

# Astérisque

J. JACOD

## **La variation quadratique du brownien en présence d'erreurs d'arrondi**

*Astérisque*, tome 236 (1996), p. 155-161

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1996\\_\\_236\\_\\_155\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__155_0)

© Société mathématique de France, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# La variation quadratique du brownien en présence d'erreurs d'arrondi

J. Jacod

**Résumé.** — Nous étudions le comportement asymptotique (quand  $n \rightarrow \infty$ ) de la variation quadratique au pas  $n$ ,  $\sum_{i=1}^{[nt]} (X_{i/n} - X_{(i-1)/n})^2$ , lorsque  $X$  est un brownien linéaire, et lorsqu'on remplace dans la formule ci-dessus  $X_{i/n}$  par une valeur arrondie, avec une précision  $\alpha_n$  pouvant dépendre de  $n$ . On verra apparaître des comportements inattendus, dépendant de la limite  $\alpha$  de la suite  $\alpha_n$ , et de sa vitesse de convergence si  $\alpha = 0$ .

## 1 Introduction et résultats

Dans ce qui suit,  $X$  désigne un brownien linéaire de variance unitaire  $\sigma^2$ . Nous nous proposons d'étudier le comportement de la variation quadratique en présence d'erreurs d'arrondi.

Plus précisément, on sait que le processus variation quadratique "au pas  $n$ "  $V_t^n = \sum_{i/n}^{[nt]} (X_{i/n} - X_{(i-1)/n})^2$  converge dans  $L^2$  vers  $t\sigma^2$ . Que devient ce résultat banal si on remplace les  $X_{i/n}$  par des valeurs "arrondies" à un certain niveau de précision  $\alpha_n > 0$  (pouvant dépendre de  $n$ )? De manière plus précise, on remplace chaque  $X_{i/n}$  par  $X_{i/n}^{(\alpha_n)} = \alpha_n [X_{i/n}/\alpha_n]$  ( $[x]$  désignant la partie entière du réel  $x$ ) et donc le processus  $V^n$  par

$$V(n, \alpha_n)_t = \sum_{i=1}^{[nt]} (X_{i/n}^{(\alpha_n)} - X_{(i-1)/n}^{(\alpha_n)})^2. \quad (1)$$

L'intérêt de l'étude du comportement de  $V(n, \alpha_n)$  est évident, par exemple, lors de l'estimation statistique de  $\sigma^2$  à partir d'observations "discrétisées"  $X_{i/n}$  pour  $i \leq n$  : on sait que le "meilleur" estimateur (en tous les sens du terme) est alors  $V_1^n$ ; dans la pratique, on remplace évidemment  $V_1^n$  par  $V(n, \alpha_n)_1$ , et il est naturel de se demander si  $V(n, \alpha_n)_1$  converge encore vers  $\sigma^2$ .

Si  $\alpha_n$  tend "assez vite" vers 0, la différence  $V_t^n - V(n, \alpha_n)_t$  va évidemment tendre vers 0. Au contraire si  $\alpha_n = \alpha > 0$ , pour  $n$  assez grand les accroissements du membre

de droite de (1) sont pour la plupart nuls, et le reste du temps de taille  $\alpha^2$  lorsque  $X$  oscille autour d'une des valeurs  $k\alpha$  pour  $k \in \mathbb{Z}$  : donc le comportement limite de  $V(n, \alpha_n)$  doit s'exprimer en termes des temps locaux de  $X$  aux niveaux  $k\alpha$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Une réponse complète à la question posée est donnée par le :

**THEOREME** : Soit  $\beta_n = \alpha_n \sqrt{n}$ . On a les convergences suivantes :

a) Si  $\beta_n \rightarrow 0$ , alors  $V(n, \alpha_n)_t \rightarrow t\sigma^2$  dans  $\mathbb{L}^2$ .

b) Si  $\beta_n \rightarrow \beta \in ]0, \infty[$ , alors  $V(n, \alpha_n)_t \rightarrow t\Gamma(\beta, \sigma)$  dans  $\mathbb{L}^2$ , où  $\Gamma$  est la fonction suivante, avec  $h$  densité de la loi normale standard  $N(0, 1)$  :

$$\Gamma(\beta, \sigma) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{(k-1)\beta/\sigma}^{k\beta/\sigma} h(u)(2k\beta\sigma u + k(1-k)\beta^2) du. \quad (2)$$

c) Si  $\beta_n \rightarrow \infty$  et  $\alpha_n \rightarrow 0$ , alors  $\frac{1}{\beta_n} V(n, \alpha_n)_t \rightarrow t\sigma\sqrt{2/\pi}$  dans  $\mathbb{L}^2$ .

d) Si  $\alpha_n \rightarrow \alpha \in ]0, \infty[$ , alors  $\frac{1}{\sqrt{n}} V(n, \alpha_n)_t \rightarrow \frac{1}{\sigma} \Lambda(\alpha)_t$  en probabilité, où  $L^\alpha$  est le temps local (au sens des semimartingales) de  $X$  au niveau  $\alpha$ , et

$$\Lambda(\alpha) = \sqrt{2/\pi} \alpha^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} L^{k\alpha}. \quad (3)$$

Les résultats les plus importants nous semblent être (b) et (c) : ils montrent que  $V(n, \alpha_n)$  ne converge pas vers  $\sigma^2 t$ , ou peut même tendre vers l'infini, si  $\alpha_n$  ne tend pas assez vite vers 0. La partie (d) est, nous le verrons, un corollaire simple des résultats d'Azaïs [1].

Bien entendu, ces résultats sont susceptibles de généralisations aux diffusions, ou peut-être à des semimartingales continues plus générales. Un autre problème intéressant, mais plus difficile, concerne les vitesses de convergence (du type théorème central limite) dans (a,b,c) : ces résultats seront développés ailleurs.

**REMARQUE** : Les résultats ci-dessus sont "compatibles" au sens suivant :

1) On vérifie aisément que  $\Gamma(\beta, \sigma) \rightarrow \sigma^2$  si  $\beta \rightarrow 0$  (Il est vraisemblable, mais nous n'avons pas su le démontrer, que  $\beta \rightarrow \Gamma(\beta, \sigma)$  est croissante; les résultats de simulations étayent cette conjecture).

2) De même, on démontre que  $\Gamma(\beta, \sigma)/\beta \rightarrow \sigma\sqrt{2/\pi}$  si  $\beta \rightarrow \infty$ .

3) Si  $\alpha \rightarrow 0$ , alors  $\Lambda(\alpha)_t \rightarrow \sqrt{2/\pi} \frac{1}{\sigma} \int L_t^\alpha dt = \sigma t \sqrt{2/\pi}$  (formule du temps d'occupation pour les temps locaux de semimartingale).  $\square$

On note  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  la filtration engendrée par  $X$ , et on pose

$$\xi_i^n = X_{i/n} - X_{(i-1)/n}, \quad \chi_i^n = (X_{i/n}^{(\alpha_n)} - X_{(i-1)/n}^{(\alpha_n)})^2.$$

Soit aussi  $p_t(x, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} h((y-x)/\sigma\sqrt{t})$  la famille des densités de transition de  $X$ . Finalement,  $C$  désigne une constante (dépendant parfois de  $\sigma^2$ ) changeant de ligne en ligne.

**2 Preuve de (a)**

Comme  $0 \leq x - \alpha[x/\alpha] < \alpha$ , on a  $|\chi_i^n - (\xi_i^n)^2| \leq 4\alpha_n^2 + 4\alpha_n|\xi_i^n|$  et donc

$$|V(n, \alpha_n)_t - V_t^n| \leq 4\alpha_n^2[nt] + 4\alpha_n \sum_{i=1}^{[nt]} |\xi_i^n|.$$

Par ailleurs  $E(|\xi_i^n \xi_j^n|) = 2\sigma^2/n\pi$  si  $i \neq j$  et  $E((\xi_i^n)^2) = \sigma^2/n$ , donc  $E(|V(n, \alpha_n)_t - V_t^n|^2) \leq C(\alpha_n^4 n^2 + \alpha_n^2 n) \rightarrow 0$ .

**3 Preuve de (b)**

On suppose ici que  $\beta_n \rightarrow \beta \in ]0, \infty[$  et on pose  $\eta_i^n = \chi_i^n - \Gamma(\beta, \sigma)/n$ . Il faut montrer que  $\sum_{i=1}^{[nt]} \eta_i^n \rightarrow 0$  dans  $L^2$ . Pour cela il suffit d'avoir les deux propriétés :

$$\sum_{i=1}^{[nt]} E((\eta_i^n)^2) \rightarrow 0. \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{[nt]-2} \sum_{j=i+2}^{[nt]} E(\eta_i^n \eta_j^n) \rightarrow 0. \tag{5}$$

Comme  $|\eta_i^n| \leq 2(\xi_i^n)^2 + 8\alpha_n^2 + \Gamma(\beta, \sigma)/n$  et  $E((\xi_i^n)^4) = 3\sigma^4/n^2$ , on a (4). Pour (5) nous opérons en deux étapes.

ETAPE 1. Soit  $s > 0$ . La variable  $E((X_{t+s+1/n}^{(\alpha_n)} - X_{t+s}^{(\alpha_n)})^2 | \mathcal{F}_t)$  se met sous la forme  $\gamma_n(X_t, s)$ , où

$$\begin{aligned} \gamma_n(x, s) &= \\ &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} k^2 \alpha_n^2 \iint p_s(x, y) p_{1/n}(y, z) 1_{\{j\alpha_n \leq y < (j+1)\alpha_n, (k+j)\alpha_n \leq z < (k+j+1)\alpha_n\}} dy dz \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 \alpha_n^2 \int_0^{\beta_n/\sigma} h(u + (k-1)\beta_n/\sigma) du \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns}}^{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s}} h(v) dv \\ &\quad + \int_0^{\beta_n/\sigma} h(u + k\beta_n/\sigma) du \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{(j\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s}}^{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns}} h(v) dv]. \end{aligned} \tag{6}$$

Soit  $g(v, y, w) = (\frac{w}{y} - 1)v 1_{[0,w]}(v) + w(\frac{v}{y} - 1) 1_{]w,y]}(v)$ . Si  $z \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq w \leq y$  et  $y > 0$ , une intégration par parties

$$\int_z^{z+w} h(v) dv - \frac{w}{y} \int_z^{z+y} h(v) dv = \int_z^{z+y} h'(v) g(z+v, y, w) dv.$$

Mais  $|g(v, y, w)| \leq w$  et  $h'$  est intégrable, donc si  $z \in \mathbb{R}$ ,  $y > 0$  et  $0 \leq w \leq y$  :

$$\left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{jv+z}^{jy+z+w} h(v) dv - \frac{w}{y} \right| \leq Cw \leq Cy. \quad (7)$$

Soit  $0 \leq u \leq \beta_n/\sqrt{s}$ . Si on applique (7) à  $y = \alpha_n/\sigma\sqrt{s}$ , et d'abord à  $w = u/\sqrt{ns}$  et  $z = (\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns}$ , puis à  $w = \alpha_n/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns} = (\beta_n/\sigma - u)/\sqrt{ns}$  et  $z = -x/\sigma\sqrt{s}$ , on obtient :

$$\left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns}}^{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s}} h(v) dv - \frac{u\sigma}{\beta_n} \right| \leq C \frac{u}{\sqrt{ns}} \leq C \frac{\alpha_n}{\sigma\sqrt{s}} \quad (8)$$

$$\left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{(j\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s}}^{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns}} h(v) dv - 1 + \frac{u\sigma}{\beta_n} \right| \leq C \left( \frac{\beta_n}{\sigma} - u \right) \frac{1}{\sqrt{ns}} \leq C \frac{\alpha_n}{\sigma\sqrt{s}} \quad (9)$$

Si alors  $f_n(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 (h(u + (k-1)\beta_n/\sigma)u\sigma\beta_n + h(u + k\beta_n/\sigma)(\beta_n^2 - u\sigma\beta_n))$  et  $g_n(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 (h(u + (k-1)\beta_n/\sigma) + h(u + k\beta_n/\sigma))$ , on déduit de (6), (8) et (9) que

$$\left| \gamma_n(x, s) - \frac{1}{n} \int_0^{\beta_n/\sigma} f_n(u) du \right| \leq C \alpha_n^3 s^{-1/2} \int_0^{\beta_n/\sigma} g_n(u) du.$$

Mais  $\beta_n \rightarrow \beta \in ]0, \infty[$ , donc les fonctions  $f_n$  et  $g_n$  convergent vers les fonctions  $f(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 (h(u + (k-1)\beta/\sigma)u\sigma\beta + h(u + k\beta/\sigma)(\beta^2 - u\sigma\beta))$  et  $g(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 (h(u + (k-1)\beta/\sigma) + h(u + k\beta/\sigma))$ , et  $\sup_{u \in [0, \beta_n/\sigma]} (|f_n(u)| + |g_n(u)|) < \infty$ . De plus  $\int_0^{\beta/\sigma} f(u) du = \Gamma(\beta, \sigma)$ . Comme  $\alpha_n = O(\sqrt{n})$ , on a finalement :

$$\left| \gamma_n(x, s) - \frac{1}{n} \Gamma(\beta, \sigma) \right| \leq \frac{C}{n\sqrt{ns}} + o(1/n). \quad (10)$$

ETAPE 2. On a  $E(\eta_j^n | \mathcal{F}_{i/n}) = \gamma_n(X_{i/n}, (j-i-1)/n) - \Gamma(\beta, \sigma)/n$  si  $j \geq i+2$ . Comme  $|\eta_i^n| \leq 2(\xi_i^n)^2 + 8\alpha_n^2 + \Gamma(\beta, \sigma)/n$  on a aussi  $E(|\eta_i^n|) \leq C/n$ . Donc (10) implique pour  $j \geq i+2$  :

$$\begin{aligned} |E(\eta_i^n \eta_j^n)| &= \left| E\left(\eta_i^n \left(\gamma_n\left(X_{i/n}, \frac{j-i-1}{n}\right) - \frac{\Gamma(\beta, \sigma)}{n}\right)\right) \right| \\ &\leq (C/n\sqrt{j-i-1} + o(1/n)) |E(\eta_i^n)| \leq C/n^2 \sqrt{j-i-1} + o(1/n^2). \end{aligned}$$

Comme  $\lim_n n^{-1/2} \sum_{k=2}^{[nt]} (k-1)^{-1/2} = \int_0^t s^{-1/2} ds < \infty$ , on en déduit (5).

#### 4 Preuve de (c)

On suppose maintenant que  $\beta_n \rightarrow \infty$  et que  $\alpha_n \rightarrow 0$ . Posons  $R_n = \{(x, y) : |[y/\alpha_n] - [x/\alpha_n]| = 1\}$  et  $S_n = \mathbb{R}^2 \setminus R_n$ .

ETAPE 1. Soit

$$\delta_i^n = \frac{1}{\beta_n} \chi_i^n 1_{S_n}(X_{(i-1)/n}, X_{i/n}), \quad W_n = \sum_{i=1}^{[nt]} \delta_i^n.$$

Si  $(x, y) \in S_n$  on a ou bien  $[y/\alpha_n] = [x/\alpha_n]$ , ou bien  $|x - y| \geq \alpha_n$ , donc toujours  $|\alpha_n[y/\alpha_n] - \alpha_n[x/\alpha_n]| \leq 2|y - x|$ . Donc  $(\delta_i^n)^2 \leq 16\beta_n^{-2}(\xi_i^n)^4$ . Comme  $E((\xi_i^n)^4) = 3\sigma^4/n^2$  et  $W_n^2 \leq [nt] \sum_{i=1}^{[nt]} (\delta_i^n)^2$ , on déduit de  $\beta_n \rightarrow \infty$  que  $W_n \rightarrow 0$  dans  $\mathbb{L}^2$ . Il reste donc à prouver que si

$$\eta_i^n = \frac{1}{\beta_n} \chi_i^n 1_{R_n}(X_{(i-1)/n}, X_{i/n}) - \frac{1}{n} \sigma \sqrt{2/\pi}, \quad W'_n = \sum_{i=1}^{[nt]} \eta_i^n, \quad (11)$$

alors  $W'_n \rightarrow 0$  dans  $\mathbb{L}^2$ .

ETAPE 2. Si  $(X_{t+s}, X_{t+s+1/n}) \in R_n$  on a  $(X_{t+s+1/n}^{(\alpha_n)} - X_{t+s}^{(\alpha_n)})^2 = \alpha_n^2$ . Par suite  $E(\frac{1}{\beta_n} (X_{t+s+1/n}^{(\alpha_n)} - X_{t+s}^{(\alpha_n)})^2 1_{R_n}(X_{t+s}, X_{t+s+1/n}) | \mathcal{F}_t)$  est de la forme  $\gamma'_n(X_t, s)$ , où

$$\begin{aligned} \gamma'_n(x, s) &= \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int p_s(x, y) p_{1/n}(y, z) [1_{\{j\alpha_n \leq y < (j+1)\alpha_n \leq z < (j+2)\alpha_n\}} \\ &\quad + 1_{\{(j-1)\alpha_n \leq z < j\alpha_n \leq y < (j+1)\alpha_n\}}] dy dz. \\ &= \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} \left[ \int_0^{\beta_n/\sigma} (h(u) + h(u - 2\beta_n/\sigma)) du \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns}}^{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s}} h(v) dv \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\beta_n/\sigma} (h(u + \beta_n/\sigma) + h(u - \beta_n/\sigma)) du \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{(j\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s}}^{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns}} h(v) dv \right]. \end{aligned}$$

Soit  $\varphi_n = \exp -\beta_n^2/4\sigma^2$ . On a  $\int_0^{\beta_n/\sigma} (h(u - 2\beta_n/\sigma) + h(u + \beta_n/\sigma)) du \leq C\varphi_n$ , donc d'après (8) et (9) :

$$|\gamma'_n(x, s) - \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} \int_0^{\beta_n/\sigma} (h(u) \frac{u\sigma}{\beta_n} + h(u - \beta_n/\sigma)) (1 - \frac{u\sigma}{\beta_n}) du| \leq C \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} (\varphi_n + \frac{1}{\sqrt{ns}}).$$

De plus

$$\int_0^{\beta_n/\sigma} h(u) \frac{u\sigma}{\beta_n} du = \int_0^{\beta_n/\sigma} (h(u - \beta_n/\sigma) (1 - \frac{u\sigma}{\beta_n}) du = \int_0^\infty h(u) \frac{u\sigma}{\beta_n} du + O(\varphi_n).$$

On a donc

$$|\gamma'_n(x, s) - \frac{\sigma}{n} \sqrt{\frac{2}{\pi}}| \leq C \frac{\beta_n}{n} (\varphi_n + \frac{1}{\sqrt{ns}}). \quad (13)$$

ETAPE 3. Vu (11), il suffit de prouver (4) et (5) (avec  $\eta_i^n$  comme dans (11)) pour obtenir  $W'_n \rightarrow 0$  dans  $L^2$ . D'abord  $|\eta_i^n| \leq C(1/n + \alpha_n/\sqrt{n} + |\xi_i^n|/\sqrt{n})$ , donc  $E((\eta_i^n)^2) \leq C\alpha_n^2/n$ , et comme  $\alpha_n \rightarrow 0$  on obtient (4).

Ensuite  $E(\eta_i^n | \mathcal{F}_{i/n}) = \gamma'_n(X_{i/n}, \frac{i-i-1}{n}) - \frac{\sigma}{n}\sqrt{2/\pi}$  si  $j \geq i+2$ . On déduit alors de (12) que  $|E(\eta_j^n | \mathcal{F}_{i/n})| \leq C\frac{\beta_n}{n}(\varphi_n + 1/\sqrt{j-i-1})$  si  $j \geq i+2$ . On a aussi  $E(|\eta_i^n|) \leq C\beta_n/n$  (cf. ci-dessus), et d'après (12) encore il vient  $E(|\eta_i^n|) \leq E(\gamma'_n(0, \frac{i-1}{n}) + \frac{\sigma}{n}\sqrt{2/\pi}) \leq C(1/n + \beta_n\varphi_n/n + \beta_n n\sqrt{i-1})$  si  $i \geq 2$ . En rassemblant tout ceci on arrive à :

$$|E(\eta_1^n \eta_{1+j}^n)| \leq \frac{C}{n^2} \beta_n^2 (\varphi_n + \frac{1}{\sqrt{j-1}})$$

$$|E(\eta_i^n \eta_{i+j}^n)| \leq \frac{C}{n^2} \beta_n^2 (\varphi_n + \frac{1}{\sqrt{j-1}}) (\varphi_n + \frac{1}{\beta_n} + \frac{1}{\sqrt{i-1}})$$

(pour  $i \geq 2, j \geq 2$ ). Comme  $\sup_n n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nt]} j^{-1/2} < \infty$ , le premier membre de (5) est majoré par  $C\beta_n^2(n\varphi_n + 1)(n\varphi_n + 1 + n/\beta_n)/n^2$ . (5) découle alors de ce que  $\beta_n^2\varphi_n \rightarrow 0$  et  $\beta_n/n \rightarrow 0$ . La preuve est donc terminée.

### 5 Preuve de (d)

On suppose maintenant que  $\alpha_n \rightarrow \alpha \in ]0, \infty[$ . On utilise les notations  $R_n, S_n, W_n$  du paragraphe précédent. Comme  $\beta_n \rightarrow \infty$ , on a encore  $W_n \rightarrow 0$  dans  $L^2$ . Comme  $\alpha_n \rightarrow \alpha > 0$ , on a  $P(|\xi_i^n| > \alpha_n) \leq e^{-Cn}$  et on a aussi la convergence suivante dans  $L^2$  :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} 1_{\{|\xi_i^n| > \alpha_n\}} \rightarrow 0. \quad (13)$$

Rappelons que  $(X_{(i-1)/n}, X_{i/n}) \in R_n$  implique  $\chi_i^n = \alpha_n^2$ , donc si on pose

$$\hat{W}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} 1_{R_n}(X_{(i-1)/n}, X_{i/n}),$$

il vient  $V(n, \alpha_n)_t/\sqrt{n} = \alpha_n^2 \hat{W}_n + \alpha_n W_n$ . Comme  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  et  $W_n \rightarrow 0$  dans  $L^2$ , il reste à prouver que  $\hat{W}_n \rightarrow \Lambda(\alpha)_t/\sigma\alpha^2$  en probabilité.

Posons  $T(a) = \{(x, y) : x < a \leq y \text{ ou } y < a \leq x\}$  et  $T_n = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} T(j\alpha_n)$ . On a  $R_n \subset T_n$ , et  $|x - y| \geq \alpha_n$  lorsque  $(x, y) \in T_n \setminus R_n$ . Par (13) on voit qu'il suffit de prouver que  $\hat{W}'_n \rightarrow \Lambda(\alpha)_t/\sigma\alpha^2$  en probabilité, où

$$\hat{W}'_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} 1_{T_n}(X_{(i-1)/n}, X_{i/n}).$$

D'après Azaïs [1], on sait que pour chaque  $a \in \mathbb{R}$  la suite

$$U(n, a) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} 1_{T(a)}(X_{(i-1)/n}, X_{i/n})$$

converge vers  $\sqrt{2/\pi} L_t^a/\sigma$  dans  $L^2$ , et une modification triviale de la preuve de [1] (utilisant une version continue de  $a \mapsto L_t^a$ ; noter que le temps local utilisé ici, qui est celui des semimartingales, égale le temps local de Azaïs multiplié par  $\sigma^2$ ) montre qu'on a aussi  $U(n, a_n) \rightarrow \sqrt{2/\pi} L_t^a/\sigma$  dans  $L^2$  quand  $a_n \rightarrow a$ .

Maintenant, sur l'ensemble  $A_k = \{sup_{s \leq t} |X_s| \leq k/2\}$  on a d'une part  $\Lambda(\alpha)_t/\sigma\alpha^2 = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sigma} \sum_{j \in \mathbb{Z}, |j| \leq k} U(n, j\alpha_n)$  dès que  $\alpha_n \leq 2\alpha$ . Donc ce qui précède entraîne  $\hat{W}'_n \rightarrow \Lambda(\alpha)_t/\sigma\alpha^2$  dans  $L^2$  sur  $A_k$ , et comme  $A_k \rightarrow \Omega$  lorsque  $k \rightarrow \infty$  on obtient le résultat.

## 6 Bibliographie

[1] AZAIS J.M. (1989) : Approximation des trajectoires et temps local des diffusions. *Ann. Inst. H. Poincaré*, **25**, 175–194.

Laboratoire de Probabilités  
(URA 224 du CNRS)  
Université Pierre et Marie Curie  
Tour 56  
4 place Jussieu  
75 252 PARIS Cedex 05