Astérisque

F. LEDRAPPIER

Profil d'entropie dans le cas continu

Astérisque, tome 236 (1996), p. 189-198

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__189_0>

Profil d'entropie dans le cas continu

F. Ledrappier

Résumé. — On considère le mouvement brownien sur un revêtement régulier d'une variété Riemannienne compacte. Par analogie avec l'entropie d'Avez des marches aléatoires, V. Kaimanovitch a défini un nombre positif appelé encore entropie, nul si et seulement si les seules fonctions harmoniques bornées sont les fonctions constantes. Dans cet article, nous proposons une démonstration des premières propriétés de cette entropie; de plus nous obtenons toute une famille de nombres rassemblés dans une fonction : le profil d'entropie. Le profil d'entropie enregistre les variations à grande échelle du noyau de la chaleur et permet de retrouver d'autres quantités asymptotiques.

I - Notations et résultats.

Soient M une variété Riemannienne compacte connexe sans bord et $(\widetilde{M}; \pi : \widetilde{M} \to M)$ un revêtement régulier de M. Nous notons $\mathbb{P}_x$ la mesure de probabilité sur $C(\mathbb{R}^+, M)$ du mouvement brownien partant de x, c'est-à-dire la mesure de probabilité telle que $\omega(0) = x$ pour $\mathbb{P}_x$-presque tout ω et $\{\omega(t), t \geq 0\}$ est un processus de Markov de générateur le laplacien Δ.

Soit m la mesure de Lebesgue normalisée sur M. La mesure m est invariante ergodique pour le processus de Markov $\{\mathbb{P}_x, x \in M\}$ et la mesure $\mathbb{P} = \int \mathbb{P}_x \, dm(x)$ est invariante ergodique pour le flot $\{\psi_s, s \geq 0\}$ du décalage des coordonnées sur $C(\mathbb{R}^+, M)$.

Pour toute trajectoire ω de $C(\mathbb{R}^+, M)$ et tout relevé $\tilde{x}$ de $\omega(0)$, il existe un unique relevé $\tilde{\omega}$ de ω dans $C(\mathbb{R}^+, \tilde{M})$ tel que $\tilde{\omega}(0) = \tilde{x}$. Le processus $\{\tilde{\omega}(t), t \geq 0, \mathbb{P}_{\pi\tilde{x}}\}$ est le mouvement brownien sur $\tilde{M}$ partant de $\tilde{x}$. La distribution de $\tilde{\omega}(t)$ sous $\mathbb{P}_{\pi\tilde{x}}$ est $p(t, \tilde{x}, y)dy$, où dy est la mesure de Lebesgue sur $\tilde{M}$ et $p(t, ., .)$ le noyau de la chaleur, solution fondamentale de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$.

Théorème 1 : *Il existe une fonction convexe $h(s), s > 0$ et un ensemble B_1 de mesure 1 dans $C(\mathbb{R}^+, M)$ tels que pour tout ω de B_1, tout $s > 0$*

$$h(s) = \lim_{t \to \infty} -\frac{1}{t} \log p(st, \tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t)).$$

Pour $s = 1$, on retrouve l'entropie de Kaimanovitch h [K].

Notons λ_1 la valeur inférieure du spectre de l'opérateur $-\Delta$ dans $L^2(\widetilde{M})$. Pour $\lambda < \lambda_1$ notons G_λ la fonction de Green de l'opérateur $\lambda + \Delta$ sur $\widetilde{M}$:

$$G_\lambda(x,y) = \int_0^\infty e^{\lambda t} p(t,x,y)dt \ .$$

Théorème 2 : *Il existe une fonction concave $g(\lambda), \lambda < \lambda_1$ et un ensemble B_2 de mesure 1 dans $C(\mathbb{R}^+, M)$ tels que pour tout ω de B_2 tout $\lambda < \lambda_1$:*

$$g(\lambda) = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} \log G_\lambda(\tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t)) \ .$$

Les fonctions g et h sont conjuguées, i.e. :

$$g(\lambda) = \inf_{s>0} \{h(s) - \lambda s\}$$
$$h(s) = \sup_{\lambda > \lambda_1} \{g(\lambda) + \lambda s\} \ .$$

Théorème 3 :
a) *Quand s tend vers $+\infty, h(s) - \lambda_1 s$ décroît vers un nombre noté $g(\lambda_1)$.*
b) *Quand $\lambda, \lambda < \lambda_1$ tend vers $\lambda_1, g(\lambda)$ décroît vers $g(\lambda_1)$.*
c) *Nous avons :*

$$4\lambda_1 \leq h = g(0) \leq 2g(\lambda_1) \ .$$

Les inégalités dans le théorème 3.c sont optimales, comme le montre le cas où $\widetilde{M}$ est l'espace hyperbolique réel de courbure constante -1 et où on trouve

$$h(s) = \frac{1}{4}(\frac{1}{s} + 2 + s) \quad s > 0$$
$$g(\lambda) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4\lambda}) \quad \lambda \leq \frac{1}{4}.$$

Les théorèmes analogues ont été énoncés pour les processus discrets dans [L2]. Pour un processus discret à portée finie, le profil d'entropie est infini pour s suffisamment petit. La situation est différente dans le cas continu. Rappelons d'abord qu'il existe un nombre réel positif ℓ tel que pour $\mathbb{P}$-presque tout ω

$$\ell = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} d(\tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t)) \quad [G] \ .$$

Les estimées connues ([CY], [LY]) sur le noyau de la chaleur donnent alors le résultat suivant :

Théorème 4 : *Soit $-K$ un minorant de la courbure de Ricci sur $M, K > 0$. Alors pour tout $s > 0$*

$$\frac{\ell^2}{4s} \leq h(s) \leq \frac{\ell^2}{4s} + \frac{K}{2} + \frac{Ks}{4}$$

et pour tout $\lambda \leq \dfrac{K}{4}$

$$\ell\sqrt{-\lambda} \leq g(\lambda) \leq \ell\sqrt{\frac{K}{4} - \lambda} + \frac{K}{2} .$$

où $\sqrt{-\lambda} = -\infty$ *pour* $\lambda > 0$, $g(\lambda) = -\infty$ *pour* $\lambda_1 < \lambda \leq \frac{K}{4}$.

En particulier :

Corollaire 5 :

$$\ell = \lim_{s \to 0} \sqrt{4\,\mathrm{sh}(s)} = \lim_{\lambda \to -\infty} \frac{g(\lambda)}{\sqrt{-\lambda}} .$$

II Démonstration du théorème 1.

Nous utiliserons les propriétés suivantes du noyau de la chaleur :

- Propriété de semi-groupe

$$p(t+t', x, y) = \int p(t, x, z) p(t', z, y) dz \ , \tag{2.1}$$

- inégalité de Harnack parabolique [M] :

(2.2) il existe A, τ positifs tels que pour tous $t \geq 1, \frac{1}{2} \leq t' \leq 1, x, x', y, y'$ dans $\widetilde{M}$ avec $d(x,x') \leq \tau, d(y,y') \leq \tau$, on a :

$$p(t,x,y) \geq A p(t-t', x', y')$$

- localisation du rayon spectral :

$$\lim_{t \to \infty} -\frac{1}{t} \log p(t,x,x) = \lambda_1 \ , \tag{2.3}$$

- comparaison avec un espace à courbure constante :

(2.4) le processus $d(\tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t))$ est stochastiquement inférieur au processus distance sur un espace hyperbolique réel de même dimension que $\widetilde{M}$ et de courbure constante inférieure à toutes les courbures sectionnelles sur M [DGM],

- d'autre part :

(2.5) uniformément pour t dans un intervalle [a,b], $0 < a \leq b < +\infty$

$$p(t,x,y) \geq C(a,b) e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}} \ \text{[DGM]}.$$

Définissons $F(s, \omega, t)$ par :

$$F(s,\omega,t) = -\log(p(st-1, \tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t)).B),$$

où

$$B = A^2 \inf_{z \in \widetilde{M}} \mathrm{vol} B(z, \tau)$$

et A et τ sont choisis pour que (2.2) soit vrai.

Nous avons les deux propriétés suivantes :

$$\left[\begin{array}{l}\text{Pour tous} \quad s > 0, t, t' \geq \frac{1}{s}, \omega \in C(\mathbb{R}_+, M) \ : \\ F(s,\omega,t+t') \leq F(s,\omega,t) + F(s,\psi_t\omega,t')\end{array}\right. \tag{2.6}$$

En effet nous pouvons écrire par (2.1) :

$$\begin{aligned} p(s(t+t')-1,\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(t+t')) &= \\ = \int p(st-\frac{1}{2},\tilde{\omega}(0),z)p(st'-\frac{1}{2},z,\tilde{\omega}(t+t'))dz \\ \geq \int_{z\in B(\tilde{\omega}(t),\tau)} p(st-\frac{1}{2},\tilde{\omega}(0),z)p(st'-\frac{1}{2},z,\tilde{\omega}(t+t'))dz \\ \geq A^2 p(st-1,\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(t))p(st'-1,\tilde{\omega}(t),\tilde{\omega}(t+t')) \times \mathrm{vol} B(\tilde{\omega}(t),\tau) \ . \end{aligned}$$

$$\left[\mathbb{E}\left(\sup_{1+\frac{1}{s}\leq t\leq 2+\frac{1}{s}} F(s,\omega,t)\right) < +\infty \ .\right. \tag{2.7}$$

D'après (2.5) cela revient en effet à estimer $\sup_{1+\frac{1}{s}\leq t\leq 2+\frac{1}{s}} d^2(\omega(0),\tilde{\omega}(t))$ et cette variable est intégrable d'après (2.4).

D'après (2.6) et (2.7), nous pouvons appliquer le théorème ergodique sous-additif à la famille $\{F(s,\omega,t), t \geq \frac{1}{s}\}$. Donc il existe un nombre $h(s)$ et un ensemble $B(s)$ de trajectoires, $\mathbb{P}(B(s)) = 1$ tels que si ω appartient à $B(s)$.

$$h(s) = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t}\log p(st-1,\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(t)) \ . \tag{2.8}$$

Observons alors que la fonction h définie par (2.8) est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$; en effet un calcul analogue à celui qui prouve (2.6) donne, pour $0 < a < 1$:

$$\begin{aligned} p((as_1+(1-a)s_2)t-1,\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(t)) \geq \\ \geq Bp(as_1t-1,\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(at))p((1-a)s_2t-1,\tilde{\omega}(at),\tilde{\omega}(t)) \ . \end{aligned}$$

En appliquant $-\frac{1}{t}\log$ puis en prenant la limite en probabilité de l'inégalité obtenue, nous trouvons bien que

$$h(as_1+(1-a)s_2) \leq ah(s_1)+(1-a)h(s_2) \ .$$

La fonction h définie par (2.8) est bien convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$, en particulier la fonction h est continue.

Soit alors un ensemble D dénombrable dense dans $\mathbb{R}_+$ et notons $B_1 = \cap\{B(s), s \in D\}$. Dès que $s < s'$ et t est assez grand, nous pouvons écrire, en itérant (2.2) :

$$p(st,\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(t)) \leq A^{(s-s')t-1}p(s't-1,\tilde{\omega}(0),\omega(t)) \ .$$

Il s'ensuit que pour tout ω dans $B_1, s's''$ dans D et $s' < s < s''$:

$$\begin{aligned} h(s'') + (s'' - s)\log A &\leq \lim\inf_{t\to\infty} -\frac{1}{t}\log p(st, \tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t)) \leq \\ &\leq \lim\sup_{t\to\infty} -\frac{1}{t}\log p(st, \tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t)) \\ &\leq h(s') - (s - s')\log A \ . \end{aligned}$$

Le théorème 1 suit de la continuité de h.

La démonstration du théorème 3.a repose également sur le même calcul. En effet nous pouvons écrire pour $s' < s$:

$$p(st-1, \tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t)) \geq Bp(s't-1, \tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t))p((s-s')t-1, \tilde{\omega}(t), \tilde{\omega}(t)) \ .$$

D'après (2.3), nous obtenons :

$$h(s) \leq h(s') + \lambda_1(s - s') \ ,$$

ce qui exprime bien que la fonction $s \to h(s) - \lambda_1 s$ est décroissante. Nous notons la limite quand s tend vers l'infini $g(\lambda_1)$.

III - Autres propriétés.

La démonstration du théorème 2 à partir du théorème 1 est de routine : on écrit

$$G_\lambda(\tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t)) = t\int_0^\infty e^{\lambda st}p(st, \tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t))ds \ .$$

Pour ω dans B_1, il vient:

$$\lim\sup_{t\to\infty} -\frac{1}{t}\log G_\lambda(\tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t)) \leq \inf_{s>0}\{h(s) - \lambda s\}$$

Réciproquement d'après (2.4) on peut trouver un ensemble B avec $\mathbb{P}(B) = 1$ et un nombre C_0 tels que si ω appartient à B et t est assez grand $d(\tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t)) \leq C_0 t$.

Si ω est dans B, nous avons pour tout t assez grand, d'après (2.2) :

$$p(st, \tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t)) \leq A^{-\frac{C_0}{\tau}t}p((s + \frac{C_0}{\tau})t, \tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(0)) \ ,$$

et donc d'après (2.3) pour tout t assez grand, tout $\xi > 0$, une constante C_1 telle que

$$p(st, \tilde{\omega}(0)\tilde{\omega}(t)) \leq C_1^t e^{-(\lambda_1 - \xi)st} \ .$$

Pour tous $\lambda < \lambda_1$ et $\xi > 0$ fixés nous pouvons donc trouver S assez grand pour que si t est assez grand

$$\int_S^{+\infty} e^{\lambda st}p(st, \tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t))ds \leq e^{-(g(\lambda) - \xi)t} \ .$$

Cet argument ramène à un domaine $[0,S]$ borné si bien que si ω appartient à $B_2 = B_1 \cap B$, on établit facilement que

$$\lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} \log G_\lambda(\tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t)) = g(\lambda) ,$$

où $g(\lambda)$ est définie pour $\lambda < \lambda_1$ par $g(\lambda) = \inf_{s>0}\{h(s) - \lambda s\}$.

La fonction g est concave continue sur $\lambda < \lambda_1$.

Nous savons déjà que $h(s) = \lambda_1 s + g(\lambda_1) + f(s)$ où f est une fonction décroissante tendant vers 0 à l'infini et $g(\lambda_1)$ est défini par cette relation. Il s'ensuit que

$$g(\lambda_1) = \inf_{s>0}\{h(s) - \lambda_1 s\} .$$

Comme la fonction $-g$ est la fonction convexe conjuguée de h, il vient (cf. e.g. [RV] chapitre 15) :

$$h(s) = \sup_{\lambda<\lambda_1}\{g(\lambda) + \lambda s\} \ , \ s > 0$$

et

$$g(\lambda_1) = \lim_{\substack{\lambda<\lambda_1 \\ \lambda\to\lambda_1}} g(\lambda) .$$

Il reste à montrer les relations du théorème 3.c. et le théorème 4.

$\cdot$ Preuve de $4\lambda_1 \le h$.

La démonstration du théorème 1 donne également pour tout s et presque tout x :

$$h(s) = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} \int p(t,x,y) \log p(st,x,y) dy .$$

En particulier $h = h(1)$ est donné par :

$$h = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} \int p(t,x,y) \log p(t,x,y) dy .$$

La démonstration est alors la même que dans le cas du revêtement universel ([L1] proposition 3).

$\cdot$ Preuve de $h = g(0)$.

Cela revient à dire que 1 est minimum pour la fonction h. Or nous avons pour tout s :

$$\begin{aligned} h(s) - h(1) &= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} \int p(t,x,y) \log \frac{p(st,x,y)}{p(t,x,y)} dy \\ &\ge \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} \int p(t,x,y) \left(\frac{p(st,x,y)}{p(t,x,y)} - 1 \right) dy . \end{aligned}$$

Nous avons utilisé que $\log a \leq a - 1$ pour tout a réel.

$\cdot$ Preuve de $h \leq 2g(\lambda_1)$.

Pour montrer cette relation, nous allons d'abord donner une autre définition de l'entropie. Posons pour tout x de $\widetilde{M}$, t, $\delta > 0$

$$N(x,t,\delta) = \inf\{\mathrm{card} E : \mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : d(\tilde{\omega}(t), E) \leq 1\} \geq \delta\}$$

Proposition (Kaimanovich [K]) : *Pour tout x de $\widetilde{M}, 0 < \delta < 1$, nous avons*

$$h = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log N(x,t,\delta) \ .$$

Nous établissons d'abord que pour tout x de $\widetilde{M}$, $0 < \delta < 1$,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log N(x,t,\delta) \leq h \ .$$

Nous avons en fait un résultat un peu plus précis :

$$\text{(3.1)} \qquad \left[\begin{array}{l} \text{Pour tout} x \text{ de } \widetilde{M} \text{ et } \mathbb{P}_{\pi x}\text{-presque tout } \omega : \\ \limsup\limits_{t\to\infty} -\dfrac{1}{t} \log \mathbb{P}_{\pi x}\{\omega' : d(\omega'(t), \tilde{\omega}(t)) \leq \tau\} \leq h \ . \end{array}\right.$$

En effet nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_{B(\tilde{\omega}(t),\tau)} p(t,x,y)dy &= \int_{B(\tilde{\omega}(t),\tau)\times\widetilde{M}} p(t-\tfrac{1}{2},x,z)p(\tfrac{1}{2},z,y)\,dy\,dz \\ &\geq Ap(t-1,x,\tilde{\omega}(t)) \int_{B(\tilde{\omega}(t),\tau)\times\widetilde{M}} p(\tfrac{1}{2},y,z)\,dy\,dz \\ &\geq A_1 p(t-1,x,\tilde{\omega}(t)) \end{aligned}$$

pour une certaine constante A_1. D'après (2.8) la propriété (3.1) est vraie pour presque tout x. En écrivant

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{\pi x}\{\omega' : d(\omega'(t), \tilde{\omega}(t)) \leq \tau\} = \\ &= \int p(1,x,y)\mathbb{P}_{\pi y}\{\omega' : d(\omega'(t-1), \tilde{\omega}(t-1)\} \leq \tau\}dy \ , \end{aligned}$$

on obtient la propriété (3.1) pour tout x.

L'inégalité annoncée suit de (3.1) en prenant pour x, δ, ε fixés t assez grand pour que $\mathbb{P}_{\pi x}(A_t) \geq \delta$, où A_t est l'ensemble des ω tels que

$$\mathbb{P}_{\pi x}\{\omega' : d(\omega'(t)) \leq \tau\} \geq e^{-(h+\varepsilon)t} \ .$$

Choisissons alors pour E un ensemble 1-séparé maximal dans $\{\tilde{\omega}(t), \omega \in A_t\}$. Par maximalité

$$\mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : d(\tilde{\omega}(t), E) \leq 1\} \geq \mathbb{P}_{\pi x}(A_t) \geq \delta .$$

D'autre part les boules centrées sur E et de rayon τ sont disjointes (on peut supposer $\tau \leq \frac{1}{2}$!) et de probabilité supérieure à $e^{-(h+\varepsilon)t}$ pour la loi de $\tilde{\omega}(t)$. Pour x, δ, ε fixés nous avons donc pour t assez grand $N(x,t,\delta) \leq \text{card } E \leq e^{(h+\varepsilon)t}$, c'est-à-dire la majoration annoncée.

Pour minorer $\liminf \frac{1}{t} \log N(x,t,\delta)$, nous définissons l'ensemble M_t par :

$$M_t = \left\{y : y \in \widetilde{M}, \int_{B(y,1)} p(t,x,z)dz \geq e^{-(h-\varepsilon)t}\right\}$$

$$\text{(3.2)} \qquad \left[\begin{array}{l}\text{Pour tout } x \text{ de } \widetilde{M} \\ \lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : d(\tilde{\omega}(t), M_t \leq 1\} = 0 .\end{array}\right.$$

En effet si y appartient à M_t, nous avons pour t assez grand

$$\mathbb{P}_{\pi x}(\{\omega : p(t,x,\tilde{\omega}(t)) \geq e^{-(h-\varepsilon/2)t}\} | d(\tilde{\omega}(t), y) \leq 2) \geq \frac{1}{2} .$$

(sinon nous aurions :

$$\int_{B(y,2)} p(t,x,z)dz \leq \frac{1}{2}\int_{B(y,2)} p(t,x,z)dz + e^{-(h-\varepsilon/2)} \max_y \operatorname{vol} B(y,z)$$

ce qui contredit la définition de M_t).

Il existe une constante géométrique C telle que l'on puisse trouver un sous-ensemble M_t^0 de M_t avec les $B(y,2), y \in M_t^0$ deux à deux disjoints et

$$\mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : d(\tilde{\omega}(t), M_t^0) \leq 2\} \geq \frac{1}{C}\mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : d(\tilde{\omega}(t), M_t) \leq 1\} .$$

On peut alors majorer :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : d(\tilde{\omega}(t), M_t) \leq 1\} \leq C \sum_{y \in M_t^0} \mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : d(\tilde{\omega}(t), y) \leq 2\} \\
&\leq 2C \sum_{y \in M_t^0} \mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : d(\tilde{\omega}(t), y) \leq 2 \text{et} \quad p(t,x,\tilde{\omega}(t)) \geq e^{-(h-\varepsilon/2)t}\} \\
&\leq 2C\mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : p(t,x,\tilde{\omega}(t)) \geq e^{-(h-\varepsilon/2)t}\} .
\end{aligned}$$

La dernière expression tend vers zéro d'après le théorème 1.

Soit alors E un ensemble quelconque tel que $\mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : d(\tilde{\omega}(t), E) \leq 1\} \geq \delta$. Notons E_t les points de E qui ne sont pas dans M_t. D'après (3.2) pour t assez grand $\mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : d(\tilde{\omega}(t), E_t) \leq 1\} \geq \frac{\delta}{2}$ et par définition pour chaque y de E_t

$$\mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : d(\tilde{\omega}(t), y) \leq 1\} \leq e^{-(h-\varepsilon)t} .$$

Le cardinal de E_t doit être au moins $\frac{\delta}{2}e^{(h-\varepsilon)t}$ et ceci achève la démonstration de la proposition.

(3.3) **Corollaire :** *Pour* $s > 0$, $h(s) - s\lambda_1 \geq \frac{h}{2}$.

Ecrivons en effet pour un x de $\widetilde{M}, t > 0$, $p(t,x,x) = \int p(t/2,x,y)p(t/2,y,x)dy$, et fixons $\xi > 0$. Pour ω dans $B(s), t$ assez grand et y tel que $d(y, \tilde{\omega}(t/2s)) \leq \tau$, nous avons si $x = \tilde{\omega}(0)$:

$$p(t/2,x,y) = p(t/2,y,x) \geq Ae^{-\frac{t}{2s}(h(s)+\xi)} .$$

Soit x tel que $\mathbb{P}_{\pi x}B(s) = 1$, et choisissons un ensemble E minimal dans $Q_t = \{\tilde{\omega}(t/2s) : \omega \in B(s), \tilde{\omega}(0) = x\}$ avec la propriété que $d(Q_t, E) \leq 1$.

La proposition entraîne que pour t assez grand card $E \geq e^{\frac{t}{2s}(h-\xi)}$. D'autre part, par minimalité les boules de rayon τ centrées sur E sont disjointes si bien que

$$\begin{aligned} p(t,x,x) &\geq \text{card } E \inf_{z \in Q_t} \int_{B(z,\tau)} p(t/2,x,y)^2 dy \\ &\geq e^{\frac{t}{2s}(h-\xi)}.A^2.e^{-\frac{t}{s}(h(s)+\xi)}.\inf_z \text{vol}B(z,\tau) . \end{aligned}$$

D'où par (2.3) :

$$\lambda_1 \leq -\frac{h}{2s} + 2\xi + \frac{h(s)}{s} .$$

Le corollaire suit en laissant ξ tendre vers 0, et la relation $h \leq 2g(\lambda_1)$ en faisant tendre s vers l'infini.

· **Preuve du théorème 4 :** L'existence de la limite ℓ suit du théorème ergodique sous-additif. Pour minorer $h(s)$ rappelons la majoration du noyau de la chaleur de [LY] corollary 3.1. Pour $1 < \alpha < 2$ et $0 < \varepsilon < 1$, t assez grand pour que vol$B(x, \sqrt{t}) \geq 1$ et pour tout x :

$$p(t,x,y) \leq C(\varepsilon)^\alpha \exp\left(C\varepsilon(\alpha-1)^{-1}Kt - \frac{d^2(x,y)}{(4+\varepsilon)t}\right) .$$

D'où pour $\mathbb{P}$ presque tout ω :

$$\lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t}\log p(st,x,\tilde{\omega}(t)) \geq \frac{\ell^2}{(4+\varepsilon)s} - \frac{C\varepsilon K s}{\alpha - 1} .$$

Faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$h(s) \geq \frac{\ell^2}{4s} .$$

Inversement pour majorer $h(s)$, on minore le noyau de la chaleur $p(t,x,y)$ par la valeur $q(t,r)$ du noyau de la chaleur dans l'espace simplement connexe de même dimension que M et de courbure constante $-\frac{K}{\dim M - 1}$ ([CY]). La majoration annoncée suit. L'encadrement de la fonction g se déduit de celui de la fonction h par dualité.

Bibliographie

[CY] J. Cheeger and S.T. Yau : A lower bound for the heat kernel *Comm. Pure Appl. Math.* **34** (1981), 465-480.

[DGM] A. Debiard, B. Gaveau et E. Mazet : Théorèmes de comparaison en géométrie Riemannienne. *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **12** (1976), 391-425.

[G] Y. Guivarch : Sur la loi des grands nombres et le rayon spectral d'une marche aléatoire. *Astérisque* **74** (1980), 47-98.

[K] V.A. Kaimanovich : Brownian motion and harmonic functions on covering manifolds. An entropy approach. *Soviet Math. Dokldy* **33** (1986), 812-816.

[L1] F. Ledrappier : Harmonic measures and Bowen-Margulis measures. *Israel J. Maths.* **71** (1990), 275-287.

[L2] F. Ledrappier : Sharp estimates for the entropy. *Harmonic Analysis and Discrete Potential Theory.* M. Picardello ed. Plenum Press, NY (1992), 282-288.

[LY] P. Li and S.T. Yau : On the parabolic kernel of the Schrödinger operator. *Acta Math.* **156** (1986), 154-201.

[M] J. Moser : A Harnack inequality for parabolic differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.* **17** (1964), 101-134.

[RV] A.N. Roberts and D.E. Varberg : Convex functions. *Pure and Applied Maths.* **57** Academic Press (1973).

C.N.R.S., URA 169
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91 128 PALAISEAU Cedex
et
C.N.R.S., URA 224
Laboratoire de Probabilités
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75 252 PARIS Cedex 05