathbf{T}$, donnés par les propriétés universelles de R_{ord} resp. $R_{\mathrm{cris,ord}}$, compatibles avec l'homomorphisme canonique $\psi_{\mathrm{ord}} : R_{\mathrm{ord}} \rightarrow R_{\mathrm{cris,ord}}$ donné par les foncteurs d'oubli. Tous ces homomorphismes sont surjectifs.*

Démonstration. — L'existence de ces diagrammes commutatifs est évidente par propriété universelle. Il suffit de vérifier que les opérateurs de Hecke $T_{\ell,i}$ pour ℓ premier à Np sont atteints. Soit

$$P_{\ell}(X) = X^4 - T_{\ell,2}X^3 + \ell(T_{\ell,1} + (\ell^2 + 1)T_{\ell,0})X^2 - \ell^3T_{\ell,2}T_{\ell,0}X + \ell^6T_{\ell,0}^2.$$

par définition des représentations galoisiennes $\rho_{\pi'}$, on a

$$\det(X \cdot \mathrm{Id} - \rho_{\mathbf{T}}(\mathrm{Fr}_{\ell})) = P_{\ell}(X) \quad \text{et} \quad \nu \circ \rho_{\mathbf{T}}(\mathrm{Fr}_{\ell}) = \ell^3T_{\ell,0}$$

En particulier, $\mathrm{Tr} \rho_{\mathbf{T}}(\mathrm{Fr}_{\ell}) = T_{\ell,2}$ et la \mathcal{O} -algèbre engendrée par les $T_{\ell,i}$ coïncide avec celle engendrée par les $\mathrm{Tr} \wedge^i \rho_{\mathbf{T}}(\mathrm{Fr}_{\ell})$ et $\nu \circ \rho_{\mathbf{T}}(\mathrm{Fr}_{\ell})$; elle coïncide donc avec $\phi(R)$. \square

Le reste de cet article sera consacré à la vérification des conditions locales pour $\rho_{\mathbf{T}}$ et à la démonstration des théorèmes suivants.

Théorème 4.3.9. — *Les homomorphismes du diagramme précédent sont des isomorphismes : $R_{\mathrm{cris,ord}} \cong \mathbf{T}$; de plus, ces anneaux sont d'intersection complète, et M est libre de rang $4m$ comme \mathbf{T} -module ($m = \mathrm{mult}(\pi)$).*

On peut également introduire le foncteur de déformations $\mathcal{F}_{\mathrm{ord}}$ défini par les mêmes conditions que \mathcal{F}_{*} en dehors de p , mais avec comme condition en p que ρ est ordinaire (pas nécessairement cristalline). Le foncteur $\mathcal{F}_{\mathrm{ord}}$ est représentable par un anneau universel noté R_{ord} . On montre également dans le texte le théorème suivant.

Théorème 4.3.10. — *Sous les mêmes hypothèse que pour le théorème précédent, si on suppose de plus (ORR), on a canoniquement $R_{\mathrm{ord}} = R_{\mathrm{cris,ord}} = \mathbf{T}$; ces anneaux sont d'intersection complète, et M est libre de rang 4 comme \mathbf{T} -module.*

Pour démontrer ces énoncés, on sait d'après Fujiwara et Diamond [12], [16] qu'il suffit de construire un STWC, système de Taylor-Wiles contrôlé $(R_{*,Q}, M_Q)_{Q \in \mathcal{Q}}$ associé à (R_*, M) pour $* = \mathrm{cris}\text{-ord}$ (et $* = \mathrm{ord}$ sous l'hypothèse (ORR)).

5. Systèmes de Taylor-Wiles

5.1. Rappels. — Soit \mathcal{Q} l'ensemble des ensembles finis Q de nombres premiers ne divisant pas Np et tels que :

pour tout $q \in Q$, $q \equiv 1 \pmod{p}N$ et $P_{\pi,q}$ a quatre racines distinctes $\bar{\alpha}_q, \bar{\beta}_q, \bar{\gamma}_q = \bar{\beta}_q^{-1}$ et $\bar{\delta}_q = \bar{\alpha}_q^{-1}$ dans k , telles que $(\bar{\alpha}_q \bar{\beta}_q)^2 \neq 1$.

En particulier, $\emptyset \in \mathcal{Q}$. Les nombres premiers q satisfaisant la condition ci-dessus seront appelés nombres premiers de Taylor-Wiles.

Soit Δ_q le p -Sylow de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ et $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{(p)}$ son facteur d'ordre premier à p . Soit $\Delta_Q = \prod_{q \in Q} \Delta_q$ et $\mathcal{O}[\Delta_Q]$ son \mathcal{O} -algèbre de groupe. C'est une \mathcal{O} -algèbre locale finie plate et d'intersection complète. Soit I_Q son idéal d'augmentation. Il est engendré par les $\delta_q - 1$, ($q \in Q$) où δ_q désigne un générateur fixé du groupe cyclique Δ_q .

On ordonne $\bar{\alpha}_q, \bar{\beta}_q, \bar{\gamma}_q, \bar{\delta}_q$ de sorte que

$$\bar{\alpha}_q \bar{\delta}_q = \bar{\beta}_q \bar{\gamma}_q$$

Un tel ordre est bien défini à action du groupe de Weyl de G près. On en fixe un une fois pour toute de sorte que les droites propres pour $\bar{\alpha}_q$ et $\bar{\beta}_q$ engendrent un plan isotrope et l'on note $\bar{\phi}_q : D_q \rightarrow T(k)$ le caractère non ramifié tel que

$$\bar{\phi}_q(\text{Fr}_q) = \text{diag}(\bar{\alpha}_q, \bar{\beta}_q, \bar{\gamma}_q, \bar{\delta}_q)$$

On va démontrer suivant la méthode du Lemme de l'appendice de [57] le

Lemme 5.1.1. — *Pour toute déformation $\rho : \Gamma \rightarrow G(A)$ de $\bar{\rho}$ et pour tout $q \in Q$, il existe $g \in G(A)$ tel que la restriction ϕ_q à D_q de $g \cdot \rho \cdot g^{-1}$ soit à valeurs dans $T(A)$ et se réduise sur $\bar{\phi}_q$. En particulier la restriction de ϕ_q à l'inertie est de la forme $\text{diag}(\chi_1, \chi_2, \chi\chi_2^{-1}, \chi\chi_1^{-1}) \text{Gal}(\mathbb{Q}_q(\zeta_q)/\mathbb{Q}_q)$, où les caractères χ_1 resp. χ_2 correspondent aux droites sur lesquelles $\phi(\text{Fr}_q)$ agit par $\alpha(\rho)$ resp. $\beta(\rho)$ congrus à α_q resp. β_q ; le plan qu'elles engendrent est facteur direct dans A^4 et est isotrope.*

Démonstration. — On choisit une base symplectique qui diagonalise $\rho(\text{Fr}_q)$ et qui relève une base symplectique diagonalisant $\bar{\rho}(\text{Fr}_q)$ et telle que les vecteurs \bar{e}_1 et \bar{e}_2 correspondant aux valeurs propres $\bar{\alpha}_q$ et $\bar{\beta}_q$ engendrent un plan isotrope. Le plan engendré par (e_1, e_2) est alors isotrope et facteur direct dans A^4 . Soit D la matrice diagonale ainsi obtenue. Comme $q \equiv 1 \pmod{p}$, $\rho|_{D_q}$ se factorise par $\widehat{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}_p(1)$. Soit τ un générateur de I_q^t . On a (*) $\text{Fr}_q \tau \text{Fr}_q^{-1} = \tau^{q-1}$. On montre par approximations successives que $\rho(\tau)$ est diagonal. Supposons que c'est vrai mod. \mathfrak{m}_A^n . On peut écrire

$$\rho(\tau) = d \cdot \exp(X) \pmod{\mathfrak{m}_A^{n+1}}$$

où $d \in G(A)$ est diagonale et X est dans l'algèbre de Lie de G sur k (l'exponentielle prenant ses valeurs dans $(1 + M_4(\mathfrak{m}_A^n)) \cap G(A)$). Notons que, comme $q \equiv 1 \pmod{p}$, d et X commutent. En appliquant ρ à la relation (*), on obtient donc

$$\exp(\text{Ad}(D)(N)) \equiv d^{q-1} \cdot \exp(X) \pmod{\mathfrak{m}_A^{n+1}}$$

Par hypothèse, pour toute racine α de G , $\alpha(D) \neq 1$; cette égalité entraîne donc que X est diagonale et que $\rho(\tau)$ est diagonale modulo \mathfrak{m}_A^{n+1} . \square

On va se limiter dans la suite aux déformations ρ de $\bar{\rho}$ qui satisfont la condition (\mathcal{D}_q) en chaque $q \in Q$:

(\mathcal{D}_q) La restriction de ρ à I_q fixe le plan V_1 (nécessairement isotrope) sur lequel les valeurs propres de Fr_q sont des éléments α_q, β_q de A congrus à $\bar{\alpha}_q$ et $\bar{\beta}_q$.

On a alors une décomposition de l'espace V de la représentation ρ en sommes de quatre droites :

$$V = V_\alpha \oplus V_\beta \oplus V_\gamma \oplus V_\delta$$

ces décompositions étant associées à un ordre fixé des valeurs propres de $\rho(\text{Fr}_q)$ (pour un Fr_q quelconque fixé dans D_q) Les représentations de D_q sur les droites V_α et V_β sont notées ρ_α resp. ρ_β . Elles sont non ramifiées. La représentation de D_q sur $V_2 = V_\gamma \oplus V_\delta$ est notée ρ_2 ; sa restriction à I_q est donnée par un caractère qu'on note χ_q .

Pour tout $Q \in \mathcal{Q}$, on va définir une \mathcal{O} -algèbre locale $R_{*,Q}$, et un $R_{*,Q}$ -module M_Q (indépendant de $*$ = ord ou cris-ord) de sorte que les conditions de Taylor-Wiles suivantes soient satisfaites :

- (TW0) $R_{*,\emptyset} = R_*$ et $M_\emptyset = M$,
- (TW1) $R_{*,Q}$ est une $\mathcal{O}[\Delta_Q]$ -algèbre locale noethérienne complète,
- (TW2) $R_{*,Q}/I_Q R_{*,Q} \cong R_*$ comme \mathcal{O} -algèbres locales,
- (TW3) M_Q est un $R_{*,Q}$ -module qui est libre de rang fini comme $\mathcal{O}[\Delta_Q]$ -module.

Ces données satisferont de plus les conditions de contrôle suivantes. Elles concernent l'existence d'une suite de sous-ensembles $Q_m \in \mathcal{Q}$ tels que

- (CC) (contrôle de la croissance) Pour tout $q \in Q_m$, $q \equiv 1 \pmod{p^m}$,
- (CR) (contrôle des relations) $r = |Q_m|$ est indépendant de m ,
- (CG) (contrôle des générateurs) R_{Q_m} est engendré par au plus r éléments,
- (CM) (contrôle des modules) $M_Q/I_Q M_Q \cong M_\emptyset$

Lorsque un tel système existe, on conclut que $T = \text{Im}(R_* \rightarrow \text{End}_{\mathcal{O}}(M))$ est isomorphe à R , est d'intersection complète, et que M est libre sur T (nécessairement de rang $4m$ par le Théorème 2.2.5).

5.2. L'anneau $R_{*,Q}$. — Pour chaque $Q \in \mathcal{Q}$, on considère un problème de déformations $\mathcal{F}_{*,Q}$ ($*$ = cris ou ord) défini par les mêmes conditions que \mathcal{F}_* hors de Q , mais où l'on permet un certain type de ramification aux places de Q ; plus précisément, $\mathcal{F}_{*,Q}(A)$, resp. $\mathcal{F}_{*,\text{ord},Q}(A)$ (où $*$ = cris-ord ou ord), désigne l'ensemble des classes d'équivalence stricte des déformations ρ de $\bar{\rho}$ qui satisfont les conditions (1)–(5), resp. (1)–(6), où :

- (1) ρ est non ramifiée hors de $NpQ\infty$,
- (2) $\nu \circ \rho = (\nu \circ \rho_\pi) \cdot \chi$ où χ est un caractère d'ordre fini non ramifié hors de Q ,
- (3) pour tout $\ell \in S$ tel que $\bar{\rho}|I_\ell$ soit de type $i \in \{1, 2, 3\}$, $\rho|I_\ell$ est de type i ,

- (4) pour tout $q \in Q$, la restriction de ρ à D_q est de type \mathcal{D}_q
- (5) ρ est cristalline en p (condition omise si $*$ = ord)
- (6) ρ est ordinaire en p de poids $0, a_1 + 1, a_2 + 2, a_1 + a_2 + 3$.

En formant le produit tensoriel des caractères χ_q fournis par la condition (\mathcal{D}_q) pour chaque $q \in Q$, on associe à une (classe d'équivalence stricte de) déformation $\rho \in \mathcal{F}_{*,Q}(A)$ un caractère

$$\chi_Q : \Delta_Q \longrightarrow A^\times$$

En utilisant le critère de Schlessinger comme pour construire R représentant \mathcal{F} , on montre

Proposition 5.2.1. — *Le foncteur $\mathcal{F}_{*,Q}$ est représenté par un triplet universel $(R_{*,Q}, \rho_{*,Q}^{\text{univ}}, \chi_Q^{\text{univ}})$.*

On voit en particulier que

(TW1) $R_{*,Q}$ est un $\mathcal{O}[\Delta_Q]$ -module via χ_Q et que $R_{*,Q}/I_Q R_{*,Q} \cong R_*$.

5.3. Le module M_Q et l'algèbre T_Q . — Pour chaque $Q \in \mathcal{Q}$, on considère les sous-groupes de niveau

$$K_1(Q) \subset K_Q \subset K_0(Q) \subset K$$

définis comme suit.

Pour tout $q \in Q$, soit Π_q resp. Π_q^+ , le parahorique de Klingen, resp. le parahorique de Klingen strict en q (notations de 3.1). On pose $K_0(Q) = K^Q \times \prod_{q \in Q} \Pi_q$ et $K_1(Q) = K^Q \times \prod_{q \in Q} \Pi_q^+$. Concrètement, on a :

$$K_1(Q) = \left\{ x \in K; x_q \equiv \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & *_{2g-2} & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \pmod{q} \right\}$$

On définit alors le groupe intermédiaire K_Q par :

$$K_Q = \left\{ x \in K_0(Q); x_q \equiv \begin{pmatrix} u & * & * \\ 0 & *_{2g-2} & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \pmod{q} \right\}$$

$$\text{où } u \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\times, (p)}$$

L'homomorphisme $x \mapsto a_{1,1}(x) \pmod{Q}$ induit des isomorphismes

$$K_0(Q)/K_1(Q) \cong (\mathbb{Z}/Q\mathbb{Z})^\times, \quad K_0(Q)/K_Q \cong \Delta_Q$$

Les isomorphismes inverses sont notés

$$\langle \rangle : (\mathbb{Z}/Q\mathbb{Z})^\times \longrightarrow K_0(Q)/K_1(Q), \quad \Delta_Q \cong K_0(Q)/K_Q.$$

Pour tout $a \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, $\langle a \rangle$ est appelé opérateur diamant de a . Au début de la section 3.1, on a défini le semi-groupe diagonal dilatant D_q^- et les semi-groupes $\mathcal{D}_q^- =$

$\Pi_q D_q^- \Pi_q$ et $\mathcal{D}_{q,+}^- = \Pi_q^+ D_q^- \Pi_q^+$. On pose $D_Q^- = \prod_{q \in Q} D_q^-$, $\mathcal{D}_Q^- = \prod_{q \in Q} \mathcal{D}_q^-$ et $\mathcal{D}_{Q,+}^- = \prod_{q \in Q} \mathcal{D}_{q,+}^-$.

Soit r un nombre premier ne divisant pas Np . Soient $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$ et δ_r les paramètres de Hecke de π_r . Par la classification des représentations induites paraboliques de niveau iwahorique de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{Q}_r)$ ([46], [47], [49]) on sait que $\alpha_r/\beta_r \neq r^{\pm 1}$ et $\beta_r/\gamma_r \neq r^{\pm 1}$. On fait l'hypothèse

NR(r) $r \not\equiv 1 \pmod{p}$, les paramètres de Hecke $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$ et δ_r sont dans \mathcal{O} et les quotients α_r/β_r et β_r/γ_r ne sont congrus à aucun des nombres $1, r^{\pm 1} \pmod{\varpi}$.

L'existence d'un tel r résulte par le théorème de Cebotarev de l'hypothèse (RLI₂) à condition que $p > 5$. On ordonne les paramètres de Hecke de sorte que α_r et β_r soient les valeurs propres de $\bar{\rho}(\mathrm{Fr}_r)$ sur un plan isotrope.

Remarque. — Par la classification des induites paraboliques ayant un vecteur fixe par l'Iwahori, cette hypothèse entraîne que pour toute représentation π' à valeurs propres dans \mathcal{O} , congrue à $\pi \pmod{p}$ et telle que π'_r ait un invariant par le parahorique de Klingen strict en r (i.e. $\pi'_r \Pi_r^+ \neq 0$), on a en fait π'_r sphérique en r .

Pour tout nombre premier ℓ ne divisant pas NQr , soit $\mathcal{H}_\ell = \mathcal{H}_\mathbb{Q}^{\mathrm{nr}}$ l'algèbre de Hecke sphérique de $G_\ell = \mathrm{GSp}(4, \mathbb{Q}_\ell)$; soit

$$\mathcal{H}^{NQrp} = \bigotimes_{\ell | NrpQ} \mathcal{H}_\ell.$$

Pour $\ell = r$ ou $\ell \in Q$, on considère l'algèbre de Hecke dilatante $\mathcal{H}_{\Pi_{1,\ell}^-}$ du parahorique de Klingen strict $\Pi_{1,\ell}^+$. On introduit

$$\mathcal{H}_{Q,r}^{Np} = \bigotimes_{\ell | NrpQ} \mathcal{H}_\ell \otimes \bigotimes_{\ell | Qr} \mathcal{H}_{\Pi_{1,\ell}^-}$$

Soit \mathcal{O} l'anneau de valuation discrète fixé au début de Sect. 4.3, ϖ une uniformisante et k son corps résiduel.

Soit $\theta_\pi : \mathcal{H}^{NrpQ} \rightarrow \mathcal{O}$ l'homomorphisme d'algèbre donné par l'action de \mathcal{H}_ℓ sur la droite $\pi_\ell^{K_\ell}$ des vecteurs sphériques de π_ℓ pour chaque q ne divisant pas $NrpQ$.

Soit $\mathcal{H}^{NprQ}(\mathcal{O}) = \mathcal{H}^{NprQ} \otimes \mathcal{O}$ et $\bar{\theta}_\pi : \mathcal{H}^{NprQ}(\mathcal{O}) \rightarrow k$ la réduction de $\theta_\pi \otimes \mathrm{Id}_\mathcal{O}$ modulo ϖ . On considère les idéaux maximaux $\mathfrak{m}^{Q,r} = \mathrm{Ker} \bar{\theta}_\pi$ dans $\mathcal{H}^{NrpQ}(\mathcal{O})$ et $\mathfrak{m}_{Q,r}$ l'idéal maximal de $\mathcal{H}_{Q,r}^{Np}(\mathcal{O})$ engendré par $\mathfrak{m}^{Q,r}$ et $(U_{\ell,1} - \alpha_\ell - \beta_\ell, \ell U_{\ell,2} - \alpha_\ell \beta_\ell)$ pour tout ℓ divisant Qr .

On fixe alors le groupe de niveau $K_{(r)} = K_N \times \Pi_r^+ \times \times K^{Nr}$ et on pose $K_{Q,r} = K_Q \cap K_{(r)}$. On fait agir $\mathcal{H}_{Q,r}^{Np}$ par correspondances algébriques sur $H^3(S_{K_{Q,r}}, V_\lambda(\mathcal{O}))$.

Comme pour la définition du module M (Déf. 4.3.2), on considère l'idempotent ordinaire e associé aux opérateurs $T_{p,1}$ et $p^{-a_2} T_{p,2}$ agissant sur le module

$H^3(S_{K(r)}, V_\lambda(\mathcal{O}))$. Pour $\ell \in \text{PR}_2$, et pour $\chi : (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathcal{O}^\times$ le caractère correspondant, on pose, pour tout $\mathcal{O}[(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times]$ -module $H : H_\chi = H \otimes_\chi \mathcal{O}$ le module des χ -covariants de H .

Définition 5.3.1. — On pose

$$M_Q = eH^3(S_{K_{Q,r}}, V_\lambda(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}_{Q,r,x}}$$

et on définit T_Q comme l'image de $\mathcal{H}^{N_{pr}Q}$ dans $\text{End}_{\mathcal{O}}(M_Q)$.

Remarques

(1) On verra (fin de la Section 11) que M_Q et T_Q ne dépendent pas de r . En particulier, on aura bien $M_\emptyset = M$. On note \mathfrak{m}_Q l'idéal maximal de T_Q .

(2) M_Q est un T_Q -module fidèle.

(3) Rappelons que les racines $\alpha_q, \beta_q, \gamma_q, \delta_q$ dans \mathcal{O} du polynôme de Hecke $P_{\pi,q}(X)$ de π en q sont les valeurs propres de $\rho_\pi(\text{Fr}_q)$ et relèvent donc les valeurs propres qu'on a fixé pour chaque q . On suppose que $\alpha_q, \beta_q, \gamma_q, \delta_q$ pris dans l'ordre, relèvent les racines $\bar{\alpha}_q, \bar{\beta}_q, \bar{\gamma}_q, \bar{\delta}_q$ ordonnées comme précédemment.

(4) Notons que la définition de l'action de Δ_Q a été donnée en termes de l'action du groupe d'inertie I_q sur les espaces de représentations galoisiennes. On montrera (Sect. 7, Th. 7.2.1) que la monodromie de I_q sur M_Q est déterminée par les opérateurs diamants $a \mapsto \langle a \rangle, \Delta_Q \rightarrow K_0(Q)/K_Q$. Il en résultera que l'action de Δ_Q sur T_Q coïncide avec le caractère diamant $\langle \rangle : \Delta_Q \rightarrow T_Q^\times$ (action normale de $K_0(Q)/K_Q$).

En utilisant la Remarque 5 ci-dessus, on voit que la condition (TW3) résulte du

Théorème 5.3.2 (Th. 4 de [36]). — M_Q est un $\mathcal{O}[\Delta_Q]$ -module libre de rang fini. De plus, M_Q coïncide avec les $\mathfrak{m}_{Q,r}$ -localisations de

– la cohomologie intérieure de degré médian

$$H_1^d(S_{K_{Q,r}}, V_\lambda(\mathcal{O})) = \text{Im}(H_c^d \rightarrow H^d)$$

– la cohomologie d'intersection en degré médian $IH^d(S_{K_{Q,r}}, V_\lambda(\mathcal{O}))$.

Rappelons d'ailleurs l'énoncé de cuspidalité qu'on déduit ([36], Prop. (1) du Théorème précédent

Corollaire. — Si $g = 2$ ou bien si λ est régulier, $H_1^d(S_{K_{Q,r}}, V_\lambda(F))_{\mathfrak{m}_{Q,r}}$ ne contient que des classes cuspidales.

Pour établir un homomorphisme de \mathcal{O} -algèbres locales $R_Q \rightarrow T_Q$, on doit construire une déformation de type \mathcal{F}_Q de $\bar{\rho}$ sur T_Q .

Proposition 5.3.3. — Il existe une représentation $\rho_{T_Q} : \Gamma \rightarrow \text{GL}_4(T_Q)$ déformant $\bar{\rho}$, à valeurs dans G , ordinaire en p , cristalline en p , telle que $\nu \circ \rho_{T_Q} = \nu \circ \rho_\pi \xi$ où ξ est d'ordre fini et est Q -ramifié.

Démonstration. — La technique des pseudo-représentations de Taylor fournit à nouveau, vu l'irréductibilité de $\bar{\rho}$ une représentation

$$\rho_{\mathcal{T}_Q} : \Gamma \longrightarrow \text{GL}_4(\mathcal{T}_Q)$$

satisfaisant les conditions de l'énoncé. Comme sa réduction modulo \mathfrak{m}_Q prend ses valeurs dans $G(k)$, on voit comme précédemment que $\text{Im } \rho_{\mathcal{T}_Q} \subset G(\mathcal{T}_Q)$. \square

L'objet des sections qui suivent est de vérifier que la représentation $\rho_{\mathcal{T}_Q}$ satisfait les conditions locales aux places ℓ divisant N et la condition \mathcal{D}_q en chaque premier $q \in Q$ (en particulier la compatibilité de χ_q avec l'action des diamants).

6. Modèles entiers, modèles locaux

Cette section est fortement inspirées de l'article [25], dont nous suivons l'approche autant que possible. La teneur des résultats est que les variétés étudiées se comportent exactement comme les courbes modulaires étudiées par Deligne-Rapoport dans [11] Chap. V.

6.1. Bonne réduction

6.1.1. Description modulaire de S_K . — Soit $K(N)$ le noyau de l'homomorphisme ϕ_N de réduction modulo $N : \phi_N : G(\widehat{\mathbb{Z}}) \rightarrow G(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Soit $K \subset G(\widehat{\mathbb{Z}})$ un sous-groupe compact ouvert contenant $K(N)$ et tel que $\nu(K) = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$. Lorsque K est net, l'espace S_K est une variété complexe ; sinon, il s'agit d'un espace analytique, quotient par un groupe fini d'une variété complexe. Donnons-en la description modulaire sur $\mathbb{Z}[1/N]$. Soit E_{st} la forme symplectique standard sur \mathbb{Z}^{2g} donnée par $E_{\text{st}}(u, v) = {}^t u J v$. Considérons le problème de modules

$$\underline{X}_{\emptyset}^g(N) : (\mathbb{Z}[1/N]\text{-Sch}) \longrightarrow (\text{Ens}), \quad S \longmapsto \{(A, \lambda, \eta)\} / \sim$$

associant à tout schéma S sur $\mathbb{Z}[1/N]$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de triplets (A_g, λ, η) où

- A_g est un schéma abélien sur S
- λ est une polarisation principale sur A
- $\eta : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2g} \rightarrow A[N]$ est une similitude symplectique, $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2g}$ étant muni de l'accouplement symplectique standard E_{st} et $A[N]$ de l'accouplement de Weil $e_A^\lambda : A[N] \times A[N] \rightarrow \mu_N$.

Ce problème est représentable [38] Th. 7.10 par un schéma $X_{\emptyset}^g(N)$ quasiprojectif lisse sur $\mathbb{Z}[1/N]$. Nous noterons (A_g, λ, η) le triplet universel sur $X_{\emptyset}^g(N)$. Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre sur g (resp. sur N , resp. ni sur g ni sur N) nous noterons simplement $X_{\emptyset}(N)$ (resp. X_{\emptyset}^g , resp. X_{\emptyset}) le schéma $X_{\emptyset}^g(N)$; nous noterons aussi simplement A la variété abélienne universelle lorsqu'il ne sera pas nécessaire de préciser g .

Théorème 6.1.1. — *On a un isomorphisme naturel de variétés analytiques*

$$S_{K(N)} \xrightarrow{\sim} X_{\mathcal{O}}^g(N)(\mathbb{C})$$

Démonstration. — Voir Deligne [9] Sect. 1.11. □

Le groupe $G(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ opère sur le schéma $X_{\mathcal{O}}^g(N)$. Soit $\overline{K} = \phi_N(K) \subset G(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Le schéma quotient $X_K = X_{\mathcal{O}}^g(N)/\overline{K}$ est un schéma de modules grossier pour le problème de modules pour le faisceau sur le site fpqc sur $\mathbb{Z}[1/N]$ associé au préfaisceau $S \mapsto \{(A, \lambda, \eta\overline{K})/S\}$. En particulier, on a canoniquement

$$S_K \xrightarrow{\sim} X_K(\mathbb{C}).$$

6.1.2. Systèmes locaux. — Pour tout poids dominant λ de (G, B, T) , on a défini un faisceau constructible V_λ sur l'espace analytique S_K comme le faisceau des sections continues du morphisme

$$G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}} \times V_\lambda / K \times C_\infty \longrightarrow S_K$$

donné par la première projection. Ce faisceau est localement constant si K est net.

Les systèmes locaux V_λ de (2.1) proviennent en fait de systèmes locaux sur les modèles entiers X_K de la manière suivante. On suppose que K est net et s'écrit sous la forme $K_p K^p$, où $K_p \subset \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_p)$ et $K^p \subset \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{A}^{p,\infty})$. On rappelle (cf. 2.1) qu'on a fixé une structure entière V_λ de la représentation de Weyl associée au poids dominant λ . Lorsque $n \geq 1$ est un nombre entier, on dispose donc d'une représentation $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{GL}(V_\lambda/p^n V_\lambda)$. Notons \overline{K}_p l'image de K_p dans $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ et considérons le $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ -faisceau lisse

$$V_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} = V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} = X_{K_p(p^n)K^p} \times^{\overline{K}_p} V_\lambda/p^n V_\lambda$$

au-dessus de $X_K \times \mathbb{Z}[1/Np]$ (on suppose pour simplifier que le groupe $K_p(p^n) = \mathrm{Ker}(\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$ est inclus dans K_p , ce qui est de toute façon le cas si n est assez grand). Le faisceau $V_\lambda \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ sur S_K est alors simplement induit par le système p -adique de faisceaux (pour la topologie étale) $(\varprojlim_n V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ sur $X_{K, \mathbb{C}}$.

On définit la cohomologie $\tilde{H}^\bullet(X_K \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}})$ comme l'hypercohomologie

$$H^\bullet(\overline{K}, \mathrm{R}\Gamma(X_{K(N)} \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}).$$

Remarque. — Lorsque K est net on a $\tilde{H}^\bullet(X_K \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}) = H^\bullet(X_K \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}})$. En fait, le lecteur familier des champs algébriques reconnaîtra dans \tilde{H}^\bullet la cohomologie du champ quotient X_{K_N}/\overline{K} .

6.2. Modèles entiers de $S_{\mathbb{K}_0(q)}$, $S_{\mathbb{K}_q}$ et $S_{\mathbb{K}_1(q)}$. — Soit $N \geq 1$ un entier et q un nombre premier ne divisant pas N . Dans cette section et la suivante, on fixe un sous-groupe compact ouvert net \mathbb{K} de $G(\widehat{\mathbb{Z}})$ de niveau N et tel que $\mathbb{K} = \mathbb{K}^q \times G(\mathbb{Z}_q)$. Rappelons qu'on note Π resp. Π^+ le sous-groupe parahorique de Klingen, resp de Klingen strict en q (cf. Définition 2.2.6). On va décrire la mauvaise réduction en q des modèles entiers des variétés de Siegel associées aux groupes de niveau de type de Klingen en q , $\mathbb{K}_0(q), \mathbb{K}_q, \mathbb{K}_1(q)$:

$$\mathbb{K}_0(q) = \{x \in \mathbb{K}; x_q \in \Pi\}, \quad \mathbb{K}_q = \{x \in \mathbb{K}; x_q \in I_q\} \quad \text{et} \quad \mathbb{K}_1(q) = \{x \in \mathbb{K}; x_q \in \Pi_q^+\}.$$

Considérons le problème de modules

$$\underline{X}_0^g(q, N) : (\mathbb{Z}[1/N]\text{-Sch}) \longrightarrow (\text{Ens}), \quad S \longmapsto \{(A, \lambda, \eta^q, H)_{/S}\} / \sim$$

où le membre de droite désigne l'ensemble des classes d'isomorphisme de quadruplets composés de

- un schéma abélien A/S ,
- une polarisation principale $\lambda : A \xrightarrow{\sim} A^t$,
- $\eta : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2g} \rightarrow A[N]$ est une similitude symplectique ($(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2g}$ est muni de l'accouplement symplectique standard E_{st} ; $A[N]$ est muni de l'accouplement de Weil $e_A^\lambda : A[N] \times A[N] \rightarrow \mu_N$)
- un sous-schéma en groupes fini et plat $H \subset A[q]$ de rang q sur S .

Théorème 6.2.1. — Pour \mathbb{K}^q net,

(1) le foncteur $\underline{X}_0^g(q, N)$ est représentable par un schéma quasi-projectif $X_0^g(q, N)$ sur $\mathbb{Z}[1/N]$; on notera $(A, \lambda, \bar{\eta}, H)$ l'objet universel au-dessus de $X_0^g(q, N)$.

(2) L'oubli de H induit un morphisme projectif

$$\pi_{0, \emptyset} : X_0^g(q, N) \longrightarrow X_{\emptyset}^g(N).$$

(3) On a un isomorphisme naturel de variétés analytiques

$$S_{\mathbb{K}_0(q)} \xrightarrow{\sim} X_0^g(q, N)(\mathbb{C}).$$

Remarques

(1) Bien que $\pi_{0, \emptyset}$ soit génériquement fini étale (de fibre générique géométrique isomorphe à l'ensemble $G/P_1(\mathbb{F}_q) = \mathbb{P}^{g-1}(\mathbb{F}_q)$ des droites de \mathbb{F}_q^{2g}), il n'est pas vrai que ce morphisme soit fini dès que $g > 1$ (en particulier, il n'est pas plat). Nous reviendrons sur ce point.

(2) Suivant Chai et Norman [7], on pourrait aussi considérer le problème $\underline{X}_1^g(q, N)$ obtenu en considérant de plus un générateur de Drinfeld P de H , c'est-à-dire une section P de $H \rightarrow S$ telle que $H = \sum_{a \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} [aP]$ (au sens de Katz-Mazur). Nous n'utiliserons pas directement ce problème de modules.

(3) Nous suivrons la même convention que pour $X_{\emptyset}^g(N)$: nous noterons par exemple X_0 lorsque g, q, N sont tous les trois fixés sans ambiguïté par le contexte.

Démonstration. — On suit l’approche de de Jong [32]. On considère le foncteur $\pi_{0,\emptyset}$ d’oubli du schéma en groupes H . Puisque X_{\emptyset} est représentable par un schéma quasi-projectif lisse, il suffit de montrer que pour tout triplet $\xi = (A, \lambda, \bar{\eta})$ le foncteur fibre $\pi_{0,\emptyset}^{-1}(\xi)$ est relativement représentable et projectif, ce qui résulte de la théorie du schéma de Hilbert. \square

On définit

$$X_1^g(q, N)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow X_0^g(q, N)_{\mathbb{Q}}$$

comme le complémentaire de la section nulle de $H_{\mathbb{Q}} \rightarrow X_0(q)_{\mathbb{Q}}$. On note $\pi_{10,\mathbb{Q}}$ la projection. C’est un morphisme fini étale galoisien de groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\times}$. L’action de a est notée $\langle a \rangle$; sa description modulaire sur une section P de $\pi_{10,\mathbb{Q}}$ est $\langle a \rangle(P) = a \cdot P$.

Soit $X_{\Delta}^g(q, N)_{\eta}$ le quotient de $X_1^g(q, N)_{\eta}$ par le p -Sylow $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{(p)}$ de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\times}$. On factorise $\pi_{10,\eta}$ en $\pi_{\Delta,0,\eta} \circ \pi_{1,\Delta,\eta}$. Les deux morphismes sont finis galoisiens de groupes respectifs $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{(p)}$ et Δ_q .

Définition 6.2.2

(1) On définit $X_{\Delta}^g(q, N)$, resp. $X_1^g(q, N)$, comme le schéma sur $\mathbb{Z}[1/M]$ normalisé de $X_0^g(q, N)$ dans $X_{\Delta}^g(q, N)_{\mathbb{Q}}$ resp. $X_1^g(q, N)_{\mathbb{Q}}$.

(2) Le groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\times}$ resp. Δ_q opère par automorphismes sur ces modèles entiers. On appelle ces automorphismes les correspondances diamant.

Remarque 6.2.3. — On verra que les morphismes $\pi_{1,0}$ et $\pi_{\Delta,0}$ sont finis et plats (et on en donnera une description détaillée).

Faits

(1) On a un isomorphisme naturel de variétés analytiques

$$S_{\mathbb{K}_1(q)} \xrightarrow{\sim} X_1^g(q, N)(\mathbb{C}).$$

(2) Soit Q un ensemble de premiers de type TW (cf. 5.1) et soit $q \in Q$. On suppose que N est de la forme $M \prod_{q \neq \ell \in Q} \ell$, où M est premier aux éléments de Q . Soit $K' \subset G(\widehat{\mathbb{Z}})$ le groupe $K'^Q \times K'_Q$, où K'^Q est le sous-groupe de niveau M et où $K'^Q = \mathbb{K}_q \prod_{q \neq \ell \in Q} K'_\ell$, et K'_ℓ est de l’un des trois types $I_0(\ell)$, I_ℓ ou $I_1(\ell)$. La variété $S_{K'}$ est alors le quotient de $S_{\mathbb{K}_1(q)}$ par un groupe fini, de sorte que sa cohomologie rationnelle est facteur direct de celle de $S_{\mathbb{K}_1(q)}$. Pour vérifier la condition locale \mathcal{D}_q pour la partie de la cohomologie de $S_{K'}$ sur laquelle les opérateurs diamant agissent par un caractère χ non trivial (nécessairement congru au caractère trivial modulo p), il suffira donc de le faire pour la partie correspondante de la cohomologie de $S_{\mathbb{K}_1(q)}$.

Notation 6.2.4. — Lorsque cela ne prêtera pas à confusion, on notera pour abrégé : $X_0(q) = X_0^g(q, N)$, $X_{\Delta}(q) = X_{\Delta}^g(q, N)$ et $X_1(q) = X_1^g(q, N)$ les schémas quasi-projectifs sur $\mathbb{Z}[1/N]$ définis ci-dessus.

6.3. Modèles locaux. — Pour étudier les singularités de $X_0(q)$ en q , on utilise la théorie du modèle local (cf. [32] et [45]). On observe d’abord que pour toute base S , il est équivalent de se donner un couple (A, H) constitué d’un schéma abélien et d’un sous-schéma en groupes fini et plat de rang q de $A[q]$ ou de se donner une isogénie $A_0 = A \rightarrow A_1 = A/H$ de degré constant q au-dessus de S . On voit donc que $X_0(q)$ classe les isogénies $A_0 \rightarrow A_1$ de rang q dont la source A_0 est munie d’une polarisation principale λ_0 . Soit $\pi_i : A_i \rightarrow X_0(q)$ les projections universelles. On pose $\mathcal{M}_i = R^1\pi_{i*}\Omega_{A_i/X_0(q)}$ ($i = 0, 1$). Ce sont deux modules localement libres de rang $2g$ sur $\mathcal{O}_{X_0(q)}$ et on a un morphisme injectif $\phi : \mathcal{M}_1 \hookrightarrow \mathcal{M}_0$ donné par l’isogénie de rang q . Notons que \mathcal{M}_0 est muni d’une forme symplectique unimodulaire q_0 associée à la polarisation principale λ . Par [32] Lemma 2.3, le conoyau Coker ϕ est libre de rang 1 sur $\mathcal{O}_{X_0(q)} \otimes \mathbb{F}_q$. On a donc un couple

$$(\phi : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_0, q_0)$$

avec Coker ϕ libre de rang 1 sur $\mathcal{O}_{X_0(q)} \otimes \mathbb{F}_q$. On a par ailleurs un autre tel couple qu’on appelle le couple standard. On pose $\mathrm{St}_0 = \mathrm{St}_1 = \mathbb{Z}_q^{2g}$ et on munit St_0 de la forme symplectique standard E_{st} . On considère la base canonique symplectique $(e_1, \dots, e_g, e_{g+1}, \dots, e_{2g})$ et le morphisme \mathbb{Z}_q -linéaire $\phi_{\mathrm{st}} : \mathrm{St}_1 \rightarrow \mathrm{St}_0$, $e_1 \mapsto qe_1$, $e_j \mapsto e_j$, ($j \neq 1$). On note encore ϕ_{st} le morphisme

$$\phi_{\mathrm{st}} \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{O}_{X_0(q)}} : \mathrm{St}_1 \otimes_{\mathbb{Z}_q} \mathcal{O}_{X_0(q)} \longrightarrow \mathrm{St}_0 \otimes_{\mathbb{Z}_q} \mathcal{O}_{X_0(q)}$$

et l’on pose $q_{0, \mathrm{st}} = E_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Z}_q} \mathrm{Id}_{\mathcal{O}_{X_0(q)}}$.

Soit $\mathrm{St}_\bullet = (\phi_{\mathrm{st}}, q_{0, \mathrm{st}})$.

En suivant la preuve de [32] Prop. 3.6 (qui se simplifie en fait dans notre cas), on obtient

Proposition 6.3.1. — *Les objets (ϕ, q_0) et St_\bullet sont localement isomorphes pour la topologie de Zariski :*

$$\Psi : (\phi, q_0) \cong \mathrm{St}_\bullet$$

Démonstration. — C’est un cas particulier de [45] Prop. A.21 (voir aussi [32]). \square

On introduit donc le $X_0(q)$ -schéma $\mathcal{T}_0(q) = \mathrm{Isom}_{X_0(q)}(\mathrm{St}_\bullet, (\phi, q_0))$. C’est un torseur sous le schéma en groupes parahorique de Klingen $\underline{\Pi} = \mathrm{Stab}(\mathrm{St}_\bullet)$ défini sur \mathbb{Z}_q . C’est un \mathbb{Z}_q -schéma lisse tel que $\underline{\Pi}(\mathbb{Z}_q) = \Pi$. Il est muni d’un morphisme

$$\underline{\Pi} \longrightarrow G$$

qui est un isomorphisme en fibre générique.

Remarque 6.3.2. — En fibre spéciale, ce morphisme fournit une suite exacte courte de schémas en groupes sur \mathbb{F}_q :

$$0 \longrightarrow \overline{U}_1 \otimes \mathbb{F}_q \longrightarrow \underline{\Pi} \otimes \mathbb{F}_q \longrightarrow P_1 \otimes \mathbb{F}_q \longrightarrow 0$$

où \overline{U}_1 est le radical unipotent du parahorique opposé du parahorique de Klingen P_1 .

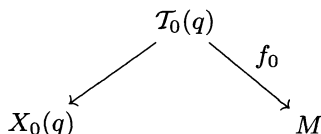
Sur le schéma $\mathcal{T}_0(q)$, on a une trivialisat on universelle; mais on a également le pull-back à $\mathcal{T}_0(q)$ de l'objet universel $(A_0 \to A_1, \lambda, \bar{\eta})$. La filtration de Hodge pour A_i ($i = 0, 1$) fournit des sous-modules $\pi_{i*}\Omega^1_{A_i/X_0(q)} \subset \mathcal{M}_i$. On définit alors $\omega_i \subset \text{St}_i \otimes_{\mathbb{Z}_q} \mathcal{O}_{X_0(q)}$ comme le transport par la trivialisat on universelle des inclusions ci-dessus.

On définit le modèle local pour le parahorique de Klingen comme le \mathbb{Z}_q -schéma M repr esentant le foncteur \underline{M} qui associe à toute \mathbb{Z}_q -algèbre R

$$\underline{M}(R) = \{m = (\omega_i \subset \text{St}_i \otimes_{\mathbb{Z}_q} R), \phi_{\text{St}}(\omega_1) \subset \omega_0\}$$

où ω_i est localement facteur direct et localement libre de rang g et ω_0 est un sous-espace lagrangien pour q_0 . Il est facile de voir que M est un sous-schéma fermé de $\text{Gr}_{2g,g} \times \text{Gr}_{2g,g}$.

Les considérations précédentes fournissent un diagramme



Notons que les schémas $X_0(q)$ et M sont de dimension relative $d = g(g + 1)/2$. Comme dans [32], Prop. 4.5, on démontre que f_0 est lisse et on en déduit

Proposition 6.3.3. — *Soient $s : \text{Spec } k \to X_0(q)$ un point géométrique de $X_0(q)$, t un point géométrique de $\mathcal{T}_0(q)$ au-dessus de t et $m = f_0(t)$. Il existe des voisinages étales $V_s \to X_0(q) \times \text{Spec } W(\overline{\mathbb{F}}_q)$ et $V_m \to M \times \text{Spec } W(\overline{\mathbb{F}}_q)$ de s et m respectivement, et un isomorphisme de $W(\overline{\mathbb{F}}_q)$ -schémas*

$$V_s \cong V_m.$$

Soient \mathcal{L}_g le \mathbb{Z}_q -schéma des sous-modules lagrangiens localement facteurs directs ω_0 de St_0 , $\mathcal{P} : M \to \mathcal{L}_g, m \mapsto \omega_0(m)$ le morphisme d'oubli de $\omega_1 \subset \text{St}_1$ et \mathcal{L}'_g le sous-schéma fermé de \mathcal{L}_g formé des sous-espaces ω_0 contenant e_1 . Soit $\tilde{\mathcal{L}}_g$ l'éclatement de \mathcal{L}_g le long de la fibre spéciale $\mathcal{L}'_g \otimes \mathbb{F}_q$ de \mathcal{L}'_g . Soit $pr : \tilde{\mathcal{L}}_g \to \mathcal{L}_g$ la projection naturelle.

Soit η resp. s le point générique resp. fermé de $\text{Spec } \mathbb{Z}_q$. Commençons par remarquer qu'on a un isomorphisme canonique

$$\tilde{pr}_\eta : \tilde{\mathcal{L}}_{g,\eta} \longrightarrow M_\eta$$

entre les fibres génériques des deux schémas.

Proposition 6.3.4

(1) *L'isomorphisme $\tilde{pr}_\eta : \tilde{\mathcal{L}}_{g,\eta} \to M_\eta$ se prolonge en un (unique) isomorphisme de \mathbb{Z}_q -schémas $\tilde{pr} : \tilde{\mathcal{L}}_g \to M$; on a $pr = \mathcal{P} \circ \tilde{pr}$.*

(2) M est régulier, propre plat semistable sur \mathbb{Z}_q ; sa fibre spéciale est union de deux composantes irréductibles lisses de dimension d à croisements normaux.

En particulier, pour tout point fermé singulier m de la fibre spéciale de M , il existe un voisinage étale $V_m \rightarrow M$ de m , une \mathbb{Z}_q -algèbre lisse S , un morphisme étale $U \rightarrow \mathrm{Spec}(S[u, v]/(uv - q))$ et un isomorphisme de \mathbb{Z}_q -schémas $V_m \cong U$.

Démonstration de la Proposition. — Soit U le plus grand ouvert de $\tilde{\mathcal{L}}_g$ au-dessus duquel ce morphisme se prolonge en un isomorphisme. L'éclatement utilisé pour définir $\tilde{\mathcal{L}}_g$ est \mathbb{I} -équivariant. Le schéma $\tilde{\mathcal{L}}_g$ hérite donc d'une action de \mathbb{I} ; l'ouvert U est stable par cette action. Il suffit donc de démontrer que $\tilde{p}r_\eta$ se prolonge au-dessus d'un ouvert V dont les transformés sous l'action de $\mathbb{I}_0(q)$ recouvrent $\tilde{\mathcal{L}}_g$.

\mathcal{L}_g est un fermé de $\mathrm{Gr}_{2g, g} = M_{2g, g}^{\mathrm{rang}=g} / \mathrm{GL}_g$; cet espace est recouvert par des cartes affines \mathcal{U}_I où I parcourt l'ensemble \mathcal{P}_g des parties à g éléments de $\{1, \dots, 2g\}$; \mathcal{U}_I est le lieu où le mineur $g \times g$ associé à I est inversible. Soit $U_I = \mathcal{U}_I \cap \mathcal{L}_g$.

Considérons l'ouvert associé à $I = \{1, \dots, g\}$:

$$U_I \cong \left\{ \begin{pmatrix} I_g \\ X \end{pmatrix}, {}^t X = s X s^{-1} \right\}$$

(c'est-à-dire que X est symétrique par rapport à l'antidiagonale). Remarquons que les translatés par \mathbb{I} de cet ouvert recouvrent $\tilde{\mathcal{L}}_g$.

On note v_1, \dots, v_g les vecteurs colonnes de $\begin{pmatrix} I_g \\ X \end{pmatrix}$. On écrit $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq g}$. L'équation du lieu $(\mathcal{L}'_g \cap U_I) \otimes \mathbb{F}_q$ dans U_I est $q = x_{11} = \dots = x_{g1} = 0$. C'est donc un fermé lisse de la fibre spéciale.

La description de l'éclatement de $\tilde{\mathcal{L}}_g$ au-dessus de U_I est

$$\tilde{\mathcal{L}}_g|_{U_I} = \{(X, [w_0, w_1, \dots, w_g]) \in U_I \times \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_q}^g; qw_j = x_{j1}w_0, x_{i1}w_j = x_{j1}w_i\}$$

Si $\omega_0 \in \mathcal{U}_I$ est donné par la matrice X , et si (ω_1, ω_0) est un point de M au-dessus de ω_0 , on peut prendre pour base de ω_1 les vecteurs colonnes v_2, \dots, v_g plus un vecteur (à homothétie près) de la forme ${}^t(w_0, 0, \dots, w_1, \dots, w_g)$, proportionnel à ${}^t(q, 0, \dots, x_{11}, \dots, x_{g1})$.

Cette dernière condition est précisément celle définissant l'éclatement. On a donc un isomorphisme au dessus de U_I :

$$\tilde{p}r_I : (X, [w_0, w_1, \dots, w_g]) \mapsto (\omega_1, \omega_0).$$

(2) Le lieu singulier de $\tilde{\mathcal{L}}_g$ est contenu dans le diviseur exceptionnel $\{w_0 = x_{i1} = 0\}$; par conséquent, les ouverts $\{w_i \neq 0\}$ ($i = 1, \dots, g$) recouvrent ce lieu singulier. Plaçons-nous dans l'ouvert $\{w_{i_0} \neq 0\}$.

Posons $u_i = w_i/w_{i_0}$ pour tout $i \neq i_0$ (y compris $i = 0$). Prenons pour coordonnées dans $U_I \times \mathbb{A}^g$: u_i ($i \neq i_0$), x_{ij} ($i \geq 2, j \geq 2$) et $x_{i_0 1}$. On voit alors aisément que toutes les équations définissant $\tilde{\mathcal{L}}_g$ résultent de l'unique équation $x_{i_0 1}u_0 = q$.

$\tilde{\mathcal{L}}_g \cap \{w_{i_0} \neq 0\}$ s'identifie donc à la quadrique $x_{i_0 1}u_0 = q$; son lieu singulier, donné par $x_{i_0 1} = u_0 = 0$, est donc lisse, isomorphe à \mathbb{A}^{d-1} .

Les deux composantes irréductibles de la fibre spéciale de $\tilde{\mathcal{L}}_g$ sont la transformée stricte de la fibre spéciale de \mathcal{L}_g et le diviseur exceptionnel, d'équations respectives dans $\{w_{i_0} \neq 0\} : u_0 = 0$ resp. $x_{i_0 1} = 0$. □

6.4. Mauvaise réduction de $X_0(q)$. — Il résulte immédiatement des Prop. 6.3.3 et 6.3.4 qu'on a

Proposition 6.4.1. — *Le modèle entier $X_0(q)$ est régulier et plat sur \mathbb{Z}_q . Sa fibre spéciale est la réunion de diviseurs lisses à croisements normaux. En particulier, pour tout point fermé singulier s de la fibre spéciale de $X_0(q)$, il existe un voisinage étale $V_s \rightarrow X_0(q)$ de s , une \mathbb{Z}_q -algèbre lisse S , un morphisme étale $U \rightarrow \text{Spec}(S[u, v]/(uv - q))$ et un isomorphisme de \mathbb{Z}_q -schémas $V_s \cong U$.*

Il suffit en effet de vérifier cet énoncé après changement de base à $W(\overline{\mathbb{F}}_q)$ et pour le modèle local au lieu de $X_0(q)$; dans ce cas le schéma $M \otimes W(\overline{\mathbb{F}}_q)$ est de la forme voulue au voisinage d'un point m singulier.

On va donner une description précise des composantes irréductibles de la fibre spéciale. On aura besoin pour cela de la densité du lieu ordinaire.

Proposition 6.4.2. — *Le lieu ordinaire est dense dans $X_0(q)_{\mathbb{F}_q}$.*

Démonstration. — Une démonstration en termes du modèle local est donnée dans [39]. Une autre démonstration résulte de la théorie des déformations des groupes p -divisibles, cf. Section 8. Nous donnons une démonstration modulaire ci-dessous.

Rappelons qu'on a montré que $\pi_{0\emptyset} : X_0(q) \rightarrow X_\emptyset$ est propre. On utilise deux ingrédients :

- la stratification de $X_{\emptyset, \mathbb{F}_q}$ par les polygones de Newton, étudiée par Oort et
- la bijection de l'ensemble des sous-schémas connexes en groupes de rang q d'une variété abélienne A sur \mathbb{F}_q avec un fermé de $\mathbb{P}(\text{Lie}(A))$.

Par [41], il y a une stratification (W_α) de $X_{\emptyset, \mathbb{F}_q}$ où α parcourt l'ensemble des polygones de Newton, c'est-à-dire l'ensemble des graphes de fonctions affines par morceaux, convexes, telles que $\alpha(0) = 0$ et $\alpha(2g) = g$, symétriques (i.e. $\alpha(2g - x) = g - \alpha(x)$), avec points de brisure à coordonnées entières (et donc à pentes rationnelles). Soit

$$\Delta_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 ; 0 \leq y < x \leq g, (x, y) \text{ au-dessus de } \alpha\}$$

Par définition,

$$W_\alpha = \{\xi = (A, \lambda, \bar{\eta}^q) \in X_{\emptyset, \mathbb{F}_q}, PN(\xi) \text{ au-dessus de } \alpha\}$$

À chaque fois, « au-dessus » est pris au sens large. Si α est au-dessus de β , $W_\alpha \subset W_\beta$. Le lieu ordinaire correspond à $\alpha = 0$ sur $[0, g]$. Oort démontre que les W_α sont fermés et équidimensionnels de dimension

$$\dim W_\alpha = d(\alpha) = \#(\mathbb{Z}^2 \cap \Delta_\alpha)$$

Le q -rang d'un polygone α est le plus grand entier r tel que $\alpha(r) = 0$. Soit $r < g$; tout point de $\Delta_\alpha \cap \mathbb{Z}^2$ de q -rang au plus égal à r est au-dessus de α_r^{\min} défini par $\alpha_r^{\min}(r) = 0$ et $\alpha_r^{\min}(g) = 1$. Par conséquent, on a $d(\alpha) \leq d(\alpha_r^{\min}) = \frac{g(g-1)}{2} + r$. Soit $X_0^{H \text{ ét.}}$, resp. $X_0^{H \text{ con.}}$ le lieu de $X_0(q) \otimes \mathbb{F}_q$ où le schéma H est étale, resp. connexe.

On pose

$$\begin{aligned} \pi_{0\emptyset}^{-1}(\xi)^{\text{ét.}} &= \pi_{0\emptyset}^{-1}(\xi) \cap X_0^{H \text{ ét.}}, \\ \pi_{0\emptyset}^{-1}(\xi)^{\text{con.}} &= \pi_{0\emptyset}^{-1}(\xi) \cap X_0^{H \text{ con.}}. \end{aligned}$$

On observe alors que pour tout point géométrique ξ de $X_\emptyset \otimes \mathbb{F}_q$ de q -rang $\text{rg}(A_\xi) = r$, on a $\dim \pi_{0\emptyset}^{-1}(\xi) \leq g - r - 1$; en effet, $\pi_{0\emptyset}^{-1}(\xi)$ est réunion disjointe du schéma T_1 des sous-schémas en groupes étales de rang q de $A_\xi[q]$ et du schéma T_2 des sous-schémas en groupes connexes de rang q de $A_\xi[q]$. On a $\dim T_1 = 0$, tandis que par le Th. 2 p. 146 de [37], T_2 s'identifie à un fermé de l'espace projectif $\mathbb{P}(\text{Lie}(A_\xi)_{\text{nil}})$ où $\text{Lie}(A_\xi)_{\text{nil}}$ est le plus grand sous-espace de $\text{Lie}(A_\xi)$ sur lequel le morphisme de puissance q sur $\text{Lie}(A_\xi)$ est nilpotent. On sait que $\dim \text{Lie}(A_\xi)_{\text{nil}} \leq g - r$ par [37] Corollaire, fin de III.14.

Considérons une composante irréductible W de W_α associée à un point générique; le morphisme $\pi_{0\emptyset} : \pi_{0\emptyset}^{-1}(W) \rightarrow W$ est de type fini, on peut donc lui appliquer Cor. 5.6.7.1 de EGA IV (Publ. IHES 24,1965) : si $f : X \rightarrow Y$ est localement de type fini et $\dim f^{-1}(y) \leq n$ pour tout $y \in Y$, alors

$$\dim X \leq \dim Y + n$$

Ici, on trouve

$$\dim \pi_{0\emptyset}^{-1}(W) \leq g - r - 1 + \frac{g(g-1)}{2} + r = d - 1 < d$$

Par la théorie du modèle local, toutes les composantes irréductibles de $X_0(q)_{\mathbb{F}_q}$ sont de dimension d .

Par conséquent pour toute telle composante C , on a

$$C \not\subset \bigcup_W \pi_{0\emptyset}^{-1}(W)$$

où W parcourt l'ensemble des composantes irréductibles des W_α de p -rang différent de g .

On a donc $C \cap \pi_{0\emptyset}^{-1}(X_\emptyset^{\text{ord}}) \neq \emptyset$. □

Proposition 6.4.3. — *La fibre spéciale de $X_0(q)$ possède exactement deux composantes irréductibles*

$$X_0^e \text{ et } X_0^m,$$

toutes deux lisses, définies respectivement comme les adhérences de Zariski du lieu $X_0^{e, \text{reg}}$ (resp. $X_0^{m, \text{reg}}$) où H est étale, resp. multiplicatif. En outre, le lieu singulier $X_0(q)^{\text{sing}}$ de la fibre spéciale est un diviseur lisse de la fibre spéciale, qui coïncide avec le lieu X_0^a où H est additif.

Démonstration. — Soit \mathcal{T}^e (resp. $\mathcal{T}^m, \mathcal{T}^m, \mathcal{T}^{e,reg}$ et $\mathcal{T}^{m,reg}$) l'image réciproque dans \mathcal{T} de X_0^e (resp. $X_0^m, X_0^m, X_0^{e,reg}$ et $X_0^{m,reg}$). L'ouvert $X_0^{e,reg}$ de la fibre spéciale correspond au lieu où $\phi_\omega : \omega_1 \rightarrow \omega_0$ est un isomorphisme, donc \mathcal{T}^e est l'image réciproque de la transformée stricte de la fibre spéciale de \mathcal{L}_g (qui est lisse). De même, $X_0^{m,reg}$ correspond au lieu où $\text{Coker } \phi_\omega$ est de rang 1 (par dualité de Cartier). La condition « $\text{Coker } \phi_\omega$ est de rang 1 » équivaut à $\omega_0 \ni e_1$ et \mathcal{T}^m est donc l'image réciproque du diviseur exceptionnel de $\tilde{\mathcal{L}}_g$. Le lieu singulier $X_0(q)^{sing} = X_0^e \cap X_0^m$ de la fibre spéciale est donc un diviseur lisse ; soit s un point fermé géométrique de $X_0(q)^{sing}$. Si H_s est multiplicatif ou étale, on a vu que s est lisse, donc $H_s \cong \alpha_q$ est additif.

Démontrons maintenant que X_0^e et X_0^m sont connexes, ce qui achèvera la démonstration. Puisque le lieu ordinaire est dense dans la fibre spéciale, il suffit de démontrer que les lieux ordinaires $X_0^{e,ord}$ et $X_0^{m,ord}$ sont connexes.

Rappelons que sur X_\emptyset^{ord} on dispose d'une suite exacte de groupes finis et plats

$$0 \rightarrow A[q]^o \rightarrow A[q] \rightarrow A[q]^e \rightarrow 0$$

où $A[q]^0$ est connexe (et même multiplicatif) et $A[q]^e$ est étale et dual de Cartier de $A[q]^0$. Le morphisme $X_0^{e,ord} \rightarrow X_\emptyset^{ord}$ est alors le composé

$$X_0^{e,ord} \rightarrow Z_0^{e,ord} \rightarrow X_\emptyset^{ord}$$

où $Z_0^{e,ord}$ est le revêtement étale (de degré $\frac{q^g-1}{q-1}$) de X_\emptyset^{ord} dont la fibre en (A, λ, η) est l'ensemble des sous-groupes d'ordre q de $A[q]^e$; le morphisme $X_0^{e,ord} \rightarrow Z_0^{e,ord}$ est radiciel de degré q^g — on a en fait $X_0^{e,ord} = Z_0^{e,ord} \times_{X_\emptyset^{ord}, Fr} X_\emptyset^{ord}$. La connexité de $X_0^{e,ord}$ et celle de $Z_0^{e,ord}$ sont donc équivalentes. Le morphisme $X_0^{m,ord} \rightarrow X_\emptyset^{ord}$ est étale de degré $\frac{q^g-1}{q-1}$: par dualité de Cartier, $X_0^{m,ord}$ s'identifie au revêtement étale de X_\emptyset^{ord} dont la fibre en (A, λ, η) est l'ensemble des sous-groupes d'ordre q^{g-1} de $A[q]^e$.

Considérons le revêtement d'Igusa

$$X(q)_{Ig}^{ord} = \text{Isom}_{X_\emptyset^{ord}}((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^g, A[q]^e) = \text{Isom}_{X_\emptyset^{ord}}(\mu_q^g, A[q]^0)$$

de X_\emptyset^{ord} ; ce revêtement est connexe puisque le morphisme

$$\pi_1(X_\emptyset^{ord}) \rightarrow \text{GL}_g(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$$

qui lui est associé est surjectif (cf. [13], Proposition V.7.1). On dispose de morphismes surjectifs (évidents)

$$\begin{aligned} X(q)_{Ig}^{ord} &\rightarrow Z_0^{e,ord} \\ \text{et } X(q)_{Ig}^{ord} &\rightarrow X_0^{m,ord} \end{aligned}$$

et les buts de ces morphismes sont donc bien connexes. □

6.5. Mauvaise réduction de $X_1(q)$. — Comme dans [24], on utilise la théorie de Oort-Tate [54] pour étudier $X_1(q)$ et le morphisme $\pi_{10} : X_1(q) \rightarrow X_0(q)$ (cf. 6.2.4). Le théorème suivant résume les éléments de cette théorie qui nous seront utiles (et les reformule dans le langage des champs algébriques, alors que Oort et Tate utilisaient un langage plus classique).

On commence par rappeler que Oort et Tate définissent une certaine unité (explicite) ν_q de $\Lambda_q = \mathbb{Z}[\zeta_{q-1}, 1/(q-1)] \cap \mathbb{Z}_q$ (où $\zeta_{q-1} \in \mathbb{Z}_q$ est une racine primitive $(q-1)$ -ième de l'unité) et ils notent $w_q = \nu_q q$.

Théorème 6.5.1 (Oort-Tate, [54])

(1) *Le champ \mathcal{OT} des schémas en groupes finis et plats de rang q est algébrique ; après changement de base de \mathbb{Z} à Λ_q ce champ est le quotient de $\text{Spec } \Lambda_q[x, y]/(xy - w_q)$ par l'action de \mathbb{G}_m définie par $\lambda(x, y) = (\lambda^{q-1}x, \lambda^{1-q}y)$.*

(2) *Le schéma en groupe universel au-dessus de \mathcal{OT}_{Λ_q} est le schéma d'équation $z^q - xz = 0$; sa section nulle a pour équation $z = 0$.*

(3) *La dualité de Cartier agit sur \mathcal{OT}_{Λ_q} en échangeant x et y .*

Considérons le morphisme $\phi : X_0(q) \rightarrow \mathcal{OT}$ défini par le sous-schéma en groupes $H \subset A$ fini et plat de rang q au-dessus de $X_0(q)$. Les propriétés de $X_1(q)$ que nous obtiendrons dans cette section seront des corollaires (faciles) de la proposition suivante.

Proposition 6.5.2. — *Le morphisme ϕ est lisse.*

Démonstration. — Au-dessus de $\text{Spec } \mathbb{Z}[1/q]$, \mathcal{OT} coïncide avec le champ classifiant $B(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ de sorte que la proposition à démontrer s'y réduit à la lissité de $X_0(q)_{\mathbb{Z}[1/Mq]}$ au-dessus de $\text{Spec } \mathbb{Z}[1/Mq]$. Il suffit donc de démontrer que le morphisme $X_0(q)_{\mathbb{Z}_q} \rightarrow \mathcal{OT}_{\mathbb{Z}_q}$ est lisse.

En fait, le seul problème est au voisinage du point $x = y = 0$. En effet le morphisme étale

$$\text{Spec } \mathbb{Z}_q \longrightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}_q[x, x^{-1}, y]/(xy - w_q) \longrightarrow \mathcal{OT}_{\mathbb{Z}_q}[x^{-1}]$$

défini (au niveau des algèbres) par $x \mapsto 1, y \mapsto w_q$ identifie l'ouvert $\mathcal{OT}_{\mathbb{Z}_q}[x^{-1}]$ à $B(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}_q}^\times$ de sorte qu'au-dessus de $\mathcal{OT}_{\mathbb{Z}_q}[x^{-1}]$ la proposition à démontrer se réduit à la lissité sur $\text{Spec } \mathbb{Z}_q$ de l'image réciproque $X_0(q) - X_0^m$ de $\mathcal{OT}_{\mathbb{Z}_q}[x^{-1}]$. Cette lissité résulte de la semi-stabilité de $X_0(q)$ et de la proposition 6.4.3. Symétriquement, au-dessus de $\mathcal{OT}_{\mathbb{Z}_q}[y^{-1}]$ la proposition à démontrer se réduit à la lissité sur $\text{Spec } \mathbb{Z}_q$ de l'image réciproque $X_0(q) - X_0^e$ de $\mathcal{OT}_{\mathbb{Z}_q}[y^{-1}]$.

Pour vérifier la lissité au voisinage du point $x = y = 0$ on considère le \mathbb{G}_m -torseur $Z = X_0(q)_{\mathbb{Z}_q} \times_{\mathcal{OT}_{\mathbb{Z}_q}} \text{Spec } \mathbb{Z}_q[x, y]/(xy - w_q)$ au-dessus de $X_0(q)_{\mathbb{Z}_q}$. Il faut alors vérifier que le morphisme $\phi : Z \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}_q[x, y]/(xy - w_q)$ est lisse au-dessus du point $x = y = 0$. Soient alors un point $z \in Z$ au-dessus de $(0, 0)$ et un voisinage étale U de z de la forme $S[u, v]/(uv - q)$ où S est un \mathbb{Z}_q -schéma affine lisse et $u = 0$ (resp. $v = 0$) est une équation de l'image réciproque U^m (resp. U^e) de X_0^m (resp. X_0^e) dans U . D'après

la proposition 6.4.3, le réduct du schéma d'équation $\phi^*(x) = 0$ est U^m et le réduct du schéma d'équation $\phi^*(y) = 0$ est U^e . On a donc $\phi^*(x) = \alpha \cdot u^m$ et $\phi^*(y) = \beta \cdot u^{m'}$ (avec $\alpha, \beta \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^\times$ et $m, m' \in \mathbb{N}$). De l'égalité $\phi^*(x)\phi^*(y) = w_q = \nu_q uv$ il résulte que $m = m' = 1$. La matrice carrée de rang 2

$$\begin{pmatrix} \partial x/\partial u = \alpha & \partial x/\partial v = 0 \\ \partial y/\partial u = 0 & \partial y/\partial v = \beta \end{pmatrix}$$

extraite de la matrice jacobienne du morphisme ϕ au point z est inversible, et le morphisme ϕ est donc bien lisse au point z , ce qui termine la démonstration. \square

Faisons maintenant agir \mathbb{G}_m sur $\text{Spec } \mathbb{Z}_q[z, y]/(z^{q-1}y - w_q)$ de la manière suivante : $\lambda(z, y) = (\lambda z, \lambda^{1-q}y)$.

Corollaire 6.5.3. — *Le diagramme de champs naturel*

$$\begin{array}{ccc} X_1(q)_{\mathbb{Z}_q} & \longrightarrow & \text{Spec } \mathbb{Z}_q[x, y, z]/(z^{q-1} - x, xy - w_q)/\mathbb{G}_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_0(q)_{\mathbb{Z}_q} & \longrightarrow & \mathcal{O}\mathcal{T}_{\mathbb{Z}_q} = \text{Spec } \mathbb{Z}_q[x, y]/(xy - w_q)/\mathbb{G}_m \end{array}$$

est 2-cartésien. En particulier

- (1) le morphisme $\pi_{10} : X_1(q) \rightarrow X_0(q)$ est fini et plat, de degré $q - 1$,
- (2) le schéma $X_1(q)$ est régulier ; sa fibre spéciale est réunion de deux composantes irréductibles $X_1^e = \pi_{10}^{-1}(X_0^e)$ et $X_1^m = \pi_{10}^{-1}(X_0^m)$ de dimension d , de réducts lisses, respectivement de multiplicité 1 et $q - 1$, et à croisements normaux ; la restriction de π_{10} à X_1^e est étale au-dessus de $X_0^{e, \text{reg}}$, totalement ramifiée le long de X_0^e et la restriction de π_{10} à $X_{1, \text{red}}^m$ induit un isomorphisme $X_{1, \text{red}}^m \rightarrow X_0^m$,
- (3) le lieu singulier $X_1^a = \pi_{10}^{-1}(X_0^a) = X_1^e \cap X_1^m$ de $X_1(q)$ est de schéma réduct sous-jacent lisse et de codimension 1 dans la fibre spéciale.
- (4) Le même énoncé vaut pour $X_\Delta(q)$, en remplaçant $\text{Spec } \mathbb{Z}_q[z, y]/(z^{q-1}y - w_q)/\mathbb{G}_m$ par $\text{Spec } \mathbb{Z}_q[Z, y]/(Z^{p^n}y - w_q)/\mathbb{G}_m$ avec $q - 1 = m_1 \cdot p^n$, $p \nmid m_1$, l'action de \mathbb{G}_m étant donnée par

$$\lambda(Z, y) = (\lambda^m Z, \lambda^{1-q}y).$$

Les composantes irréductibles de $X_\Delta(q)_{\mathbb{F}_q}$ sont notées X_Δ^e et X_Δ^m . La multiplicité de X_Δ^m est p^n .

Démonstration. — Le seul point ne résultant pas directement de la proposition est l'irréductibilité de X_1^e . Ceci s'établit comme dans la démonstration de la proposition 6.4.3 : l'ouvert $X_1^{e, \text{reg}} = \pi_{10}^{-1}(X_0^{e, \text{reg}})$ s'écrit aussi

$$\{(A, H, P); (A, H) \in X_0^{e, \text{reg}}, 0 \neq P \in H\}$$

et l'ouvert $X_1^{e, \text{ord}} = \pi_{10}^{-1}(X_0^{e, \text{ord}})$ de $X_1^{e, \text{reg}}$ est donc le quotient du revêtement d'Igusa (connexe) $X(q)_{\text{Ig}}^{\text{ord}}$ par le sous-groupe $\{g; ge_1 = e_1\}$ de $\text{GL}_q(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$. \square

En vue des calculs de cycles proches de la section suivante nous aurons besoin d'une variante concernant un modèle semi-stable de $X_1(q)$.

Rappelons que le schéma en groupe de Oort-Tate associé au couple $(x = w_q, y = 1)$ n'est autre que μ_q . L'anneau des entiers de $\mathbb{Q}_q[\zeta_q]$ (où ζ_q est une racine primitive q -ième de l'unité) est donc $\mathcal{O}_q = \mathbb{Z}_q[w_q^{1/q-1}]$. Considérons alors la normalisée $\tilde{X}_1(q)$ de $X_0(q)_{\mathbb{Z}_q}$ dans $X_1(q)_{\mathbb{Q}_q[\zeta_q]}$.

Corollaire 6.5.4. — *Le diagramme de champs naturel*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1(q) & \longrightarrow & \mathrm{Spec} \mathcal{O}_q[x, y, z, t]/(z^{q-1} - x, t^{q-1} - y, zt - w_q^{1/q-1})/\mathbb{G}_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_0(q)_{\mathbb{Z}_q} & \longrightarrow & \mathcal{OT}_{\mathbb{Z}_q} = \mathrm{Spec} \mathbb{Z}_q[x, y]/(xy - w_q)/\mathbb{G}_m \end{array}$$

est 2-cartésien. En particulier

(1) le schéma $\tilde{X}_1(q)$ est semi-stable au-dessus de $\mathrm{Spec} \mathcal{O}_q$; sa fibre spéciale possède deux composantes irréductibles \tilde{X}_1^e et \tilde{X}_1^m , lisses à croisements normaux et le lieu singulier $\tilde{X}_1^a = \tilde{X}_1^e \cap \tilde{X}_1^m$ de cette fibre spéciale est lisse,

(2) l'ouvert complémentaire de \tilde{X}_1^m (resp. de \tilde{X}_1^e) représente le foncteur

$$\mathrm{Isom}_{X_0(q)_{\mathcal{O}_q}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, H) \quad (\text{resp. } \mathrm{Isom}_{X_0(q)_{\mathcal{O}_q}}(\mu_q, H)),$$

(3) la restriction à \tilde{X}_1^a de l'action par functorialité (via les opérateurs diamant) de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ sur $\tilde{X}_1(q)$ est triviale.

Le même énoncé vaut mutatis mutandis pour la normalisation $\tilde{X}_\Delta(q)$ de $X_0(q)$ dans $X_\Delta(q)_{\tilde{\eta}}$.

Démonstration. — Analogie à celle de l'énoncé pour $X_1(q)$. □

Dans la section sur les congruences d'Eichler-Shimura, nous aurons aussi besoin d'une variante concernant une forme tordue de $X_1(q)$. Considérons la normalisée $X_\mu(q)$ de $X_0(q)$ dans $X_\mu(q)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Isom}_{X_0(q)_{\mathbb{Q}}}(\mu_q, H)$ (de sorte que $X_1(q)$ et $X_\mu(q)$ deviennent isomorphes au-dessus de $\mathbb{Q}[\zeta_q]$ et que $\tilde{X}_1(q)$ est donc aussi un modèle semi-stable de $X_\mu(q)$ au-dessus de $\mathrm{Spec} \mathcal{O}_q$).

Corollaire 6.5.5. — *Le diagramme de champs naturel*

$$\begin{array}{ccc} X_\mu(q)_{\mathbb{Z}_q} & \longrightarrow & \mathrm{Spec} \mathbb{Z}_q[x, y, t]/(t^{q-1} - y, xy - w_q)/\mathbb{G}_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_0(q)_{\mathbb{Z}_q} & \longrightarrow & \mathcal{OT}_{\mathbb{Z}_q} = \mathrm{Spec} \mathbb{Z}_q[x, y]/(xy - w_q)/\mathbb{G}_m \end{array}$$

(où \mathbb{G}_m agit sur $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}[x, t]/(xt^{q-1} - w_q)$ par $\lambda(x, t) = (\lambda^{q-1}x, \lambda^{-1}t)$) est 2-cartésien. En particulier

(1) le morphisme $\pi_{\mu,0} : X_\mu(q) \rightarrow X_0(q)$ est fini et plat, de degré $q - 1$,

(2) le schéma $X_\mu(q)$ est régulier ; sa fibre spéciale est réunion de deux composantes irréductibles $X_\mu^e = \pi_{\mu 0}^{-1}(X_0^e)$ et $X_\mu^m = \pi_{\mu 0}^{-1}(X_0^m)$ de dimension d , de réduits lisses, respectivement de multiplicité $q - 1$ et 1 , et à croisements normaux ; la restriction de $\pi_{\mu 0}$ à $X_{\mu, \text{red}}^e$ induit un isomorphisme $X_{\mu, \text{red}}^e \rightarrow X_0^e$ et la restriction de $\pi_{\mu 0}$ à $X_{\mu, \text{red}}^m$ est étale au-dessus de $X_0^{m, \text{reg}}$, totalement ramifiée le long de X_0^a ,

(3) le réduit de $X_\mu^a = \pi_{\mu 0}^{-1}(X_0^a)$ est lisse.

Démonstration. — Analogue à celle de l'énoncé pour $X_1(q)$. □

7. Cycles proches et monodromie

7.1. Un changement de base non propre. — Soit S un trait hensélien de point générique η et de point fermé s . On choisit un point géométrique $\bar{\eta}$ (resp. \bar{s}) au-dessus de η (resp. s). Lorsque X est un S -schéma, on note $R\Psi\mathcal{C}$ le complexe des cycles proches ([10], Exp. XIII) associé à un complexe $\mathcal{C} \in D_c^b(X_{\bar{\eta}})$.

Rappelons que lorsque $X \rightarrow Y$ est un morphisme de type fini de S -schémas on dispose de deux morphismes fonctoriels

$$R\Psi \circ \mathbb{R}f_{\bar{\eta}} \longrightarrow \mathbb{R}f_{\bar{s}} \circ R\Psi \quad \text{et} \quad Rf_{\bar{s}!} \circ R\Psi \longrightarrow R\Psi \circ \mathbb{R}f_{\bar{\eta}!}$$

échangés par la dualité de Poincaré. Le premier de ces morphismes — défini même lorsque le morphisme $X \rightarrow Y$ n'est pas de type fini — est simplement le morphisme de changement de base par $\{\bar{s}\} \hookrightarrow \bar{S}$ (avec les notations de *loc. cit.*). Le deuxième se définit par dualité, en utilisant le fait que le foncteur cycles proches commute à la dualité ([30], théorème 4.2). Lorsque f est propre, il résulte du théorème de changement de base propre que ces deux morphismes sont des isomorphismes.

Pour éviter de multiplier les indices, nous nous contenterons de noter $R\Psi \circ \mathbb{R}f \rightarrow \mathbb{R}f \circ R\Psi$ et $Rf_! \circ R\Psi \rightarrow R\Psi \circ Rf_!$ ces deux morphismes lorsqu'aucune confusion n'est à craindre.

Nous allons maintenant étudier ces morphismes dans la situation suivante. Fixons une décomposition $\text{GL}_g(\mathbb{Z})$ -admissible (cf. [13] IV.2) $\Sigma = (\Sigma_\sigma)_\sigma$ du cône C_g des matrices symétriques $g \times g$ réelles semi-définies positives de noyau \mathbb{Q} -rationnel en cônes polyédraux rationnels σ . À la donnée de Σ correspond une compactification toroïdale $J^\Sigma : X_\emptyset \hookrightarrow \bar{X}_\emptyset^\Sigma$ sur $S = \text{Spec } \mathbb{Z}_q$; le complémentaire de X_\emptyset est un diviseur D^Σ plat sur S — le lecteur qui le souhaiterait peut supposer que la décomposition Σ est lisse, de sorte que \bar{X}_\emptyset^Σ est lisse et que D^Σ est un diviseur à croisements normaux. Notons $\pi_{1, \emptyset}$ le morphisme d'oubli $X_1 \rightarrow X_\emptyset$, et rappelons qu'on a défini (cf. 2.1 et 6.1.2) un système local $V_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$ sur $X_1(N)_\eta$.

La suite de la section 7.1 sera consacrée à la démonstration de la proposition suivante.

Proposition 7.1.1. — *Les morphismes naturels*

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\Psi \mathbb{R}J^\Sigma(\pi_{1,\emptyset*} V_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}) &\longrightarrow \mathbb{R}J^\Sigma \mathrm{R}\Psi(\pi_{1,\emptyset*} V_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}) \\ \text{et } J^{\Sigma!} \mathrm{R}\Psi(\pi_{1,\emptyset*} V_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}) &\longrightarrow \mathrm{R}\Psi J^{\Sigma!}(\pi_{1,\emptyset*} V_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes.

Appliquant le foncteur $\mathrm{R}\Gamma(X_{\emptyset,\bar{s}}^\Sigma, -)$ et utilisant le théorème de changement de base propre (pour $\pi_{1,\emptyset}$ et pour le morphisme structural de $\overline{X}_\emptyset^\Sigma$) on obtient le corollaire suivant, qui nous sera très utile.

Corollaire 7.1.2. — *Les morphismes naturels (et en particulier $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_q/\mathbb{Q}_q)$ -équivariants)*

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\Gamma(X_{1,\bar{\eta}}, V_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}) &\longrightarrow \mathrm{R}\Gamma(X_{1,\bar{s}}, \mathrm{R}\Psi V_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}) \\ \text{et } \mathrm{R}\Gamma_c(X_{1,\bar{s}}, \mathrm{R}\Psi V_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}) &\longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_c(X_{1,\bar{\eta}}, V_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes.

Démonstration de la proposition. — Commençons par remarquer qu’il suffit de démontrer que les morphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\Psi \mathbb{R}J^\Sigma(\pi_{1,\emptyset*} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathbb{R}J^\Sigma \mathrm{R}\Psi(\pi_{1,\emptyset*} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \\ \text{et } J^{\Sigma!} \mathrm{R}\Psi(\pi_{1,\emptyset*} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathrm{R}\Psi J^{\Sigma!}(\pi_{1,\emptyset*} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En effet, choisissons un multiple N' de N (par exemple $p^n N$) tel que le système local $V_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$ soit trivial sur $X(N')$. Soit G le groupe de Galois du morphisme fini et génériquement étale $X(N') \rightarrow X_1(N)$. On a alors

$$V_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X_1(N)\bar{\eta}} = \mathrm{pr}_{N',N*}(V_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X(N')\bar{\eta}})^G;$$

puisque $\mathrm{pr}_{N',N}$ est fini on a $\mathrm{R}^i \mathrm{pr}_{N',N*} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = 0$ pour $i \geq 1$ et puisque $\mathrm{pr}_{N',N*} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est un G -module induit on a $\mathrm{H}^i(G, \mathrm{pr}_{N',N*} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = 0$ pour $i \geq 1$. On a donc un isomorphisme canonique

$$V_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X_1(N)\bar{\eta}} \xrightarrow{\cong} \mathrm{R}\Gamma(G, \mathrm{Rpr}_{N',N*}(V_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X(N')\bar{\eta}}))$$

(où le membre de gauche est considéré comme un complexe concentré en degré zéro).

Remarquons maintenant que le foncteur $\Gamma(G, -)$ commute aux images directes et réciproques. Le foncteur $\mathrm{R}\Gamma(G, -)$ commute donc aux images directes dérivées et aux images réciproques, et donc aussi au foncteur cycles proches. Remarquons aussi que $\mathrm{Rpr}_{N',N*}(-)$ commute aux cycles proches grâce au théorème de changement de base propre et commute tautologiquement aux foncteurs $J_!^\Sigma$ et $\mathrm{R}J_*^\Sigma$.

Les morphismes figurant dans l’énoncé de la proposition (7.1.1) résultent alors simplement de l’application du foncteur $\mathrm{R}\Gamma(G, -)$ aux morphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\Psi \mathbb{R}J^\Sigma(\pi_{1,\emptyset*} \mathrm{pr}_{N',N*} V_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X(N')}) &\longrightarrow \mathbb{R}J^\Sigma \mathrm{R}\Psi(\pi_{1,\emptyset*} \mathrm{pr}_{N',N*} V_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X(N')}) \\ \text{et } J^{\Sigma!} \mathrm{R}\Psi(\pi_{1,\emptyset*} \mathrm{pr}_{N',N*} V_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X(N')}) &\longrightarrow \mathrm{R}\Psi J^{\Sigma!}(\pi_{1,\emptyset*} \mathrm{pr}_{N',N*} V_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X(N')}), \end{aligned}$$

lesquels s’obtiennent à leur tour en appliquant le foncteur $\mathbb{R}\mathrm{pr}_{N',N}$ aux morphismes (7.1.1) pour $X_1(N')$. Il suffit donc de démontrer que ces derniers sont des isomorphismes.

Le théorème suivant, dû à Berkovich [2], nous permettra de réduire cette démonstration à celle d’un énoncé concernant les « cartes locales formelles » de Faltings-Chai ([13], IV 3). Rappelons que Berkovich associe à tout schéma formel (*spécial* : cf. loc. cit.) un foncteur cycles proches $\mathrm{R}\Psi_{\mathrm{Ber}}$. Soient X un S -schéma localement de type fini et Y un sous-schéma fermé de sa fibre spéciale ; soient n un entier premier à la caractéristique résiduelle de S et $\mathcal{C} \in \mathrm{D}_{\mathbb{C}}^b(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Berkovich démontre alors le

Théorème 7.1.3 ([2], theorem 3.1). — *On a un isomorphisme canonique*

$$(\mathrm{R}\Psi \mathcal{C})|_Y \longrightarrow \mathrm{R}\Psi_{\mathrm{Ber}}(\widehat{\mathcal{C}}|_Y)$$

En particulier, $(\mathrm{R}\Psi \mathcal{C})|_Y$ ne dépend que du complété de X le long de Y et de la restriction $\widehat{\mathcal{C}}|_Y$ de \mathcal{C} à ce complété.

Résumons maintenant les propriétés de la compactification toroïdale $\overline{X}_{\emptyset}^{\Sigma}$ que nous allons utiliser (cf. [13] IV, theorem 5.4 et theorem 6.6) ; les notations sont celles de [13], à ceci près que Faltings et Chai notent $\mathbf{A}_{g,N}$ la variété de Siegel $X_{\emptyset}^g(N)$.

(1) Le schéma $\overline{X}_{\emptyset}^{\Sigma}$ est muni d’une stratification localement fermée

$$\overline{X}_{\emptyset}^{\Sigma} = \coprod_{\sigma \in \Sigma_N} \overline{X}_{\emptyset, \sigma}^{\Sigma}.$$

(2) Le complété de $\overline{X}_{\emptyset}^{\Sigma}$ le long de $\overline{X}_{\emptyset, \sigma}^{\Sigma}$ s’identifie au quotient par un certain groupe fini $\Gamma_{\sigma, N}$ de la « carte locale formelle » $\mathcal{S}_{\sigma, N}$ ([13], IV 6.2.5) dont nous allons maintenant rappeler la construction. Soit $\sigma \in \Sigma_N$ et ξ la « composante rationnelle du bord du domaine de Siegel \mathcal{Z}_g » associée à σ — en termes plus terre à terre, la donnée de ξ équivaut à celle d’un quotient libre X_{ξ} de $X = \mathbb{Z}^{2g}$; nous noterons r le rang de X_{ξ} . La carte locale formelle $\mathcal{S}_{\sigma, N}$ admet alors la description suivante.

Considérons le schéma abélien (de dimension relative $r(g-r)$) $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(N^{-1}X_{\xi}, {}^tA_{g-r})$ au-dessus de X_{\emptyset}^{g-r} . Soient $c' : N^{-1}X_{\xi} \rightarrow {}^tA_{g-r}$ le morphisme universel au-dessus de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(N^{-1}X_{\xi}, {}^tA_{g-r})$ et $c : X_{\xi} \subset N^{-1}X_{\xi} \xrightarrow{c'} {}^tA_{g-r} = A_{g-r}$ (cette dernière identification étant donnée par la polarisation principale sur A_{g-r}). Soit $E_{\xi, N}$ le tore de groupe de caractères $N^{-1}\mathrm{Sym}^2(X_{\xi})$. Il existe alors un unique $E_{\xi, N}$ -torseur $\Xi_{\xi, N}$ au-dessus de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(N^{-1}X_{\xi}, {}^tA_{g-r})$ dont l’image directe par le caractère $[\mu \otimes \nu] \in N^{-1}\mathrm{Sym}^2(X_{\xi})$ ($\mu \in N^{-1}X_{\xi}, \nu \in X_{\xi}$) est $(c'(\mu) \times c(\nu))^* \mathcal{P}_{g-r}^{-1}$ (on note $\mathcal{P}_{g-r} \rightarrow {}^tA_{g-r} \times_{X_{\emptyset}^{g-r}} A_{g-r}$ le \mathbf{G}_m -torseur de Poincaré). À la donnée de $\sigma \in \Sigma_N$ est associé un cône polyédral rationnel $\sigma \subset \mathrm{Sym}^2(X_{\xi} \otimes \mathbb{R})$ (cf. [13] IV 6), et donc un plongement torique affine $E_{\xi, N} \hookrightarrow \overline{E_{\xi, N}(\sigma)}$. Ceci induit un plongement toroïdal

$$\Xi_{\xi, N} \hookrightarrow \overline{\Xi_{\xi, N}(\sigma)} = \Xi_{\xi, N} \overset{E_{\xi, N}}{\times} \overline{E_{\xi, N}(\sigma)}$$

qui peut être vu comme un fibré en plongements toriques au-dessus de

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N^{-1}X_{\xi}, {}^tA_{g-r}).$$

Lorsque τ est une face de $\underline{\sigma}$ notons $\overline{E_{\xi,N}}(\sigma)_{\tau}$ la $E_{\xi,N}$ -orbite de $\overline{E_{\xi,N}}(\sigma)$ associée à τ et $\overline{\Xi_{\xi,N}}(\sigma)_{\tau} = \Xi_{\xi,N} \times^{E_{\xi,N}} \overline{E_{\xi,N}}(\sigma)_{\tau}$. En particulier, l'orbite $\overline{E_{\xi,N}}(\sigma)_{\text{Int } \underline{\sigma}}$ associée à l'intérieur de $\underline{\sigma}$ est de dimension minimale et adhérente à toutes les autres orbites. Finalement, la carte locale formelle $\mathcal{S}_{\sigma,N}$ s'obtient en complétant $\overline{\Xi_{\xi,N}}(\sigma)$ le long de $\overline{\Xi_{\xi,N}}(\sigma)_{\text{Int } \underline{\sigma}}$.

(3) L'isomorphisme

$$([\mathbf{13}] \text{ IV } 6.6) : \mathcal{S}_{\sigma,N}/\Gamma_{\sigma,N} \longrightarrow \widehat{X_{\emptyset}^{\Sigma}}/\widehat{X_{\emptyset,\sigma}^{\Sigma}}$$

fait se correspondre les strates $\overline{\Xi_{\xi,N}}(\sigma)_{\text{Int } \underline{\sigma}}/\Gamma_{\sigma,N}$ et $\widehat{X_{\emptyset,\sigma}^{\Sigma}}$. Il fait aussi correspondre la frontière

$$\mathcal{D}_{\sigma,N} = (\overline{\Xi_{\xi,N}}(\sigma) - \Xi_{\xi,N})^{\widehat{}}_{\overline{\Xi_{\xi,N}}(\sigma)_{\text{Int } \underline{\sigma}}}$$

de $\mathcal{S}_{\sigma,N}$ à la frontière $\widehat{D_{\emptyset,\sigma}^{\Sigma}}$ de $\widehat{X_{\emptyset,\sigma}^{\Sigma}}$.

(4) L'image réciproque A_{σ} par $\mathcal{S}_{\sigma,N} - \mathcal{D}_{\sigma,N} \rightarrow X_{\emptyset}$ de la variété abélienne universelle sur X_{\emptyset} s'obtient par la construction de Mumford généralisée ([**13**] III).

Rappelons rapidement ce que cela signifie. Sur Ξ_{ξ} on dispose d'une extension

$$0 \longrightarrow T_{\xi} \longrightarrow G \longrightarrow A_{g-r} \longrightarrow 0$$

(où T_{ξ} est le tore de groupe de caractères X_{ξ}) définie par c et d'un morphisme $X_{\xi} \rightarrow G$ relevant c (on identifie ${}^tA_{g-r}$ à A_{g-r} à l'aide de la polarisation principale, cf. [**13**] IV 3). Sur la base $\mathcal{S}_{\sigma,N} - \mathcal{D}_{\sigma,N}$, la construction de Mumford généralisée donne alors un sens au quotient rigide-analytique G/X_{ξ} (« rigide-analytique » est à prendre au sens de Bosch-Lütkebohmert-Raynaud, cf. [**4**]) et ce quotient est une variété abélienne (rigide-analytique). D'après la construction de $\widehat{X_{\emptyset}^{\Sigma}}$, cette variété abélienne n'est autre que A_{σ} .

En particulier, ceci induit sur le groupe $A_{\sigma}[q]$ au-dessus de $\mathcal{S}_{\sigma,N} - \mathcal{D}_{\sigma,N}$ une filtration à trois crans :

$$(\text{Dév}_q) \quad 0 \subset T_{\xi}[q] \subset G[q] \subset A_{\sigma}[q]$$

avec $\text{gr}^0 = X_{\xi}/qX_{\xi}$ (schéma constant sur $\mathcal{S}_{\sigma,N} - \mathcal{D}_{\sigma,N}$), $\text{gr}^1 = A_{g-r}[q]$ et $\text{gr}^2 = \text{Fil}^2 = T_{\xi}[q]$ (schéma de type multiplicatif déployé).

Maintenant que nous avons fait ces rappels, nous allons étudier la restriction \mathcal{X}_1^{σ} de X_1 au-dessus de $\mathcal{S}_{\sigma,N} - \mathcal{D}_{\sigma,N}$. Pour avoir des notations plus homogènes, nous allons abandonner celles de Faltings-Chai et nous noterons plutôt $\mathcal{X}_{\emptyset}^{\sigma} = \mathcal{S}_{\sigma,N} - \mathcal{D}_{\sigma,N}$ et $\overline{\mathcal{X}}_{\emptyset}^{\sigma} = \mathcal{S}_{\sigma,N}$.

Notons encore $H \subset A_{\sigma}[q]$ l'image réciproque du sous-schéma en groupes $H \subset A[q]$ universel au-dessus de X_1 . La filtration (Dév_q) permet de décomposer \mathcal{X}_1^{σ} en trois

sous-schémas localement fermés disjoints

$$\mathcal{X}_1^\sigma = \mathcal{X}_1^{\sigma,m} \sqcup \mathcal{X}_1^{\sigma,\text{int}} \sqcup \mathcal{X}_1^{\sigma,e}$$

définis par

- $\mathcal{X}_1^{\sigma,m}$ (cas multiplicatif) est le lieu où $H \subset T_\xi[q]$,
- $\mathcal{X}_1^{\sigma,\text{int}}$ (cas intermédiaire) est celui où $H \subset G[q]$ mais $H \not\subset T_\xi[q]$,
- $\mathcal{X}_1^{\sigma,e}$ (cas constant) est celui où $H \not\subset G[q]$.

Nous allons voir que les trois sous-schémas localement fermés $\mathcal{X}_1^{\sigma,*}$ sont en fait ouverts (et fermés). De plus, pour chacun de ces ouverts, nous construirons un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_1^{\sigma,*} & \xrightarrow{\widehat{J}_1^\sigma} & \overline{\mathcal{X}}_1^{\sigma,*} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X}_\emptyset^{\sigma,*} & \xrightarrow{\widehat{J}^\sigma} & \overline{\mathcal{X}}_\emptyset^{\sigma,*} \end{array}$$

que nous obtiendrons par complétion à partir d'un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \Xi_{\xi,N,1}^* & \xrightarrow{J_1^\sigma} & \overline{\Xi}_{\xi,N,1}^*(\sigma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Xi_{\xi,N} & \xrightarrow{J^\sigma} & \overline{\Xi}_{\xi,N}(\sigma) \end{array}$$

dont les flèches horizontales seront des immersions fermées et dont les flèches verticales seront propres (on pourra donc considérer $\overline{\mathcal{X}}_1^{\sigma,*}$ comme une compactification partielle de $\mathcal{X}_1^{\sigma,*}$). Finalement, nous démontrerons que le morphisme naturel

$$J_{1!}^\sigma \mathbb{R}\Psi(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R}\Psi J_{1!}^\sigma(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme (pour tout $n \in \mathbb{Z}$). Grâce au théorème de comparaison de Berkovich — et au théorème de changement de base propre pour $\overline{\Xi}_{\xi,N,1}^*(\sigma) \rightarrow \overline{\Xi}_{\xi,N}(\sigma)$ — la proposition à démontrer en résultera (remarquer que par dualité de Poincaré, il suffit de démontrer que $J_! \mathbb{R}\Psi(\pi_{1,\emptyset*}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}\Psi J_!(\pi_{1,\emptyset*}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ est un isomorphisme ; le théorème de comparaison de Berkovich s'applique directement à ce cas, alors que si on tentait de procéder de manière plus symétrique en appliquant de nouveau le théorème de comparaison à l'isomorphisme dual, il faudrait aussi établir que $\mathbb{R}J(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ ne dépend que du complété).

- Traitons d'abord le cas de $\mathcal{X}_1^{\sigma,m}$, qui est de loin le plus facile. Choissant une base de X_ξ , on identifie $T_\xi[q]$ à μ_q^r et on a alors

$$\mathcal{X}_1^{\sigma,m} = \mathcal{X}_\emptyset^\sigma \times \mathbb{P}^{r-1}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$$

où $\mathbb{P}^{r-1}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ est le schéma constant égal à l'espace projectif de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^r$. Il suffit donc de poser

$$\overline{\Xi_{\xi, N, 1}^m}(\sigma) = \overline{\Xi_{\xi, N}}(\sigma) \times \mathbb{P}^{r-1}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$$

Le sous-schéma fermé $\mathcal{X}_1^{\sigma, m}$ de \mathcal{X}_1^σ , qui est encore de dimension relative $g(g+1)/2$ sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$, est donc aussi ouvert.

– Le cas de $\mathcal{X}_1^{\sigma, \text{int}}$ est nettement plus intéressant. Remarquons que le composé $H \rightarrow G[q] \rightarrow A_{g-r}[q]$ est injectif. Nous noterons encore H son image. La variété semi-abélienne $G' = G/H$ est une extension de A/H par T_ξ et l'extension $0 \rightarrow T_\xi \rightarrow G' \rightarrow A_{g-r} \rightarrow 0$ s'en déduit en prenant l'image réciproque par $A_{g-r} \rightarrow A_{g-r}/H$. Il revient donc au même de se donner

(1) une extension G de A_{g-r} par T_ξ et un sous-schéma fini et plat $H \subset G[q]$ tel que $H \cap T_\xi = \{0\}$ ou

(2) un sous-schéma fini et plat $H \subset A_{g-r}[q]$ et une extension G' de A/H par T_ξ . L'espace de modules pour les données du type (2) est le schéma abélien $\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{Z}}(X_\xi, {}^t(A_{g-r}/H))_{X_0^{g-r}}$ au-dessus de X_0^{g-r} . La composition avec le morphisme ${}^t(A_{g-r}/H) \rightarrow {}^tA_{g-r}$ et l'oubli de H fournissent un morphisme

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{Z}}(X_\xi, {}^t(A_{g-r}/H))_{X_0^{g-r}} \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{Z}}(X_\xi, {}^tA_{g-r})_{X_0^{g-r}} \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{Z}}(X_\xi, {}^tA_{g-r})_{X_0^{g-r}}$$

qui en termes des données de type (1) s'interprète comme l'oubli de $H \subset G[q]$. Le schéma

$$\overline{\Xi_{\xi, N, 1}^{\text{int}}}(\sigma) = X_1^{g-r} \times_{X_0^{g-r}} \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{Z}}(X_\xi, {}^t(A_{g-r}/H))_{X_0^{g-r}} \times_{\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{Z}}(X_\xi, {}^tA_{g-r})_{X_0^{g-r}}} \overline{\Xi_{\xi, N}}(\sigma)$$

fournit alors le diagramme cartésien désiré. Le sous-schéma localement fermé $\mathcal{X}_1^{\sigma, \text{int}}$ de \mathcal{X}_1^σ , qui est encore de dimension relative $g(g+1)/2$ sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$, est donc aussi ouvert.

– Finalement, le sous-schéma $\mathcal{X}_1^{\sigma, e}$ de \mathcal{X}_1^σ est par définition un sous-schéma ouvert. Le schéma en groupes $H \subset A_\sigma[q]$ est étale au-dessus de $\mathcal{X}_1^{\sigma, e}$. Il revient donc au même de se donner

- (1) une section de $\mathcal{X}_1^{\sigma, e} \rightarrow \mathcal{X}_\emptyset^\sigma$, ou
- (2) un point $P \in A_\sigma[q]$ n'appartenant pas à $G[q] \subset A_\sigma[q]$, ou
- (3) un réseau $X_\xi \subset Y_\xi \subset q^{-1}X_\xi$ tel que X_ξ soit d'indice q dans Y_ξ , un générateur y de Y_ξ/X_ξ et un relèvement du morphisme $X_\xi \rightarrow G$ en un morphisme $Y_\xi \rightarrow G$.

Considérons le tore $E_{Y_\xi, N}$ dont le groupe de caractères est l'image de $N^{-1}Y \otimes X$ dans $\text{Sym}^2(X_\xi \otimes \mathbb{Q})$ et le plongement torique affine $E_{Y_\xi, N} \hookrightarrow \overline{E_{Y_\xi, N}}(\sigma)$ associé à la donnée du cône $\underline{\sigma} \subset \text{Sym}^2(X_\xi \otimes \mathbb{Q})$. L'isogénie de tores $E_{Y_\xi, N} \rightarrow E_{\xi, N}$ se prolonge en un morphisme (fini et plat) $\overline{E_{Y_\xi, N}}(\sigma) \rightarrow \overline{E_{N, \xi}}(\sigma)$. On prendra alors

$$\overline{\Xi_{\xi, N, 1}^e}(\sigma) = \coprod_{(Y_\xi, y)} \Xi_{\xi, N}^{E_{\xi, N}} \times \overline{E_{Y_\xi, N}}(\sigma).$$

Remarquons que dans chacun de ces trois cas, le plongement toroïdal $\Xi_{\xi,N,1}^* \hookrightarrow \overline{\Xi_{\xi,N,1}^*}(\sigma)$ peut être vu comme un fibré en plongements toriques au-dessus d'une base B (qui est elle même un schéma abélien au-dessus d'un schéma modulaire X_{\square}^{g-r}). Le lemme suivant, dont la démonstration nous a été communiquée par G. Laumon, achève donc la preuve de la proposition 7.1.1. \square

Lemme 7.1.4. — *Soient $\Lambda = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, S un trait strictement hensélien de caractéristique résiduelle première à p , de point fermé s et de point générique η , $J_E : E \hookrightarrow \overline{E}$ un plongement torique et B un S -schéma séparé de type fini. Notons $J_X = J_E \times_S \text{Id}_B : X = E \times_S B \hookrightarrow \overline{X} = \overline{E} \times_S B$ et $\Lambda_{X_{\overline{\eta}}}$ le faisceau constant sur $X_{\overline{\eta}}$. Le morphisme naturel*

$$\mathbb{R}\Psi \mathbb{R}J_X \Lambda_{X_{\overline{\eta}}} \longrightarrow \mathbb{R}J_X \mathbb{R}\Psi \Lambda_{X_{\overline{\eta}}}$$

est un isomorphisme. Par dualité de Poincaré il en est de même du morphisme

$$J_{X!} \mathbb{R}\Psi \Lambda_{X_{\overline{\eta}}} \longrightarrow \mathbb{R}\Psi J_{X!} \Lambda_{X_{\overline{\eta}}}.$$

Démonstration

(1) Le cas particulier où $B = S$, où \overline{E} est lisse sur S et où $E \subset \overline{E}$ est le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux est bien connu. Faute d'avoir trouvé une référence, rappelons qu'il se ramène au fait que le morphisme naturel $\Lambda_{X_s} \rightarrow \mathbb{R}\Psi \Lambda_{X_{\overline{\eta}}}$ est un isomorphisme et au fait que la formation de $\mathbb{R}J_X \Lambda_{\overline{X}}$ commute à tout changement de base $T \rightarrow S$ — ce dernier fait provient du calcul explicite de $\mathbf{R}^{\bullet} J_{X*} \Lambda_{\overline{X}}$ (cf. ([10] I 3.1.2); l'hypothèse de pureté sur laquelle se fonde ce calcul est vérifiée dans le cas qui nous occupe grâce au théorème de pureté relative ([1] XVI 3.7)).

(2) Par la théorie des plongement toriques, \overline{E} admet une « résolution » \widetilde{E} , i.e. un plongement torique $\widetilde{J}_E : E \hookrightarrow \widetilde{E}$, de but lisse sur S et muni d'un morphisme propre E -équivant par $\text{pr} : \widetilde{E} \rightarrow \overline{E}$ tel que $J_E = \text{pr} \circ \widetilde{J}_E$. Le cas particulier où $B = S$ (mais où le plongement torique J_E est quelconque) en résulte par le théorème de changement de base propre.

(3) Le cas général s'en déduit par les formules de Künneth pour les images directes ([1], XVII 5) et pour les cycles proches ([10] XIII 2.1.4). En effet on a successivement

$$\begin{aligned} \mathbb{R}J_{X_{\overline{\eta}}} \Lambda_{X_{\overline{\eta}}} &= \mathbb{R}J_{E_{\overline{\eta}}} \Lambda_{E_{\overline{\eta}}} \boxtimes_{\overline{\eta}} \Lambda_{B_{\overline{\eta}}} \\ \mathbb{R}\Psi(\mathbb{R}J_{E_{\overline{\eta}}} \Lambda_{\overline{E}_{\overline{\eta}}} \boxtimes_{\overline{\eta}} \Lambda_{B_{\overline{\eta}}}) &= \mathbb{R}\Psi \mathbb{R}J_{E_{\overline{\eta}}} \Lambda_{E_{\overline{\eta}}} \boxtimes_s \mathbb{R}\Psi \Lambda_{B_{\overline{\eta}}} \\ \mathbb{R}J_{E_s} \mathbb{R}\Psi \Lambda_{E_{\overline{\eta}}} &= \mathbb{R}J_{E_s} \mathbb{R}\Psi \Lambda_{E_{\overline{\eta}}} \quad (\text{étape 2}) \\ \mathbb{R}J_{E_s} \mathbb{R}\Psi \Lambda_{E_{\overline{\eta}}} \boxtimes_s \mathbb{R}\Psi \Lambda_{B_{\overline{\eta}}} &= \mathbb{R}J_{X_s}(\mathbb{R}\Psi \Lambda_{E_{\overline{\eta}}} \boxtimes_s \mathbb{R}\Psi \Lambda_{B_{\overline{\eta}}}) \\ \mathbb{R}\Psi \Lambda_{E_{\overline{\eta}}} \boxtimes_s \mathbb{R}\Psi \Lambda_{B_{\overline{\eta}}} &= \mathbb{R}\Psi \Lambda_{X_{\overline{\eta}}}. \end{aligned} \quad \square$$

Remarques

(1) Même lorsqu'on suppose que la décomposition Σ est lisse, le plongement torique $E_{Y_{\xi,N}} \hookrightarrow \overline{E}_{Y_{\xi,N}}(\sigma)$ n'est en général pas lisse. Cette hypothèse n'apporterait donc aucune simplification à la démonstration.

(2) On peut probablement étendre la construction de Faltings-Chai ([13], IV) pour obtenir une compactification toroïdale $J_1^\Sigma : X_1 \hookrightarrow \overline{X}_1^\Sigma$ de X_1 . Les schémas \overline{X}_1^σ seraient alors des « cartes locales formelles » de cette compactification et les méthodes que nous venons d'employer fourniraient deux isomorphismes de changements de base $\mathrm{R}\Psi \mathbb{R}J_1^\Sigma V \rightarrow \mathbb{R}J_1^\Sigma \mathrm{R}\Psi V$ et $J_1^\Sigma \mathrm{R}\Psi V \rightarrow \mathrm{R}\Psi J_1^\Sigma V$; ceci donnerait une autre démonstration du corollaire 7.1.2. L'approche que nous avons suivie ici (qui consiste en gros à projeter sur $\overline{X}_\emptyset^\Sigma$) évite de construire cette compactification.

(3) Signalons à ce propos que si l'on souhaite de plus prolonger le morphisme d'oubli $X_1 \rightarrow X_\emptyset$ en un morphisme $\overline{X}_1^\Sigma \rightarrow \overline{X}_\emptyset^\Sigma$, il nous a semblé qu'il faudrait légèrement amender la méthode de ([13] IV. 4) en remplaçant le théorème d'approximation d'Artin par un résultat plus fort : le théorème d'approximation cylindrique de Popescu-Spivakovsky (cf. [43], [52] et [58]).

7.2. Monodromie. — Nous allons maintenant calculer les faisceaux $\mathrm{R}^i\Psi(V_\Lambda)$ (pour $\Lambda = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, \mathbb{Z}_p et \mathbb{Q}_p) sur $X_1(N)_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ et l'action naturelle sur ceux ci du sous-groupe d'inertie I_q . Avant d'énoncer le résultat de ce calcul nous allons fixer quelques notations.

Rappelons qu'on note \tilde{X}_1 la normalisée de X_1 dans $(X_1)_{\mathbb{Q}_q[\zeta_q]}$ (cf. 6.5.4).

Faisons agir $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ sur $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}_q[z, t]/(z^{q-1}t^{q-1} - w_q)$ de la manière suivante : $\varepsilon \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ agit par $\varepsilon_{\mathrm{geom}} : z \mapsto z, t \mapsto [\varepsilon]t$ (où $[\cdot]$ désigne le caractère de Teichmüller). Il résulte de la proposition 6.5.4 que ceci définit encore (par produit cartésien) une action sur le \mathbb{Z}_q -schéma \tilde{X}_1 , et que cette action n'est autre que l'action $(\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_q[\zeta_q]/\mathbb{Q}_q)$ -semi-linéaire) par functorialité de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_q[\zeta_q]/\mathbb{Q}_q)$ sur le \mathcal{O}_q -schéma \tilde{X}_1 . Sur la branche \tilde{X}_1^e de la fibre spéciale de \tilde{X}_1 cette action est triviale alors que sur la branche \tilde{X}_1^m elle coïncide avec l'action de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ donnée par les opérateurs diamant.

Notons finalement $\pi_{1,1}$ le morphisme de \mathbb{Z}_q -schémas naturel $\tilde{X}_1 \rightarrow X_1$ et i^a l'immersion fermée $X_{1, \overline{\mathbb{F}}_q}^a \rightarrow X_{1, \overline{\mathbb{F}}_q}$. On a alors :

Proposition 7.2.1. — *On a des isomorphismes naturels*

$$(\pi_{1,1, \overline{\mathbb{F}}_q})_* V_{\Lambda, \overline{\mathbb{F}}_q} \longrightarrow \mathrm{R}^0\Psi V_\Lambda, \quad i_*^a V_{\Lambda, \overline{\mathbb{F}}_q}(-1) \longrightarrow \mathrm{R}^1\Psi V_\Lambda \quad \text{et} \quad (0) = \mathrm{R}^i\Psi V_\Lambda \quad (i \geq 2)$$

En particulier

(1) *le sous-groupe d'inertie I_q agit sur $\mathrm{R}^i\Psi V_\Lambda$ à travers son quotient $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_q[\zeta_q]/\mathbb{Q}_q) = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$,*

(2) *sur X_1^e , $\mathrm{R}^0\Psi V_\Lambda$ n'est autre que la restriction de V_Λ et I_q agit trivialement,*

(3) *sur $(X_1^m)_{\mathrm{red}} = X_0^m$, $\mathrm{R}^0\Psi V_\Lambda$ n'est autre que $(\pi_{\mu_0, \overline{\mathbb{F}}_q})_* V_\Lambda$ et l'action de I_q coïncide avec celle de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ sur $(\pi_{\mu_0, \overline{\mathbb{F}}_q})_* V_\Lambda$ par les opérateurs diamant,*

(4) *le faisceau $\mathrm{R}^1\Psi V_\Lambda$ est supporté par $X_1^a = X_1^e \cap X_1^m$ et I_q y agit trivialement.*

Démonstration. — Le faisceau V_Λ est lisse sur $X_1(N)$ et on a donc $\mathrm{R}\Psi(V_\Lambda) = \mathrm{R}\Psi \Lambda \otimes V_{\Lambda, \overline{\mathbb{F}}_q}$. Il suffit donc de vérifier l'énoncé dans le cas particulier où on a $V_\Lambda = \Lambda$. Pour cela on va utiliser le modèle semi-stable \tilde{X}_1 .

Soit $\tilde{\gamma}^a$ l'immersion fermée naturelle $\tilde{X}_{1\mathbb{F}_q}^a \hookrightarrow \tilde{X}_{1\mathbb{F}_q}$. Puisque le schéma \tilde{X}_1 est semi-stable au-dessus de $\text{Spec } \mathcal{O}_q$, on dispose d'isomorphismes naturels (en particulier, commutant à tout changement de trait $S' \rightarrow \tilde{S}_q = \text{Spec } \mathcal{O}_q$, *a fortiori* l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}[\zeta_q])$ sur les $R^i\Psi\Lambda$ est triviale)

$$\Lambda \longrightarrow R^0\Psi\Lambda, \quad \tilde{\gamma}_*^a\Lambda(-1) \longrightarrow R^1\Psi\Lambda \quad \text{et} \quad (0) = \Lambda^i R^1\Psi\Lambda \longrightarrow R^i\Psi\Lambda \quad (i \geq 2)$$

(cf. [10] I 3.3, complété par [45], Satz 2.21 et 2.23). Appliquant le foncteur $\mathbb{R}\pi_{\tilde{1}}^{-1}$ on trouve les isomorphismes qui figurent dans la proposition.

Les précisions relatives à l'action du sous-groupe d'inertie I_q s'obtiennent en considérant l'automorphisme de $R^i\Psi\Lambda$ induit par un élément $\sigma \in I_q$ comme le composé $\varphi \circ \tilde{\sigma} \circ \varphi^{-1}$, où $\varphi : R\Psi_{\tilde{S}, \tilde{\eta}}\Lambda \rightarrow R\Psi_{S, \eta}\Lambda$ est l'isomorphisme de changement de trait associé au morphisme $\tilde{S} = \text{Spec } \mathcal{O}_q \rightarrow S = \text{Spec } \mathbb{Z}_q$, $\tilde{\eta} = \text{Spec } \overline{\mathbb{Q}}_q = \eta$ et $\tilde{\sigma}$ est l'automorphisme de changement de trait de $R\Psi_{\tilde{S}, \tilde{\eta}}\Lambda$ associé à l'automorphisme de $(\tilde{S}, \tilde{\eta})$ induit par σ . □

Soit $\chi : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ un caractère non trivial de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. Considérons le $\overline{\mathbb{Q}}_p$ -faisceau lisse $\pi_{10*}V_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ sur $X_0(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}$ et posons $W_\chi = \text{Hom}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times}(\chi, \pi_{10*}V_{\overline{\mathbb{Q}}_p})$.

Considérons de même le $\overline{\mathbb{Q}}_p$ -faisceau lisse $\pi_{\tilde{1}0*}V_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ sur l'ouvert $X_0(N)_{\mathbb{F}_q}^{\text{reg}} = X_0(N)_{\mathbb{F}_q}^{e,\text{reg}} \sqcup X_0(N)_{\mathbb{F}_q}^{m,\text{reg}}$ de $X_0(N)_{\mathbb{F}_q}$ et notons $\psi_\chi = \text{Hom}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times}(\chi, \pi_{\tilde{1}0*}V_{\overline{\mathbb{Q}}_p})$. Notons par ailleurs j^{reg} (resp. $j^{e,\text{reg}}$, $j^{m,\text{reg}}$) l'immersion ouverte $X_0(N)_{\mathbb{F}_q}^{\text{reg}} \hookrightarrow X_0(N)_{\mathbb{F}_q}$ (resp. $X_0(N)_{\mathbb{F}_q}^{e,\text{reg}} \hookrightarrow X_0(N)_{\mathbb{F}_q}$, $X_0(N)_{\mathbb{F}_q}^{m,\text{reg}} \hookrightarrow X_0(N)_{\mathbb{F}_q}$).

Proposition 7.2.2. — *On a un isomorphisme naturel*

$$j_!^{e,\text{reg}}\psi_\chi \oplus j_!^{m,\text{reg}}\psi_\chi = j_!^{\text{reg}}\psi_\chi \longrightarrow R^0\Psi W_\chi$$

et $R^i\Psi W_\chi$ est nul pour $i \geq 1$. Sur $j_!^{e,\text{reg}}\psi_\chi$ l'inertie agit trivialement alors que sur $j_!^{m,\text{reg}}\psi_\chi$ elle agit par le caractère χ (composé avec le caractère cyclotomique).

Démonstration. — On trouve cet isomorphisme en appliquant le foncteur π_{10*} à l'isomorphisme (7.2.1) puis en considérant de part et d'autres les composantes χ -isotypiques (il résulte de la proposition 6.6.4 (3) que la restriction à $X_0^a(N)_{\mathbb{F}_q} = X_0(N)_{\mathbb{F}_q} - X_0^{\text{reg}}(N)_{\mathbb{F}_q}$ de la composante χ -isotypique $(\pi_{\tilde{1}0*}V_{\overline{\mathbb{Q}}_p})^\chi$ est nulle). □

Nous allons déduire de ce qui précède un énoncé de décomposition de la cohomologie qui nous sera utile pour vérifier la condition \mathcal{D}_q de (5.1).

Proposition 7.2.3. — *On a*

$$H_*^i(X_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, V_{\overline{\mathbb{Q}}_p})^\chi = H_*^i(X_{1,\mathbb{F}_q}^{e,\text{reg}}, R\Psi V_{\overline{\mathbb{Q}}_p})^\chi \oplus H_*^i(X_{1,\mathbb{F}_q}^{m,\text{reg}}, R\Psi V_{\overline{\mathbb{Q}}_p})^\chi$$

(avec $*$ = \emptyset ou c); sur le premier de ces deux sous-espaces l'inertie agit trivialement alors que sur le deuxième elle agit via le caractère χ (composé avec le caractère cyclotomique).

Démonstration. — En vertu du corollaire 7.1.2, la proposition résulte de la proposition 7.2.2. \square

Dans la section 8, nous aurons aussi besoin de la proposition suivante qui, comme le lemme 7.2.2, se démontre en faisant appel à la proposition 6.6.4 (3).

Proposition 7.2.4. — *Le morphisme naturel*

$$j_1^{\mathrm{reg}}\psi_\chi \longrightarrow \mathbb{R}j^{\mathrm{reg}}\psi_\chi$$

est un isomorphisme.

8. Congruences d'Eichler-Shimura

8.1. Quelques rappels sur les correspondances de Hecke

8.1.1. *Correspondances cohomologiques.* — Soient S un schéma, $X \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} Y$ deux morphismes de S -schémas et $\mathcal{F} \in D_c^b(X, \Lambda)$, $\mathcal{G} \in D_c^b(Y, \Lambda)$ (où Λ est un anneau artинien de caractéristique résiduelle première à celles de S). Une correspondance cohomologique supportée par C de (X, \mathcal{F}) vers (Y, \mathcal{G}) est un morphisme $c : g^*\mathcal{G} \rightarrow f^!\mathcal{F}$ (voir par exemple [31]).

Remarque. — Dans la mesure où nous préférons noter $X = C \rightarrow Y$ plutôt que $Y \leftarrow C = X$ la correspondance associée à un morphisme $X \rightarrow Y$, nous n'avons pas suivi la convention de [31] : nous en avons inversé le sens de lecture.

Désignons respectivement par $x : X \rightarrow S$ et $y : Y \rightarrow S$ les morphismes structuraux des S -schémas X et Y . Utilisant les morphismes d'adjonction $\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}gg^*\mathcal{G}$ et $\mathbb{R}f_!f^!\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ on voit que lorsque g (resp. f) est propre, la correspondance cohomologique c induit un morphisme $\mathbb{R}y_!\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}x_!\mathcal{F}$ (resp. $\mathbb{R}y\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}x\mathcal{F}$).

Ces deux morphismes sont échangés par dualité de la manière suivante. Soit $Dc : f^*D\mathcal{F} \rightarrow g^!D\mathcal{G}$ la correspondance duale ([31] Exposé III, 5.1). Lorsque f est propre, le morphisme $D\mathbb{R}x\mathcal{F} = \mathbb{R}x_!D\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}y_!D\mathcal{G} = D\mathbb{R}y\mathcal{G}$ induit par Dc n'est autre que le dual du morphisme $\mathbb{R}y\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}x\mathcal{F}$ induit par c .

Nous allons maintenant voir que sous certaines hypothèses, une correspondance « géométrique » $X \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} Y$ se relève canoniquement en une correspondance cohomologique $g^*\Lambda \rightarrow f^!\Lambda$ sur le faisceau trivial. Commençons par remarquer que lorsque k est un corps algébriquement clos et $C \xrightarrow{f} X$ est un morphisme de k -schémas, si X est lisse sur k et si C et X ont tous deux même dimension, les morphismes $\Lambda \rightarrow f^!\Lambda$ correspondent (par adjonction) aux morphismes $H_c^{2d}(C, \Lambda) \rightarrow \Lambda(-d)$. Le morphisme trace définit donc un tel morphisme.

En particulier, lorsque $X \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} Y$ sont deux morphismes de k -schémas, si X est lisse sur k et si C et X ont même dimension, on obtient une correspondance cohomologique naturelle $g^*\Lambda \rightarrow f^!\Lambda$. Plus généralement, si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont des faisceaux

lisses de Λ -modules (pour la topologie étale) sur X et Y respectivement, pour définir une correspondance cohomologique $g^*\mathcal{G} \rightarrow f^!\mathcal{F}$, il suffit de définir un morphisme $g^*\mathcal{G} \rightarrow f^*\mathcal{F}$ (on a un isomorphisme canonique $f^!\mathcal{F} \simeq f^*\mathcal{F} \otimes_{\Lambda} f^!\Lambda$).

8.1.2. *Correspondances de Hecke.* — Soit ℓ un nombre premier ; soit $D_{\ell} = G(\mathbb{Q}_{\ell}) \cap M_{2g}(\mathbb{Z}_{\ell})$ et $K_{\ell} \subset G(\mathbb{Z}_{\ell})$ la ℓ -composante du groupe de niveau $K = \prod_{v \text{ premier}} K_v$ fixé. On va associer à chaque double classe $K_{\ell}\gamma_{\ell}K_{\ell} \in K_{\ell} \backslash D_{\ell} / K_{\ell}$ une correspondance de X_K dans elle même (cf. aussi [13], Ch. VII). On verra ensuite que ces correspondances se relèvent en des correspondances cohomologiques sur $V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$ et que ceci définit une action à gauche « par correspondances cohomologiques » de l’algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{K_{\ell}} = \mathbb{Z}[K_{\ell} \backslash \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q}_{\ell}) / K_{\ell}]$ sur $V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$. On obtiendra ainsi une action (à droite) de $\mathcal{H}_{K_{\ell}}$ sur $H^{\bullet}(X_K \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}})$ et $H_c^{\bullet}(X_K \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}})$.

On suppose que le groupe K est net, contenu dans $\mathrm{GSp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}})$ et contenant $K(N) = \mathrm{Ker}(\mathrm{GSp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}}) \rightarrow \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$; on note alors $\overline{K} = K/K(N)$. On rappelle (cf. 6.1) que le $\mathbb{Z}[1/N]$ -schéma X_K représente le foncteur associant à un $\mathbb{Z}[1/N]$ -schéma S l’ensemble des classes d’isomorphie de triplets $(A, \lambda, \overline{\eta})/S$, où A/S est un schéma abélien de dimension relative g , λ est une polarisation principale de A et $\overline{\eta}$ est une section du faisceau associé au préfaisceau quotient $\mathrm{Simil}_S((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2g}, A[N])/\overline{K}$ (où Simil_S désigne bien sûr le faisceau des similitudes symplectiques).

On choisit une puissance ℓ^r de ℓ telle que le sous-groupe de congruence $K(\ell^r N)$ soit contenu dans $(K_{\ell} \cap \gamma_{\ell}K_{\ell}\gamma_{\ell}^{-1}) \times_{v \neq \ell} K_v$. On considère alors le foncteur $T_K(\gamma_{\ell})$ associant à un $\mathbb{Z}[1/\ell N]$ -schéma S l’ensemble des classes d’isomorphie de septuplets $(A_0, \lambda_0, \overline{\eta}_0, A_1, \lambda_1, \overline{\eta}_1, \rho)$, où

- $(A_i, \lambda_i, \overline{\eta}_i) \in X_K(S)$
- $\rho : A_0 \rightarrow A_1$ est une isogénie (de degré une puissance de ℓ) vérifiant la condition suivante :

(*) localement pour la topologie étale sur S , il existe des structures de niveau $\eta_i : (\mathbb{Z}/(\ell^r N)\mathbb{Z})^{2g} \xrightarrow{\sim} A[\ell^r N]$ (similitudes symplectiques) relevant les structures de niveau $\overline{\eta}_i$ (c’est-à-dire telles que l’image de la structure de niveau η_i dans $\mathrm{Simil}_S((\mathbb{Z}/\ell^r N\mathbb{Z})^{2g}, A[\ell^r N])/(K/K_{\ell^r N})$ coïncide avec $\overline{\eta}_i$) et telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/(\ell^r N)\mathbb{Z})^{2g} & \xrightarrow{\eta_0} & A_0[\ell^r N] \\ \gamma_{\ell} \downarrow & & \downarrow \rho \\ (\mathbb{Z}/(\ell^r N)\mathbb{Z})^{2g} & \xrightarrow{\eta_1} & A_1[\ell^r N] \end{array}$$

(où l’on note encore γ_{ℓ} l’endomorphisme de $(\mathbb{Z}/(\ell^r N)\mathbb{Z})^{2g}$ induit par $(\gamma_{\ell}, \mathrm{Id}) \in M_{2g}(\mathbb{Z}_{\ell}) \times \prod_{v \neq \ell} M_{2g}(\mathbb{Z}_v) \simeq M_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}})$) soit commutatif — de manière imagée, les modules de Tate $T_{\widehat{\mathbb{Z}}}(A_i)$ sont mis en position relative $K(\gamma_{\ell}, \mathrm{Id})K$ par l’isogénie ρ .

Ce foncteur est bien sûr représentable par un $\mathbb{Z}[1/\ell N]$ -schéma, que l’on notera encore $T_K(\gamma_{\ell})$. Ce schéma est muni de deux projections $t_i : T_K(\gamma_{\ell}) \rightarrow X_K, (A_0, \lambda_0, \overline{\eta}_0, A_1, \lambda_1, \overline{\eta}_1, \rho) \mapsto (A_i, \lambda_i, \overline{\eta}_i) \quad (i = 0, 1)$.

Remarque. — Soit $\ell^d = |\mathbb{Z}_\ell^{2g}/\gamma_\ell \mathbb{Z}_\ell^{2g}|$. L'entier d est alors divisible par g et le facteur de similitude de γ_ℓ est $\nu(\gamma_\ell) = \ell^{d/g} u_\ell$, où $u_\ell \in \mathbb{Z}_\ell^\times$ est une unité. Il résulte alors de la condition (*) que ρ est de degré ℓ^d et que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{\rho} & A_1 \\ \ell^{d/g} \lambda_0 \downarrow & & \downarrow \lambda_1^{-1} \\ A_0 \checkmark & \xleftarrow{\check{\rho}} & A_1 \checkmark \end{array}$$

est commutatif.

On suppose que $\ell \neq p$. On va maintenant définir une correspondance cohomologique $t_1^* V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}} \rightarrow t_0^! V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}}$. En vertu de la construction de la fin de (8.1.1) (qui prend ici une forme très simple puisque le morphisme t_0 est étale et qu'on a donc $t_0^! V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}} = t_0^* V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}}$), il suffit de définir un morphisme $t_1^* V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}} \rightarrow t_0^* V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}}$. Pour cela, on remarque que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X_{K_p(p^n)K^p} & \xleftarrow{t_0} & T_{K_p(p^n)K^p}(\gamma_\ell) & \xrightarrow{t_1} & X_{K_p(p^n)K^p} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_K & \xleftarrow{t_0} & T_K(\gamma_\ell) & \xrightarrow{t_1} & X_K \end{array}$$

(où la notation $K_p(p^n)$ est celle de (6.1.2) et les flèches verticales sont les morphismes d'oubli du niveau) a ses deux carrés cartésiens. Considérant $X_{K_p(p^n)K^p}$ comme un faisceau d'ensembles (pour la topologie étale) au dessus de X_K , on a donc un isomorphisme naturel (et $K_p/K_p(p^n)$ -équivariant) $t_0^*(X_{K_p(p^n)K^p}) \simeq t_1^*(X_{K_p(p^n)K^p})$. Revenant à la définition (6.1.2) de $V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}}$, on obtient alors le morphisme $t_1^* V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}} \rightarrow t_0^* V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}}$ annoncé.

On obtient alors un morphisme de $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ -modules

$$\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}[\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell) \backslash D_\ell / \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell)] \longrightarrow \mathrm{Corr}(V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}})$$

où $\mathrm{Corr}(V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}})$ désigne la $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ -algèbre des correspondances cohomologiques de $V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}}$ dans lui même. On vérifie que ce morphisme est en fait un morphisme de $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ -algèbres (ou, ce qui revient au même, que l'action des opérateurs de Hecke qu'on vient de définir provient d'une action à gauche du monoïde D_ℓ sur la tour $(X_{K'_\ell = K'_\ell K^\ell}, V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}, X_{K'_\ell}})_{K'_\ell \subset \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q}_\ell)}$). La correspondance associée a la double classe $K_\ell \mathrm{diag}(\ell, \dots, \ell) K_\ell$ admet en fait un inverse, si bien que ce morphisme d'algèbres se prolonge naturellement à toute l'algèbre sphérique $\mathcal{H}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} = \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}[\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell) \backslash \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q}_\ell) / \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell)]$.

Remarques

(1) Il n'est pas difficile d'expliciter la correspondance associée à la double classe d'un élément γ_ℓ n'appartenant pas nécessairement à $M_{2g}(\mathbb{Z}_\ell)$: il suffit pour cela

de remplacer l'isogénie ρ par une « quasi-isogénie », c'est-à-dire par un élément de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Hom}(A_0, A_1)$ admettant un inverse dans $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Hom}(A_1, A_0)$; la formulation de la condition (*) est alors un peu plus compliquée.

(2) Pour $\ell = p$, on peut encore associer une correspondance cohomologique de $V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}}$ dans lui-même aux doubles classes des éléments du monoïde $D_p^{-1} = \{\gamma_p / \gamma_p^{-1} \in D_p\}$.

Pour cela on a besoin de supposer que le module V_{λ/\mathbb{Z}_p} qu'on a fixé (cf. 2.1 et 6.1.2) est tel que l'action de $\text{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_p)$ sur V_{λ/\mathbb{Z}_p} s'étende en une action du monoïde D_p ; c'est en fait le cas si V_{λ/\mathbb{Z}_p} est le module de Weyl $V(\lambda)_{\mathbb{Z}_p}$.

Soit alors $\gamma_p \in D_p^{-1}$ et considérons le morphisme $t_1^* V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}} \rightarrow t_0^* V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}}$ sur $T_{K_p(p^n)K_p}(\gamma_p)$ obtenu en composant l'isomorphisme évident $t_1^* V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}} \simeq (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})_{T_{K_p(p^n)K_p}(\gamma_p)} \simeq t_0^* V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}}$ avec la multiplication par γ_p^{-1} . Ce morphisme est $K_p/K_p(p^n)$ -équivariant, et induit donc un morphisme $t_1^* V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}} \rightarrow t_0^* V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}}$ sur $T_K(\gamma_p)$ en passant au quotient par $K_p/K_p(p^n)$. On peut vérifier que la correspondance cohomologique ainsi obtenue ne dépend que de la double classe $K_p \gamma_p K_p$ et qu'on obtient ainsi des morphismes d'algèbres

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}[\text{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_p) \backslash D_p^{-1} / \text{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_p)] &\longrightarrow \text{Corr}(V_{\lambda, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}}) \\ \text{et } \mathcal{H}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p = \mathbb{Q}_p[\text{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_p) \backslash \text{GSp}_{2g}(\mathbb{Q}_p) / \text{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_p)] &\longrightarrow \text{Corr}(V_{\lambda, \mathbb{Q}_p}). \end{aligned}$$

8.2. Énoncé du résultat ; quelques remarques. — Rappelons que dans la section 7.2, on a fixé un caractère non trivial $\chi : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$.

Notons respectivement H_{*e}^i et H_{*m}^i (avec $* = \emptyset, c$) les groupes de cohomologie $H_*^i(X_1^{e, \text{reg}}(N)_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \text{R}\Psi V_{\overline{\mathbb{Q}}_p}^\chi)^\chi$ et $H_*^i(X_1^{m, \text{reg}}(N)_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \text{R}\Psi V_{\overline{\mathbb{Q}}_p}^\chi)^\chi$ (cf. Proposition 7.2.3). Remarquons que les opérateurs de Hecke agissent de manière Galois-équivariante et respectent donc les décompositions (7.2.3) :

$$H_*^i(X_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, V_{\overline{\mathbb{Q}}_p}^\chi)^\chi = H_*^i(X_{1, \overline{\mathbb{F}}_q}^{e, \text{reg}}, \text{R}\Psi V_{\overline{\mathbb{Q}}_p}^\chi)^\chi \oplus H_*^i(X_{1, \overline{\mathbb{F}}_q}^{m, \text{reg}}, \text{R}\Psi V_{\overline{\mathbb{Q}}_p}^\chi)^\chi$$

Notons $H_{g-1}(X) = \sum_{j=0}^{2g-1} t_j X^j \in \mathcal{H}_{G_{g-1}}^{\text{nr}}[X]$ le polynôme de Hecke définissant les relations d'Eichler-Shimura « usuelles » (cf. [13], Ch. VII) en la place q , pour la variété de Siegel $X_{\emptyset}^{g-1}(N)$. On rappelle qu'on note

$$P_q^e(X) = \sum_{j=0}^{2g-1} T^-(t_j \times 1) X^j$$

(cf. 3.1.5).

L'objet de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 8.2.1. — *Le Frobenius géométrique F satisfait respectivement sur H_{*e}^i et $\chi^{-1} \otimes H_{*m}^i$ les équations*

$$P_q^e(F) = 0, \quad \text{resp.} \quad P_q^m(F) = 0.$$

On peut réécrire cette dernière équation sous la forme

$$P_q^e(V) = 0$$

où $V = q^{g(g+1)/2} T_{q,0}^{(g)} F^{-1}$ est le *Verschiebung* (cf. 3.1.6).

Remarques

(1) Dans le cas où $g = 1$, on a simplement $P_q^e(X) = X - U_{q,1}$ (cf. 3.1). Dans ce cas on retrouve donc un résultat dû à A. Wiles [64] (avec une petite erreur, corrigée par Hida [27]). Harris et Taylor ont aussi obtenu un résultat analogue (cf. [25]) pour les variétés de Shimura unitaires de type $U(1, n - 1)$ en la place archimédienne.

(2) Soit π_q une représentation lisse irréductible tempérée de $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q}_q)$ possédant un vecteur non nul v tel que $\pi_q(\gamma)(v) = \chi(\mathrm{cl}(\gamma))v, \forall \gamma \in K_0$ (où l'on note $\mathrm{cl}(\gamma)$ la classe de γ dans $K_0/K_1 = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$). Cette représentation est une série principale ramifiée (cf. [53], Sect. 7 ou [66], th. 1) et peut donc s'écrire

$$\mathrm{Ind}_{B_g}^{\mathrm{GSp}_{2g}}(\chi_1, \dots, \chi_{2g}),$$

où $\chi_1|_{\mathbb{Z}_q^\times} = \chi$, χ_i ($i > 1$) sont non ramifiés et où la représentation induite $\mathrm{Ind}_{B_{g-1}}^{\mathrm{GSp}_{2g-2}}(\chi_2, \dots, \chi_{2g-1})$ est irréductible.

Considérons alors le paramètre de Langlands $\sigma(\pi_q)$ de π_q :

$$\sigma(\pi_q) = \mathrm{diag}_I \left(\prod_{i \in I} \chi_i \right)$$

où I parcourt l'ensemble des parties à g éléments de l'ensemble $\{1, \dots, 2g\}$ qui sont *totalemt isotropes*, en ce sens que $\{e_i\}_{i \in I}$ engendre un sous-module isotrope de \mathbb{Z}^{2g} (ceci revient à dire que pour tout $1 \leq i \leq 2g$, $\{i, 2g - i\} \cap I$ contient exactement un élément).

Soit π une représentation irréductible tempérée cuspidale non endoscopique de $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{A})$ dont la partie finie π_f apparaît dans $\varinjlim_K H^*(X_K \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, V_{\mathbb{Q}})$. On devrait avoir

$$\varinjlim_K H^{g(g+1)/2}(X_K \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, V_{\mathbb{Q}})[\pi_f] = m(\pi_f) \sigma(\pi_q) \cdot | \cdot |^{-g(g+1)/4}$$

(où $m(\pi_f)$ est un certain entier), d'après les propriétés attendues de la cohomologie des variétés de Siegel et des liens entre les correspondances de Langlands locale et globale.

Cette égalité conjecturale équivaut à dire que les $(m(\pi_f)$ -ièmes puissances des) polynômes figurant dans l'énoncé du théorème 8.2.1 sont en fait les polynômes caractéristiques du Frobenius géométrique sur $H_{*e}^{g(g+1)/2}[\pi_f]$ et $\chi^{-1} \otimes H_{*m}^{g(g+1)/2}[\pi_f]$ respectivement. Notre résultat est bien sûr moins précis, puisqu'il ne fournit dans cette situation que des polynômes annulateurs du Frobenius.

(3) Cependant, on peut dans notre cas récupérer l'information « manquante » relative aux multiplicités des caractères $\prod_{i \in I} \chi_i$. En effet, nous avons supposé que les réductions modulo p des caractères $\prod_{i \in I} \chi_i$ sont distinctes (cf. Sect. 5.1) si bien que

l'information sur les multiplicités peut se « lire » modulo p . Puisque la représentation π est congrue modulo p à une représentation (irréductible tempérée cuspidale non endoscopique, et cohomologique) *non ramifiée en q* de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A})$, on est alors ramené aux résultats de Laumon et Weissauer ([33], [34] et [63]).

8.3. Démonstration du théorème 8.2.1. — Rappelons d'abord brièvement la méthode utilisée par Faltings et Chai ([13], Ch. VII) pour démontrer les congruences d'Eichler-Shimura « usuelles » (celles qui concernent le cas de bonne réduction). Les notations que nous allons utiliser ne sont pas celles de [13] : les conventions de notre article nous conduisent à désigner respectivement par p et q les entiers premiers ℓ et p de *loc. cit.* Nous supposons pour simplifier que le système local V est trivial.

La démonstration de ces auteurs s'appuie sur une étude détaillée de la réduction modulo q des opérateurs de Hecke de niveau puissance de q . Plus précisément, tout opérateur $T \in \mathcal{H}(\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q}_q) // \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q}_q), \mathbb{Z})$ fournit un cycle $\Gamma(T)_{\mathbb{Q}}$ (de dimension $g(g+1)/2$) dans le produit $X_{\emptyset, \mathbb{Q}} \times X_{\emptyset, \mathbb{Q}}$; les deux projections $\mathrm{pr}_{1,2} : \Gamma(T)_{\mathbb{Q}} \rightarrow X_{\emptyset, \mathbb{Q}}$ sont propres et ce cycle induit donc une correspondance cohomologique de $X_{\emptyset, \mathbb{Q}}$ dans lui même. Considérons maintenant le cycle $\Gamma(T)_{\mathbb{F}_q} \subset X_{\emptyset, \mathbb{F}_q} \times X_{\emptyset, \mathbb{F}_q}$ obtenu en réduisant modulo q l'adhérence de Zariski $\Gamma(T)$ de $\Gamma(T)_{\mathbb{Q}}$ dans $X_{\emptyset} \times_{\mathbb{Z}} X_{\emptyset}$ (cette opération est la « réduction des cycles de Shimura », cf. [50]). Il résulte du fait que X_{\emptyset} admet une compactification lisse et des compatibilités reliant

- le morphisme « classe de cycle »
- la réduction des cycles
- le morphisme de spécialisation en cohomologie étale
- le produit d'intersection des cycles
- le cup-produit en cohomologie étale

que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{R}\Gamma(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & \mathrm{R}\Gamma(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}_p) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathrm{R}\Gamma(X_{\overline{\mathbb{F}_q}}, \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & \mathrm{R}\Gamma(X_{\overline{\mathbb{F}_q}}, \mathbb{Z}_p)
 \end{array}$$

(dont les flèches verticales sont les isomorphismes de spécialisation et dont les horizontales sont respectivement les correspondances cohomologiques définies par $\Gamma(T)_{\mathbb{Q}}$ et par $\Gamma(T)_{\mathbb{F}_q}$) est commutatif. Faltings et Chai déterminent alors précisément le cycle $\Gamma(T)_{\mathbb{F}_q}$ et en déduisent que dans l'algèbre des correspondances sur la fibre spéciale de X_{\emptyset} on a

$$\Gamma(H_g)_{\mathbb{F}_q}(F) = 0$$

où H_g est un certain polynôme explicite, dont les coefficients sont des opérateurs de Hecke.

Notre démonstration du théorème 8.2.1 reposera elle aussi sur une étude de la spécialisation des correspondances de Hecke dilatantes. Cependant, puisque le schéma $X_1(q)$ a mauvaise réduction en q , nous ne pourrons pas utiliser directement la réduction des cycles de Shimura pour déterminer la spécialisation d’une telle correspondance. Au lieu de cette réduction des cycles nous utiliserons la notion, due à Fujiwara [17], de spécialisation d’une correspondance cohomologique.

8.3.1. *Spécialisation des correspondances cohomologiques.* — Soit S un trait strictement hensélien, de point fermé s et de point générique η . Soient $X \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} Y$ deux morphismes de S -schémas, $\mathcal{F} \in D_c^b(X_{\bar{\eta}}, \Lambda)$, $\mathcal{G} \in D_c^b(Y_{\bar{\eta}}, \Lambda)$ et $c : g_{\bar{\eta}}^* \mathcal{G} \rightarrow f_{\bar{\eta}}^! \mathcal{F}$ une correspondance cohomologique. La spécialisation de c est le morphisme $\mathrm{sp}(c) : g_s^* \mathrm{R}\Psi \mathcal{G} \rightarrow f_s^! \mathrm{R}\Psi \mathcal{F}$ obtenu en composant

- le morphisme (de changement de base par g) : $g_s^* \mathrm{R}\Psi \mathcal{G} \rightarrow \mathrm{R}\Psi g_{\bar{\eta}}^* \mathcal{G}$
- le morphisme $\mathrm{R}\Psi c : \mathrm{R}\Psi g_{\bar{\eta}}^* \mathcal{G} \rightarrow \mathrm{R}\Psi f_{\bar{\eta}}^! \mathcal{F}$ obtenu par functorialité de $\mathrm{R}\Psi$
- le morphisme $\mathrm{R}\Psi f_{\bar{\eta}}^! \mathcal{F} \rightarrow f_s^! \mathrm{R}\Psi \mathcal{F}$ obtenu par adjonction à partir du morphisme naturel $\mathrm{R}f_{s!} \mathrm{R}\Psi f_{\bar{\eta}}^! \mathcal{F} \rightarrow \mathrm{R}\Psi \mathrm{R}f_{\bar{\eta}!} f_{\bar{\eta}}^! \mathcal{F}$ et du morphisme d’adjonction $\mathrm{R}f_{\bar{\eta}!} f_{\bar{\eta}}^! \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$.

Cette définition (qui reprend celle figurant dans [14]) n’est en fait pas la définition originale de Fujiwara. On peut démontrer que cette définition est équivalente à celle de Fujiwara ; dans la mesure où nous n’utiliserons pas cette équivalence, cette démonstration sera laissée au lecteur.

Nous nous intéresserons à cette notion de spécialisation en raison de la proposition suivante.

Proposition 8.3.1. — *Supposons que g (resp. f) est propre. Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{R}\Gamma_c(Y_s, \mathrm{R}\Psi \mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathrm{R}\Gamma_c(X_s, \mathrm{R}\Psi \mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{R}\Gamma_c(Y_{\bar{\eta}}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathrm{R}\Gamma_c(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{F}) \end{array} \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{R}\Gamma(Y_{\bar{\eta}}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathrm{R}\Gamma(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{R}\Gamma(Y_s, \mathrm{R}\Psi \mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathrm{R}\Gamma(X_s, \mathrm{R}\Psi \mathcal{F}) \end{array} \right)$$

resp.

(dont la ligne supérieure (resp. inférieure) est définie par la correspondance spécialisée $\mathrm{sp}(c)$ et dont les flèches verticales sont les morphismes naturels 7.1) est alors commutatif.

Démonstration. — On vérifie de manière purement formelle que $\mathrm{sp}(\mathrm{D}c) = \mathrm{D}(\mathrm{sp}(c))$. Utilisant cette dualité et considérant la correspondance c comme composée des correspondances

$$\begin{aligned} & (X \xleftarrow{f} C \xrightarrow{\mathrm{Id}} C, f^! \mathcal{F} \xrightarrow{\mathrm{Id}} f^! \mathcal{F}) \\ & (C \xleftarrow{\mathrm{Id}} C \xrightarrow{\mathrm{Id}} C, g^* \mathcal{G} \xrightarrow{\quad} f^! \mathcal{F}) \\ \text{et } & (C \xleftarrow{\mathrm{Id}} C \xrightarrow{g} Y, g^* \mathcal{G} \xrightarrow{\mathrm{Id}} g^* \mathcal{G}), \end{aligned}$$

il est facile de voir qu'il suffit de démontrer les deux cas particuliers suivants de la proposition :

- (a) lorsque g est propre, $f = \text{Id}$ et $\mathcal{F} = g^*\mathcal{G}$, le premier diagramme est commutatif
- (b) lorsque $f = \text{Id}$ et $\mathcal{F} = g^*\mathcal{G}$, le deuxième diagramme est commutatif.

La démonstration du cas (b) ne repose que sur les propriétés formelles des morphismes d'adjonction et est laissée au lecteur (indication : commencer par démontrer que le morphisme

$$\mathbb{R}\Psi \mathcal{G} \xrightarrow{\mathbb{R}\Psi(\text{adj})} \mathbb{R}\Psi \mathbb{R}g_\eta g_\eta^* \mathcal{G} \xrightarrow{7.1} \mathbb{R}g_s \mathbb{R}\Psi g_\eta^* \mathcal{G}$$

est adjoint du morphisme $g_s^* \mathbb{R}\Psi \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}\Psi g_\eta^* \mathcal{G}$ induit par le changement de base par g).

Considérons maintenant un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} C & \hookrightarrow & \bar{C} \\ g \downarrow & & \downarrow \bar{g} \\ Y & \hookrightarrow & \bar{Y} \end{array}$$

où \bar{C} et \bar{Y} sont propres et $j_Y : Y \hookrightarrow \bar{Y}$ est une immersion ouverte (puisque g est propre, un argument facile montre qu'il existe de tels diagrammes). Le cas (a) résulte alors du cas (b) (appliqué à $(\bar{C} \xrightarrow{\bar{g}} \bar{Y}, j_{Y!}\mathcal{G})$, de sorte que les morphismes — de changement de base — verticaux sont des isomorphismes) et de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} j_{Y!} \mathbb{R}\Psi \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathbb{R}\bar{g}_s j_{C!} \mathbb{R}\Psi g_\eta^* \mathcal{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}\Psi j_{Y!} \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathbb{R}\bar{g}_s \mathbb{R}\Psi \bar{g}_\eta^* j_{Y!} \mathcal{G} \end{array}$$

déduit par adjonction du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bar{g}_s^* j_{Y!} \mathbb{R}\Psi \mathcal{G} = j_{C!} g_s^* \mathbb{R}\Psi \mathcal{G} & \longrightarrow & j_{C!} \mathbb{R}\Psi g_\eta^* \mathcal{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{g}_s^* \mathbb{R}\Psi j_{Y!} \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathbb{R}\Psi \bar{g}_\eta^* j_{Y!} \mathcal{G} = \mathbb{R}\Psi j_{C!} g_\eta^* \mathcal{G} \end{array}$$

ce qui achève la démonstration. □

Nous allons maintenant effectuer un calcul local des spécialisations, qu'on pourra considérer comme une sorte de localisation de la réduction des cycles de Shimura.

Commençons par rappeler que lorsque k est un corps algébriquement clos et $C \xrightarrow{f} X$ est un morphisme de k -schémas, si X est lisse sur k et si C et X ont tous deux même dimension, les morphismes $\mathbb{Z}_p \rightarrow f^! \mathbb{Z}_p$ correspondent (par adjonction) aux morphismes $H_c^{2d}(C, \mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathbb{Z}_p(-d)$. Autrement dit, se donner un tel morphisme revient à se donner un élément λ_Z de \mathbb{Z}_p , pour toute composante irréductible Z de C .

Lorsqu'on suppose de plus que le morphisme f est fini et plat, et qu'on se restreint à l'ouvert de lissité U de C , la restriction à la composante connexe $U \cap Z$ de U du morphisme $\mathbb{Z}_p \rightarrow f^! \mathbb{Z}_p|_U = \mathbb{Z}_p$ est simplement la multiplication par λ_Z .

En particulier, lorsque $X \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} Y$ sont deux morphismes de k -schémas, si X est lisse sur k et si C et X ont même dimension, on obtient une correspondance cohomologique naturelle $g^* \mathbb{Z}_p \rightarrow f^! \mathbb{Z}_p$, qui n'est autre que la correspondance cohomologique 8.1.1 (prendre $\lambda_Z = 1$ pour toute composante irréductible Z de C). Lorsque de plus le morphisme f est fini et plat, la fibre en un point géométrique x de X du morphisme $f_! g^* \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ associé par adjonction à cette correspondance cohomologique est simplement

$$\begin{aligned} \bigoplus_{c \rightarrow x} \mathbb{Z}_p &\longrightarrow \mathbb{Z}_p \\ (t_c)_c &\longmapsto \sum_c m(c) t_c \end{aligned}$$

où $m(c)$ est la multiplicité de c .

La proposition suivante résulte de ces considérations : remarquer que les morphismes $\mathbb{Z}_p \rightarrow f_s^! \mathbb{Z}_p$ sont définis par leur restriction aux points génériques des composantes irréductibles de la fibre spéciale).

Proposition 8.3.2. — *Soient S un trait strictement hensélien et $X \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} Y$ deux morphismes de S -schémas. Supposons que les S -schémas X et Y sont lisses, que le morphisme g est fini et plat en codimension (absolue) 2 et que C et X ont même dimension. La spécialisation de la correspondance naturelle $g_{\bar{\eta}}^* \mathbb{Z}_p \rightarrow f_{\bar{\eta}}^! \mathbb{Z}_p$ est le morphisme*

$$\mathbb{Z}_p = g_s^*(\mathrm{R}\Psi \mathbb{Z}_p) \longrightarrow f_s^! \mathbb{Z}_p = f_s^!(\mathrm{R}\Psi \mathbb{Z}_p)$$

obtenue en prenant λ_Z égal à la multiplicité de Z , pour toute composante irréductible Z de la fibre spéciale C_s de C .

Remarques

(1) Dans le cas particulier où X et Y sont propres sur S et où C est un fermé de $X \times_S Y$ tel que la projection pr_Y de C sur Y soit finie et plate en codimension 2, on retrouve un cas particulier de la réduction des cycles de Shimura.

(2) Il est possible que cette proposition vaille sous des hypothèses moins restrictives. Dans la mesure où les conditions énoncées ici seront satisfaites dans le cas particulier que nous avons en vue, nous n'avons pas cherché à approfondir cette question.

8.3.2. *Réduction du théorème 8.2.1 à deux égalités de cycles.* — Le cadre dans lequel nous allons nous placer est le suivant.

Soit X_* l'une des trois variétés X_0, X_1 ou X_μ (les deux premières ont été définies en 6.2; cf. 6.6.5 pour X_μ).

Soit $\gamma \in \text{GSp}_{2g}(\mathbb{Q}_q) \cap M_{2g}(\mathbb{Z}_q)$. On considère la correspondance de Hecke

$$X_* \otimes \mathbb{Q} \xleftarrow{t_0} \Gamma(T_*(\gamma)) \xrightarrow{t_1} X_* \otimes \mathbb{Q}.$$

Soit ν le facteur de similitude de γ . Dans la mesure où $T_*(\gamma)$ ne dépend que de la double classe $K_1(q)\gamma K_1(q)$ (et même, que de la double classe $K_0(q)\gamma K_0(q)$ dans le cas de X_0) on peut supposer que ν est une puissance de q ; nous allons faire cette hypothèse.

Soit $C_\varnothing(\nu)$ le schéma classifiant les données $(A_0, \lambda_0, \eta_0) \xrightarrow{\rho} (A_1, \lambda_1, \eta_1)$ à isomorphisme près, où

- (A_i, λ_i, η_i) est un objet du problème de modules X_\varnothing (cf. 6.1)
- ρ est une isogénie $A_0 \rightarrow A_1$ vérifiant les deux conditions suivantes
 - (a) le morphisme composé

$$A_0 \xrightarrow{\rho} A_1 \xrightarrow{\lambda_1} {}^t A_1 \xrightarrow{{}^t \rho} {}^t A_0 \xrightarrow{\lambda_0^{-1}} A_0$$

est la multiplication par ν

- (b) le diagramme

$$\begin{CD} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2g} @>\eta_0>> A_0[N] \\ @V\text{Id}VV @VV\rho V \\ (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2g} @>\eta_1>> A_1[N] \end{CD}$$

est commutatif.

On pose

$$C_*(\nu) = C_\varnothing \times_{X_\varnothing \times X_\varnothing} (X_* \times X_*).$$

Le schéma $\Gamma(T_*(\gamma))$ définissant la correspondance de Hecke associée à γ est alors naturellement un sous-schéma fermé de $C_*(\nu) \otimes_{\mathbb{Z}[1/N]} \mathbb{Q}$. Par abus de notation, on désignera encore par $\Gamma(T_*(\gamma))$ l'adhérence de Zariski de $\Gamma(T_*(\gamma))$ dans $C_*(\nu)$.

On dispose alors de correspondances

$$X_* \xleftarrow{t_0} \Gamma(T_*(\gamma)) \xrightarrow{t_1} X_*$$

au-dessus de \mathbb{Z}_q , auxquelles on va maintenant appliquer le formalisme du paragraphe précédent. On rappelle (cf. 7.2.2) que l'on a noté W_χ la composante χ -isotypique de la projection $\pi_{10*} V_{\mathbb{Q}_p}$ de $V_{\mathbb{Q}_p}$ sur X_0 ; on rappelle aussi que l'on suppose que le caractère χ est non trivial. On considère alors la correspondance de Hecke $T_0(\gamma, W_\chi)$ (cf. 8.1.2) agissant sur le faisceau p -adique lisse W_χ sur X_0 . Sa correspondance spécialisée est une correspondance cohomologique

$$t_{1,s}^* \text{R}\Psi W_\chi \longrightarrow t_{0,s}^! \text{R}\Psi W_\chi$$

et on peut alors reformuler le théorème 8.2.1 en termes d'égalités de correspondances cohomologiques agissant sur $\text{R}\Psi W_\chi$ de la manière suivante.

On considère la correspondance de Frobenius :

$$F : (X_*)_{\mathbb{F}_q} \xleftarrow{f_0} \Gamma_*(F) \xrightarrow{f_1} (X_*)_{\mathbb{F}_q}$$

où le schéma $\Gamma_*(F)$ est le sous-schéma fermé de $C_*(q^g)_{\mathbb{F}_q}$ défini par les conditions suivantes

- $A_1 = F^*(A_0)$ (où F désigne bien sûr le Frobenius),
- ρ est l'isogénie de Frobenius,

et où les deux morphismes f_0 et f_1 sont les restrictions à $\Gamma_*(F)$ de c_0 et c_1 . Comme pour les correspondances de Hecke, l'isogénie de Frobenius induit un isomorphisme $A_0[p^\infty] \rightarrow A_1[p^\infty]$ et donc un morphisme $f_1^*V_\lambda \rightarrow f_0^!V_\lambda$. En reprenant le calcul (7.2) de $\text{R}\Psi W_\chi$, on voit que la correspondance de Frobenius induit aussi une correspondance cohomologique de $\text{R}\Psi W_\chi$ dans lui même. Pour interpréter la deuxième égalité du théorème 8.2.1, on définit de manière analogue une correspondance *Verschiebung*

$$V : (X_*)_{\mathbb{F}_q} \xleftarrow{v_0} \Gamma_*(V) \xrightarrow{v_1} (X_*)_{\mathbb{F}_q}$$

qui définit aussi une correspondance cohomologique de V_λ et $\text{R}\Psi W_{c,hi}$ dans eux-mêmes.

On rappelle (*cf.* [31], Exposé III, 5.2) qu'étant données deux correspondances cohomologiques

$$X \xleftarrow{c_X} C \xrightarrow{c_Y} Y, \quad c_Y^* \mathcal{F}_Y \longrightarrow c_X^! \mathcal{F}_X$$

et

$$Y \xleftarrow{d_Y} D \xrightarrow{d_Z} Z, \quad d_Z^* \mathcal{F}_Z \longrightarrow d_Y^! \mathcal{F}_Y$$

on dispose d'une correspondance cohomologique composée (notée $e = d \circ c$)

$$X \xleftarrow{e_X} E := C \times_Y D \xrightarrow{e_Z} Z, \quad e_Z^* \mathcal{F}_Z \longrightarrow e_X^! \mathcal{F}_X.$$

On considère maintenant les composées de correspondances

$$\text{sp}(T_j) \circ F^j \quad \text{et} \quad \text{sp}(T_j) \circ V^j$$

(où T_j désigne la correspondance cohomologique agissant sur W_χ associée à l'opérateur de Hecke $T^-(t_j \times 1)$ figurant dans l'énoncé du théorème 8.2.1). Les monômes en F de $H_{g-1}(F)$ sont formés d'isogénies toutes de même degré (à savoir 2^{g-1}) (*cf.* [13], Ch. VII). La correspondance $\text{sp}(T_j)$ est donc supportée par un sous-schéma fermé de $C_0(q^{g(2^{g-1}-j)})_{\mathbb{F}_q}$ et les j -ièmes itérées F^j et V^j des correspondances de Frobenius et *Verschiebung* sont supportées par des sous-schémas fermés de $C_0(q^{gj})_{\mathbb{F}_q}$. Ces deux produits sont donc supportés par $(C_0(q^{g(2^{g-1}-j)}) \times_{X_0} C_0(q^{gj}))_{\mathbb{F}_q}$.

Considérant leur image directe ([31], Exposé III, 3.3) par le morphisme

$$\begin{aligned} & (C_0(q^{g(2^{g-1}-j)}) \times_{X_0} C_0(q^{gj}))_{\mathbb{F}_q} \longrightarrow C_0(q^{g(2^{g-1}-j)})_{\mathbb{F}_q} \\ & ((A_0, \lambda_0, \eta_0) \xrightarrow{\rho} (A_1, \lambda_1, \eta_1), (A_1, \lambda_1, \eta_1) \xrightarrow{\sigma} (A_2, \lambda_2, \eta_2)) \\ & \qquad \qquad \qquad \longmapsto (A_0, \lambda_0, \eta_0) \xrightarrow{\sigma \circ \rho} (A_2, \lambda_2, \eta_2) \end{aligned}$$

ces produits définissent des correspondances supportées par $C_0(q^{g(2^{g-1})})_{\mathbb{F}_q}$. On peut donc considérer les sommes figurant dans l'énoncé du théorème 8.2.1 comme des sommes

$$\sum_{j=0}^{2^g-1} \text{sp}(T_j) \circ F^j \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{2^g-1} \text{sp}(T_j) \circ V^j$$

de correspondances cohomologiques supportées par la fibre spéciale de $C_0(q^{g(2^{g-1})})$; bien entendu il s'agit maintenant de démontrer que ces sommes s'annulent (ou, plus précisément, que les restrictions de la première somme au-dessus de $X_0^e \times X_0^e$ et de la deuxième somme au-dessus de $X_0^m \times X_0^m$ s'annulent, cf. 7.2). Le reste de ce paragraphe va être consacré à des réductions ramenant ces annulations à des annulations de cycles (de dimension $g(g+1)/2$) dans $C_0(q^{g(2^{g-1})})_{\mathbb{F}_q}$.

Première réduction : élimination de la partie singulière. — Commençons par fixer quelques notations. Soient i et j deux symboles pouvant prendre l'une des six valeurs : $e, m, (e, \text{reg}), (m, \text{reg}), \text{reg}$ et ord . Nous noterons : $C^{\emptyset, i} = C_{X_* \times X_*}(X_* \times X_*^i)$, $C^{i, \emptyset} = C_{X_* \times X_*}(X_*^i \times X_*)$ et $C^{i, j} = C_{X_* \times X_*}(X_*^i \times X_*^j)$ pour tout schéma C au-dessus de $X_* \times X_*$.

Nous allons voir qu'il suffit de considérer les restrictions à $\Gamma(T_*(\gamma))^{(e, \text{reg}), (e, \text{reg})}$ et $\Gamma(T_*(\gamma))^{(m, \text{reg}), (m, \text{reg})}$ des correspondances spécialisées $\text{sp}(T_*(\gamma))$ associées aux opérateurs dilatants $T_*(\gamma)$.

Proposition 8.3.3. — *Soit $T_*(\gamma)$ un opérateur de Hecke dilatant. La correspondance*

$$X_* \xleftarrow{t_0} \Gamma(T_*(\gamma)) \xrightarrow{t_1} X_*$$

stabilise $X_^{e, \text{reg}}$ à droite : on a*

$$t_0(t_1^{-1}(X_*^{e, \text{reg}})) \subset X_*^{e, \text{reg}}$$

et elle stabilise $X_^{m, \text{reg}}$ à gauche : on a*

$$t_1(t_0^{-1}(X_*^{m, \text{reg}})) \subset X_*^{m, \text{reg}}.$$

Démonstration. — L'adhérence de $\Gamma(T_1(\gamma))$ dans $C_1(\nu(\gamma))$ est formée d'isogénies $(A_0, \lambda_0, \eta_0, P_0) \xrightarrow{\rho} (A_1, \lambda_1, \eta_1, P_1)$ vérifiant en particulier $\rho(P_0) = P_1$. Le point P_0 est donc non nul lorsque P_1 est lui même non nul et $(A_0, \lambda_0, \eta_0, P_0)$ appartient alors à $X_1^{e, \text{reg}}$. Les stabilités à droite de $X_0^{e, \text{reg}}$ et $X_\mu^{e, \text{reg}}$ s'en déduisent en remarquant que les morphismes $\Gamma(T_1(\gamma)) \rightarrow \Gamma(T_0(\gamma))$ et $\Gamma(T_\mu(\gamma)) \rightarrow \Gamma(T_0(\gamma))$ sont surjectifs.

Considérons $X_\mu^{m, \text{reg}}$ comme le schéma (sur \mathbb{F}_q) classifiant les quintuplets

$$(A, \lambda, \eta, H, P^*),$$

où (A, λ, η, H) est un point de X_0 et P^* est un point non nul du dual de Cartier H^* de H . L'adhérence de $\Gamma(T_\mu(\gamma))$ dans $C_\mu(\nu(\gamma))$ est alors formée d'isogénies $(A_0, \lambda_0, \eta_0, H_0, P_0^*) \xrightarrow{\rho} (A_1, \lambda_1, \eta_1, H_1, P_1^*)$ vérifiant en particulier $\rho^*(P_1^*) = P_0^*$; on en déduit de même la stabilité à gauche de $X_*^{m, \text{reg}}$. \square

Remarque. — On a donc

$$\Gamma(T_*(\gamma))^{(m,\text{reg}), (e,\text{reg})} = \emptyset.$$

En revanche $\Gamma(T_*(\gamma))^{(e,\text{reg}), (m,\text{reg})}$ est en général non vide — c’est déjà ce qui se passe pour le plus simple des cas non triviaux : celui des courbes modulaires (*i.e.* $g = 1$), munies de structures de niveau du type X_* et de l’opérateur contractant $T(\text{diag}(1, q))$.

Cependant, le long de $\Gamma(T_0(\gamma))^{(e,\text{reg}), (m,\text{reg})}$ la correspondance cohomologique $\text{sp}(T_0(\gamma, W_\chi)) : t_1^* \text{R}\Psi(W_\chi) \rightarrow t_0^! \text{R}\Psi(W_\chi)$ est équivariante sous l’action du groupe d’inertie. Elle est donc nulle si χ est non trivial (*cf.* 7.2).

Étendons un peu les notations de (6.6) et notons

$$X_{*,\mathbb{Z}_q}^{e,\text{reg}} = X_{*,\mathbb{Z}_q} - X_{*,\mathbb{F}_q}^m \text{ et } X_{*,\mathbb{Z}_q}^{m,\text{reg}} = X_{*,\mathbb{Z}_q} - X_{*,\mathbb{F}_q}^e$$

de sorte que les schémas $X_{*,\mathbb{Z}_q}^{e,\text{reg}}$ et $X_{*,\mathbb{Z}_q}^{m,\text{reg}}$ ont respectivement pour fibres spéciales $X_{*,\mathbb{F}_q}^{e,\text{reg}}$ et $X_{*,\mathbb{F}_q}^{m,\text{reg}}$. Cette notation se combine avec celle introduite plus haut pour les correspondances : on note donc par exemple $C_{*,\mathbb{Z}_q}^{\emptyset, (e,\text{reg})} = C_* \times_{X_* \times X_*} (X_* \times X_{*,\mathbb{Z}_q}^{e,\text{reg}}) = C_* - C_{*,\mathbb{F}_q}^{\emptyset, m}, \dots$

Considérons les correspondances

$$\begin{aligned} X_{0,\mathbb{Z}_q}^{e,\text{reg}} &\xleftarrow{t_0^{e,\text{reg}}} \Gamma(T_0(\gamma))_{\mathbb{Z}_q}^{(e,\text{reg}), (e,\text{reg})} \xrightarrow{t_1^{e,\text{reg}}} X_{0,\mathbb{Z}_q}^{e,\text{reg}} \\ \text{et } X_{0,\mathbb{Z}_q}^{m,\text{reg}} &\xleftarrow{t_0^{m,\text{reg}}} \Gamma(T_0(\gamma))_{\mathbb{Z}_q}^{(m,\text{reg}), (m,\text{reg})} \xrightarrow{t_1^{m,\text{reg}}} X_{0,\mathbb{Z}_q}^{m,\text{reg}}. \end{aligned}$$

En appliquant la proposition (8.3.3), on voit que les immersions ouvertes naturelles

$$\begin{aligned} \Gamma(T_0(\gamma))_{\mathbb{Z}_q}^{(e,\text{reg}), (e,\text{reg})} &\hookrightarrow \Gamma(T_0(\gamma))_{\mathbb{Z}_q}^{\emptyset, (e,\text{reg})} \\ \text{et } \Gamma(T_0(\gamma))_{\mathbb{Z}_q}^{(m,\text{reg}), (m,\text{reg})} &\hookrightarrow \Gamma(T_0(\gamma))_{\mathbb{Z}_q}^{(m,\text{reg}), \emptyset} \end{aligned}$$

sont des isomorphismes. Les morphismes $t_1^{e,\text{reg}}$ et $t_0^{m,\text{reg}}$ sont donc propres. Il résulte alors directement de la proposition 8.3.1 que l’endomorphisme de $H_{c,e}^i = H_c^i(X_{0,\mathbb{F}_q}^{e,\text{reg}}, \text{R}\Psi W_\chi)$ induit par la correspondance cohomologique

$$\text{sp}(T_0(\gamma, W_\chi))^{(e,\text{reg}), (e,\text{reg})} : t_1^{e,\text{reg}*} \text{R}\Psi W_\chi \longrightarrow t_0^{e,\text{reg}!} \text{R}\Psi W_\chi$$

n’est autre que l’action naturelle de $T_0(\gamma, W_\chi)$ sur $H_{c,e}^i$ et que l’endomorphisme de $H_m^i = H^i(X_{0,\mathbb{F}_q}^{m,\text{reg}}, \text{R}\Psi W_\chi)$ induit par la correspondance cohomologique

$$\text{sp}(T_0(\gamma, W_\chi))^{(m,\text{reg}), (m,\text{reg})} : t_1^{m,\text{reg}*} \text{R}\Psi W_\chi \longrightarrow t_0^{m,\text{reg}!} \text{R}\Psi W_\chi$$

n’est autre que l’action naturelle de $T_0(\gamma, W_\chi)$ sur H_m^i .

Pour achever notre réduction à la partie régulière, il reste à exprimer l’action naturelle de $T_0(\gamma, W_\chi)$ sur H_e^i et sur $H_{c,m}^i$ (les deux cas restants) en termes de correspondances cohomologiques supportées par la partie régulière. Comme on va le voir, la

correspondance spécialisée $\mathrm{sp}(T_0(\gamma, W_\chi))$ se factorise en fait à travers sa partie régulière, de sorte que dans ces deux cas aussi il suffira de vérifier au-dessus de la partie régulière les annulations qu'on se propose de démontrer.

Nous allons simplement considérer H_e^i (le raisonnement pour $H_{c,m}^i$ est analogue). Considérons la correspondance

$$X_{0,\mathbb{Z}_q} \xleftarrow{t_0^{e,\mathrm{reg}}} \Gamma(T_0(\gamma))_{\mathbb{Z}_q}^{(e,\mathrm{reg}),\emptyset} \xrightarrow{t_1} X_{0,\mathbb{Z}_q}.$$

Le morphisme $t_0^{e,\mathrm{reg}}$ est propre. Il résulte alors des propositions 7.2.4 et 8.3.1 que le morphisme $H^i(X_{0,\mathbb{F}_q}^{e,\mathrm{reg}}, \mathrm{R}\Psi W_\chi) \rightarrow H^i(X_{0,\mathbb{F}_q}^e, \mathrm{R}\Psi W_\chi)$ induit par la correspondance cohomologique

$$\mathrm{sp}(T_0(\gamma, W_\chi))^{(e,\mathrm{reg}),e} : t_1^{e*} \mathrm{R}\Psi W_\chi \longrightarrow t_0^{e,\mathrm{reg}!} \mathrm{R}\Psi W_\chi$$

n'est autre que l'action naturelle de $T_0(\gamma, W_\chi)$ sur H_e^i .

Considérons maintenant le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(T_0(\gamma))_{\mathbb{F}_q}^{(e,\mathrm{reg}), (e,\mathrm{reg})} & \xleftarrow{j_T} & \Gamma(T_0(\gamma))_{\mathbb{F}_q}^{(e,\mathrm{reg}), e} \\ t_1^{e,\mathrm{reg}} \downarrow & \square & \downarrow t_1^e \\ X_{0,\mathbb{F}_q}^{e,\mathrm{reg}} & \xleftarrow{j_X} & X_{0,\mathbb{F}_q}^e \end{array}$$

Le morphisme $\mathrm{sp}(T_0(\gamma, W_\chi))^{(e,\mathrm{reg}),e} : t_1^{e*} \mathrm{R}\Psi W_\chi \rightarrow t_0^{e,\mathrm{reg}!} \mathrm{R}\Psi W_\chi$ s'exprime comme le composé :

- du morphisme (7.2) $t_1^{e*} \mathrm{R}\Psi W_\chi \rightarrow t_1^{e*} j_{X!} j_X^* \mathrm{R}\Psi W_\chi$,
- de l'isomorphisme de changement de base

$$t_1^{e*} j_{X!} j_X^* \mathrm{R}\Psi W_\chi \longrightarrow j_{T!} t_1^{e,\mathrm{reg}*} j_X^* \mathrm{R}\Psi W_\chi,$$

- du morphisme

$$j_{T!} t_1^{e,\mathrm{reg}*} j_X^* \mathrm{R}\Psi W_\chi \longrightarrow j_{T!} j_T^* t_0^{e,\mathrm{reg}!} j_X^* \mathrm{R}\Psi W_\chi$$

obtenu à partir de la partie régulière $j_{T!} j_T^* t_1^{e,\mathrm{reg}*} j_X^* \mathrm{R}\Psi W_\chi \rightarrow j_T^* t_0^{e,\mathrm{reg}!} \mathrm{R}\Psi W_\chi$ du morphisme de spécialisation,

- et finalement, du morphisme évident $j_{T!} j_T^* t_0^{e,\mathrm{reg}!} j_X^* \mathrm{R}\Psi W_\chi \rightarrow t_0^{e,\mathrm{reg}!} \mathrm{R}\Psi W_\chi$ (ce morphisme s'interprète aussi comme un morphisme d'adjonction, puisqu'on a $j_T^* t_0^{e,\mathrm{reg}!} j_X^* \mathrm{R}\Psi W_\chi = j_T^* t_0^{e,\mathrm{reg}!} j_X^* \mathrm{R}\Psi W_\chi$).

Par conséquent, le morphisme de spécialisation $\mathrm{sp}(T_0(\gamma, W_\chi))^{(e,\mathrm{reg}),e}$ se factorise en fait à travers sa partie régulière $\mathrm{sp}(T_0(\gamma, W_\chi))^{(e,\mathrm{reg}), (e,\mathrm{reg})}$, comme on l'a annoncé plus haut.

Pour résumer cette première réduction, il suffit maintenant de vérifier l'annulation des correspondances cohomologiques

$$\left(\sum_{j=0}^{2^{g-1}} \mathrm{sp}(T_0(T^-(t_j \times 1), W_\chi)) \circ F^j \right)^{(e, \mathrm{reg}), (e, \mathrm{reg})}$$

et

$$\left(\sum_{j=0}^{2^{g-1}} \mathrm{sp}(T_0(T^-(t_j \times 1), W_\chi)) \circ V^j \right)^{(m, \mathrm{reg}), (m, \mathrm{reg})}.$$

Deuxième réduction : où l'on passe de $W_{\chi, \lambda}$ au faisceau constant. — Cette réduction se fera en deux étapes. On verra d'abord que les deux égalités du théorème 8.2.1 se ramènent respectivement à un énoncé où figurent les variétés $X_1^{e, \mathrm{reg}}$ munies du faisceau V_λ et à un énoncé où figurent les variétés $X_\mu^{m, \mathrm{reg}}$ munies du faisceau V_λ . Le passage du faisceau V_λ au faisceau constant ne présentera ensuite pas de difficulté (on a déjà effectué une réduction analogue au début de la démonstration du théorème 7.1.1).

Rappelons que le faisceau $W_{\chi, \lambda}$ est la composante χ -isotypique de $\pi_{1,0*}V_\lambda$. La correspondance cohomologique $t_{1, X_0}^* W_{\chi, \lambda} \rightarrow t_{0, X_0}^! W_{\chi, \lambda}$ est par définition la partie χ -équivariante de la correspondance $t_{1, X_0}^* (\pi_{1,0*} V_\lambda) \rightarrow t_{0, X_0}^! (\pi_{1,0*} V_\lambda)$ associée par image directe (cf. [31], Exposé III) au diagramme commutatif (d'oubli du niveau)

$$\begin{array}{ccc} (X_1)_{\mathbb{Q}} & \xleftarrow{t_{0, X_1}} \Gamma(T_1(\gamma))_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{t_{1, X_1}} (X_1)_{\mathbb{Q}} \\ \pi_{1,0} \downarrow & \pi_{1,0} \times \pi_{1,0} \downarrow & \downarrow \pi_{1,0} \\ (X_0)_{\mathbb{Q}} & \xleftarrow{t_{0, X_0}} \Gamma(T_0(\gamma))_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{t_{1, X_0}} (X_0)_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

à la correspondance cohomologique $t_{1, X_1}^* V_\lambda \rightarrow t_{0, X_1}^! V_\lambda$ (cf. 8.1.2). Compte tenu de la compatibilité des spécialisations aux images directes par des morphismes propres (cf. [14]), la correspondance spécialisée

$$\mathrm{sp}(T_0(\gamma)) : t_{1, X_0, \mathbb{F}_q}^* \mathrm{R}\Psi W_{\chi, \lambda} \longrightarrow t_{0, X_0, \mathbb{F}_q}^! \mathrm{R}\Psi W_{\chi, \lambda}$$

n'est autre que la partie χ équivariante de l'image directe, par les morphismes d'oubli $\pi_{1,0}$, de la correspondance spécialisée

$$\mathrm{sp}(T_1(\gamma)) : t_{1, X_1, \mathbb{F}_q}^* \mathrm{R}\Psi V_\lambda \longrightarrow t_{0, X_1, \mathbb{F}_q}^! \mathrm{R}\Psi V_\lambda.$$

En particulier (puisque l'image directe par $\pi_{1,0}$ de la correspondance de Frobenius est la correspondance de Frobenius), pour démontrer la première des identités du théorème 8.2.1, il suffit de démontrer que la restriction à $X_{1, \mathbb{F}_q}^{e, \mathrm{reg}}$ de la correspondance cohomologique (supportée par $X_{1, \mathbb{F}_q} \xleftarrow{c_0} C_1(q^{g2^{g-1}})_{\mathbb{F}_q} \xrightarrow{c_1} X_{1, \mathbb{F}_q}$)

$$\sum_j \mathrm{sp}(T_j) \circ F^j : c_1^* \mathrm{R}\Psi V_\lambda \longrightarrow c_0^! \mathrm{R}\Psi V_\lambda$$

est nulle.

De même, pour démontrer la deuxième identité, il suffit de démontrer que la restriction à $X_{\mu\mathbb{F}_q}^{m,\text{reg}}$ de la correspondance cohomologique (supportée par $X_{\mu,\mathbb{F}_q} \xleftarrow{c_0} C_\mu(q^{g^{2^{g-1}}})_{\mathbb{F}_q} \xrightarrow{c_1} X_{\mu,\mathbb{F}_q}$)

$$\sum_j \text{sp}(T_j) \circ V^j : c_1^* \text{R}\Psi V_\lambda \longrightarrow c_0^! \text{R}\Psi V_\lambda$$

est nulle.

Finalement, si N' est suffisamment divisible pour que le faisceau $V_{\lambda,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$ soit trivial sur $X_1(N')$, il suffit de démontrer que les restrictions (à $X_{1,\mathbb{F}_q}^{e,\text{reg}}(N')$ et $X_{\mu,\mathbb{F}_q}^{m,\text{reg}}(N')$ respectivement) des correspondances cohomologiques $\sum_j \text{sp}(T_j) \circ F^j$ et $\sum_j \text{sp}(T_j) \circ V^j : c_1^* \text{R}\Psi \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \rightarrow c_0^! \text{R}\Psi \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ sont nulles.

Nous verrons (cf. 8.3.4) que le lieu ordinaire est encore dense dans

$$\Gamma(T_1(\gamma))^{(e,\text{reg}), (e,\text{reg})} \quad \text{et} \quad \Gamma(T_\mu(\gamma))^{(m,\text{reg}), (m,\text{reg})}.$$

Les morphismes

$$t_1^{e,\text{reg}} : \Gamma(T_1(\gamma))^{(e,\text{reg}), (e,\text{reg})} \longrightarrow X_1^{e,\text{reg}}$$

$$\text{et} \quad t_1^{m,\text{reg}} : \Gamma(T_\mu(\gamma))^{(m,\text{reg}), (m,\text{reg})} \longrightarrow X_1^{m,\text{reg}}$$

sont donc finis et plats en codimension 2. Le long de $X_1^{e,\text{reg}}$, le schéma X_1 est lisse sur \mathbb{Z}_q et le long de $X_\mu^{m,\text{reg}}$, le schéma X_μ est lisse sur \mathbb{Z}_q (cf. 6.6). Appliquant la proposition 8.3.2, le théorème 8.2.1 se réduit donc à deux égalités de cycles.

8.3.3. *Fin de la démonstration.* — Notons $\Gamma(T_j) = \Gamma(T_j)_+ - \Gamma(T_j)_-$ où les deux cycles $\Gamma(T_j)_+$ et $\Gamma(T_j)_-$ sont positifs. Nous voulons démontrer les égalités de cycles :

$$(1) \quad \sum_j \text{pr}_{j,*}(\Gamma(T_j)_{+\mathbb{F}_q} \times_{X_{1\mathbb{F}_q}} \Gamma(F^j)) = \sum_j \text{pr}_{j,*}(\Gamma(T_j)_{-\mathbb{F}_q} \times_{X_{1\mathbb{F}_q}} \Gamma(F^j))$$

$$(2) \quad \sum_j \text{pr}_{j,*}(\Gamma(T_j)_{+\mathbb{F}_q} \times_{X_{\mu\mathbb{F}_q}} \Gamma(V^j)) = \sum_j \text{pr}_{j,*}(\Gamma(T_j)_{-\mathbb{F}_q} \times_{X_{\mu\mathbb{F}_q}} \Gamma(V^j))$$

où :

- pour alléger on a respectivement omis les mentions (e, reg) et (m, reg)
- les produits fibrés du type $\Gamma(T_j)_{+\mathbb{F}_q} \times_{X_{1\mathbb{F}_q}} \Gamma(F^j)$ sont à interpréter au sens des cycles (c'est-à-dire en ne retenant du produit fibré que le schéma réduit sous-jacent et sa multiplicité — on peut ici utiliser la notion « naïve » du produit de cycles et on n'a pas besoin de la « formule des Tor » de [50] : cf. la remarque suivant l'énoncé du corollaire 8.3.7).

– la notation pr_j désigne respectivement les morphismes de composition des isogénies

$$C_1(q^{g(2^{g-1}-j)})_{\mathbb{F}_q} \times_{X_{1\mathbb{F}_q}} C_1(q^{gj})_{\mathbb{F}_q} \longrightarrow C_1(q^{g^{2^{g-1}}})_{\mathbb{F}_q}$$

$$\text{et} \quad C_\mu(q^{g(2^{g-1}-j)})_{\mathbb{F}_q} \times_{X_{\mu\mathbb{F}_q}} C_\mu(q^{gj})_{\mathbb{F}_q} \longrightarrow C_\mu(q^{g^{2^{g-1}}})_{\mathbb{F}_q}.$$

Pour alléger la démonstration, nous nous concentrerons sur la première des deux égalités. Nous ne mentionnerons donc la deuxième égalité que lorsque les arguments diffèrent.

Nous allons considérer un point de $C_1(q^{g2^{g-1}})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}}_q$ et démontrer (en utilisant la théorie des déformations) que les complétés en ce point des deux cycles de part et d'autre du signe d'égalité coïncident, ce qui entraînera le théorème.

Il résulte de la proposition 8.3.3 (ou plus exactement, de sa démonstration) que $\Gamma(T_1(\gamma))^{(e,\text{reg}), (e,\text{reg})}$ est inclus dans le sous-schéma fermé $C_1^+(\nu(\gamma))$ de $C_1(\nu(\gamma))^{(e,\text{reg}), (e,\text{reg})}$ formé des isogénies $(A_0, \lambda_0, \eta_0, P_0) \xrightarrow{\rho} (A_1, \lambda_1, \eta_1, P_1)$ appliquant P_0 sur P_1 (qui induisent donc un isomorphisme de H_0 sur H_1).

Nous allons maintenant effectuer quelques rappels de théorie des déformations (voir le paragraphe 4 de [7] pour plus de détails). Lorsque G est un groupe q -divisible sur le spectre d'une algèbre artinienne R de corps résiduel algébriquement clos k , G admet une (unique) filtration

$$(0) = G^3 \subset G^2 \subset G^1 \subset G^0 = G$$

par des sous-groupes q -divisibles telle que

- (1) le groupe q -divisible $E = G/G^1$ soit étale,
- (2) le groupe q -divisible $B = G^1/G^2$ soit connexe et n'ait pas de sous-groupe non trivial de type multiplicatif (ou, ce qui revient au même, soit connexe ainsi que son dual),
- (3) le groupe q -divisible $T = G^2$ soit de type multiplicatif.

Cette filtration est de formation compatible au changement de base (en particulier on a $(G^i)_k = (G_k)^i$). Elle est de plus fonctorielle vis à vis des isogénies : si $G \xrightarrow{\rho} G'$ est une isogénie de groupes q -divisibles définie sur S , on a $\rho(G^i) = G'^i$. Finalement, si G est muni d'une polarisation principale, cette polarisation induit un isomorphisme $T \xrightarrow{\cong} {}^tE$ de T vers le dual de E ainsi qu'une polarisation principale de B .

Chai et Norman ([7], theorem 4.4) relie la théorie des déformations du groupe G à celles des groupes $H = G^1, K = G/G^2$ et $B = G^1/G^2$ de la manière suivante. Lorsque G est défini sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, notons Def_G le foncteur des déformations du groupe q -divisible G ; on dispose alors d'un morphisme de foncteur $\text{Def}_G \rightarrow \text{Def}_H \times_{\text{Def}_B} \text{Def}_K$. Chai et Norman démontrent que ce morphisme est formellement lisse; puisque les morphismes $\text{Def}_H \rightarrow \text{Def}_B$ et $\text{Def}_K \rightarrow \text{Def}_B$ sont eux-mêmes formellement lisses ([7], 4.4) il en est alors de même du morphisme $\text{Def}_G \rightarrow \text{Def}_B$. Leur démonstration de la lissité formelle de $\text{Def}_G \rightarrow \text{Def}_H \times_{\text{Def}_B} \text{Def}_K$ utilise la théorie des extensions panachées de Grothendieck ([21], exposé IX) (que Chai et Norman rebaptisent « mixed extensions »). Le point crucial est que $\text{Ext}^2(E, T) = 0 (= \text{Ext}^2((\mathbb{Q}_q/\mathbb{Z}_q)_R, (\mu_{q^\infty})_R))$ pour toute algèbre artinienne R . La fibre de $\text{Def}_G \rightarrow \text{Def}_H \times_{\text{Def}_B} \text{Def}_K$ en un relèvement $(\widehat{H}, \widehat{K})$ de (H, K) sur R (tel que les images de \widehat{H} et \widehat{K} dans Def_B coïncident), qui s'identifie canoniquement à

l'ensemble des extensions panachées de \widehat{K} par \widehat{H} , est alors un torseur sous $\text{Ext}^1(\widehat{E}, \widehat{T})$ — en général, l'ensemble des extensions panachées peut être vide lorsqu'une certaine obstruction $c(\widehat{H}, \widehat{K}) \in \text{Ext}^2(\widehat{E}, \widehat{T})$ est non nulle, cf. [21].

Cette construction de Chai et Norman s'adapte aussi pour traiter le cas des déformations de groupes q -divisibles munis de polarisations ([7], theorem 4.7). Dans ce cas, il faut remplacer le groupe $\text{Ext}^1(E, T) = \text{Hom}(E(k) \otimes_{\mathbb{Z}_q} T'(k), \mu_{q^\infty}(R))$ (où T' désigne le dual de T , qui n'est autre que E puisque G est polarisé) par celui des morphismes bilinéaires symétriques de $E(k)$ dans $\mu_{q^\infty}(R)$.

Considérons maintenant un point $\rho = (A_0, \lambda_0, \eta_0, P_0) \xrightarrow{\rho} (A_1, \lambda_1, \eta_1, P_1) \in C_1^+(\nu(\gamma))(\overline{\mathbb{F}}_q)$. Il résulte du théorème de Serre-Tate que le complété de $C_1^+(\nu(\gamma))$ en ce point s'identifie à la déformation universelle de la donnée

$$(G_0 := A_0[q^\infty], \lambda_0[q^\infty], P_0) \xrightarrow{\rho[q^\infty]} (G_1 := A_1[q^\infty], \lambda_1[q^\infty], P_1),$$

le problème de déformation étant bien sûr défini par des conditions analogues à celles qui définissent $C_1^+(\nu(\gamma))$.

Nous allons maintenant, en nous inspirant de la construction de [7] rappelée plus haut, relier ce problème de déformations à un autre problème de déformations faisant intervenir des isogénies $(B'_0, \mu_0) \xrightarrow{\rho_B} (B'_1, \mu_1)$ de groupes q -divisibles polarisés (de dimension $g - 1$ et hauteur $2g - 2$) *dépourvus de structures de niveau*. À ce point de la démonstration, la construction que l'on utilise pour démontrer la seconde égalité du théorème 8.2.1 est légèrement différente et nous traiterons donc successivement les deux cas.

Pour alléger, nous allons omettre la mention « $[q^\infty]$ » dans les notations : par exemple, nous noterons simplement λ_0 la polarisation du groupe q -divisible G_0 . À cause du conflit de notation (entre le sous groupe fini H et la notation $H = G^1$ de [7]) on abandonne les notations H et K de [7] — on se contentera donc de noter respectivement G^1 et G/G^2 ces deux groupes q -divisibles.

Pour l'égalité 8.3.3 (1). — Soit r la hauteur commune des groupes q -divisibles étales E_0 et E_1 . On commence par choisir un sous-groupe q -divisible, de hauteur $r - 1$, E''_1 de E_1 ne contenant pas l'image de P_1 , de sorte que l'image de P_1 dans le quotient $E'_1 = E_1/E''_1$ est non nulle. On considère ensuite l'image réciproque de E''_1 par l'isogénie $\rho_E : E_0 \rightarrow E_1$ induite par ρ . Ce n'est pas un groupe q -divisible ; cependant on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \rho_E \longrightarrow \rho_E^{-1}(E''_1) \longrightarrow E''_1 \longrightarrow 0$$

et lorsque n est assez grand, le sous-groupe $E''_0 := q^n \rho_E^{-1}(E''_1)$ de E_0 est donc un groupe q -divisible indépendant de n . On définit de la sorte des filtrations

$$(0) = G_i'^3 \subset T'_i = G_i'^2 \subset G_i'^1 \subset G_i'^0 = G_i$$

où $G_i'^1$ est le noyau du morphisme composé $G_i \rightarrow E_i \rightarrow E_i/E''_i = E'_i$ et où le tore formel T'_i est l'orthogonal de E''_i (on rappelle que le groupe étale E_i et le tore formel T_i sont en dualité via la polarisation λ_i).

Cette filtration est respectée par l'isogénie ρ et elle s'étend de manière canonique aux déformations de $(G_0, \lambda_0, P_0) \xrightarrow{\rho} (G_1, \lambda_1, P_1)$.

En notant B'_i le quotient $G'_i{}^1/G'_i{}^2$ et μ_i la polarisation principale de B'_i induite par λ_i , on a donc construit des morphismes (dépendant du choix de E'_1) :

$$(\widehat{X}_1)_{(A_i, \lambda_i, \eta_i, P_i)} \longrightarrow (\widehat{X}_{\emptyset}^{g-1})_{(B'_i, \mu_i)}$$

de la déformation universelle $(\widehat{X}_1)_{(A_i, \lambda_i, \eta_i, P_i)}$ de (G_i, λ_i, P_i) vers celle $(\widehat{X}_{\emptyset}^{g-1})_{(B'_i, \mu_i)}$ de (B'_i, μ_i) , et :

$$\widehat{C}_1^+(\nu(\gamma))_{\rho} \longrightarrow \widehat{C}_{\emptyset}^{g-1}(\nu(\gamma))_{\rho_{B'}}$$

de la déformation universelle $\widehat{C}_1^+(\nu(\gamma))_{\rho}$ de $(G_0, \lambda_0, P_0) \xrightarrow{\rho} (G_1, \lambda_1, P_1)$ vers celle $\widehat{C}_{\emptyset}^{g-1}(\nu(\gamma))_{\rho_{B'}}$ de $(B'_0, \mu_0) \xrightarrow{\rho_{B'}} (B'_1, \mu_1)$.

Pour l'égalité 8.3.3 (2). — On rappelle que $X_{\mu}^{m, \text{reg}}$ classe les quintuplets $(A, \lambda, \eta, H, P^*)$, où (A, λ, η) est un objet de X_{\emptyset} , où $H \subset A[q]$ est un sous-groupe fini et plat d'ordre q et où P^* est un point non nul du dual de Cartier de H (ou, ce qui revient au même, un isomorphisme $H \xrightarrow{\simeq} \mu_q$). De même, $C_{\mu}^+(\nu(\gamma))$ classe les isogénies $(A_0, \lambda_0, \eta, H_0, P_0^*) \xrightarrow{\rho} (A_1, \lambda_1, \eta_1, H_1, P_1^*)$, où $(A_i, \lambda_i, \eta_i, H_i, P_i^*)$ sont des objets de $X_{\mu}^{m, \text{reg}}$ et où ρ est une isogénie (telle que le morphisme composé

$$A_0 \xrightarrow{\rho} A_1 \xrightarrow{\lambda_1} {}^t A_1 \xrightarrow{{}^t \rho} {}^t A_0 \xrightarrow{\lambda_0^{-1}} A_0$$

soit la multiplication par $\nu(\gamma)$) appliquant isomorphiquement H_0 sur H_1 et telle que le dual de Cartier du morphisme $\rho_H : H_0 \rightarrow H_1$ envoie P_1^* sur P_0^* .

On choisit un sous-tore T'_0 de dimension 1 de T_0 contenant H_0 . Son image T'_1 par l'isogénie $\rho_T : T_0 \rightarrow T_1$ induite par ρ est un sous-tore de dimension 1 de T_1 contenant H_1 . On définit de la sorte des filtrations

$$(0) = G_i{}^3 \subset T'_i = G_i{}^2 \subset G_i{}^1 \subset G_i{}^0 = G_i$$

où $G_i{}^1$ est l'orthogonal de T'_i (vis à vis de λ_i).

Comme plus haut, ceci définit des morphismes (dépendant du choix de T'_0)

$$\begin{aligned} (\widehat{X}_{\mu})_{(A_i, \lambda_i, \eta_i, H_i, P_i^*)} &\longrightarrow (\widehat{X}_{\emptyset}^{g-1})_{(B'_i, \mu_i)} \\ \text{et } \widehat{C}_{\mu}^+(\nu(\gamma))_{\rho} &\longrightarrow \widehat{C}_{\emptyset}^{g-1}(\nu(\gamma))_{\rho_{B'}} \end{aligned}$$

de déformations universelles.

La proposition suivante est une étape importante dans la démonstration du théorème 8.2.1.

Proposition 8.3.4

(a) *Les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc}
 (\widehat{X}_1)_{(A_0, \lambda_0, \eta_0, P_0)} \longleftarrow \widehat{C}_1^+(\nu(\gamma))_\rho & & \widehat{C}_\mu^+(\nu(\gamma))_\rho \longrightarrow (\widehat{X}_\mu)_{(A_1, \lambda_1, \eta_1, H_1, P_1^*)} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\widehat{X}_\emptyset^{g-1})_{(B'_0, \mu_0)} \longleftarrow \widehat{C}_\emptyset^{g-1}(\nu(\gamma))_{\rho_{B'}} & \text{et} & \widehat{C}_\emptyset^{g-1}(\nu(\gamma))_{\rho_{B'}} \longrightarrow (\widehat{X}_\emptyset^{g-1})_{(B'_1, \mu_1)} \\
 \downarrow & & \downarrow
 \end{array}$$

(où les flèches verticales sont les morphismes qu'on vient de construire et où les flèches horizontales sont les morphismes d'oubli évidents) sont cartésiens.

(b) *Les morphismes*

$$(\widehat{X}_1)_{(A_i, \lambda_i, \eta_i, P_i)} \longrightarrow (\widehat{X}_\emptyset^{g-1})_{(B'_i, \mu_i)} \quad \text{et} \quad (\widehat{X}_\mu)_{(A_i, \lambda_i, \eta_i, H_i, P_i^*)} \longrightarrow (\widehat{X}_\emptyset^{g-1})_{(B'_i, \mu_i)}$$

sont formellement lisses ; les morphismes verticaux des deux diagrammes précédents sont donc formellement lisses.

Remarque. — En particulier, il résulte de cette proposition et de la densité du lieu ordinaire de $C_\emptyset^{g-1}(\nu(\gamma))$ (cf. [13], Ch. VII) que le lieu ordinaire est dense dans $C_1^+(\nu(\gamma))$ et $C_\mu^+(\nu(\gamma))$. Ceci justifie l'usage de la proposition 8.3.2 que nous avons fait à la fin du paragraphe 8.3.2.

Démonstration. — Commençons par le point (a). Nous nous contenterons de démontrer que le premier diagramme est cartésien, la démonstration pour le deuxième diagramme étant strictement analogue. Supposons données une déformation $(\widehat{A}_0, \widehat{\lambda}_0, \widehat{\eta}_0, \widehat{P}_0)$ de $(A_0, \lambda_0, \eta_0, P_0)$ et une déformation $\rho_{\widehat{B}'} : (\widehat{B}'_0, \mu_0) \rightarrow (\widehat{B}'_1, \mu_1)$ de $\rho_{B'}$ dont la source est l'image (\widehat{B}'_0, μ_0) de $(\widehat{A}_0, \widehat{\lambda}_0, \widehat{\eta}_0, \widehat{P}_0)$ par le morphisme $(\widehat{X}_1)_{(A_0, \lambda_0, \eta_0, P_0)} \rightarrow (\widehat{X}_\emptyset^{g-1})_{(B'_0, \mu_0)}$. Nous allons voir que ceci définit une (et une seule) déformation $\rho_{\widehat{A}'} : (\widehat{A}_0, \widehat{\lambda}_0, \widehat{\eta}_0, \widehat{P}_0) \rightarrow (\widehat{A}_1, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\eta}_1, \widehat{P}_1)$ de ρ .

En effet, tirons d'abord l'extension $0 \rightarrow T'_0 \rightarrow \widehat{A}_0^1 \rightarrow \widehat{B}'_0 \rightarrow 0$ par la duale ${}^t\rho_{\widehat{B}'} = \sigma_{\widehat{B}'} : {}^t\widehat{B}'_1 = \widehat{B}'_1 \rightarrow {}^t\widehat{B}'_0 = \widehat{B}'_0$ de l'isogénie $\rho_{\widehat{B}'}$. On obtient ainsi une extension $0 \rightarrow T'_0 = T'_1 \rightarrow \widehat{A}_1^1 \rightarrow \widehat{B}'_1 \rightarrow 0$ munie d'une isogénie $\sigma_{\widehat{A}'} : \widehat{A}_1^1 \rightarrow \widehat{A}_0^1$ dont le noyau est contenu dans $\widehat{A}_1^1[\nu(\gamma)]$. Il existe alors une isogénie $\rho_{\widehat{A}'} : \widehat{A}_0^1 \rightarrow \widehat{A}_1^1$ telle que $\rho_{\widehat{A}'} \circ \sigma_{\widehat{A}'}^{-1}$ soit la multiplication par $\nu(\gamma)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & T'_0 & \longrightarrow & \widehat{A}_0^1 & \longrightarrow & \widehat{B}'_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \sigma_{\widehat{A}'} \uparrow & \square & \uparrow \sigma_{\widehat{B}'} \\
 0 & \longrightarrow & T'_0 & \longrightarrow & \widehat{A}_1^1 & \longrightarrow & \widehat{B}'_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \nu(\gamma) \uparrow & & \rho_{\widehat{A}'} \uparrow & & \uparrow \rho_{\widehat{B}'} \\
 0 & \longrightarrow & T'_0 & \longrightarrow & \widehat{A}_0^1 & \longrightarrow & \widehat{B}'_0 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

En poussant l'extension $0 \rightarrow \widehat{A}'_0 \rightarrow \widehat{A}_0 \rightarrow E'_0 \rightarrow 0$ par $\rho_{\widehat{A}'_1}$, on obtient alors une extension $0 \rightarrow \widehat{A}'_1 \rightarrow \widehat{A}_1 \rightarrow E'_0 = E'_1 \rightarrow 0$ munie d'une isogénie $\rho_{\widehat{A}} : \widehat{A}_0 \rightarrow \widehat{A}_1$, qui sera la déformation recherchée.

L'isogénie $\rho_{\widehat{A}} : \widehat{A}_0 \rightarrow \widehat{A}_1$ peut aussi se construire en poussant d'abord l'extension $0 \rightarrow \widehat{B}'_0 \rightarrow \widehat{A}_0/\widehat{A}'_0 \rightarrow E'_0 \rightarrow 0$ par $\rho_{\widehat{B}'}$, (ce qui donne l'extension $0 \rightarrow \widehat{B}'_1 \rightarrow \widehat{A}_1/\widehat{A}'_1 \rightarrow E'_0 = E'_1 \rightarrow 0$, munie de l'isogénie $\rho_{\widehat{A}/\widehat{A}'_2}$) puis en tirant l'extension $0 \rightarrow T'_0 = \widehat{A}'_0 \rightarrow \widehat{A}_0 \rightarrow \widehat{A}_0/\widehat{A}'_0 \rightarrow 0$ par l'isogénie $\nu(\gamma) \circ (\rho_{\widehat{A}/\widehat{A}'_2})^{-1}$, ce qui montre que la polarisation principale λ_1 de A_1 s'étend encore en une polarisation principale $\widehat{\lambda}_1$ de \widehat{A}_1 pour laquelle l'isogénie $\rho_{\widehat{A}}$ est une similitude de rapport $\nu(\gamma)$.

Finalement, η_1 s'étend de manière évidente, et \widehat{P}_1 est simplement l'image de \widehat{P}_0 (\widehat{P}_1 est non nul, puisque $E'_0 \rightarrow E'_1$ est un isomorphisme).

Le point (b) se démontre en faisant appel à la théorie des extensions panachées, comme la proposition 4.7 de [7]. □

Nous allons maintenant déduire de la proposition 8.3.4 (et d'un lemme facile d'algèbre linéaire) une description des complétés $\widehat{\Gamma}(T_1(\gamma))_\rho$ et $\widehat{\Gamma}(T_\mu(\gamma))_\rho$. Notons $\gamma = \text{diag}(1, \delta, \nu(\delta))$ et $\widehat{\Gamma}(T_\varnothing^{g-1}(\delta))_{\rho_{B'}}$, le sous-schéma fermé de $\widehat{C}_\varnothing^{g-1}(\nu(\delta))$ obtenu comme adhérence de Zariski du graphe de la correspondance de Hecke associée à δ (cette correspondance de Hecke relie donc les fibres génériques au sens de Raynaud de $(\widehat{X}_\varnothing^{g-1})_{(B'_0, \mu_0)}$ et $(\widehat{X}_\varnothing^{g-1})_{(B'_1, \mu_1)}$).

Proposition 8.3.5

(1) *Le morphisme $\widehat{\Gamma}(T_1(\gamma))_\rho \rightarrow \widehat{C}_\varnothing^{g-1}(\nu(\gamma))$ se factorise à travers $\widehat{\Gamma}(T_\varnothing^{g-1}(\delta))_{\rho_{B'}}$, et le diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} (\widehat{X}_1)_{(A_0, \lambda_0, \eta_0, P_0)} & \longleftarrow & \widehat{C}_1^+(\nu(\gamma))_\rho & \longleftarrow & \widehat{\Gamma}(T_1(\gamma))_\rho \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (\widehat{X}_\varnothing^{g-1})_{(B'_0, \mu_0)} & \longleftarrow & \widehat{C}_\varnothing^{g-1}(\nu(\gamma))_{\rho_{B'}} & \longleftarrow & \widehat{\Gamma}(T_\varnothing^{g-1}(\delta))_{\rho_{B'}} \end{array}$$

a ses carrés cartésiens.

(2) *Le morphisme $\widehat{\Gamma}(T_\mu(\gamma))_\rho \rightarrow \widehat{C}_\varnothing^{g-1}(\nu(\gamma))$ se factorise à travers $\widehat{\Gamma}(T_\varnothing^{g-1}(\delta))_{\rho_{B'}}$, et le diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{\Gamma}(T_\mu(\gamma))_\rho & \longrightarrow & \widehat{C}_\mu^+(\nu(\gamma))_\rho & \longrightarrow & (\widehat{X}_\mu)_{(A_1, \lambda_1, \eta_1, H_1, P_1^*)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\Gamma}(T_\varnothing^{g-1}(\delta))_{\rho_{B'}} & \longrightarrow & \widehat{C}_\varnothing^{g-1}(\nu(\gamma))_{\rho_{B'}} & \longrightarrow & (\widehat{X}_\varnothing^{g-1})_{(B'_1, \mu_1)} \end{array}$$

a ses carrés cartésiens.

Démonstration. — Le fait que la fibre générique de ces diagrammes est cartésienne résulte du lemme suivant — dont les parties (1) et (2) concernent respectivement les

deux parties de la proposition. La proposition en résulte alors, puisque l'adhérence de Zariski est de formation compatible au changement de base par le morphisme plat

$$(\widehat{X}_1)_{(A_0, \lambda_0, \eta_0, P_0)} \longrightarrow (\widehat{X}_{\emptyset}^{g-1})_{(B'_0, \mu_0)} \text{ (resp. } (\widehat{X}_{\mu})_{(A_1, \lambda_1, \eta_1, H_1, P_1^*)} \longrightarrow (\widehat{X}_{\emptyset}^{g-1})_{(B'_1, \mu_1)}).$$

□

Lemme 8.3.6

(1) Soit

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ qC & \delta & 0 \\ qc & qL & \nu(\delta) \end{pmatrix} \in \text{GSp}_{2g}(\mathbb{Q}_q) \cap M_{2g}(\mathbb{Z}_q),$$

où c, C et L sont des matrices entières. La double classe $K_1\gamma K_1$ ne dépend que de $K_{\emptyset}^{g-1}\delta K_{\emptyset}^{g-1}$.

(2) Soit

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & L & c \\ 0 & \delta & C \\ 0 & 0 & \nu(\delta) \end{pmatrix} \in \text{GSp}_{2g}(\mathbb{Q}_q) \cap M_{2g}(\mathbb{Z}_q).$$

La double classe $K_1\gamma K_1$ ne dépend que de $K_{\emptyset}^{g-1}\delta K_{\emptyset}^{g-1}$.

Remarque. — On peut rapprocher ce lemme de la proposition 3.1.3.

Démonstration. — Dans les deux cas, il suffit de démontrer que la double classe $K_1\gamma K_1$ n'est autre que $K_1 \text{diag}(1, \delta, \nu(\delta)) K_1$.

Dans le premier cas, il résulte de l'identité

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ qC & 1 & 0 \\ qc & qL' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \nu(\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ qC & \delta & 0 \\ qc & qL'\delta & \nu(\delta) \end{pmatrix}$$

et du fait que ces matrices sont dans $\text{GSp}_{2g}(\mathbb{Q}_q)$ que l'on a en fait déjà $K_1\gamma = K_1 \text{diag}(1, \delta, \nu(\delta))$.

Dans le deuxième cas, on vérifie de la même manière que l'on a déjà $\gamma K_1 = \text{diag}(1, \delta, \nu(\delta)) K_1$. □

Nous allons maintenant énoncer un corollaire de la proposition 8.3.5 qui ramènera les égalités de cycles (1) et (2) que nous nous proposons de démontrer à des égalités de cycles supportés par le complété $\widehat{C}_{\emptyset}^{g-1}(q^{g^2g-1})_{\rho_{B'}}$.

Soit $\text{Frob} : A \rightarrow F^*A$ l'isogénie de Frobenius (resp. $\text{Ver} : F^*A \rightarrow A$ le Verschiebung). En considérant l'isogénie de Frobenius (resp. le Verschiebung) du groupe q -divisible universel au-dessus de $(\widehat{X}_1)_{(A, \lambda, \eta, P)} \otimes_{\mathbb{Z}_q} \mathbb{F}_q$ (resp. $(\widehat{X}_{\mu})_{(A, \lambda, \eta, H, P^*)} \otimes_{\mathbb{Z}_q} \mathbb{F}_q$,

$(\widehat{X}_\emptyset)_{(B',\mu)} \otimes_{\mathbb{Z}_q} \mathbb{F}_q$) on obtient des immersions fermées :

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}(F_1^j)_{(A,\lambda,\eta,P)} &\hookrightarrow \widehat{C}_1^+(q^j)_{\mathrm{Frob}^j} \otimes_{\mathbb{Z}_q} \mathbb{F}_q \\ \widehat{\Gamma}(V_\mu^j)_{v_0^j(\mathrm{Ver}^j)} &\hookrightarrow \widehat{C}_\mu^+(q^j)_{\mathrm{Ver}^j} \otimes_{\mathbb{Z}_q} \mathbb{F}_q \\ \widehat{\Gamma}^{g-1}(F_\emptyset^j)_{(B',\mu)} &\hookrightarrow \widehat{C}_\emptyset^{g-1}(q^j)_{\mathrm{Frob}^j} \otimes_{\mathbb{Z}_q} \mathbb{F}_q \\ \text{et } \widehat{\Gamma}^{g-1}(V_\emptyset^j)_{(F^j \circ B', F^j \circ \mu)} &\hookrightarrow \widehat{C}_\emptyset^{g-1}(q^j)_{\mathrm{Ver}^j} \otimes_{\mathbb{Z}_q} \mathbb{F}_q \end{aligned}$$

dont les quatre espaces sources sont respectivement le graphe $\widehat{\Gamma}(F_1^j)_{(A,\lambda,\eta,P)}$ de la j -ième puissance F^j du morphisme de Frobenius

$$(\widehat{X}_{1,\mathbb{F}_q})_{(A,\lambda,\eta,P)} \longrightarrow (\widehat{X}_{1,\mathbb{F}_q})_{(F^*A, F^*\lambda, F^*\eta, F^*P)},$$

le graphe $\widehat{\Gamma}(V_\mu^j)_{v_0^j(\mathrm{Ver}^j)}$ de la j -ième puissance V^j de la correspondance Verschiebung

$$(\widehat{X}_{\mu,\mathbb{F}_q})_{(v_0(\mathrm{Ver})=(F^*A, F^*\lambda, q^{-1}F^*\eta, F^*H, F^*P^*))} \longleftarrow (\widehat{X}_{\mu,\mathbb{F}_q})_{(v_1(\mathrm{Ver})=(A,\lambda,\eta,H,P^*))},$$

le graphe $\widehat{\Gamma}^{g-1}(F_\emptyset^j)_{(B',\mu)}$ de la j -ième puissance F^j du morphisme de Frobenius

$$(\widehat{X}_{\emptyset,\mathbb{F}_q})_{(B',\mu)} \longrightarrow (\widehat{X}_{\emptyset,\mathbb{F}_q})_{(F^*B', F^*\mu)}$$

et le graphe $\widehat{\Gamma}^{g-1}(V_\emptyset^j)_{(B',\mu)}$ de la j -ième puissance V^j de la correspondance Verschiebung

$$(\widehat{X}_{\emptyset,\mathbb{F}_q})_{(F^*B', F^*\mu)} \longleftarrow (\widehat{X}_{\emptyset,\mathbb{F}_q})_{(B',\mu)}.$$

Un raisonnement analogue à celui utilisé dans la démonstration de la proposition 8.3.4 permet de vérifier que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Gamma}(F_1^j)_{(A,\lambda,\eta,P)} \hookrightarrow \widehat{C}_1^+(\nu(\gamma))_\rho & & \widehat{\Gamma}(V_\mu^j)_{v_0^j(\mathrm{Ver}^j)} \hookrightarrow \widehat{C}_\mu^+(\nu(\gamma))_\rho \\ \downarrow & \text{et} & \downarrow \\ \widehat{\Gamma}^{g-1}(F_\emptyset^j)_{(B',\mu)} \hookrightarrow \widehat{C}_\emptyset^{g-1}(\nu(\gamma))_{\rho_{B'}} & & \widehat{\Gamma}^{g-1}(V_\emptyset^j)_{(F^j \circ B', F^j \circ \mu)} \hookrightarrow \widehat{C}_\emptyset^{g-1}(\nu(\gamma))_{\rho_{B'}} \end{array}$$

sont cartésiens.

Considérons maintenant l'isogénie composée $\rho \circ \mathrm{Frob}^j$ (resp. $\rho \circ \mathrm{Ver}^j$). La composition des isogénies induit des morphismes :

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_j : \widehat{C}_1^+(\nu(\gamma))_\rho \times_{(\widehat{X}_1)_{(A_1,\lambda_1,\eta_1,P_1)}} \widehat{C}_1^+(q^j)_{\mathrm{Frob}^j} &\longrightarrow \widehat{C}_1^+(\nu(\gamma)q^j)_{\rho \circ \mathrm{Frob}^j} \\ (\text{resp. } \mathrm{pr}_j : \widehat{C}_\mu^+(\nu(\gamma))_\rho \times_{(\widehat{X}_\mu)_{(A_1,\lambda_1,\eta_1,H_1,P_1^*)}} \widehat{C}_\mu^+(q^j)_{\mathrm{Ver}^j}) &\longrightarrow \widehat{C}_\mu^+(\nu(\gamma)q^j)_{\rho \circ \mathrm{Ver}^j} \\ \mathrm{pr}_{\emptyset,j,F}^{g-1} : \widehat{C}_\emptyset^{g-1}(\nu(\delta))_{\rho_{B'}} \times_{(\widehat{X}_\emptyset^{g-1})_{(B'_1,\mu_1)}} \widehat{C}_\emptyset^{g-1}(q^j)_{\mathrm{Frob}^j} &\longrightarrow \widehat{C}_\emptyset^{g-1}(\nu(\delta)q^j)_{\rho_{B'} \circ \mathrm{Frob}^j} \\ \text{et } \mathrm{pr}_{\emptyset,j,V}^{g-1} : \widehat{C}_\emptyset^{g-1}(\nu(\delta))_{\rho_{B'}} \times_{(\widehat{X}_\emptyset^{g-1})_{(B'_1,\mu_1)}} \widehat{C}_\emptyset^{g-1}(q^j)_{\mathrm{Ver}^j} &\longrightarrow \widehat{C}_\emptyset^{g-1}(\nu(\delta)q^j)_{\rho_{B'} \circ \mathrm{Ver}^j} \end{aligned}$$

d'espaces de déformations. Le corollaire annoncé décrit les images des cycles

$$\begin{aligned} &\widehat{\Gamma}(T_1(\gamma))_\rho \times_{(\widehat{X}_1)_{(A_1,\lambda_1,\eta_1,P_1)}} \widehat{\Gamma}(F_1^j)_{(A_1,\lambda_1,\eta,P_1)} \\ \text{et } &\widehat{\Gamma}(T_\mu(\gamma))_\rho \times_{(\widehat{X}_\mu)_{(A_1,\lambda_1,\eta_1,H_1,P_1^*)}} \widehat{\Gamma}(V_\mu^j)_{(A_1,\lambda_1,\eta_1,H_1,P_1^*)} \end{aligned}$$

par le premier (resp. le deuxième) de ces morphismes. Pour alléger les notations, nous allons omettre les indices des complétés.

Corollaire 8.3.7

(1) *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{pr}_{j*}(\widehat{\Gamma}(T_1(\gamma)) \times_{\widehat{X}_1} \widehat{\Gamma}(F_1^j)) & \hookrightarrow & \widehat{C}_1^+(\nu(\gamma)q^j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{pr}_{\emptyset,j,F*}^{g-1}(\widehat{\Gamma}(T_{\emptyset}^{g-1}(\delta)) \times_{\widehat{X}_{\emptyset}} \widehat{\Gamma}^{g-1}(F_{\emptyset}^j)) & \hookrightarrow & \widehat{C}_{\emptyset}^{g-1}(\nu(\delta)q^j) \end{array}$$

est cartésien.

(2) *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{pr}_{j*}(\widehat{\Gamma}(T_{\mu}(\gamma)) \times_{\widehat{X}_{\mu}} \widehat{\Gamma}(V_{\mu}^j)) & \hookrightarrow & \widehat{C}_{\mu}^+(\nu(\gamma)q^j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{pr}_{\emptyset,j,V*}^{g-1}(\widehat{\Gamma}(T_{\emptyset}^{g-1}(\delta)) \times_{\widehat{X}_{\emptyset}} \widehat{\Gamma}^{g-1}(V_{\emptyset}^j)) & \hookrightarrow & \widehat{C}_{\emptyset}^{g-1}(\nu(\delta)q^j) \end{array}$$

est cartésien.

Remarque. — Les projections associées au morphisme de Frobenius et à la correspondance Verschiebung sont plates. On peut donc se contenter d'utiliser une définition naïve du produit de cycle pour composer ces correspondances avec la spécialisation des opérateurs de Hecke.

Démonstration. — La formation de l'image directe commute avec le changement de base par le morphisme plat $(\widehat{X}_1)_{(A_0, \lambda_0, \eta_0, P_0)} \rightarrow (\widehat{X}_{\emptyset}^{g-1})_{(B'_0, \mu_0)}$ (resp. $(\widehat{X}_{\mu})_{(A_2, \lambda_2, \eta_2, H_2, P_2^*)} \rightarrow (\widehat{X}_{\emptyset}^{g-1})_{(B'_2, \mu_2)}$, où $(A_2, \lambda_2, \eta_2, H_2, P_2^*) = v_1^j(\mathrm{Ver}^j)$ et $(B'_2, \mu_2) = v_1^j(\mathrm{Ver}_{B'}^j)$, de sorte que les j -ièmes puissances de Verschiebung s'écrivent $A_1 \rightarrow A_2$ et $B'_1 \rightarrow B'_2$). \square

Remarquons maintenant qu'il résulte de la démonstration de Faltings et Chai ([13], Ch. VII) des congruences d'Eichler-Shimura que l'on a les égalités

$$\begin{aligned} \sum_j \mathrm{pr}_{\emptyset,j,F*}^{g-1}(\widehat{\Gamma}(t_j)_{+\mathbb{F}_q} \times_{\widehat{X}_{\emptyset}} \widehat{\Gamma}(F_{\emptyset}^j)) &= \sum_j \mathrm{pr}_{\emptyset,j,F*}^{g-1}(\widehat{\Gamma}(t_j)_{-\mathbb{F}_q} \times_{\widehat{X}_{\emptyset}} \widehat{\Gamma}(F_{\emptyset}^j)) \\ \sum_j \mathrm{pr}_{\emptyset,j,V*}^{g-1}(\widehat{\Gamma}(t_j)_{+\mathbb{F}_q} \times_{\widehat{X}_{\emptyset}} \widehat{\Gamma}(V_{\emptyset}^j)) &= \sum_j \mathrm{pr}_{\emptyset,j,V*}^{g-1}(\widehat{\Gamma}(t_j)_{-\mathbb{F}_q} \times_{\widehat{X}_{\emptyset}} \widehat{\Gamma}(V_{\emptyset}^j)) \end{aligned}$$

(Pour les notations, cf. le début du paragraphe 8.3.3 et l'énoncé du théorème 8.2.1). Le théorème 8.2.1, qui résulte manifestement de ces deux égalités grâce au corollaire 8.3.7, est donc démontré.

Remarques

(1) Au lieu de nous ramener au résultat démontré par Faltings et Chai nous aurions pu nous inspirer de leur démonstration et analyser la spécialisation des correspondances de Hecke contractantes sur $X_1^{e,\text{ord}}$ et $X_\mu^{m,\text{ord}}$. Au-dessus de $X_1^{e,\text{ord}}$ cette spécialisation est visiblement donnée par la « transformation de Satake parahorique tordue » $\text{opp} \underline{S}_\Pi^{\Pi M_g}$ de 3.1 (resp. au-dessus de $X_\mu^{m,\text{ord}}$, par son analogue où on remplace le parahorique de Siegel opposé \overline{P}_g par P_g). La proposition 3.1.4 et le fait que la transformation de Satake parahorique tordue $\underline{S}_\Pi^{KM_1}$ n'est autre que la restriction $\text{res}_{M_1}^- (= (T^-)^{-1})$ permettent de comprendre la relation entre les deux points de vue.

(2) Alors que cette section était déjà écrite, nous nous sommes aperçus qu'on pouvait en fait donner une description en termes de théorie des groupes de la partie ordinaire de la réduction modulo q des opérateurs de Hecke parahoriques $T_0(\gamma)$, en généralisant un peu le contexte de 3.2.

Avant d'esquisser cette description, remarquons toutefois qu'elle ne permet pas directement de calculer l'action de $T_0(\gamma)$ sur $H^\bullet(X_0(N) \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, V_\lambda)$ (ou, ce qui revient au même, sur la partie de $H^\bullet(X_1(N) \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, V_\lambda)$ sur laquelle $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ agit par le caractère *trivial*, contrairement au cas que nous avons étudié dans cette section). En effet :

- (a) on ne sait pas si le lieu ordinaire est dense dans la réduction modulo q du graphe de $T_0(\gamma)$
- (b) même si le point précédent admet une réponse positive, cela ne détermine *a priori* que la partie régulière de la spécialisation de la correspondance cohomologique ; il est néanmoins peut être possible de déterminer la correspondance cohomologique $t_1^* \text{gr}_W^i \text{R}\Psi V_\lambda \rightarrow t_0^! \text{gr}_W^i \text{R}\Psi V_\lambda$ induite par $\text{sp}(T_0(\gamma))$ sur le gradué $\text{gr}_W^i \text{R}\Psi V_\lambda$ de $\text{R}\Psi V_\lambda$ vis-à-vis de la filtration de monodromie W .

Voici maintenant cette description. Considérons les vecteurs Π -invariants de la représentation $\frac{G_g}{P_g} \underline{\text{Ind}}\rho$, où ρ est une représentation de $M_g(\mathbb{Q}_q)$ engendrée par ses vecteurs Π_{M_g} -invariants — le cas universel est celui où ρ est la représentation naturelle sur $\mathbb{Z}[q^{-1}][M_g(\mathbb{Q}_q)/\Pi_{M_g}]$. On a

$$G_g(\mathbb{Q}_q) = \Pi \overline{P}_g(\mathbb{Q}_q) \amalg (\Pi w_0 \overline{P}_g(\mathbb{Q}_q))$$

et on a donc une graduation

$$\left(\frac{G_g}{P_g} \underline{\text{Ind}}\rho\right)^\Pi = \left(\frac{G_g}{P_g} \underline{\text{Ind}}\rho\right)_{\Pi \overline{P}_g}^\Pi \oplus \left(\frac{G_g}{P_g} \underline{\text{Ind}}\rho\right)_{\Pi w_0 \overline{P}_g}^\Pi = \rho^{\Pi M_g} \oplus \rho^{w_0 \Pi M_g w_0^{-1}}.$$

Considérons maintenant l'endomorphisme associé à l'opérateur de Hecke $\Pi\gamma\Pi$ comme une matrice-bloc, dont les coefficients sont des morphismes

$$\left(\frac{G_g}{P_g} \underline{\text{Ind}}\rho\right)_i^\Pi \longrightarrow \left(\frac{G_g}{P_g} \underline{\text{Ind}}\rho\right)_j^\Pi \quad (i, j \in \{\Pi \overline{P}_g, \Pi w_0 \overline{P}_g\}).$$

Ces morphismes sont définis par des convolutions (par exemple, le « coin supérieur droit » est défini par la convolution par la fonction $(w_0\Pi_{M_g}w_0^{-1}, \Pi_{M_g})$ -bi-invariante

$$m \longmapsto \int_{\bar{U}_g} 1_{w_0\Pi\gamma\Pi}(\bar{u}m) d\bar{u}$$

sur M_g); les quatre fonctions ainsi obtenues déterminent les quatre parties $\Gamma(T_0(\gamma))^{i,j}$ ($i, j \in \{(e, \text{ord}), (m, \text{ord})\}$) du lieu ordinaire de la réduction modulo q de $T_0(\gamma)$. Lorsque γ est dilatant, le premier point de 3.2.1 se généralise et la matrice de l'endomorphisme associé à $\Pi\gamma\Pi$ est triangulaire supérieure. On retrouve ainsi le fait que $\Gamma(T_0(\gamma))^{(m, \text{ord}), (e, \text{ord})}$ est vide dans ce cas (cf. 8.3.3).

9. Relation entre $R_{*,Q}$ et T_Q

9.1. Vérification des conditions locales en $S \cup Q$. — Nous pouvons maintenant vérifier que la représentation ρ_{T_Q} satisfait les conditions en $\ell \in S$ et en $q \in Q$.

9.2. Conditions en $\ell \in S$

9.2.1. $\ell \in S_1$. — la condition $\rho_{T_Q}(I_\ell) \cong \bar{\rho}(I_\ell)$ résulte de l'hypothèse $p \nmid \ell^4 - 1$ par le Lemme 4.3.6.

9.2.2. $\ell \in \text{UN}_{2,2}$. — On a vu que $S_{K_Q} \otimes \mathbb{Z}_\ell$ est à réduction semistable et que sa fibre spéciale possède deux composantes irréductibles. Utilisant la suite spectrale des cycles évanescents, il en résulte que l'opérateur de monodromie N sur $H^3(S_{K_Q}, V)$ est de carré nul. Il en est donc de même pour celui associé à la représentation ρ_{T_Q} . Cette matrice nilpotente d'ordre 2 est congrue à

$$N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mod. \mathfrak{M}_Q . Soit \mathfrak{gsp}_4 l'algèbre de Lie de G sur \mathcal{O} .

Lemme 9.2.1. — Si N est une matrice nilpotente d'ordre 2, dans \mathfrak{gsp}_4 congrue à

$$N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mod. \mathfrak{M}_Q , il existe une matrice $g_\ell \in G(T_Q)$ telle que $\text{Ad}(g_\ell)(N) = N_2$

Démonstration. — Soit $V_Q = T_Q^4$; soit \bar{N} l'endomorphisme de $\bar{V} = V_Q \otimes_{T_Q} k$ réduction de l'endomorphisme N modulo \mathfrak{M}_Q . Soit (\bar{e}_i) une base symplectique de \bar{V} telle que $\bar{N}(\bar{e}_2) = \bar{e}_1$ et $\bar{N}(\bar{e}_4) = -\bar{e}_3$, et $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_4 = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 = 1$. Soit e_2 relevant \bar{e}_2 , et e_4 relevant \bar{e}_4 de sorte que $e_2 \cdot e_4 = 0$. Posons $e_1 = N(e_2)$ et $e_3 = -N(e_4)$. On

voit que les e_i relèvent les \bar{e}_i et forment donc une base, *a priori* non nécessairement symplectique. Comme $N^2 = 0$ et que l'anneau \mathbf{T}_Q est réduit, on voit aisément que $N(e_1) = 0$ et $N(e_3) = 0$. De plus, comme $N \in \mathfrak{gsp}_4$, on a pour tout couple de vecteurs (x, y) de V_Q $x \cdot N(y) + N(x) \cdot y = 0$. On a donc $e_1 \cdot e_3 = 0$.

A priori, on sait seulement que $e_1 \cdot e_2 = \mu \in \mathfrak{m}_Q$, $e_3 \cdot e_4 = \mu' \in \mathfrak{m}_Q$ et que $e_1 \cdot e_4 = u$ où $u \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}_Q}$ car $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 0$ et $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_4 = 1$. On peut en fait supposer quitte à remplacer e_i par $u^{-1}e_i$ ($i = 1, 2$) que $u = 1$. On a alors $e_2 \cdot e_3 = 1$ car $e_2 \cdot N(e_4) + N(e_2) \cdot e_4 = 0$. Cherchons $\lambda \in \mathfrak{m}_Q$ tels que $e'_1 = e_1 + \lambda e_3$ et $e'_2 = e_2 - \lambda e_4$ satisfassent $e'_1 \cdot e'_2 = e'_1 \cdot e_3 = 0$, $e'_1 \cdot e_4 = 1$, $N(e'_2) = e'_1$, $N(e'_1) = 0$. Il suffit de résoudre $\mu - 2\lambda - \lambda^2\mu' = 0$. Cette équation en λ possède une unique solution dans \mathfrak{m}_Q .

Il est immédiat que l'on a alors $e'_2 \cdot e_4 = 0$, $e'_2 \cdot e_3 = 1$, $N(e'_2) = e'_1$, $N(e_4) = e_3$, $N(e'_1) = 0$. Ainsi (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base symplectique de V_Q relevant $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ dans laquelle la matrice de N est N_2 . \square

Remarque 9.2.2. — Le lemme précédent n'est pas vrai pour une déformation N dans \mathfrak{gsp}_4 de

$$N'_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

comme le montre l'exemple de la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & & p & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

pour laquelle il n'existe pas de matrice $g_\ell \in G(\mathbf{T}_Q)$ telle que $\mathrm{Ad}(g_\ell)(N) = N'_2$.

9.2.3. $\ell \in (\mathrm{PR}_2)$. — Comme \mathbf{T}_Q est réduite, pour étudier $\rho_{\mathbf{T}_Q}|_{I_\ell}$, on commence par étudier chaque composante irréductible du spectre de cette algèbre. Soit donc π' une représentation intervenant dans cette algèbre. Elle possède un vecteur non nul fixe par le parahorique de Klingen strict. Si elle en possédait un aussi pour le parahorique de Klingen lui-même, $\rho_{\pi'}|_{I_\ell}$ serait unipotente comme facteur direct de la cohomologie de la variété de Siegel de niveau parahorique. Ceci contredit la congruence $\rho_{\pi'}|_{I_\ell} \equiv \rho_\pi|_{I_\ell} \pmod{p}$ et la non trivialité de $\bar{\chi}$. C'est donc que π' intervient dans la χ -partie de la cohomologie pour un caractère non trivial de $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$. Par la Proposition 7.2.3, on sait donc que $\rho_\pi|_{I_\ell}$ est somme de copies de 1 et de χ , le caractère χ étant précisément celui de la définition 4.3.2 du module M . Comme le facteur de similitude vaut χ sur I_ℓ , on a nécessairement $\dim \rho_{\pi'}^{I_\ell} = 2$ et $\dim \rho_{\pi'}^{I_\ell, \chi} = 2$.

Comme $\bar{\chi} \neq 1$, on a $\rho_{\mathbf{T}_Q} = \rho_{\mathbf{T}_Q}^{I_\ell} \oplus \rho_{\mathbf{T}_Q}^{I_\ell, \chi T_Q}$. où $\chi_{\mathbf{T}_Q} = \nu \circ \rho_{\mathbf{T}_Q}|_{I_\ell}$. Par l'analyse ci-dessus, on sait que $\rho_{\mathbf{T}_Q}^{I_\ell}$ et $\rho_{\mathbf{T}_Q}^{I_\ell, \chi T}$ sont localement libres de rang 2; ils sont donc libres de rang 2. De plus, comme $\bar{\rho}^{I_\ell}$ est isotrope et que la forme symplectique sur \mathbf{T}_Q

relève celle sur $\bar{\rho}$, on voit facilement que $\rho_{\mathbf{T}_Q}^{I_\ell}$ est isotrope : on peut relever une base symplectique adaptée à la décomposition $\bar{\rho} = \bar{\rho}^{I_\ell} \oplus \bar{\rho}^{I_\ell, \bar{\chi}}$ en une base symplectique adaptée à $\rho_{\mathbf{T}_Q} = \rho_{\mathbf{T}_Q}^{I_\ell} \oplus \rho_{\mathbf{T}_Q}^{I_\ell, \chi_{\mathbf{T}_Q}}$. Ceci achève la démonstration.

9.2.4. $\ell \in S_3$. — Par [19], $\rho_{\pi'}|_{I_\ell}$ est unipotente ; comme l'image d'un générateur du groupe d'inertie modérée est congrue à un unipotent régulier, on construit facilement comme dans le cas $\text{UN}_{2,2}$ ci-dessus une base symplectique de \mathbf{T}_Q^4 dans laquelle sa matrice est l'unipotent régulier standard.

9.2.5. $\ell = r$. — Il s'agit de montrer que $\rho_{\mathbf{T}_Q}$ est non ramifiée en r . Pour cela, il suffit de montrer que $\rho_{\pi'}$ est non ramifiée en r pour chaque composante irréductible $F_{\pi'}$ de \mathbf{T}_Q . Si $\pi'^{\Pi_{1,r}, \chi} \neq 0$ pour un caractère non trivial de $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^\times$, l'argument de 9.2.3 montre que $\rho_{\pi'}^{I_r, \chi}$ est de dimension 2, mais χ est non trivial mod. ϖ car p ne divise pas $r - 1$. On trouve donc que la représentation résiduelle serait ramifiée en r ce qui est absurde. Enfin, si $\pi'_r{}^{\Pi_{1,r}} \neq 0$ mais π'_r non sphérique, on applique la Proposition.3.2.3 pour conclure que les valeurs propres de $U_{r,1}$ et $U_{r,2}$ sont données par des sommes de deux nombres dont l'un des quotients vaut $r^{\pm 1}$. Par réduction modulo ϖ , ceci contredit l'hypothèse $\mathbf{NR}(r)$ sur r .

9.3. Conditions en $q \in Q$. — On procède comme dans le cas (PR_2) : Si pour une composante π' on a $\pi'_q{}^{\Pi_{1,q}} \neq 0$ et si π'_q n'est pas sphérique, les valeurs propres de $U_{q,i}$ sur $\pi'_q{}^{\Pi_{1,q}}$ sont des sommes de deux paramètres de Hecke dont un quotient vaut $q^{\pm 1}$ (cf. Proposition 3.2.3). Comme $q \equiv 1 \pmod{p}$, ceci contredit l'hypothèse que les paramètres de Hecke de π_q sont deux à deux non congrus mod. ϖ . C'est donc que π'_q est soit sphérique, soit dans la χ -partie de la cohomologie pour un caractère χ non trivial de Δ_q . Par symplecticité de la représentation galoisienne si π'_q est sphérique, resp. par symplecticité et par le Th. 8.2.1 si π'_q est ramifiée, les valeurs propres $\alpha_{\pi'}$, $\beta_{\pi'}$, $\gamma_{\pi'}$ et $\delta_{\pi'}$ de $\rho_{\pi'}(\text{Fr}_q)$ (pour un relèvement quelconque Fr_q dans D_q du Frobenius géométrique) sont congrues à celles de $\bar{\rho}$ mod. ϖ et le plan associé à $\alpha_{\pi'}$, $\beta_{\pi'}$ est isotrope et non ramifié.

Comme les valeurs propres de $\bar{\rho}(\text{Fr}_q)$ sont deux à deux distinctes, il existe des éléments $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de \mathbf{T}_Q^\times et quatre modules $V_\alpha, V_\beta, V_\gamma$ et V_δ , libres de rang 1 sur \mathbf{T}_Q tels que $\rho_{\mathbf{T}_Q} = V_\alpha \oplus V_\beta \oplus V_\gamma \oplus V_\delta$ sur lesquels $\rho_{\mathbf{T}_Q}(\text{Fr}_q)$ agit par la valeur propre correspondante. Comme dans le cas PR_2 , on montre que le plan $V_\alpha \oplus V_\beta$ est isotrope. Il est non ramifié car ses localisations aux composantes π' le sont.

9.4. L'homomorphisme $R_{*,Q} \rightarrow \mathbf{T}_Q$. — On a vu (Prop. 5.3.3) que la représentation $\rho_{\mathbf{T}_Q}$ satisfait les conditions 1, 2, 5 et 6 de Sect. 5.2. On vient de vérifier qu'elle satisfait aussi les conditions 3 et 4. Il existe donc des homomorphismes canoniques de \mathcal{O} -algèbres locales $\phi_{*,Q} : R_{*,Q} \rightarrow \mathbf{T}_Q$ ($*$ = cris-ord) tels que $\phi_{*,Q} \circ \rho_{*,Q}^{\text{univ}}$ soit conjugué à $\rho_{\mathbf{T}_Q}$ dans $G(\mathbf{T}_Q)$.

Proposition 9.4.1. — *L'homomorphisme $\phi_{*,Q}$ est $\mathcal{O}[\Delta_Q]$ -linéaire et est surjectif. De plus l'homomorphisme naturel $\psi_Q : \mathbf{T}_Q \rightarrow \mathbf{T}$ est surjectif.*

Remarque. — On verra en fait que l'homomorphisme ψ_Q induit en fait un isomorphisme de \mathcal{O} -algèbres $\mathbf{T}_Q/I_Q\mathbf{T}_Q \cong \mathbf{T}$.

Démonstration. — La Proposition 7.2.3 montre en fait que pour tout $q \in Q$, le caractère $\chi_q : I_q \rightarrow \mathbf{T}_Q^\times$ associé à la restriction de $\rho_{\mathbf{T}_Q}$ à I_q est donné pour $\sigma_a \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_q(\zeta_q)/\mathbb{Q}_q)$, a dans le p -Sylow de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, par $\chi_q(\sigma_a) = \langle a \rangle$. En effet, si π'_q est de caractère central χ non trivial sur le p -Sylow de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, le caractère décrivant la restriction de $\rho_{\pi'}$ à I_q est $\sigma_a \mapsto \chi(a)$. Tandis que si π'_q est de caractère central trivial sur le p -Sylow de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, on a vu que π'_q est sphérique, et le caractère décrivant la restriction de $\rho_{\pi'}$ à I_q est donc trivial.

La surjectivité de $\phi_{*,Q}$ se montre comme dans la Proposition 4.3.8. Quant à celle de ψ_Q elle sera établie si on montre que \mathbf{T} est engendrée par les opérateurs de Hecke hors de NpQ . Ceci résulte par exemple du théorème de densité de Cebotarev et du fait que R et R_Q sont engendrés par les traces (*cf.* Theorem 3 dans [40]) et de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} R_Q & \longrightarrow & R \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{T}_Q & \longrightarrow & \mathbf{T} \end{array}$$

De manière plus directe, on peut utiliser le même argument que dans la démonstration de la Proposition 4.3.8. □

10. Cohomologie galoisienne

Dans cette section, on suppose $g = 2$. On note \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G sur k . La représentation adjointe de $\bar{\rho}$ sur \mathfrak{g} est notée $\mathrm{Ad}(\bar{\rho})$. Soit $\mathfrak{z} = k$ le centre de \mathfrak{g} . La décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}^{ss}$$

est stable par Γ . On note $\mathrm{Ad}^0(\bar{\rho})$ la restriction de $\mathrm{Ad}(\bar{\rho})$ à \mathfrak{g}^{ss} .

10.1. Groupe de Selmer. — Soit $Q \in \mathcal{Q}$. On identifie Q avec l'entier sans facteurs carrés produit des premiers $q \in Q$.

Pour $*$ $\in \{\mathrm{cris}\text{-ord}, \mathrm{ord}\}$ et pour chaque premier ℓ , on définit des sous-groupes $L_{*,Q,\ell} \subset H_{*,Q}^1(\mathbb{Q}_\ell, \mathrm{Ad}(\bar{\rho}))$ comme suit :

- pour ℓ ne divisant pas pQ ,

$$L_{*,Q,\ell} = H_{\mathrm{nr}}^1(\mathbb{Q}_\ell, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})) = H^1(D_\ell/I_\ell, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})^{I_\ell}),$$

– pour q divisant Q , avec les notations de Sect. 5.1, on note $\bar{\rho}_\alpha$ la restriction de $\bar{\rho}|D_q$ à la droite $\bar{V}_{\bar{\alpha}_q}$ et ainsi de suite pour les autres racines $\bar{\beta}_q, \bar{\gamma}_q, \bar{\delta}_q$. On peut alors décomposer

$$H_{\text{nr}}^1(\mathbb{Q}_q, \text{Ad}(\bar{\rho})) = H_{\text{nr}}^1(\mathbb{Q}_q, \text{Ad}(\bar{\rho}_\alpha)) \oplus H_{\text{nr}}^1(\mathbb{Q}_q, \text{Ad}(\bar{\rho}_\beta)) \oplus H^1(D_q, \text{Ad}(\bar{\rho}_\gamma)) \oplus H^1(D_q, \text{Ad}(\bar{\rho}_\delta))$$

Pour $c \in H_{\text{nr}}^1(\mathbb{Q}_\ell, \text{Ad}(\bar{\rho}))$, on note $c = (c_1, c_2, d_2, d_1)$ le quadruplet de ses composantes dans cette décomposition. On a alors :

$$L_{*,Q,q} = \{c = (c_1, c_2, d_2, d_1); c_1 + d_1 = c_2 + d_2, \quad d_2 - d_1 \text{ non ramifié}\}$$

– pour $\ell = p$, soit \mathfrak{n} resp. \mathfrak{b} l’algèbre de Lie des matrices nilpotentes resp. triangulaires supérieures de \mathfrak{g} . On voit aisément que l’ordinarité de $\bar{\rho}$ avec quatre poids différents entraîne que $H^0(D_p, \mathfrak{g}/\mathfrak{b}) = 0$, et par conséquent que l’homomorphisme $H^1(D_p, \mathfrak{b}) \rightarrow H^1(D_p, \mathfrak{g})$ est injectif. On identifie $H^1(D_p, \mathfrak{b})$ à son image dans $H^1(D_p, \mathfrak{g})$. On définit $L_{\text{ord},Q,p}$ comme le sous-module de $H^1(D_p, \mathfrak{g})$ donné par

$$L_{\text{ord},Q,p} = \text{Ker} (H^1(D_p, \mathfrak{b}) \longrightarrow H^1(I_p, \mathfrak{b}/\mathfrak{n})) .$$

On observe que

$$H^1(\mathbb{Q}_p, \mathfrak{g}) \cong \text{Ext}_{D_p, \text{sympl}}^1(\bar{\rho}, \bar{\rho})$$

classifie les extensions symplectiques de $\bar{\rho}|D_p$ par elle-même. Soit $H_f^1(\mathbb{Q}_p, \mathfrak{g})$ le sous-espace de $H^1(\mathbb{Q}_p, \mathfrak{g})$ qui classifie les extensions cristallines symplectiques. On pose

$$L_{\text{cris},Q,p} = H_f^1(\mathbb{Q}_p, \mathfrak{g}), \quad \text{et} \quad L_{\text{cris,ord},Q,p} = L_{\text{cris},Q,p} \cap L_{\text{ord},Q,p}$$

On définit le groupe de Selmer comme le sous-groupe de cohomologie galoisienne $NpQ\infty$ -ramifiée des classes dont les restrictions en chaque ℓ sont dans les groupes locaux $L_{*,Q,\ell}$:

$$H_{*,Q}^1(\mathbb{Q}, \text{Ad}(\bar{\rho})) = \text{Ker} \left(H^1(\mathbb{Q}, \text{Ad}(\bar{\rho})) \longrightarrow \bigoplus_{\ell} H^1(\mathbb{Q}_\ell, \text{Ad}(\bar{\rho}))/L_{*,Q,\ell} \right).$$

Notons que

$$\text{Ad}(\bar{\rho}) \cong \text{Ad}(\bar{\rho})^\vee$$

parce que, par dualité de Poincaré, on a

$$\bar{\rho}^\vee \otimes (\nu \circ \bar{\rho}) \cong \bar{\rho}.$$

Soit $H_{*,Q^\vee}^1(\mathbb{Q}, \text{Ad}(\bar{\rho})^\vee(1)) = H_{*,Q^\vee}^1(\mathbb{Q}, \text{Ad}(\bar{\rho})(1))$ le groupe de Selmer de la représentation $\text{Ad}(\bar{\rho})(1)$ défini par les conditions locales $[c]_\ell \in L_{*,Q,\ell}^\perp$ pour tout ℓ . L’orthogonal $L_{*,Q,\ell}^\perp$ de $L_{Q,\ell}$ dans $H^1(\mathbb{Q}_\ell, \text{Ad}(\bar{\rho})(1))$ est relatif à l’accouplement de dualité locale

$$H^1(\mathbb{Q}_\ell, \text{Ad}(\bar{\rho})) \times H^1(\mathbb{Q}_\ell, \text{Ad}(\bar{\rho})(1)) \longrightarrow H^2(\mathbb{Q}_\ell, k \otimes \mu_p) \cong k$$

10.2. Espace tangent de $\mathcal{F}_{*,Q}$. — Pour $[\rho] \in \mathcal{F}_{*,Q}(k[\varepsilon])$, on pose

$$\rho(\sigma) = \exp[\varepsilon \cdot c(\sigma)]\bar{\rho}(\sigma).$$

On a $c(\sigma\tau) = c(\sigma) + \mathrm{Ad}\bar{\rho}(\sigma)c(\tau)$. On note $[c]$ la classe de cohomologie de c . On a $\nu \circ \rho = \nu \circ \bar{\rho} \cdot \xi$ et $\xi = \exp[\varepsilon \cdot \theta]$, pour un homomorphisme $\theta : \Delta_Q \rightarrow \mathfrak{g}$. On a $\nu \circ c = \theta$. En particulier, pour tout $\ell \notin Q$, c_ℓ est à valeurs dans le sous-espace $\mathrm{Ad}^0 \bar{\rho} = \mathfrak{g}^{\mathrm{ss}}$ des éléments de trace nulle de $\mathrm{Ad}(\bar{\rho}) = \mathfrak{g}$.

Proposition 10.2.1. — *L'homomorphisme $[\rho] \mapsto [c]$ défini ci-dessus établit un isomorphisme de k -espaces vectoriels*

$$\mathcal{F}_{*,Q}(k[\varepsilon]) = H_{*,Q}^1(\mathbb{Q}, \mathrm{Ad}(\bar{\rho}))$$

Démonstration. — L'énoncé sans conditions locales est bien connu [35]. Il suffit d'étudier les restrictions $[c]_\ell$ de $[c]$ pour les différents premiers ℓ . Si ℓ ne divise pas NpQ , ρ et $\bar{\rho}$ sont non ramifiés, donc également c ; si ℓ divise N , on doit vérifier que

$$[c]_\ell \in H^1(D_\ell/I_\ell, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})^{I_\ell})$$

c'est-à-dire, par inflation-restriction, que la restriction de c à I_ℓ est un cobord. Si $\ell \in S_1$, la condition $\rho(I_\ell) \cong \bar{\rho}(I_\ell)$ équivaut à $c(I_\ell) = 0$.

Si $\ell \in \mathrm{UN}_{2,2} \cup S_3$, soit τ_ℓ un générateur du p -Sylow de l'inertie modérée. La condition $[\rho] \in \mathcal{F}_{*,Q}(k[\varepsilon])$ entraîne en particulier que $\rho(\tau_\ell) = g\bar{\rho}(\tau_\ell)g^{-1}$ pour un $g \in G(k[\varepsilon])$. En écrivant $g = \exp(\varepsilon Y)$, on obtient $c(\tau_\ell) = \mathrm{Ad}(\bar{\rho})(\tau_\ell)Y - Y$. Ainsi, c restreint à I_ℓ est un cobord.

Si $\ell \in \mathrm{PR}_2$, il résulte du Lemme 5.1.1 que $c(I_\ell) = 0$.

Si $\ell \in Q$, notons $\ell = q$. Rappelons que pour $q \in Q$, la restriction à D_q d'une déformation ρ de $\bar{\rho}$ se décompose en

$$\rho = \rho_\alpha \oplus \rho_\beta \oplus V_2$$

Il existe $X \in \mathfrak{g}$ tel que pour tout $\sigma \in D_q$, $c(\sigma) + \mathrm{Ad}(\bar{\rho})(\sigma)X - X = c_\alpha(\sigma) + c_\beta(\sigma) + d(\sigma)$ où $c_\alpha \in Z^1(D_q, \mathrm{Ad}(\bar{\rho}_\alpha))$ resp. $c_\beta \in Z^1(D_q, \mathrm{Ad}(\bar{\rho}_\beta))$, sont non ramifiés tandis que $d = \mathrm{diag}(d_2, d_1) \in Z^1(D_q, \mathrm{Ad}(\bar{V}_2))$ définit un élément $d_2 - d_1 \in H_{\mathrm{nr}}^1(\mathbb{Q}_q, k)$; on a de plus $c_1 + d_1 = c_2 + d_2$ (par symplecticité).

Enfin traitons le cas $\ell = p$; on a noté que

$$H^1(\mathbb{Q}_p, \mathrm{Ad}\bar{\rho}) \cong \mathrm{Ext}_{D_p, \mathrm{symp}}^1(\bar{\rho}, \bar{\rho}).$$

Comme ρ est cristalline, $[c]$ définit une extension symplectique cristalline, donc $[c] \in H_f^1(\mathbb{Q}_p, \mathfrak{g})$; si de plus ρ est ordinaire, on voit qu'à conjugaison dans $G(k[\varepsilon])$ près, $\rho|_{D_p}$ prend ses valeurs dans $B(k[\varepsilon])$ et a même diagonale que $\bar{\rho}$; pour simplifier les notations, ceci entraîne d'une part que $[c] \in H^1(D_p, \mathfrak{b})$ (identifié à un sous-groupe de $H^1(D_p, \mathfrak{g})$) et d'autre part que la restriction de c à l'inertie est à valeurs dans \mathfrak{n} . C'est-à-dire que $[c] \in L_p(\mathrm{ord}, Q, p)$.

Il est alors clair que si ρ est à la fois cristalline et ordinaire, $[c] \in L_p(\mathrm{cris}, \mathrm{ord}, Q)$.

Réciproquement, une classe $[c]$ dans $H_Q^1(\mathbb{Q}, \text{Ad}(\bar{\rho}))$ définit une déformation dans $\mathcal{F}_{*,c}Q(k[\varepsilon])$. □

Corollaire 10.2.2. — Soit $\mathfrak{M}_{*,Q}$ l'idéal maximal de $R_{*,Q}$; on a

$$\dim_k \mathfrak{M}_{*,Q}/(\mathfrak{M}_{*,Q}^2, \varpi) = \dim_k H_{*,Q}^1(\mathbb{Q}, \text{Ad}(\bar{\rho})).$$

À l'aide de la dualité globale de Poitou-Tate, nous allons établir

Théorème 10.2.3. — Pour $*$ = cris-ord, ou bien, si on suppose de plus **(ORR)**, pour $*$ = ord, le groupe de Selmer $H_{*,Q}^1(\mathbb{Q}, \text{Ad}(\bar{\rho}))$ est fini et on a l'inégalité

$$\dim_k \mathfrak{M}_{*,Q}/(\mathfrak{M}_{*,Q}^2, \varpi) \leq \#Q + \dim_k H_{*,Q^\vee}^1(\mathbb{Q}, \text{Ad}(\bar{\rho})(1))$$

En particulier, si $H_{*,Q^\vee}^1(\mathbb{Q}, \text{Ad}(\bar{\rho})(1)) = 0$, la \mathcal{O} -algèbre $R_{*,Q}$ peut être engendrée par $\#Q$ éléments.

10.3. Caractéristique d'Euler-Poincaré. — Soit \mathcal{D} la catégorie des $k[\Gamma]$ -modules (V, ψ) où V est un k -vectoriel de dimension finie, ψ est une forme symplectique non dégénérée sur V , préservée à un scalaire près par l'action de Γ , et

- V est de type $*$ en p , de poids de Hodge-Tate dans Π_w ,
- pour tout $q \in Q$, comme D_q -module, on a

$$V \cong A \oplus B$$

où A est un D_q -module non ramifié de dimension $(\dim_k V)/2$, et la restriction de B à I_q est donnée par un caractère χ_q de Δ_q

- pour tout $\ell \notin Q \cup \{p\}$, l'action de I_ℓ est somme directe de copies de $\bar{\rho}(I_\ell)$.

Cette catégorie additive est stable par sous-objets et quotients.

Pour tout $k[\Gamma]$ -module V , on rappelle l'isomorphisme

$$\text{(Ext)} \quad H^1(\Gamma, \text{End}_k(V)) \cong \text{Ext}_{k\Gamma}^1(V, V)$$

donné par $[c] \mapsto E$ où $E = V \oplus V$ muni de l'action de $\Gamma : g \cdot (v, v') = (g.v, g.v' + c_g \cdot g.v)$. Si l'on suppose que V est muni de la forme symplectique ψ , on munit $V \oplus V$ de la forme symplectique $\tilde{\psi}$ définie par $\psi_E((v, v'), (w, w')) = \psi(v, w') + \psi(v', w)$. Soit $\mathfrak{g} \subset \text{End}_k(V)$ l'algèbre de Lie de $\text{GSp}(\psi) \subset \text{GL}_k(V)$. En utilisant $\tilde{\psi}$ pour munir toute extension E de V par V d'une structure symplectique pour laquelle le sous-espace V est totalement isotrope, on voit que (Ext) induit un isomorphisme de k -vectoriels :

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) \cong \text{Ext}_{k\Gamma, \psi}^1(V, V).$$

On peut alors appliquer une variante directe du Théorème 2.41 de [8] :

$$H_{*,Q}^1(\mathbb{Q}, \text{Ad}(\bar{\rho})) = H_{\mathcal{D}}^1(\mathbb{Q}, \text{Ad}(\bar{\rho}))$$

où le membre de droite est défini par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathbb{Q}, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})) & \cong & \mathrm{Ext}_{k\Gamma, \psi}^1(\bar{\rho}, \bar{\rho}) \\ \cup & & \cup \\ H_{*,Q}^1(\mathbb{Q}, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})) & \cong & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}}^1(\bar{\rho}, \bar{\rho}) \end{array}$$

Le sous-groupe $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}}^1(\bar{\rho}, \bar{\rho})$ de $\mathrm{Ext}_{\psi}^1(\bar{\rho}, \bar{\rho})$ classe les extensions symplectiques (pour une forme non dégénérée pour laquelle V est totalement isotrope) qui sont objets de \mathcal{D} .

On en déduit comme dans [8] Th. 2.19 la formule

Théorème 10.3.1. — Soit $h^0 = \dim H^0(\mathbb{Q}, \mathrm{Ad}(\bar{\rho}))$, $h^{0,*} = \dim H^0(\mathbb{Q}, \mathrm{Ad}(\bar{\rho}(1)))$, et pour tout ℓ , $h_{\ell}^0 = \dim_k H^0(D_{\ell}, \mathrm{Ad}(\bar{\rho}))$. On a

$$\dim H_{*,Q}^1(\mathbb{Q}, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})) - \dim H_{*,Q^{\vee}}^1(\mathbb{Q}, \mathrm{Ad}(\bar{\rho}(1))) = h^0 - h^{0,*} + \sum_{\ell} (\dim_k L_{*,Q,\ell} - h_{\ell}^0)$$

10.4. Calculs de cohomologie locale

Proposition 10.4.1. — On a

- (1) $h_{\infty}^0 = 5, L_{Q,\infty} = 0$.
- (2) pour $q \in Q$, $\dim L_{*,Q,q} - h_q^0 = 1$.
- (3) $\dim_k L_{*,Q,p} - h_p^0 \leq 4$ si $*$ = cris-ord, ou bien $*$ = ord sous la condition **(ORR)**
- (4) pour tout autre place ℓ , $\dim_k L_{Q,\ell} - h_{\ell}^0 = 0$.

Les termes globaux sont donnés par $h^0 = 1$ et $h^{0,*} = 0$.

Avant de donner la démonstration, montrons que ces calculs entraînent le Théorème 4.3.9 :

On a

$$\dim H_{*,Q}^1(\mathbb{Q}, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})) - \dim H_{*,Q^{\vee}}^1(\mathbb{Q}, \mathrm{Ad}(\bar{\rho}(1))) \leq \#Q + 1 - h_{\infty}^0 + L_{Q,p} - h_p^0 \leq \#Q.$$

Démonstration de la Proposition. — On a $H^0(\mathbb{R}, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})) = (\mathrm{Ad}(\bar{\rho}))^{c=1}$; or

$$\bar{\rho}(c) \equiv \begin{pmatrix} 1_2 & \\ & -1_2 \end{pmatrix}$$

donc $h_{\infty}^0 = 5$ et $L_{*,Q,\infty} = 0$ car $D_{\infty} = I_{\infty}$.

Pour $q \in Q$, on a

$$\begin{aligned} L_{*,Q,q} = \{ & c = (c_1, c_2, d_2, d_1) \in H_{\mathrm{nr}}^1(\mathbb{Q}_q, \mathrm{Ad}(\bar{\rho}_{\alpha})) \oplus H_{\mathrm{nr}}^1(\mathbb{Q}_q, \mathrm{Ad}(\bar{\rho}_{\beta})) \oplus H^1(D_q, \mathrm{Ad}(\bar{\rho}_{\gamma})) \\ & \oplus H^1(D_q, \mathrm{Ad}(\bar{\rho}_{\delta})); c_1 + d_1 = c_2 + d_2, d_2 - d_1 \in H^1(D_q/I_q, k) \} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{Q}_q, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})) = \{ & c = (c_1, c_2, d_2, d_1) \in H^0(\mathbb{Q}_q, \mathrm{Ad}(\bar{\rho}_{\alpha}) \oplus \mathrm{Ad}(\bar{\rho}_{\beta})) \\ & \oplus H^0(\mathbb{Q}_q, \mathrm{Ad}(\bar{\rho}_{\gamma}) \oplus \mathrm{Ad}(\bar{\rho}_{\delta})); c_1 + d_1 = c_2 + d_2 \}. \end{aligned}$$

Comme D_q -modules, on a $\text{Ad}(\bar{\rho}_\alpha) = \text{Ad}(\bar{\rho}_\beta) = \dots = k$; on a donc des isomorphismes

$$H^0(\mathbb{Q}_q, \text{Ad}(\bar{\rho})) \cong H^0(D_q/I_q, k)^{\oplus 2} \oplus H^0(D_q, k)$$

par $(c_1, c_2, d_2, d_1) \mapsto (c_1, d_2 - d_1, d_1)$ et

$$L_{Q,q} \cong H^1(D_q/I_q, k)^{\oplus 2} \oplus H^1(D_q, k)$$

par l'application analogue $(c_1, c_2, d_2, d_1) \mapsto (c_1, d_2 - d_1, d_1)$. On fait ainsi apparaître dans l'expression de $\dim_k L_{*,Q,q} - h_q^0$ deux « différences de Herbrand » non ramifiées : leur contribution est nulle ; le troisième terme de la somme fournit la contribution

$$h^1(k) - h^0(k)$$

qui vaut 1.

Si ℓ divise N , il y a trois cas à traiter.

- Si $\ell \in S_1$, par le lemme de Schur, la dimension de $\text{Hom}_{D_\ell}(\bar{\rho}, \bar{\rho})$ vaut 1. Celle de $H^1(D_\ell/I_\ell, \text{Ad}(\bar{\rho}^{\ell})) = \text{Hom}(\widehat{\mathbb{Z}}, k)$ vaut 1 ; donc $\dim_k L_{*,Q,\ell} - h_\ell^0 = 0$. Si ℓ est non ramifiée, le quotient de Herbrand donne encore $\dim_k L_{*,Q,\ell} - h_\ell^0 = 0$.

- Lorsque ℓ est de type Un_2 ou bien si $\ell \in S_3$, le cocycle c associé à une déformation ρ sur $A = k[\varepsilon]$ est conjugué à un cocycle non ramifié. En effet, la p -partie du groupe d'inertie modérée est procyclique : $I_\ell^{p\text{-mod}} \cong \mathbb{Z}_p$. Soit τ un générateur. Soit N le radical unipotent du Borel standard de G et \mathfrak{n} son algèbre de Lie. On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}$. De plus, $\rho(\tau) \in N(A)$ et $\rho(\tau) = \bar{\rho}(\tau) \cdot \exp(\varepsilon c_\tau)$ pour un $c_\tau \in \mathfrak{n}$. Il existe $X_\tau \in \mathfrak{t}$ tel que

$$\exp(\varepsilon X_\tau) \bar{\rho}(\tau) \exp(-\varepsilon X_\tau) = \bar{\rho}(\tau) \cdot \exp(\varepsilon c_\tau)$$

Par conséquent, c_ℓ est strictement conjugué à un cocycle non ramifié en ℓ ; On a donc $[c]_\ell \in H_{\text{nr}}^1(\mathbb{Q}_\ell, \text{Ad}(\bar{\rho})) = L_{Q,\ell}$ pour un $c_\tau \in \mathfrak{n}$.

- Dans le cas $\ell \in \text{PR}_2$, le cocycle c est encore conjugué à un cocycle non ramifié. En effet, le caractère χ_ℓ associé à $\rho|_{I_\ell}$ se factorise par $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$; comme p ne divise pas $\ell - 1$, la réduction mod. $\mathfrak{m}_A = k \cdot \varepsilon$ induit une bijection $\mu_{\ell-1}(k[\varepsilon]) \cong \mu_{\ell-1}(k)$, par conséquent $c_\ell = 0$. On a donc

$$[c]_\ell \in H_{\text{nr}}^1(\mathbb{Q}_\ell, \text{Ad}(\bar{\rho})) = L_{Q,\ell}.$$

Pour le calcul du h^0 global, on utilise le fait que par l'hypothèse (RLI₂), le groupe $\text{Im}(\bar{\rho})$ contient, à conjugaison près, le tore semi-simple maximal et l'élément J (modulo le centre) On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{ss} \oplus \mathfrak{z}$ et $\mathfrak{g}^{ss} = \mathfrak{t}^{ss} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-$. Par action adjointe, on voit que $H^0(\langle J \rangle \times T^{ss}, \mathfrak{g}^{ss}) = 0$, donc $h^0 = 1$. Pour le twist par le caractère cyclotomique, on a en outre $H^0(\Gamma, k(1)) = 0$, donc $h^{0,*} = 0$.

Traisons le cas où $\ell = p$. On considère d'abord le cas $*$ = cris-ord. Soit $\text{Rep}_{\text{cris}, [0, p-1]}(k\Gamma)$ la sous-catégorie de $\text{Rep}(k\Gamma)$ des représentations de Γ de dimension finie sur k , qui sont cristallines de poids de Hodge-Tate contenus dans

$[0, p - 1[$. En notant $\mathfrak{g} = \mathrm{End}_{k, \psi} \bar{V}$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathbb{Q}_p, \mathfrak{g}) & \cong & \mathrm{Ext}_{\mathrm{Rep}(k\Gamma), \psi}^1(\bar{V}, \bar{V}) \\ \cup & & \cup \\ H_f^1(\mathbb{Q}_p \mathfrak{g}) & \cong & \mathrm{Ext}_{\mathrm{Rep}_{\mathrm{cris}, [0, p-1[}(k\Gamma), \psi}^1(\bar{V}, \bar{V}) \end{array}$$

La catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathrm{cris}, [0, p-1[}(k\Gamma)$ est équivalente à la catégorie abélienne des ϕ -modules filtrés admissibles $MF_{k, [0, p-1[}$ par le foncteur D de Fontaine-Laffaille (on sait maintenant que la condition de faible admissibilité suffit). En posant $M = D(\bar{V})$, on a donc

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{Rep}_{\mathrm{cris}, [0, p-1[}, \psi}^1(k\Gamma)(\bar{V}, \bar{V}) \cong \mathrm{Ext}_{MF_{k, [0, p-1[}, \psi}^1(M, M)$$

On dit qu'un objet de $MF_{k, [0, p-1[}$ est régulier si tous ses nombres de Hodge sont égaux à 1. L'objet M associé à $\bar{\rho}$ est régulier de dimension 4. l'analogie du lemme V.4.6 de [24] :

Lemme 10.4.2. — *On a*

$$\dim_k H_f^1(\mathbb{Q}_p, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})) - h_p^0(\mathrm{Ad}(\bar{\rho})) = 4.$$

Il en résulte immédiatement le

Corollaire 10.4.3. — *Pour $*$ = cris-ord on a $\dim_k L_{*, Q, p} - h_p^0 = 4$ et pour $*$ = cris-ord on a $\dim_k L_{*, Q, p} - h_p^0 \leq 4$.*

Démonstration. — Observons que comme M est de poids $< p - 1$, on a

$$\mathrm{Ext}_{MF_{k, \psi}}^1(M, M) = \mathrm{Ext}_{MF_{k, [0, p-1[}, \psi}^1(M, M).$$

On peut réécrire le membre de gauche comme

$$\dim_k \mathrm{Ext}_{MF_{k, \psi}}^1(M, M) - \dim_k \mathrm{Hom}_{MF_{k, \psi}}(M, M)$$

Soit

$$\mathcal{E} : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

une extension symplectique définissant un élément de $\mathrm{Ext}_{MF_{k, \psi}}^1(M, M)$. Rappelons que, par définition, π est strictement compatible aux filtrations; il admet donc une section $s : M \rightarrow E$ qui est un morphisme de modules filtrés (d'image totalement isotrope pour ψ_E). L'ensemble de ces sections est un espace principal homogène sous

$$\mathrm{End}_{\mathrm{fil}, \psi}(M) = \{X \in \mathrm{End}_{\mathrm{fil}}(M) ; \psi(Xv, w) + \psi(v, Xw) = c(X)\}$$

où $c(X)$ désigne une constante de k qui dépend de X .

Pour chaque s , on a

$$E = i(M) \oplus s(M), \quad \text{et} \quad \mathrm{gr}^\bullet E = \mathrm{gr}(i)(\mathrm{gr}^\bullet M) \oplus \mathrm{gr}(s)(\mathrm{gr}^\bullet M)$$

On procède aux identifications

$$s(M) \xrightarrow{\pi} M, \quad \mathrm{gr}^\bullet M \xrightarrow{\mathrm{gr}(\pi)} \mathrm{gr}(s)(\mathrm{gr}^\bullet M)$$

Dans ces identifications, l'homomorphisme ϕ s'écrit matriciellement

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_M & \mu \\ 0 & \phi_M \end{pmatrix}$$

pour un $\mu \in \text{Hom}(\text{gr}^\bullet M, M)$ donné par

$$\mu = \phi_E \circ \text{gr}(s) - s \circ \phi_M.$$

Via le scindage canonique de la filtration de Hodge [67], on peut identifier

$$(W) \quad IW_M : M \cong \text{gr}^\bullet M, \quad IW_E : E \cong \text{gr}^\bullet E.$$

Les endomorphismes $\phi_M \circ IW$ et $\phi_E \circ IW$ sont symplectiques; il en est donc « de même » pour μ : pour tout couple de vecteurs $v, w \in M$,

$$\psi(\mu(v), w) + \psi(v, \mu(w)) = c(\mu)$$

pour une constante $c(\mu)$ indépendante de v, w . On note $\text{End}_\psi(M, M)$ le k -sous-espace de ces endomorphismes.

Si l'on remplace s par $s + \alpha$ pour un $\alpha \in \text{End}_{\text{fil}, \psi}(M)$, μ devient

$$\mu + \phi_M \circ \text{gr}(\alpha) - \alpha \circ \phi_M$$

La flèche $E \mapsto \mu$ établit donc un isomorphisme

$$\text{Ext}_{MF_k, \psi}^1(M, M) \cong \text{Hom}_\psi(M, M) / \{ \phi_M \circ \text{gr}(\alpha) - \alpha \circ \phi_M ; \alpha \in \text{Hom}_{\text{fil}, \psi}(M, M) \}$$

De plus

$$\text{Hom}_{MF_k, \psi}(M, M) = \{ \alpha \in \text{Hom}_{\text{fil}, \psi}(M, M) ; \phi_M \circ \text{gr}(\alpha) = \alpha \circ \phi_M \}$$

d'où la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{MF_k, \psi}(M, M) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{fil}, \psi}(M, M) \xrightarrow{j} \text{Hom}_\psi(M, M) \longrightarrow \text{Ext}_{MF_k}^1(M, M) \longrightarrow 0$$

où $j(\alpha) = \phi_M \circ \text{gr}(\alpha) - \alpha \circ \phi_M$. Donc

$$\begin{aligned} \dim_k \text{Ext}_{MF_k, \psi}^1(M, M) - \dim_k \text{Hom}_{MF_k, \psi}(M, M) \\ = \dim_k \text{Hom}_\psi(M, M) - \dim_k \text{Hom}_{\text{fil}, \psi}(M, M). \end{aligned}$$

Par régularité de $M = D(\overline{V})$, $\text{Hom}_{\text{fil}, \psi}(M, M)$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Borel de \mathfrak{g} , donc est de dimension 7. La différence vaut donc $11 - 7 = 4$. \square

Il reste à traiter le cas $\ell = p$ et $\ast = \text{ord}$.

Lemme 10.4.4. — *Sous l'hypothèse (ORR), on a $\dim_k L_{\text{ord}, Q, p} - h_p^0 \leq 4$.*

Démonstration. — On rappelle que $\bar{\rho}$ est ordinaire avec poids distincts ; en effet, les éléments de $\Pi_{\omega} = \{0, a_1 + 1, a_2 + 2, a_1 + a_2 + 3\}$ ($0 \leq a_1 \leq a_2$ et $a_1 + a_2 + 3 < p - 1$) sont distincts et strictement plus petits que $p - 1$. Un calcul simple montre que ceci entraîne que $H^0(I_p, \mathfrak{n}) = 0$. La dualité locale montre que $H^2(D_p, \mathfrak{n}) = 0$ si et seulement si $H^0(D_p, \mathfrak{n}^\vee(1)) = 0$. Ceci aura bien lieu si la condition **(ORR)** est satisfaite. Une chasse au diagramme facile donne alors une suite exacte longue :

$$0 \longrightarrow H^0(D_p, \mathfrak{b}) \longrightarrow H^0(D_p, \mathfrak{b}/\mathfrak{n}) \longrightarrow H^1(D_p, \mathfrak{n}) \longrightarrow L_{\text{ord},p} \longrightarrow H^1(D_p/I_p, \mathfrak{b}/\mathfrak{n})$$

On a donc $\dim_k L_{\text{ord},p} - h^0(D_p, \mathfrak{b}) \leq h^1(D_p, \mathfrak{n}) - h^0(D_p, \mathfrak{b}/\mathfrak{n}) + h^1(D_p/I_p, \mathfrak{b}/\mathfrak{n})$. Or, on voit facilement que $h^0(D_p, \mathfrak{b}/\mathfrak{n}) = 3 = h^1(D_p/I_p, \mathfrak{b}/\mathfrak{n})$. On a donc $\dim_k L_{\text{ord},p} - h^0(D_p, \mathfrak{g}) \leq h^1(D_p, \mathfrak{n})$. $h^1(D_p, \mathfrak{n}) = \dim \mathfrak{n} + h^0(D_p, \mathfrak{n}) + h^2(D_p, \mathfrak{n})$. Les hypothèses entraînent $h^0(D_p, \mathfrak{n}) = h^2(D_p, \mathfrak{n}) = 0$. On trouve donc $h^1(D_p, \mathfrak{n}) = 4$ et $\dim_k L_{\text{ord},p} - h^0(D_p, \mathfrak{g}) \leq 4$. \square

10.5. Application du théorème de densité de Chebotarev

Théorème 10.5.1. — Soit $r = \dim_k H_{\mathcal{O}}^1(\mathbb{Q}, \text{Ad}(\bar{\rho}(1)))$. Pour tout $m \geq 1$, il existe $Q_m \in \mathcal{Q}$ tel que

- (1) $\#Q_m = r$;
- (2) Pour tout $q \in Q_m$, $q \equiv 1 \pmod{p^m}$;
- (3) $H_{Q_m}^1(\mathbb{Q}, \text{Ad}(\bar{\rho})(1)) = 0$;
- (4) $\bar{\rho}$ possède 4 valeurs propres distinctes dans k .

Pour tout $q \in Q_m$, on distingue deux valeurs propres $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_q$ et $\bar{\beta} = \bar{\beta}_q$, les autres étant données par $\bar{\alpha}_q \bar{\delta}_q = \bar{\beta}_q \bar{\gamma}_q = \bar{\omega}_\pi(q)$.

Démonstration. — Nous suivons de près la démonstration de Wiles présentée dans [8] Th. 2.40 et sa généralisation dans [24] Theorem V.5.3. D’abord, on observe que pour $q \in \mathcal{Q}$, l’isomorphisme

$$L_{Q,q} \cong H_{\text{nr}}^1(\mathbb{Q}_q, k)^{\oplus 2} \oplus H^1(D_q, k)$$

donné par $(c_1, c_2, d_2, d_1) \mapsto (c_1, d_2 - d_1, d_1)$ induit un isomorphisme

$$L_{Q,q}^\perp \cong H_{\text{nr}}^1(\mathbb{Q}_q, k(1))^{\oplus 2} \oplus 0$$

C’est-à-dire que $L_{Q,q}^\perp$ consiste en les classes non ramifiées de composante nulle sur $\text{Ad}(\bar{\rho}_\delta)(1)$. De plus comme $q \equiv 1 \pmod{p}$, le D_q -module $\text{Ad}(\bar{\rho}_\delta)(1)$ est trivial

$$H_{Q^*}^1(\mathbb{Q}, \text{Ad}(\bar{\rho})(1)) = \text{Ker}[H_{\mathcal{O}}^1(\mathbb{Q}, \text{Ad}(\bar{\rho})(1)) \longrightarrow \bigoplus_{q \in \mathcal{Q}} H^1(D_q/I_q, \text{Ad}(\bar{\rho}_\delta)(1))]$$

Donc, il suffit de trouver des ensembles Q_m satisfaisant (2) et (4) et de sorte que

$$H_{\mathcal{O}}^1(\mathbb{Q}, \text{Ad}(\bar{\rho})(1)) \longrightarrow \bigoplus_{q \in Q_m} H^1(D_q/I_q, \text{Ad}(\bar{\rho}_\delta)(1))$$

soit injective. En observant que $\dim_k H^1(D_q/I_q, \text{Ad}(\bar{\rho}_\delta)(1)) = 1$, on pourra ensuite faire chuter le cardinal d’unité en unité jusqu’à r .

Soit $\psi \in H^1(\mathbb{Q}, \text{Ad}(\bar{\rho})(1))$; il suffit de trouver q satisfaisant (2) et (4) de sorte que $\text{res}_q[\psi] \in H^1(D_q/I_q, \text{Ad}(\bar{\rho}_\delta)(1))$ soit v non trivial. Par le théorème de densité de Chebotarev, il suffit de trouver $\sigma \in \Gamma$ tel que

- (1) σ fixe $\mathbb{Q}(\zeta_{p^m})$
- (2) $\bar{\rho}(\sigma)$ a 4 valeurs propres distinctes dans k ;
- (3) il y a une valeur propre distinguée δ de $\bar{\rho}(\sigma)$ telle que $\psi(\sigma) \notin \text{Ad}(\bar{\rho}_\delta)'(1)$.

où $\text{Ad}(\bar{\rho}_\delta)'(1)$ est le sous-espace de codimension 1 défini par les valeurs propres de $\bar{\rho}(\sigma)$ autres que δ .

Soit $\psi \neq 0$. On procède comme dans [24] (V.3.5.3) (suivant [65] et [8]). Pour tout $m \geq 0$, soit $K_m = \mathbb{Q}(\zeta_{p^m})$ et L_m/K_m la sous-extension de $\bar{\mathbb{Q}}/K_m$ fixée par le noyau de la représentation $\text{Ad}(\bar{\rho})$ restreinte à Γ_{K_m} .

On va d'abord voir que l'image de ψ dans $\text{Hom}_{\text{Gal}(L_m/\mathbb{Q})}(\Gamma_{L_m}, \text{Ad}(\bar{\rho})(1))$ par restriction est non triviale.

Par la suite d'inflation-restriction, il suffit de montrer que

$$H^1(L_m/\mathbb{Q}, \text{Ad}(\bar{\rho})(1)) = 0.$$

Pour cela, on considère la suite d'inflation-restriction relative à $\mathbb{Q} \subset L_1 \subset L_m$:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^1(L_1/\mathbb{Q}, \text{Ad}(\bar{\rho})(1)^{\Gamma_{L_1}}) &\longrightarrow H^1(L_m/\mathbb{Q}, \text{Ad}(\bar{\rho})(1)) \\ &\longrightarrow H^1(L_m/L_1, \text{Ad}(\bar{\rho})(1))^{\Gamma} \end{aligned}$$

Or, Γ_{L_1} agit trivialement sur $\text{Ad}(\bar{\rho})(1)$, donc

$$H^1(L_m/L_1, \text{Ad}(\bar{\rho})(1))^{\Gamma} = \text{Hom}(\text{Gal}(L_m/L_1), [\text{Ad}(\bar{\rho})(1)]^{\Gamma})$$

On a

$$[\text{Ad}(\bar{\rho})(1)]^{\Gamma} = [\text{Ad}(\bar{\rho})(1)]^{\text{Gal}(L_1/\mathbb{Q})} \subset [\text{Ad}(\bar{\rho})(1)]^{\text{Gal}(L_1/L_0)}$$

On va montrer que ce dernier espace est nul. La représentation de $\text{Gal}(L_1/L_0)$ sur $\text{Ad}(\bar{\rho})(1)$ est somme de copies de μ_p et le groupe $\text{Gal}(L_1/L_0)$ s'identifie à un sous-groupe R de $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})$ par restriction. Il suffit de voir que R est non trivial. Rappelons que l'on a supposé $\text{Im } \bar{\rho} = H'$. Soit $\mathbb{Q}(\bar{\rho})$ le corps fixé par le noyau de $\bar{\rho}$. On a donc $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\bar{\rho})/\mathbb{Q}) \cong H'$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & H^1 & \longrightarrow & H' & \xrightarrow{\nu} & \nu(H') & \longrightarrow & 1 \\ & & \cup & & \cup & & \cup & & \\ 1 & \longrightarrow & H^1 \cap Z & \longrightarrow & H' \cap Z & \longrightarrow & \nu(H' \cap Z) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Par définition de la représentation adjointe, L_0 est le sous-corps de $\mathbb{Q}(\bar{\rho})$ fixé par $Z \cap H'$. Soit \mathbb{Q}'' le corps fixé par H^1 . Par notre hypothèse, deux cas sont possibles pour H' .

- Si $H' = G(k')'$, H^1 est le groupe dérivé de H' , donc $\mathbb{Q}'' = \mathbb{Q}^{ab} \cap \mathbb{Q}(\bar{\rho}) = \mathbb{Q}(\nu \circ \bar{\rho})$; on a $\text{Gal}(\mathbb{Q}''/\mathbb{Q}) \cong \nu(H')$ et $\mathbb{Q}(\mu_p) \cap \mathbb{Q}(\bar{\rho}) = \mathbb{Q}(\mu_p^{\otimes w})$.

– si $H' = \langle w \rangle \rtimes (\mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(2))^0(k')$ avec $w = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ où $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $H^1 = \langle w \rangle \rtimes (H', H')$, et le plus grand quotient abélien de H' est $\langle w \rangle \times \nu(H')$. Soit \mathbb{Q}''' le corps fixé par (H', H') . On a $\mathbb{Q}''' = \mathbb{Q}^{ab} \cap \mathbb{Q}(\bar{\rho})$, et c'est une extension quadratique de $\mathbb{Q}'' = \mathbb{Q}(\nu \circ \bar{\rho})$; Rappelons que l'hypothèse sur l'image du sous-groupe d'inertie en p entraîne que $w \notin \bar{\rho}(I_p)$, on a donc $\mathbb{Q}(\mu_p) \cap \mathbb{Q}''' = \mathbb{Q}(\mu_p) \cap \mathbb{Q}''$ et à nouveau, $\mathbb{Q}(\mu_p) \cap \mathbb{Q}(\bar{\rho}) = \mathbb{Q}(\mu_p^{\otimes w})$.

Dans les deux cas, soit $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'' \cap \mathbb{Q}(\mathrm{Ad}(\bar{\rho}))$; c'est le sous-corps de \mathbb{Q}'' fixé par $\nu(H' \cap Z)$. Il est au plus quadratique sur \mathbb{Q} . Les corps K_0 et \mathbb{Q}'' sont disjoints sur \mathbb{Q}' et par conséquent on a une inclusion de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q}(\mu_p^{\otimes w}))$ dans la restriction R de $\mathrm{Gal}(L_1/L_0)$ à $\mathbb{Q}(\mu_p)$. Ce sous-groupe est non trivial car $\omega \neq 1$ sur $\mathrm{Ker} \omega^w$ (puisque par hypothèse, $w \not\equiv 1 \pmod{p-1}$). Ceci achève la démonstration.

On voit donc que la flèche d'inflation induit

$$H^1(L_1/\mathbb{Q}, \mathrm{Ad}(\bar{\rho}(1))^{\Gamma_{L_1}}) \cong H^1(L_m/\mathbb{Q}, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})(1))$$

En outre, la suite d'inflation-restriktion appliquée à $\mathbb{Q} \subset L_0 \subset L_1$ donne

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^1(L_0/\mathbb{Q}, \mathrm{Ad}(\bar{\rho}(1))^{\mathrm{Gal}(L_1/L_0)}) &\longrightarrow H^1(L_1/\mathbb{Q}, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})(1)) \\ &\longrightarrow H^1(L_1/L_0, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})(1))^{\mathrm{Gal}(L_0/\mathbb{Q})}. \end{aligned}$$

Le membre de droite s'annule car $[L_1 : L_0]$ est premier à p et le membre de gauche s'annule par le même argument que ci-dessus.

On remarque alors que la restriction à Γ_{K_m} de $\bar{\rho}$ reste absolument irréductible. En effet, on vient de voir que sous l'hypothèse (RLI_2) , le plus grand quotient abélien p -ramifié de H' est donné par $H' \rightarrow \mathrm{Aut}(\mu_p^{\otimes w})$ et on a $K_m \cap \mathbb{Q}(\bar{\rho}) = \mathbb{Q}(\mu_p^{\otimes w})$. Donc $H^1 \subset \mathrm{Gal}(K_m(\bar{\rho})/K_m)$, et l'action de H^1 est irréductible. Notons qu'on a aussi pour tout $m \geq 1$, $K_m \cap L_0 = \mathbb{Q}'$ et donc $\mathrm{Gal}(L_m/K_m) = \mathrm{Gal}(L_0/\mathbb{Q}')$ par restriction.

On est donc ramené, étant donné ψ non nul dans

$$H^1_{\mathcal{O}}(L_m, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})(1)) \subset \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(L_m/K_m)}(\Gamma_{L_m}, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})(1))$$

à trouver un idéal \mathfrak{q} de K_m de degré 1 et satisfaisant 2 et 3 tel que $\mathrm{res}_{\mathfrak{q}}(\psi) \neq 0$ dans $H^1(\mathrm{Gal}(K_{m,\mathfrak{q}}^{\mathrm{nr}}/K_{m,\mathfrak{q}}), \mathrm{Ad}(\bar{\rho}_{\alpha}))$.

Soit $V_{\psi} = \psi(\Gamma_{L_m})$ le sous- $\mathrm{Gal}(L_m/K_m)$ -module image de ψ_{L_m} . C'est un \mathbb{F}_p -sous-espace du k -vectoriel $\mathrm{Ad}(\bar{\rho})$.

Sous-Lemme 10.5.2. — *Sous l'hypothèse (RLI_2) , il existe $s \in \mathrm{Gal}(L_0/\mathbb{Q}')$ tel que $\bar{\rho}(s)$ possède 4 valeurs propres distinctes et que $\mathrm{Ad}(\bar{\rho})(s)$ admette la valeur propre 1 sur tout sous-espace irréductible de $\mathrm{Ad}(\bar{\rho})$.*

En effet, si $p \geq 7$, on peut prendre $s \in H^1 \cap T(k')^{\mathrm{reg}}$ et si $p = 5$ (cas admis si $H' = G(k)'$ et $w = 3$) comme $w = 3$ est premier à $4 = 5 - 1$, on a $G(\mathbb{F}_5)' = G(\mathbb{F}_5)$ et on peut prendre $s = \mathrm{diag}(1, 3, 4, 2) \in T(k)'$ puisque $1 \times 2 = 3 \times 4$. Rappelons que la décomposition en sous-espaces H^1 -irréductibles de $\mathrm{Ad}(\bar{\rho}) = \mathfrak{g}$ est

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}^{ss}$$

Comme l'action adjointe de $T' = T(k)'$ sur $\mathfrak{g}^{ss} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^-$ fixe \mathfrak{t} , la valeur propre 1 apparaît toujours dans les sous-représentations irréductibles.

Soit σ_0 un relèvement de s à Γ_{K_m} . On va chercher $\sigma \in \Gamma_{K_m}$ satisfaisant la troisième condition sous la forme $\sigma = \tau \circ \sigma_0$ pour un élément $\tau \in \Gamma_{L_m}$ (et pour une valeur propre δ de $\bar{\rho}(\sigma)$). Les valeurs propres de $\text{Ad}(\bar{\rho})(\sigma)$ sont les quotients $\alpha_i \alpha_j^{-1}$ des valeurs propres de $\bar{\rho}(s)$. Soient $v_{i,j}$ des vecteurs propres correspondants.

L'espace des invariants V_ψ^s de V_ψ par s est non trivial; c'est un facteur direct sur \mathbb{F}_p . Son extension des scalaires à k est engendrée par des vecteurs $v_\ell = \sum_i a_{i,\ell} v_{i,i}$ ($\ell = 1, \dots, r$ et pour chaque ℓ , un $a_{i,\ell}$ au moins n'est pas nul). On a

$$\psi(\sigma) = \psi(\tau) + \psi(\sigma_0)$$

on peut écrire $\psi(\sigma_0) = \sum_{i,j} b_{i,j} v_{i,j}$ et $\psi(\tau) = \sum_\ell c_\ell(\tau) v_\ell + v'$ où v' est une combinaison linéaire des $v_{i,j}$ avec $i \neq j$. Par conséquent, le coefficient de $v_{i,i}$ dans $\psi(\sigma)$ vaut

$$b_i(\sigma) = \sum c_\ell(\tau) a_{i,\ell} + b_{i,i}$$

On voit facilement qu'on peut choisir les scalaires $c_\ell(\tau)$ de sorte qu'un $b_i(\sigma)$ soit non nul. On prend $\delta = \alpha_i$ et σ satisfait maintenant la condition 3.

11. Fin de la démonstration du Théorème 2.2.7

Il reste à vérifier la condition $M_Q/I_Q M_Q \cong M$ comme \mathcal{O} -modules. Remarquons que si on établit l'existence d'un tel isomorphisme comme \mathcal{O} -modules, compatible avec les opérateurs de Hecke hors de $NpQr$, on aura un isomorphisme de \mathbf{T} -modules par la surjectivité de $\mathbf{T}_Q \rightarrow \mathbf{T}$. En effet, il résulte aisément du théorème de densité de Cebotarev appliqué à la représentation $\rho_{\mathbf{T}}$ que l'algèbre \mathbf{T} est engendrée sur \mathcal{O} par les opérateurs de Hecke hors de $NpQr$.

Par dualité de Pontryagin, la condition à vérifier équivaut à

$$H^0(\Delta_Q, eH^3(S_{K_{Q,r}} \otimes \bar{\mathbb{Q}}, V_\lambda(F/\mathcal{O})_{\mathfrak{m}_{Q,r}})) \cong eH^3(S_K \otimes \bar{\mathbb{Q}}, V_\lambda(F/\mathcal{O})_{\mathfrak{m}})$$

Notons qu'on doit d'une part se débarrasser des premiers $q \in Q$ mais aussi de r . Heureusement la technique pour traiter ce dernier est exactement la même que pour les premiers $q \in Q$. On traite d'abord la descente pour $q \in Q$.

11.1. Descente de $S_{K_{Q,r}}$ à $S_{K_{(r)}}$. — On pose $X_Q = S_{K_{Q,r}}$ et $X = S_{K_{(r)}}$ et on note temporairement \mathfrak{m} l'idéal de $\mathcal{H}^{NpQ} \otimes \mathcal{H}_{\Pi^+}$ engendré par $(U_{r,1} - \alpha_r - \beta_r, rU_{r,2} - \alpha_r \beta_r)$ et $\text{Ker } \bar{\theta}_\pi$.

Considérons d'abord le morphisme galoisien $X_Q \otimes \mathbb{Q} \rightarrow X_0(Q) \otimes \mathbb{Q}$ de groupe Δ_Q . La suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{i,j} = H^i(\Delta_Q, H^j(X_Q \otimes \bar{\mathbb{Q}}, V_\lambda(F/\mathcal{O}))) \implies H^{i+j}(X_0(Q) \otimes \bar{\mathbb{Q}}, V_\lambda(F/\mathcal{O}))$$

est compatible aux opérateurs de Hecke en dehors de NpQ ainsi qu’aux opérateurs en $q \in Q$ car ils commutent à l’action des éléments de Δ_Q . Considérons l’idéal maximal \mathfrak{m}^Q de corps résiduel k dans la \mathcal{O} -algèbre de Hecke hors de NpQ défini par les coefficients de $P_\ell(X) - \mathrm{car}(\rho_\pi(\mathrm{Fr}_\ell))$ pour les polynômes de Hecke en ℓ ne divisant pas NpQ . Formons la suite spectrale obtenue par localisation de $E_2^{i,j}$ en cet idéal.

Par le Th. 1 de [36], les seuls termes non nuls de cette suite sont les $(eE_2^{i,3})_{\mathfrak{m}^Q}$. La suite dégénère donc en E_2 et on a

$$eH^3(X_0(Q) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_\lambda(F/\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}} = H^0(\Delta_Q, eH^3(X_Q \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_\lambda(F/\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}^Q})$$

En particulier l’homomorphisme canonique

$$i : H^3(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_\lambda(F/\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}} \longrightarrow H^3(X_0(Q) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_\lambda(F/\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}^Q}$$

est injectif entre deux \mathcal{O} -modules divisibles de corang fini.

Il reste à comparer $eH^3(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_\lambda(F/\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}}$ et $eH^3(X_0(Q) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_\lambda(F/\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}^Q}$. On a le

Lemme 11.1.1. — *Soit A une \mathcal{O} -algèbre finie. Soit X un A -module de type fini et $X^* = \mathrm{Hom}(X, F/\mathcal{O})$ son \mathcal{O} -dual de Pontryagin. Soit \mathfrak{m} un idéal maximal de A . Alors, $X_{\mathfrak{m}}$ resp. $X_{\mathfrak{m}}^*$ est le plus grand \mathcal{O} -sous-module de X resp. X^* sur les éléments duquel tous les éléments de \mathfrak{m} sont topologiquement nilpotents, resp. nilpotents.*

Démonstration. — L’algèbre A est semilocale et \mathcal{O} est hensélien, on peut donc décomposer A en produit direct de ses localisées : $A = A_{\mathfrak{m}_1} \times \cdots \times A_{\mathfrak{m}_r}$ avec $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}$. De même, $X = X_{\mathfrak{m}_1} \times \cdots \times X_{\mathfrak{m}_r}$. Soit X_1 le plus grand sous- \mathcal{O} -module sur lequel \mathfrak{m} est topologiquement nilpotent. On a $X_1 \subset X_{\mathfrak{m}}$. En effet, par le lemme chinois, pour tout $i \geq 2$, il existe $\mu \in \mathfrak{m}_1$ tel que $\mu \notin \mathfrak{m}_i$; μ agit donc par automorphisme sur $X_{\mathfrak{m}_i}$. Réciproquement, montrons que pour tout $N \geq 1$, il existe $M \geq 1$ tel que $\mathfrak{m}^M X_{\mathfrak{m}} \subset p^N \cdot X_{\mathfrak{m}}$. Pour tout $N \geq 1$, $A_{\mathfrak{m}}/p^N A_{\mathfrak{m}}$ est locale artinienne, il existe donc $M \geq 1$ tel que $(\mathfrak{m}/p^N \cdot A)^M = 0$. Cet entier M convient. Pour le dual de Pontryagin, on voit que pour tout $x^* \in X_{\mathfrak{m}}^*$, il existe N tel que $p^N \cdot x^* = 0$; en choisissant M comme ci-dessus, on voit que $\mathfrak{m}^M \cdot x^* = 0$, ce qui montre la nilpotence locale de tous les éléments de \mathfrak{m} sur $X_{\mathfrak{m}}^*$. Si $x^* \notin X_{\mathfrak{m}}^*$, il existe $i \geq 2$ et $x \in X_{\mathfrak{m}_i}$ tel que $x^*(x) \neq 0$. En choisissant $\mu \in \mathfrak{m}$, $\mu \notin \mathfrak{m}_i$ on voit qu’aucune puissance de μ n’annule x^* . \square

Rappelons que l’on a fixé des relèvements $\alpha_q, \beta_q, \gamma_q, \delta_q \in \mathcal{O}$ des racines de $\overline{P}_{\pi,q}$ dans k , racines (deux à deux distinctes) de $P_{\pi,q}$. Avec ces notations, on a défini l’idéal \mathfrak{m}_Q de sorte que la spécialisation de $P_q^{(1)}(X)$ modulo \mathfrak{m}_Q ait pour racines $\overline{\alpha}_q$ et $\overline{\beta}_q$.

Pour tout \mathcal{O} -module A , posons

$$H(X, A)_\lambda = eH^3(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_\lambda(A))_{\mathfrak{m}}$$

$$\text{et } H(X_0(Q), A)_\lambda = eH^3(X_0(Q) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_\lambda(A))_{\mathfrak{m}^Q}$$

(nous utiliserons surtout cette notation pour $A = F, \mathcal{O}$ ou F/\mathcal{O}).

L'algèbre \mathcal{H}_Π (pour chaque $q \in Q$ fixé) agit par correspondances de Hecke sur $H(X_0(Q), A)_\lambda$. Par le lemme précédent et par définition de l'idéal \mathfrak{m}_Q , les opérateurs $U_{q,2} - (\alpha_q + \beta_q)$ et $qU_{q,2} - \alpha_q\beta_q$ agissent de façon localement nilpotente sur $H(X_0(Q), F/\mathcal{O})_\lambda$.

On est ainsi amené par le Cor. 3.2.4 à poser pour chaque $q \in Q$:

$$X_q = (qU_{q,1} - \alpha_q\gamma_q)(qU_{q,1} - \delta_q\beta_q)(qU_{q,1} - \delta_q\gamma_q)$$

et à modifier i de la manière suivante

$$i_Q : x \longmapsto i(x) \prod_{q \in Q} X_q.$$

Cet homomorphisme de \mathcal{O} -modules divisibles est équivariant pour l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et pour l'action des correspondances de Hecke hors de NQ . On sera également amené à considérer pour tout \mathcal{O} -module B le morphisme $i_{Q,B} : H(X, B)_\lambda \rightarrow H(X_0(Q), B)_\lambda$ défini de façon similaire.

Proposition II.1.2

- (1) L'image de i_Q est contenue dans $H(X_0(Q), F/\mathcal{O})_\lambda$
- (2) $i_Q : H(X, F/\mathcal{O})_\lambda \rightarrow H(X_0(Q), F/\mathcal{O})_\lambda$ est bijectif.

Démonstration. — Montrons d'abord l'inclusion $\text{Im } i_Q \subset H(X, F/\mathcal{O})_\lambda$.

Par le lemme précédent, il suffit pour cela de vérifier que pour tout $q \in Q$, les opérateurs $qU_{q,2} - \alpha_q\beta_q$ et $U_{q,1} - \alpha_q - \beta_q$ ($q \in Q$), agissent de façon localement nilpotente sur $i_Q(H(X, F/\mathcal{O})_\lambda)$. Mais d'une part, par [36], on a $H(X_0(Q), F/\mathcal{O})_\lambda = H(X_0(Q), \mathcal{O})_\lambda \otimes F/\mathcal{O}$. D'autre part, pour toute représentation π' intervenant dans $H^3_{\text{cusp}}(X, V_\lambda(\mathbb{C}))$, le Cor. 3.2.4 montre que pour tout $q \in Q$, l'image de la droite des vecteurs sphériques de π'_q par

$$X_{\pi',q} = (qU_{q,1} - \alpha_{\pi'_q}\gamma_{\pi'_q,q})(qU_{q,1} - \delta_{\pi'_q,q}\beta_{\pi'_q,q})(qU_{q,1} - \delta_{\pi'_q,q}\gamma_{\pi'_q,q})$$

est contenue dans

$$\text{Ker}(qU_{q,1} - \alpha_{\pi'_q,q}\beta_{\pi'_q,q}) \cap \text{Ker}(U_{q,2} - \alpha_{\pi'_q,q} - \beta_{\pi'_q,q}),$$

ces opérateurs agissant sur l'espace des invariants de π'_q par le parahorique de Klingen en q ; ceci entraîne que pour une telle représentation π' , pour chaque $q \in Q$, la composante π' -isotypique de $X_{\pi',q}$ ($H^3_{\text{cusp}}(X, V_\lambda(\overline{\mathbb{Q}}))$) dans $H^3_{\text{cusp}}(X_0(Q), V_\lambda(\overline{\mathbb{Q}}))$ est annulée par les opérateurs $qU_{q,1} - \alpha_{\pi'_q,q}\beta_{\pi'_q,q}$ et $U_{q,2} - \alpha_{\pi'_q,q} - \beta_{\pi'_q,q}$. Or, si π' intervient dans le sous-espace $H(X_0(Q), \overline{\mathbb{Q}})_\lambda$, ses paramètres de Hecke $\alpha_{\pi'_q,q}$, $\beta_{\pi'_q,q}$, $\gamma_{\pi'_q,q}$, $\delta_{\pi'_q,q}$ sont congrus modulo l'idéal maximal de $\overline{\mathbb{Z}}_p$ (via le plongement ι_p qu'on a fixé) à α_q , β_q , γ_q , δ_q respectivement. On conclut que les opérateurs $qU_{q,1} - \alpha_q\beta_q$ et $U_{q,2} - \alpha_q - \beta_q$ (pour tout $q \in Q$) sont localement nilpotents sur $i_Q(H(X, F/\mathcal{O})_\lambda)$.

Surjectivité. — Comme $H(X_0(Q), F/\mathcal{O})_\lambda$ est divisible, c'est un quotient de $H(X_0(Q), F)_\lambda$ et il suffit donc de vérifier la surjectivité de i_Q, F .

On est ramené à montrer que pour toute représentation cuspidale π' intervenant dans $H(X_0(Q), \mathbb{C})_\lambda$, la q -composante π'_q est une induite parabolique irréductible d'un caractère non ramifié (on sait *a priori* qu'elle est quotient de Langlands d'une telle induite). On peut donner deux démonstrations de ce fait. L'une utilise la classification des représentations locales de $G(\mathbb{Q}_q)$ possédant un vecteur fixe par un parahorique, faite dans [49].

Si $(\pi'_q)^{K_q} = 0$ (mais bien sûr $(\pi'_q)^{\Pi_q} \neq 0$), on est dans l'un des cas IIa, IIIa, Va, VIa du tableau 3 de [49]. Il résulte du Cor. 3.2.2 que le paramètre de Hecke $\text{diag}(\alpha_{\pi',q}, \beta_{\pi',q}, \gamma_{\pi',q}, \delta_{\pi',q})$ de π'_q (bien défini modulo conjugaison par le groupe de Weyl) permet de calculer les valeurs propres des opérateurs de Hecke $U_{q,i}$ ($i = 1, 2$) : modulo action du groupe de Weyl, ces opérateurs agissant sur l'espace $(\text{Ind}_B^G \chi)^{\Pi_q}$ admettent un vecteur propre commun de valeurs propres respectives $\alpha_{\pi'_q,q} + \beta_{\pi'_q,q}$ et $\alpha_{\pi'_q,q}\beta_{\pi'_q,q}$. Par définition de la localisation en \mathfrak{m}_Q , ces valeurs propres fournissent une spécialisation $P_{\pi'_q}^{(1)}(X) = (X - \alpha_{\pi',q})(X - \beta_{\pi',q})$ du polynôme $P_q^{(1)}(X)$ et les racines $\alpha_{\pi',q}$ et $\beta_{\pi',q}$ de $P_{\pi'_q}^{(1)}(X)$ sont congrues à α_q et $\beta_q \pmod{p}$. Comme on a de plus $\alpha_{\pi',q}\delta_{\pi',q} = \beta_{\pi',q}\gamma_{\pi',q} \equiv q^6\omega_{\pi'}(q) \pmod{p}$, on a aussi $\gamma_{\pi',q} \equiv \gamma_q \pmod{p}$ et $\delta_{\pi',q} \equiv \delta_q \pmod{p}$; ceci entraîne que les quatre racines $\alpha_{\pi',q}, \beta_{\pi',q}, \gamma_{\pi',q}$ et $\delta_{\pi',q}$ de $P_{\pi'_q}(X)$ sont distinctes modulo p .

Un examen du tableau 1 de [49] donnant la liste des induites paraboliques π'_q telles que $(\pi'_q)^{\Pi_q} \neq 0$ montre que si π'_q n'était pas elle-même irréductible (cas IIa, IIIa, Va, VIa du tableau 3), on aurait $\alpha_{\pi',q}/\beta_{\pi',q} = q^{\pm 1}$ ou $\beta_{\pi',q}/\gamma_{\pi',q} = q^{\pm 1}$ et donc comme $q \equiv 1 \pmod{p}$, les quatre racines ne pourraient être deux à deux distinctes mod. p . C'est donc que π'_q est dans la série principale non ramifiée de $G(\mathbb{Q}_q)$.

Par conséquent, si on étend les scalaires à $\overline{\mathbb{Q}}$, on peut décomposer

$$H(X, \overline{\mathbb{Q}})_\lambda = \bigoplus_{\pi'} W_{\pi'} \text{ et } H^3(X, V_\lambda(\overline{\mathbb{Q}}))_{\mathfrak{m}_Q} = \bigoplus_{\pi'} W_{\pi',Q}$$

pour le même ensemble d'indices π' de représentations cuspidales de niveau divisant N , en ses π' -composantes isotypiques, telles que $W_{\pi'} \otimes \mathbb{Q}_p = m_{\pi'}(\pi'^q)^{K_0(Q)^q} \otimes (\pi'_q)^{K_q} \otimes \rho_{\pi'}$ et $W_{\pi',Q} \otimes \mathbb{Q}_p = m_{\pi'}\pi', q^{K_0(Q)^q} \otimes (\pi'_q)^{\Pi_q} \otimes \rho_{\pi'}$ où $m_{\pi'}$ est la multiplicité de π' et est donc indépendante du groupe de niveau considéré. La décomposition tensorielle de $W_{\pi'} \otimes \mathbb{Q}_p$ est compatible à l'action de $\mathcal{H}_{\Pi_q} \times \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. On a vu Cor. 3.2.4 que l'opérateur $X_{\pi',q}$ envoie surjectivement $(\pi'_q)^{K_q}$ sur la droite de $(\pi'_q)^{\Pi_q}$ où $U_{q,2}$, resp. $qU_{q,1}$ agit par $\alpha_{\pi',q} + \beta_{\pi',q}$, resp. $\alpha_{\pi',q}\beta_{\pi',q}$. Ceci montre que $H(X_0(Q), F)_\lambda$, c'est-à-dire le sous-espace de $H^3(X, V_\lambda(F))_{\mathfrak{m}_Q}$ sur lequel $qU_{q,2} - \alpha_q\beta_q$ est topologiquement nilpotent, est dans l'image de $H(X, F)_\lambda$ par i_Q .

L'autre démonstration, due à M.-F. Vignéras consiste à montrer une version modulo p de l'irréductibilité de l'induite d'un caractère lisse régulier modulo p en suivant

la démonstration de Rodier où est déterminé le foncteur de Jacquet des représentations non ramifiées. Le cas GL_n est rédigé dans [62], section 6.

L'injectivité de i_Q se démontre comme suit.

On peut se contenter de traiter le cas où Q est réduit à un singleton $\{q\}$. Considérons le composé $C = (x \mapsto [(\alpha_q\beta_q - \alpha_q\gamma_q)(\alpha_q\beta_q - \beta_q\delta_q)(\alpha_q\beta_q - \gamma_q\delta_q)]^{-1}(x \mid \sum_{1 \leq i \leq 4} \Pi w_i \Pi)) \circ i_Q$. En raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 4.3.1, on voit que l'image de ce morphisme est contenue dans celle du morphisme (injectif) i . On peut donc considérer C comme un endomorphisme de $H(X, F/\mathcal{O})_\lambda$. Nous allons voir que ce morphisme est l'identité, ce qui entraînera bien sur l'injectivité de i_Q . Par le théorème principal de [36], le \mathcal{O} -module $H(X, F/\mathcal{O})_\lambda$ est colibre, si bien qu'il suffit de vérifier que le composé

$C_F = (x \mapsto [(\alpha_q\beta_q - \alpha_q\gamma_q)(\alpha_q\beta_q - \beta_q\delta_q)(\alpha_q\beta_q - \gamma_q\delta_q)]^{-1}(x \mid \sum_{1 \leq i \leq 4} \Pi w_i \Pi)) \circ i_{Q,F}$ est l'identité. Ceci résulte immédiatement du corollaire 3.2.4. □

11.2. Descente de $S_{K^{(r)}}$ à S_K . — On note maintenant \mathfrak{m} resp. $\mathfrak{m}^{(r)}$ l'idéal maximal de \mathcal{H}^{Np} resp. de \mathcal{H}^{Npr} donné par $\text{Ker } \bar{\theta}_\pi$; soit

$$\mathfrak{m}^{(r)} = \mathfrak{m} + (U_{r,2} - \alpha_r - \beta_r, rU_{r,1} - \alpha_r\beta_r)$$

l'idéal maximal de $\mathcal{H}^{Npr} \otimes \mathcal{H}_{\Pi_{1,r}^+}$. On considère le morphisme

$$i_r : e\tilde{H}^3(S_K, V_\lambda(F/\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}} \longrightarrow eH^3(S_{K^{(r)}}, V_\lambda(F/\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}^{(r)}}, \quad x \longmapsto i(x)|_{X_r}$$

où i est l'homomorphisme canonique

$$eH^3(S_K, V_\lambda(F/\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}} \longrightarrow eH^3(S_{K^{(r)}}, V_\lambda(F/\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}^{(r)}}$$

associé au morphisme $S_{K^{(r)}} \rightarrow S_K$ et $X_r = (U_{r,1} - \alpha_r\gamma_r)(U_{r,1} - \delta_r\beta_r)(U_{r,1} - \delta_r\gamma_r)$. Pour montrer que c'est un isomorphisme, il suffit de montrer le même énoncé en remplaçant K par le groupe de congruences principal $K(N)$. On est donc ramené au cas d'un groupe net. En effet l'injectivité s'ensuivra, et la surjectivité résultera alors de la surjectivité dans le cas net. Décrivons brièvement les étapes dans le cas net (tout-à-fait analogues à celles pour la descente d'un premier q de Taylor-Wiles).

On voit que i est injectif comme dans la section précédente par la suite spectrale de Hochschild-Serre localisée en $\mathfrak{m}^{(r)}$. Puis on montre que i_r prend bien ses valeurs dans $H^3(S_{K^{(r)}}, V_\lambda(K/\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}^{(r)}}$; on montre ensuite la surjectivité de i_r : on observe que pour toute forme automorphe π' intervenant dans la localisation de $eH^3(S_{K^{(r)}}, V_\lambda(K/\mathcal{O}))$ en $\mathfrak{m}^{(r)}$, la r -composante π'_r satisfait $\pi'_r \Pi_r^+ = \pi'_{r, \Pi_{1,r}}$ car sinon il existerait, un caractère non trivial ϕ de $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^\times$ et un vecteur non nul tels que $g.v = \phi(g)v$, et par le théorème 7.3, la représentation $\rho_{\pi'}$ serait ramifiée en r ; comme $r \not\equiv 1 \pmod{p}$, cela entraînerait que $\bar{\rho}$ serait ramifiée en r . On conclut alors en utilisant le corollaire 3.2.4. Pour l'injectivité, il suffit de vérifier l'injectivité de $i_{r,k} : eH^3(S_K, V_\lambda(k))_{\mathfrak{m}} \rightarrow eH^3(S_{K^{(r)}}, V_\lambda(k))_{\mathfrak{m}^{(r)}}$. $V_\lambda(k)$ est un faisceau étale constructible défini sur \mathbb{Q} , et par localisation en $\mathfrak{m}^{(r)}$ de la suite spectrale de Hochschild-Serre, on voit encore que l'homomorphisme canonique

$i_k : eH^3(S_K, V_\lambda(k))_{\mathfrak{m}} \rightarrow eH^3(S_{K(r)}, V_\lambda(k))_{\mathfrak{m}(r)}$ est injectif. La démonstration de la proposition 11.1.2 s'adapte immédiatement pour i_r .

On a ainsi vérifié toutes les conditions pour que les triplets $(R_Q, \mathbf{T}_Q, M_Q)_Q$ forment un système de Taylor-Wiles et il s'ensuit que $\phi : R \rightarrow \mathbf{T}$ est un isomorphisme, que \mathbf{T} est d'intersection complète et que M est libre sur \mathbf{T} .

12. Application au calcul de l'ordre du groupe de Selmer

Supposons que π soit nouvelle pour K (i.e. $\dim \pi_N^{K_N} = 1$) et de multiplicité 1.

On rappelle la définition de l'idéal de congruences arithmétique et du module de congruence cohomologique de π pour \mathcal{O} . Soit \mathbf{T}^π l'image de \mathbf{T} par la projection dans le produit cartésien des corps des coefficients des représentations π' intervenant dans \mathbf{T} et autres que π .

Soit $\mathbf{T} \rightarrow \mathcal{O} \times \mathbf{T}^\pi$ l'homomorphisme injectif d'anneaux dont la première composante est θ_π et la seconde est la surjection $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}^\pi$. Soit 1_π resp. 1^π les éléments unité des facteurs \mathcal{O} resp. \mathbf{T}^π . On introduit le module de congruences arithmétique $C_\pi^a = \mathcal{O} \otimes_{\mathbf{T}} \mathbf{T}^\pi$. C'est une \mathcal{O} -algèbre de torsion de la forme \mathcal{O}/η_π . On appelle η_π l'idéal de congruences. De même, on définit $C_\pi^c = \text{Coker}(M \rightarrow 1_\pi M \oplus 1^\pi M)$. Le \mathcal{O} -module C_π^c est annulé par η_π et est donc un C_π^a -module. Ce module n'est pas nécessairement libre *a priori*.

Cependant, on déduit immédiatement de ce que $M = e\tilde{H}^3(S_K, V_\lambda(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}, \chi}$ est libre de rang 4 sur \mathbf{T} que C_π^c est libre de rang 4 sur C_π^a . Soit η_π^c l'idéal de Fitting de C_π^c . On a $\eta_{\pi,c} = \eta_\pi^c$. En outre, rappelons que le groupe de Selmer $\text{Sel} = H_f^1(\mathbb{Q}, \text{Ad}^0(\rho_\pi) \otimes F/\mathcal{O})$ s'interprète canoniquement comme le dual de Pontryagin $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\Omega_{R/\mathcal{O}}, F/\mathcal{O})$ du module de différentielles de Kähler de R sur \mathcal{O} (voir [28] Sect. 1).

Comme \mathbf{T} est d'intersection complète, le dual de Pontryagin de $\Omega_{\mathbf{T}/\mathcal{O}}$ est isomorphe à \mathcal{O}/η_π :

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\Omega_{\mathbf{T}/\mathcal{O}}, F/\mathcal{O}) \cong \mathcal{O}/\eta_\pi.$$

Comme $R = \mathbf{T}$, on tire de ce qui précède que la longueur comme \mathcal{O} -module du groupe de Selmer $\text{Sel} = H_f^1(\mathbb{Q}, \text{Ad}^0(\rho_\pi) \otimes F/\mathcal{O})$ est égale à la valuation de l'idéal de congruences arithmétique η_π (normalisée par $\text{ord}_F(\varpi) = 1$).

Par ailleurs, pour le poids dominant $\lambda = (a_2, a_1; a_2 + a_1)$ de G l'image de la cohomologie à support compact dans $H^3(S_K, V_\lambda(\mathbb{C}))$ est pure de poids $\mathbf{w} = a_2 + a_1 + 3$ [13] Chapter VI Sect. 6 ; plus précisément, en notant H_1 cette image, on a la décomposition de Hodge

$$H_1 = H_1^{\mathbf{w},0} \oplus H_1^{a_2+2, a_1+1} \oplus H_1^{a_1+1, a_2+2} \oplus H_1^{0, \mathbf{w}}$$

plus précisément, pour tout poids dominant μ du sous groupe de Levi du parabolique de Siegel M_2 , soit \overline{W}_μ le prolongement canonique à \overline{S}_K du fibré automorphe

associé à la représentation de M_2 de plus haut poids μ et $H^\bullet(\overline{S}_K, \overline{W})$ l'image de $H^\bullet(\overline{S}_K, \overline{W})(-D)$ dans $H^\bullet(\overline{S}_K, \overline{W})$. On a alors avec

$$\begin{aligned} H_!^{\mathbf{w},0} &= H_!^3(\overline{S}_K, \overline{W}_{(a_2, a_1; a_1+a_2)}^\vee), \\ H_!^{a_2+2, a_1+1} &= H_!^2(\overline{S}_K, \overline{W}_{(a_2, -a_1-2; a_1+a_2)}^\vee), \\ H_!^{a_1+1, a_2+2} &= H_!^1(\overline{S}_K, \overline{W}_{(a_1-1, -a_2-3; a_1+a_2)}^\vee) \\ \text{et } H_!^{0, \mathbf{w}} &= H_!^0(\overline{S}_K, \overline{W}_{(-a_1-3, -a_2-3; a_1+a_2)}^\vee). \end{aligned}$$

Rappelons d'ailleurs que $\overline{W}_{(b_2, b_1, b_1+b_2)}^\vee \cong \overline{W}_{(-b_1, -b_2; -b_1-b_2)}$.

Fixons un plongement du corps p -adique F dans le corps des nombres complexes. Soit $H_!(\mathcal{O}) = H_{\text{ét},!}^3(X_K \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_\lambda(\mathcal{O})) / \text{tors}$ le plus grand quotient libre du \mathcal{O} -module image de la cohomologie étale à support dans la cohomologie étale. On a bien sûr $H_! = H_!(\mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{C}$ et $M = eH_!(\mathcal{O})_{\mathfrak{m}, \chi}$. Sous l'hypothèse, $p - 1 > a_1 + a_2 + 3$ (en fait $p > a_1 + a_2$ suffit), on a $V_\lambda(\mathcal{O})^\vee \cong V_\lambda(\mathcal{O}) \otimes \nu^{-a_1-a_2}$ (voir [36] Sect. 5.1) et on voit facilement comme dans [26] Prop. 2.4 (et Remarque 2.3 précédant la proposition) que le cup-produit induit une forme bilinéaire symplectique unimodulaire (et Galois équivariante)

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H_!(\mathcal{O}) \times H_!(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O}(-(a_1 + a_2 + 3))$$

Posons $\mathcal{M}_\pi = (M \otimes_{\mathcal{O}} F) \cap M$; c'est un sous-réseau du réseau $M_\pi = 1_\pi M$ du F -espace vectoriel de dimension 4 $M_\pi(F) = M_\pi \otimes_{\mathcal{O}} F$. La restriction du cup-produit au sous-module \mathcal{M}_π de $H_!(\mathcal{O})$ n'est pas nécessairement unimodulaire. Soit $d_\pi \in \mathcal{O}$ son discriminant et soit \mathcal{M}_π^* le réseau dual de \mathcal{M}_π dans $M_\pi(F)$; on a $\text{ord}_F(d_\pi) = \ell_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_\pi^*/\mathcal{M}_\pi)$ ($\ell_{\mathcal{O}}$ désigne la longueur des \mathcal{O} -modules finis). De plus l'unimodularité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $H_!(\mathcal{O})$ implique comme dans [26] Sect. 5 que $\mathcal{M}_\pi^* = M_\pi$. Or, on voit aisément que par définition de η_π^c on a $\text{ord}_F(\eta_\pi^c) = \ell_{\mathcal{O}}(M_\pi/\mathcal{M}_\pi)$; par conséquent, on a une égalité d'idéaux principaux $(\eta_\pi^c) = (d_\pi)$.

On peut par ailleurs exprimer d_π en termes de formes modulaires comme suit (voir Sect. 6 de [26]).

Les formes cuspidales n'interviennent que dans $H_!$, et la décomposition de Hodge est fonctorielle, donc compatible aux opérateurs de Hecke. On a donc une décomposition de Hodge induite sur la composante π -isotypique complexe $M_\pi(\mathbb{C}) = M_\pi \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{C}$ de $M(\mathbb{C}) = M \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{C}$:

$$M_\pi \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{C} = M_\pi^{\mathbf{w},0} \oplus M_\pi^{a_2+2, a_1+1} \oplus M_\pi^{a_1+1, a_2+2} \oplus M_\pi^{0, \mathbf{w}}$$

Par la stabilité de π (cf. Th. 4.3.5), les deux premières composantes sont non nulles; par conséquent tous ces espaces sont de dimension complexe 1.

Soit f resp. \tilde{f} une base du \mathcal{O} -module libre de rang 1

$$H_!^3(\overline{X}_K \otimes \mathcal{O}, \overline{W}_{(a_2, a_1; a_1+a_2)}^\vee)[\theta_\pi] \quad \text{resp. de } H_!^2(\overline{X}_K \otimes \mathcal{O}, \overline{W}_{(a_2, -a_1-2; a_1+a_2)}^\vee)[\theta_\pi]$$

(pour l'existence de structures entières pour ces groupes de cohomologie, voir [36] Sect. 5.2). Soit $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$ une \mathcal{O} -base de \mathcal{M}_π ; soit U_π la matrice exprimant les

vecteurs de la base $(f, \tilde{f}, \tilde{f}^c, f^c)$ de $M(\mathbb{C})$ (c désigne la conjugaison complexe) en fonction des δ_i . Soit Ω_π son déterminant. On a alors

$$d_\pi = \det(\langle \delta_i, \delta_j \rangle) = \Omega_\pi^{-2} \det(\langle f_i, f_j \rangle)$$

où l'on note f_i les formes modulaires de la base ordonnée comme ci-dessus. C'est une base symplectique : $\langle f_i, f_j \rangle = 0$ à moins que $i+j = 5$, et lorsque cela se produit on pose $\langle f, f^c \rangle = (f, f)$, $\langle \tilde{f}, \tilde{f}^c \rangle = (\tilde{f}, \tilde{f})$; on a alors $\langle \tilde{f}^c, \tilde{f} \rangle = -(\tilde{f}, \tilde{f})$, et $\langle f^c, f \rangle = -(f, f)$.

Par compatibilité entre le cup-produit et le produit de Peterson, on se permet d'appeler $(,)$ le produit de Petersson. La formule exacte reliant cup-produit et produit de Peterson nécessite l'étude des homomorphismes d'Eichler-Shimura, nous ne souhaitons pas la développer ici). On déduit immédiatement de ce qui précède la formule

$$\eta_{\pi,c} = (f, f)^2 \cdot (\tilde{f}, \tilde{f})^2 / \Omega_\pi^2$$

Comme $\eta_{\pi,c} = \eta_\pi^4$, on en déduit :

Théorème 12.0.1. — *À multiplication par un élément de \mathcal{O}^\times près, on a :*

$$\mathrm{Card}(\mathrm{Sel})^2 = (f, f) \cdot (\tilde{f}, \tilde{f}) / \Omega_\pi$$

Le lien entre le membre de droite et le carré de la valeur en $s = 1$ de la fonction L adjointe de π pourrait résulter d'une représentation intégrale de Rankin-Selberg pour cette fonction L de degré 10 ; il en existe une version due à D. Ginzburg [20] mais sous une forme trop peu précise pour l'application que nous avons en vue. La conjecture d'Ichino [29] et la formule ci-dessus suggèrent que

$$L(\mathrm{Ad}(f), 1)^2 / (\tilde{f}, \tilde{f})^2 \sim (f, f) \cdot (\tilde{f}, \tilde{f}) / \Omega_\pi$$

où le symbole \sim signifie que le quotient des deux membres est algébrique.

Appendice

Dans cet appendice, nous construisons un modèle semi-stable, avec au plus trois branches de la fibre spéciale passant par un point, de la variété de Siegel de rang 2 avec structures de niveau de type parahorique de Siegel. L'existence de ce modèle est utilisée pour établir le point (1) du Th. 2.2.5 dans le cas du parahorique de Siegel.

De même que dans [18], il suffit de construire une résolution semi-stable équivariante (avec au plus trois branches de la fibre spéciale passant par un point) du modèle local de Rapoport-Zink associé à cette variété de Siegel. Nous allons pour cela utiliser le procédé d'éclatement de *loc cit.*, dont nous reprendrons le contexte et les notations — en particulier la signification de p diffère de celle qu'elle a dans le corps de l'article et les paraboliqes envisagés sont formés de matrices triangulaires *inférieures* par blocs.

Soient $V_0 = \mathbb{Z}_p^4 \subset V_2 = \mathbb{Z}_p^2 \oplus p^{-1}\mathbb{Z}_p^2$; notons α_0 l'inclusion naturelle $V_0 \subset V_2$ et α_2 le morphisme composé $V_2 \hookrightarrow p^{-1}V_0 = V_0$. Les modules V_0 et V_2 sont tous deux

munis de formes symplectiques $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ (induite par la matrice J) et $\langle \cdot, \cdot \rangle_2 = p\langle \cdot, \cdot \rangle_0 \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Rappelons que le modèle local \mathbb{M} associé à la variété de Siegel de rang 2 avec structures de niveau de type parahorique de Siegel est le \mathbb{Z}_p -schéma \mathbb{M} défini par

$$\mathbb{M}(R) = \{(\omega_i \subset V_i \otimes_{\mathbb{Z}_p} R)_{i=0,2} \mid \omega_i \text{ est un sous } R\text{-module localement facteur direct de rang 2 et isotrope de } V_i \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \text{ et on a } \alpha_i \otimes R(\omega_i) \subset \omega_{i+2}\}$$

pour toute \mathbb{Z}_p -algèbre R (la dernière condition se lit en considérant $\{0, 2\}$ comme une partie de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$). Soit \mathcal{P}_2 le schéma en groupe affine lisse sur \mathbb{Z}_p associé au parahorique de Siegel Π_2 . La théorie du modèle local (cf. [45]) fournit alors un \mathcal{P}_2 -torseur \mathcal{T} au-dessus de X_0 muni d'un morphisme lisse et équivariant $\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{M}$.

Soit \mathcal{L} la grassmannienne des sous-espaces totalement isotropes de V_0 . De de manière analogue à [18] 2.2, lorsque $\langle e_i, e_j \rangle_0 = 0$, nous notons $\mathcal{L}_{\{i,j\}}$ l'adhérence de l'orbite, sous le parabolique de Siegel, du sous-espace isotrope engendré par e_i et e_j .

Nous allons éclater la grassmannienne \mathcal{L} le long de la sous-variété de Schubert $\mathcal{L}_{\{3,4\}}$ de sa fibre spéciale, puis le long du transformé strict de la sous-variété de Schubert $\mathcal{L}_{\{1,3\}}$ de sa fibre spéciale. De même que dans [18] nous verrons ensuite que le schéma $\tilde{\mathcal{L}}$ qui en résulte est semi-stable (avec au plus trois branches passant par un point) et que l'identification naturelle des fibres génériques $\tilde{\mathcal{L}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \mathbb{M} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ s'étend en un (unique) morphisme $\tilde{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbb{M}$, équivariant sous \mathcal{P}_2 — remarquons que du fait que les sous-variétés de Schubert $\mathcal{L}_{\{3,4\}}$ et $\mathcal{L}_{\{1,3\}}$ sont invariantes sous le parabolique de Siegel les éclatements utilisés pour construire $\tilde{\mathcal{L}}$ sont \mathcal{P}_2 -équivariants.

Nous allons maintenant introduire un ouvert \mathcal{P}_2 -saturant \mathcal{L}^0 de \mathcal{L} (ce qui signifie que ses translatés sous l'action de \mathcal{P}_2 recouvrent \mathcal{L}) ; il suffira donc de travailler au-dessus de \mathcal{L}^0 . La « grosse cellule de Schubert opposée » \mathcal{L}^0 s'identifie à l'espace affine $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}_p}^3$ de sorte qu'en considérant les points de \mathbb{A}^3 comme des matrices symétriques $A = (a_j^i)_{1 \leq i, j \leq 2}$ le sous-module totalement isotrope $\omega_0 \subset V_0 \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[a_j^i]]$ universel soit l'image de la matrice $\begin{pmatrix} A \\ K \end{pmatrix}$ (où K désigne la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$). Via cette identification, les sous-variétés de Schubert $\mathcal{L}_{\{3,4\}}^0$ et $\mathcal{L}_{\{1,3\}}^0$ ont respectivement pour équations $A = 0$ et $\det A = 0$.

Un calcul analogue (en plus simple) à ceux de [18], (3.3.0) et (3.3.2) identifie l'ouvert saturant $\tilde{\mathcal{L}}^0 = \tilde{\mathcal{L}} \times_{\mathcal{L}} \mathcal{L}^0$ au quotient par $\mathbb{G}_{m, \mathbb{Z}_p}^2$ du sous-schéma localement fermé T_1 de l'espace affine $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}_p}^7$ (de coordonnées $\lambda_0, \lambda_1, P_1, (a_j^i[1])_{1 \leq i \leq j \leq 2}, \delta[1]$) obtenu en intersectant le fermé d'équations

$$\begin{aligned} p &= \lambda_0 \lambda_1 P_1 \\ \lambda_1 \delta[1] &= a_1^1[1] a_2^2[1] - (a_2^1[1])^2 \end{aligned}$$

avec l'ouvert complémentaire des fermés d'équations respectives $\lambda_1 P_1 = a_1^1[1] = a_2^1[1] = a_2^2[1] = 0$ et $P_1 = \delta[1] = 0$, l'action de $\mathbb{G}_{m, \mathbb{Z}_p}^2$ sur T_1 étant celle définie

par

$$\begin{aligned}
 &(\Lambda_0, \Lambda_1), (\lambda_0, \lambda_1, P_1, (a_j^i[1])_{1 \leq i \leq j \leq 2}, \delta[1]) \\
 &\quad \longmapsto (\Lambda_0^{-1} \lambda_0, \Lambda_1^{-1} \lambda_1, \Lambda_0 \Lambda_1 P_1, (\Lambda_0 a_j^i[1])_{1 \leq i \leq j \leq 2}, \Lambda_0^2 \Lambda_1 \delta[1]).
 \end{aligned}$$

On vérifie aisément que ce schéma est semi-stable, et que sa fibre spéciale consiste en trois composantes irréductibles d'équations $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 0$ et $P_1 = 0$.

Il ne nous reste plus qu'à vérifier que le morphisme $\widetilde{\mathcal{L}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{M} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ se prolonge. Pour cela, remarquons qu'en utilisant la base évidente de V_2 , le sous-module $\omega_2 \subset V_2 \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{L}}_{\mathbb{Q}_p}^0}$ est l'image de la matrice $\binom{A}{pK}$ et ses coordonnées de Plücker sont donc le produit par $\lambda_0^2 \lambda_1$ du sextuplet

$$(\delta[1], P_1 a_1^1[1], -P_1 a_2^1[1], P_1 a_2^1[1], P_1 a_2^2[1], \lambda_1 P_1^2).$$

Pour obtenir le prolongement voulu, il suffit alors de vérifier que ce dernier sextuplet ne s'annule jamais sur T_1 . Ceci s'obtient en remarquant que lorsque $\delta[1] = 0$ on a $P_1 \neq 0$ et que lorsque $\lambda_1 = 0$ l'un au moins des $(a_j^i[1])$ est non nul.

De même que dans [18] 4, le quotient $\widetilde{X}_0 = \mathcal{P}_2 \backslash \mathcal{T} \times_{\mathbb{M}} \widetilde{\mathcal{L}}$ est alors un modèle semi-stable de X_0 . En introduisant le champ quotient $[\mathcal{P}_2 \backslash \mathbb{M}]$ et en remarquant que le \mathcal{P}_2 -torseur \mathcal{T} au-dessus de X_0 n'est autre que $X_0 \times_{[\mathcal{P}_2 \backslash \mathbb{M}]} \mathbb{M}$, on peut aussi considérer \widetilde{X}_0 comme le produit fibré $X_0 \times_{[\mathcal{P}_2 \backslash \mathbb{M}]} [\mathcal{P}_2 \backslash \widetilde{\mathcal{L}}]$.

Références

- [1] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK & J.-L. VERDIER – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4 III)*, Lect. Notes in Math., vol. 305, Springer Verlag, 1972-73.
- [2] V. BERKOVICH – « Vanishing cycles for formal schemes, II », *Invent. Math.* **125** (1996), p. 367–390.
- [3] D. BLASIUS, M. HARRIS & D. RAMAKRISHNAN – « Coherent cohomology, limits of discrete series and Galois conjugations », *Duke Math. J.* **73** (1994), p. 647–685.
- [4] S. BOSCH & W. LÜTKEBOHMERT – « Formal and rigid geometry, II : flattening techniques », *Math. Ann.* **296** (1993), p. 403–429.
- [5] H. CARAYOL – « Formes modulaires et représentations galoisiennes à valeurs dans un anneau local complet », in *p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture (Boston MA, 1991)*, Contemp. Math., vol. 165, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994, p. 213–237.
- [6] P. CARTIER – « Representations of \mathfrak{P} -adic groups », in *Automorphic Forms, Representations and L-functions*, Proc. of Symp. in pure Math., vol. XXXIII, part 1, American Mathematical Society, Providence, RI, 1979.
- [7] C.-L. CHAI & P. NORMAN – « Bad reduction of the Siegel moduli scheme of genus two with $\Gamma_0(p)$ -level structure », *Amer. J. Math.* **112** (1990), p. 1003–1071.
- [8] H. DARMON, F. DIAMOND & R. TAYLOR – « Fermat's Last Theorem », in *Current developments in mathematics, 1995 (Cambridge, MA)*, Internat. Press, Cambridge, MA, 1994, p. 1–154.
- [9] P. DELIGNE – « Travaux de Shimura », in *Sém. Bourbaki*, Lect. Notes in Math., vol. 244, Springer, Berlin, 1971, Exp. 389, p. 123–165.

- [10] P. DELIGNE & N. KATZ – *Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA 7II)*, Lect. Notes in Math., vol. 340, Springer Verlag, 1973.
- [11] P. DELIGNE & M. RAPOPORT – « Les schémas de modules de courbes elliptiques », in *Modular Functions of One Variable II*, Lect. Notes in Math., vol. 349, Springer Verlag, 1973, p. 143–316.
- [12] F. DIAMOND – « The Taylor-Wiles construction and multiplicity one », *Invent. Math.* **128** (1997), p. 379–391.
- [13] G. FALTINGS & C.L. CHAI – *Degeneration of Abelian Varieties*, Erg. Math. Wiss. 3.folge, vol. 22, Springer Verlag, 1990.
- [14] L. FARGUES & E. MANTOVAN – *Correspondances de Langlands locales dans la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink*, Astérisque, vol. 291, Société Mathématique de France, 2004.
- [15] J.-M. FONTAINE & G. LAFFAILLE – « Construction de représentations p -adiques », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **15** (1982), p. 547–608.
- [16] K. FUJIWARA – « Arithmetical compactifications of Shimura varieties », preprint.
- [17] ———, « Rigid geometry, Lefschetz-Verdier trace formula and Deligne’s conjecture », *Invent. Math.* **127** (1997), no. 3, p. 489–533.
- [18] A. GENESTIER – « Un modèle semi-stable de la variété de Siegel de genre 3 avec structures de niveau de type $\Gamma_0(p)$ », *Compositio Math.* **123** (2000), p. 303–328.
- [19] ———, « Mauvaise réduction des variétés de Siegel avec structure de niveau de type Iwahori », en préparation.
- [20] D. GINZBURG – « A Rankin-Selberg integral for the adjoint L -function of Sp_4 », *Israel J. Math.* **95** (1996), p. 301–339.
- [21] A. GROTHENDIECK – *Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA 7I)*, Lect. Notes in Math., vol. 288, Springer Verlag, 1971.
- [22] T. HAINES, R. KÖTTWITZ & A. PRASAD – « Iwahori-Hecke algebras », preprint arXiv : RT/0309168.
- [23] M. HARRIS – « Automorphic forms of $\bar{\partial}$ -cohomology type as coherent cohomology classes », *J. Differential Geom.* **32** (1990), p. 1–63.
- [24] M. HARRIS & R. TAYLOR – « Deformations of automorphic Galois representations », preprint, Dec. 2000.
- [25] ———, « Regular models of certain Shimura varieties », *Asian J. Math.* **6** (2002), no. 1, p. 61–94.
- [26] H. HIDA – « Congruence of cusp forms and special values of their zetas functions », *Invent. Math.* **63** (1981), p. 225–261.
- [27] ———, « On congruence divisors of cusp forms as factors of the special values of their zeta functions », *Invent. Math.* **64** (1981), no. 2, p. 221–262.
- [28] ———, « Hecke algebras for GL_1 and GL_2 », in *Séminaire de Théorie des Nombres de Paris, 1984-1985*, Progress in Math., vol. 63, Birkhäuser Verlag, 1986, p. 131–163.
- [29] A. ICHINO – « On critical values of adjoint L -functions for $\mathrm{GSp}(4)$ », preprint, Nov. 2004.
- [30] L. ILLUSIE – « Autour du théorème de monodromie locale », in *Périodes p -adiques*, Astérisque, vol. 223, Société Mathématique de France, 1994, p. 9–57.
- [31] L. ILLUSIE (éd.) – *Cohomologie ℓ -adique et fonctions L (SGA 5)*, Lect. Notes in Math., vol. 589, Berlin-New York, Springer-Verlag, 1977.
- [32] J. DE JONG – « The moduli space of principally polarized abelian varieties with $\Gamma_0(p)$ -level structure », *J. Algebraic Geom.* **2** (1993), p. 667–688.

- [33] G. LAUMON – « Sur la cohomologie à supports compacts des variétés de Shimura pour $\mathrm{GSp}(4)_{/\mathbb{Q}}$ », *Compositio Math.* **105** (1996), p. 267–359.
- [34] ———, « Sur les fonctions zêtas des variétés de Siegel de dimension 3 », ce volume.
- [35] B. MAZUR – « Deforming Galois representations », in *Galois Groups over \mathbb{Q}* (Y. Ihara, K. Ribet & J.-P. Serre, éd.), Publ MSRI, vol. 15, Springer-Verlag, 1989.
- [36] A. MOKRANE & J. TILOUINE – « Cohomology of Siegel varieties with p -adic integral coefficients and Applications », in *Cohomology of Siegel varieties*, Astérisque, vol. 280, Société Mathématique de France, 2002.
- [37] D. MUMFORD – *Abelian Varieties*, Oxford Univ. Press, 1970.
- [38] D. MUMFORD, FOGARTY & F. KIRWAN – *Geometric Invariant Theory*, 3^e éd., Erg. Math. Wiss., vol. 34, Springer-Verlag, 1994.
- [39] B.C. NGÔ & A. GENESTIER – « Alcôves et p -rang des variétés abéliennes », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **52** (2002), p. 1665–1680.
- [40] L. NYSSSEN – « Pseudo-représentations », *Math. Ann.* **306** (1996), p. 257–283.
- [41] F. OORT – « Moduli of Abelian Varieties and Newton Polygons », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* (1991), p. 385–389.
- [42] B. PERRIN-RIOU – « Représentations p -adiques ordinaires », in *Périodes p -adiques*, Astérisque, vol. 223, Société Mathématique de France, 1994, p. 185–220.
- [43] D. POPESCU – « General Néron desingularization and approximation », *Nagoya Math. J.* **104** (1986), p. 85–115.
- [44] D. RAMAKRISHNAN – « Irreducibility of ℓ -adic representations associated to regular cusp forms on $\mathrm{GL}(4)/\mathbb{Q}$ », preprint, Jan. 2004.
- [45] M. RAPOPORT & T. ZINK – *Period spaces for p -divisible groups*, Ann. Math. Studies, vol. 141, Princeton Univ. Press, 1996.
- [46] F. RODIER – « Sur les représentations non ramifiées des groupes réductifs p -adiques ; l'exemple de $\mathrm{GSp}(4)$ », *Bull. Soc. math. France* **116** (1988), p. 15–42.
- [47] P.J. SALLY & M. TADIĆ – « Induced Representations and classification for $\mathrm{GSp}(2, F)$ and $\mathrm{Sp}(2, F)$ », *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* **52** (1993), p. 75–133.
- [48] I. SATAKE – « Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p -adic fields », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **18** (1963), p. 1–69.
- [49] R. SCHMIDT – « Iwahori-spherical representations of $\mathrm{GSp}(2)$ and modular forms with square-free level », preprint, 2002.
- [50] J.-P. SERRE – *Algèbre locale. Multiplicités*, 2^e éd., Lect. Notes in Math., vol. 11, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1965, Cours au Collège de France, 1957-1958, rédigé par P. Gabriel.
- [51] G. SHIMURA – *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, P.U.P., 1972.
- [52] M. SPIVAKOVSKY – « A new proof of D. Popescu's theorem on smoothing of ring homomorphisms », *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), no. 2, p. 381–444.
- [53] M. TADIĆ – « Representations of p -adic symplectic groups », *Compositio Math.* **90** (1994), p. 123–181.
- [54] J. TATE & F. OORT – « Group schemes of prime orders », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **3** (1970), p. 1–21.
- [55] R. TAYLOR – « Galois representations associated to Siegel modular forms of low weight », *Duke Math. J.* **63** (1991), p. 281–332.
- [56] ———, « On the ℓ -adic cohomology of Siegel threefolds », *Invent. Math.* **114** (1993), p. 289–310.

- [57] R. TAYLOR & A. WILES – « Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras », *Ann. of Math.* **141** (1995), p. 553–572.
- [58] B. TEISSIER – « Résultats récents sur l’approximation des morphismes en algèbre commutative (d’après André, Artin, Popescu et Spivakovsky) », in *Sém. Bourbaki 1993/94*, Astérisque, vol. 227, Société Mathématique de France, 1995, Exp. n° 784, p. 259–282.
- [59] J. TILOUINE – *Deformations of Galois representations and Hecke algebras*, Narosa Publ., New Delhi, 1996.
- [60] J. TILOUINE & E. URBAN – « Several variable p -adic families of Siegel-Hilbert cusp eigensystems and their Galois representations », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **32** (1999), p. 499–574.
- [61] E. URBAN – « Sur les représentations p -adiques associées aux représentations cuspidales de $\mathrm{GSp}(4)_{\mathbb{Q}}$ », ce volume.
- [62] M.-F. VIGNÉRAS – « Induced representations of p -adic reductive groups », *Selecta Math. (N.S.)* **4** (1998), p. 549–623.
- [63] R. WEISSAUER – « Four dimensional Galois representations », ce volume.
- [64] A. WILES – « Modular curves and the class group of $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ », *Invent. Math.* **58** (1980), p. 1–35.
- [65] _____, « Modular elliptic curves and Fermat’s Last Theorem », *Ann. of Math.* **142** (1995), p. 443–551.
- [66] N. WINARSKY – « Reducibility of principal series of p -adic Chevalley groups », *Amer. J. Math.* **100** (1978), p. 941–956.
- [67] J.-P. WINTENBERGER – « Un scindage de la filtration de Hodge pour certaines variétés algébriques sur les corps locaux », *Ann. of Math. (2)* **119** (1984), no. 3, p. 511–548.
- [68] H. YOSHIDA – « Motives and Siegel modular forms », *Amer. J. Math.* **123** (2001), p. 1171–1197.

A. GENESTIER, Mathématique, UMR 8628, Université de Paris 11, 91405 Orsay
E-mail : Alain.Genestier@math.u-psud.fr

J. TILOUINE, Département de Mathématiques, UMR 7539, Institut Galilée, Université de Paris 13,
 93430 Villetaneuse • *E-mail* : tilouine@math.univ-paris13.fr