D. BAKRY

Remarques sur les semigroupes de Jacobi

Astérisque, tome 236 (1996), p. 23-39
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__23_0>

Remarques sur les semigroupes de Jacobi

D. Bakry

Résumé. — Après une première partie montrant les connexions entre les semigroupes de JACOBI et le laplacien sphérique, nous donnons une estimation de la constante de SOBOLEV de ces semigroupes.

Les semigroupes de diffusion sur un intervalle de $\mathbb{R}$ ont en général une mesure stationnaire réversible. Intéressons-nous, parmi ceux-ci, à ceux dont la mesure stationnaire est une probabilité, qui ont un spectre discret et tels que les vecteurs propres successifs forment une suite de polynômes (nécessairement orthogonaux pour la mesure réversible) : ce sont donc les semigroupes de diffusion naturellement associés à des familles de polynômes orthogonaux. Il est alors facile de voir qu'il n'y en a, à affinité près, que 3 familles, caractérisées par leur générateur infinitésimal L (cf [M], par exemple) :

— Les semigroupes de JACOBI, définis sur $]-1,1[$, de générateur

$$L = (1-x^2)d^2/dx^2 - (ax+b)d/dx, \text{ avec } a \pm b > 0\,;$$

— Les semigroupes de LAGUERRE, définis sur $]0,\infty[$, de générateur

$$L = xd^2/dx^2 - (x+b)d/dx, \text{ avec } b < 0\,;$$

— Le semigroupe d'ORNSTEIN-UHLENBECK , défini sur $\mathbb{R}$, de générateur

$$L = d^2/dx^2 - xd/dx.$$

Les deux dernières familles apparaissent comme des limites (convenablement renormalisées), de semigroupes de la première famille, et on voit donc que les semigroupes de JACOBI forment le modèle générique de tels semigroupes.

Le cas symétrique ($b = 0$) est lié, lorsque le paramètre a est demi-entier, à la partie radiale du laplacien sphérique, et a donc été de ce fait intensivement étudié. Il présente de nombreuses propriétés remarquables qui en rendent l'étude assez facile. Dans le cas non symétrique, beaucoup de questions restent posées, en particulier du côté des inégalités de SOBOLEV, de SOBOLEV logarithmiques, etc. Le but de cet exposé est de montrer qu'en fait les semigroupes de JACOBI dissymétriques ont également une interprétation géométrique simple pour certaines valeurs des paramètres, et de donner des estimations sur les constantes des inégalités de SOBOLEV optimales qui leur sont associées.

Malheureusement, alors que la plupart de ces constantes sont assez faciles à calculer dans le cas symétrique, il n'en est pas de même dans le cas dissymétrique, et c'est pourquoi nous devons alors nous contenter d'encadrements.

1— Quelques considérations géométriques.

Toutes les remarques qui suivent peuvent se trouver de façon plus détaillée dans l'exposé [M]. Rappelons tout d'abord la forme des opérateurs de JACOBI : ce sont des opérateurs différentiels du second ordre agissant sur les fonctions deux fois dérivables définies sur l'intervalle $]-1,1[$ par la formule

$$L(f)(x) = (1-x^2)f''(x) - (ax+b)f'(x).$$

Dans ce qui suit, nous poserons $a = \frac{n+1}{2}$ et $b = a-p$. Pour des raisons qui apparaîtront plus claires dans la suite, nous choisirons toujours $n \geq 1$ et $p \in [1,n]$. Nous poserons ensuite $q = n+1-p$, et nous utiliserons les lettres p et q pour désigner l'opérateur:

$$L_{p,q}(f)(x) = (1-x^2)f''(x) - \frac{1}{2}\{(p+q)x + q - p\}f'(x),\ p \geq 1,\ q \geq 1.$$

Remarquons que le changement de x en $-x$ transforme $L_{p,q}$ en $L_{q,p}$. Lorsque $p = q$, nous noterons tout simplement l'opérateur L_p : il s'agit du cas de l'opérateur ultrasphérique.

Ce que nous voulons montrer dans ce paragraphe, c'est que, pour des valeurs entières des paramètres p et q, l'opérateur de JACOBI s'interprète naturellement comme une image du laplacien sur la sphère de dimension n (avec comme plus haut $n = p+q-1$).

Pour les lecteurs qui n'aiment pas la géométrie différentielle, la façon la plus simple de se représenter le laplacien sphérique est sans doute la suivante : appelons S_n la sphère de rayon 1 et de dimension n plongée dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$, et considérons une fonction suffisamment dérivable f définie sur S_n. On prend un prolongement $\hat{f}$ de cette fonction à un voisinage de S_n dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui soit indépendant du rayon (et alors la notion de "suffisamment dérivable" peut se définir à partir de cette fonction $\hat{f}$), puis on calcule le laplacien ordinaire de cette fonction dans $\mathbb{R}^{n+1}$. La restriction de ce laplacien à S_n donne par définition le laplacien sphérique de la fonction f, que nous noterons $\Delta_{S_n}(f)$.

Si l'on veut exprimer ce laplacien, et qu'on n'aime pas trop les angles d'EULER, il y a une façon de le faire qui donne une expression raisonnable. Tout d'abord, il est clair sur la définition que l'opérateur est local, et qu'il est également invariant par les transformations orthogonales de $\mathbb{R}^{n+1}$, car c'est le cas du laplacien ordinaire de $\mathbb{R}^{n+1}$. On peut se contenter de calculer $\Delta_{S_n}(f)$ losqu'on connait f seulement au voisinage d'un point, et, à cause de l'invariance, on ne perd rien à supposer que ce point est $(0,\cdots,0,1)$. On va alors prendre comme voisinage la demisphère supérieure $\{x=(x_1,\cdots,x_{n+1})\in S_{n+1}\,/\,x_{n+1}>0\}$. Un point de cette demisphère est repéré par ses coordonnées $(x_1,\cdots,x_n)$ sur le disque de rayon unité de $\mathbb{R}^n$, et l'on peut alors définir la fonction f dans cette demisphère par sa valeur sur la boule $f(x_1,\cdots,x_n)$, ainsi que son laplacien.

Le lecteur un peu courageux peut alors faire le calcul à la main, et voit que l'on obtient ainsi

$$\Delta_{S_n}(f)(x)=\sum_{i,j=1}^{n}(\delta_{ij}-x_ix_j)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}-n\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\delta x_i}.$$

(Ici, δ_{ij} désigne comme d'habitude le symbole de KRONECKER.) On a évidemment exactement la même expression pour la demisphère inférieure. En particulier, si la fonction f est invariante par la symétrie par rapport à l'hyperplan $\{x_{n+1}=0\}$, il en de même de son laplacien (mais ceci n'est qu'un cas particulier de l'invariance par rotation que nous avons évoquée plus haut).

Une des propriétés remarquables de cet opérateur est que le résultat $\Delta_{S_n}(f)(x)$ ne dépend que des variables dont dépend la fonction f elle même. En particulier, si la fonction f ne dépend que des p variables $(x_1,\cdots,x_p)$, $(1\leq p\leq n)$, il en va de même de son laplacien (c'est une fois de plus un cas particulier de l'invariance par les transformations orthogonales). On peut alors relever toute fonction g définie sur le disque de $\mathbb{R}^p$ en une fonction f définie sur la demisphère supérieure de $\mathbb{R}^{n+1}$ (voire en une fonction définie sur la sphère toute entière pourvu que g ait un comportement ad hoc au voisinage du bord du disque), prendre son laplacien sphérique et obtenir ainsi une nouvelle fonction définie sur le disque de $\mathbb{R}^p$: ceci nous définit un nouvel opérateur sur le disque de $\mathbb{R}^p$ qui est

$$\Delta_{n,p}(g)(x)=\sum_{i,j=1}^{p}(\delta_{ij}-x_ix_j)\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_j}-n\sum_{i=1}^{p}x_i\frac{\partial g}{\delta x_i}.$$

C'est presque le même opérateur que précédemment, à ceci près que le coefficient n qui apparaît devant le terme du premier ordre n'est pas la dimension du disque, mais un entier supérieur à p : en fait, rien ne nous oblige à ne considérer que des coefficients n entiers dans la formule précédente, et nous avons ainsi réalisé sur le disque unité de $\mathbb{R}^p$ une famille à un paramètre n d'opérateurs qui s'interprètent pour n entier comme des projections de laplaciens sphériques.

Ces opérateurs ont quantité de propriétés intéressantes (ce sont des quasi-laplaciens de courbure et dimension constantes au sens de [B1]), mais nous n'avons pas l'intention ici de nous attarder sur eux.

Remarquons que pour $p=1$ nous obtenons ainsi l'opérateur de JACOBI symétrique de paramètres $L_n = L_{n,n}$ ce qui explique que cet opérateur soit appelé l'opérateur ultrasphérique lorsque n est non entier. (On l'appelle aussi opérateur de GEGENBAUER.)

Mais nous pouvons faire un peu mieux si l'on observe que l'opérateur $\Delta_{n,p}$ préserve les fonctions radiales dans le disque unité de $\mathbb{R}^p$: si l'on pose $r = (\sum_1^p x_i^2)^{1/2}$, on a, pour $f(x) = g(r)$,

$$\Delta_{n,p}^{(r)}(f)(x) = (1-r^2)g''(r) + (\frac{p-1}{r} - nr)g'(r).$$

Appelons donc $\Delta_{n,p}^{(r)}$ cet opérateur, agissant sur les fonctions définies sur $]0,1[$:

$$\Delta_{n,p}^{(r)} = (1-r^2)\frac{d^2}{dr^2} + (\frac{p-1}{r} - nr)\frac{d}{dr}.$$

Si l'on pose $r = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$, de façon à ce que x varie dans l'intervalle $]-1,1[$, alors l'opérateur $\Delta_{n,p}^{(r)}$ s'écrit

$$\Delta_{n,p}^{(r)} = 4\{(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - (\frac{n+1}{2}x + \frac{n+1}{2} - p)\frac{d}{dx}\} = 4L_{p,q},$$

où $L_{p,q}$ est l'opérateur de JACOBI, avec $q = n+1-p$.

Qu'a-t-on fait lorsque $p = 1$? Nous avons remplacé l'opérateur L_n par l'opérateur $L_{1,n}$ en le faisant agir sur les fonctions paires (ou, si l'on préfère, en restreignant son intervalle de définition à $]0,1[$, et en faisant un changement de variables). En d'autres termes, les opérateurs L_n et $4L_{1,n}$ sont exactement les mêmes (localement) : mais on verra plus bas que ce sont leurs propriétés globales qui diffèrent. Comme c'est le dogme en géométrie riemannienne, on ne distingue pas deux quantités (par exemple deux opérateurs) qui se transforment l'une en l'autre par un changement de variables, même si ici tout se passe en dimension 1!

Remarquons d'autre part que nous avons ainsi obtenu, pour n entier, deux interprétations différentes de l'opérateur L_n : tout d'abord en projetant directement la sphère S_n en dimension 1, ou encore en projetant d'abord la sphère S_{2n-1} sur le disque de dimension n, et ensuite en prenant une partie radiale (à un facteur 4 près). Même pour $n = 2$, il ne paraît pas évident de voir pourquoi cela donne le même résultat. De même, le fait que $L_{p,q}$ soit essentiellement le même que $L_{q,p}$ ne semble pas se traduire facilement dans ce contexte.

De même que l'opérateur L_n peut s'interpréter comme la partie radiale du laplacien sphérique, l'opérateur $L_{n,1}$, toujours à un facteur 4 près, s'interprètera comme la partie radiale du laplacien sur l'espace projectif, qui est le quotient de la sphère obtenue en identifiant deux points diamétralement opposés.

Ceci n'est qu'un cas particulier d'un phénomène plus général : tous les espaces symétriques compacts de rang 1 ont pour partie radiale du laplacien des opérateurs de JACOBI : le lecteur intéressé pourra trouver la liste suivante dans [G] ou dans [SC], où n désigne la dimension réelle de l'espace symétrique :

– Sphères : $L_{n,n}$;

– Espaces projectifs réels : $L_{1,n}$;

– Espaces projectifs complexes : $L_{2,n}$ (n pair) ;

– Espaces projectifs quaternioniques : $L_{4,n}$ ($n = 4p$) ;

– Plan elliptique de CAYLEY : $L_{8,16}$.

2— Les semigroupes de JACOBI.

Introduisons tout d'abord la mesure

$$\mu_{p,q}(dx) = \frac{1}{Z_{p,q}} 1_{]-1,1[}(x)(1-x)^{(q-2)/2}(1+x)^{(p-2)/2}\, dx,$$

où $Z_{p,q}$ est la constante de normalisation qui fait de $\mu_{p,q}$ une probabilité : on voit aisément que

$$Z_{p,q} = 2^{(p+q-2)/2}\Gamma(p/2)\Gamma(q/2)/\Gamma((p+q)/2),$$

où $\Gamma(a) = \int_0^\infty s^{a-1}e^{-s}\, ds$.

L'intégrale d'une fonction f par rapport à $\mu_{p,q}$ sera notée $\langle f \rangle_{p,q}$, ou plus simplement $\langle f \rangle$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la valeur des paramètres.

À l'aide d'une intégration par parties, il est facile de voir que, si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$, on a

$$\langle f\, L_{p,q}(g) \rangle = -\langle (1-x)^2 f'g' \rangle = \langle g\, L_{p,q}(f) \rangle. \tag{1}$$

Ainsi, $\mu_{p,q}$ apparaît comme la mesure par rapport à laquelle $L_{p,q}$ est un opérateur symétrique (on l'appelle la mesure réversible de $L_{p,q}$).

Remarquons qu'en prenant $g = 1$ dans la formule précédente, on obtient $\langle L_{p,q}(f) \rangle = 0$, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$. Cette seule propriété de la mesure μ suffit en fait à la déterminer.

Dans la suite, nous poserons, pour des fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^1$,

$$\Gamma(f,g)(x) = (1-x^2)f'(x)g'(x).$$

Nous noterons $\Gamma(f)$ pour $\Gamma(f,f)$. Un calcul rapide nous montre la relation

$$2\Gamma(f,g) = L_{p,q}(fg) - fL_{p,q}(g) - gL_{p,q}(f).$$

On voit directement sur la forme de l'opérateur $L_{p,q}$ qu'il laisse stable pour tout entier k l'espace vectoriel des polynômes de degré inferieur ou égal à k. Si l'on munit cet espace du produit scalaire induit de l'espace $L^2(]-1,1[, \mu_{p,q}(dx))$, alors $L_{p,q}$

apparaît sur cet espace de dimension finie comme un opérateur symétrique : il est diagonalisable dans une base orthonormée, avec des valeurs propres et des vecteurs propres réels.

En répétant cette opération pour tous les entiers k, on construit ainsi une suite $Q_k^{(p,q)}$ de polynômes de degré k, orthogonaux dans $L^2(\mu_{p,q})$, qui en forment donc une base hilbertienne, car les polynômes sont denses dans l'espace $L^2(\mu_{p,q})$, la mesure étant à support compact. Ces polynômes sont donc entièrement définis au signe près, et, s'il en est besoin, on choisira le signe de façon à ce que le coefficient du terme dominant soit positif.

Appelons $-\lambda_k$ les valeurs propres : $L_{p,q}(Q_k^{(p,q)}) = -\lambda_k Q_k^{(p,q)}$.

(Dans ce qui suit, nous omettons les indices (p,q) pour alléger les notations, ainsi que dans $L_{p,q}$ et $Q_k^{(p,q)}$.) Le choix du signe $-$ dans la définition des valeurs propres provient de ce qu'ainsi $\lambda_k \geq 0$, car

$$\langle Q_k\, LQ_k\rangle = -\lambda_k = -\langle\Gamma(Q_k)\rangle,$$

et $\Gamma(Q_k)$ est toujours une expression positive.

Le calcul de λ_k peut se faire très simplement à l'aide de la remarque suivante : tout d'abord, $\lambda_0 = 0$ car Q_0 est constant. Ensuite, appelons D l'opérateur de dérivation d/dx ; nous avons

$$DL_{p,q} = (L_{p+2,q+2} - \frac{p+q}{2} Id)D. \qquad (2)$$

Si l'on applique cette relation à Q_1, puisque DQ_1 est constant, on obtient

$$-\lambda_1 DQ_1 = -\frac{p+q}{2} DQ_1,$$

d'où $\lambda_1 = \frac{p+q}{2}$.

On peut itérer facilement la formule (2), ce qui donne, en posant $m = (p+q)/2$,

$$D^k L_{p,q} = (L_{p+2k,q+2k} - k(m+k-1)Id)D^k,$$

et on obtient alors

$$\lambda_k = k(m+k-1).$$

Remarquons qu'on obtient ainsi une suite de valeurs propres (λ_k) qui ne dépend que de m.

Nous n'aurons pas à nous servir de la forme explicite des polynômes $Q_k^{(p,q)}$. La façon la plus simple de les construire, à une constante multiplicative près, est de donner leur fonction génératrice, qu'on trouve dans [M],

$$2^{2-m} \sum_k t^k Q_k(x) =$$
$$(1-2xt+t^2)^{-1/2}(1-t+(1-2xt+t^2)^{1/2})^{-(q-2)/2} \times$$
$$(1+t+(1-2xt+t^2)^{1/2})^{-(p-2)/2}.$$

On peut aussi trouver leur forme explicite dans [SC]. Bien sûr, toutes ces formules se trouvent dans tous les ouvrages de base sur les polynômes orthogonaux, par exemple [Sz].

Pour une fonction f de $L^2(\mu_{p,q})$, on peut écrire sa décomposition en polynômes de JACOBI $f = \sum_k \alpha_k Q_k$, ce qui nous permet de définir le semigroupe d'opérateurs $P_t^{(p,q)}$ par

$$P_t^{(p,q)}(f) = \sum_k e^{-\lambda_k t} \alpha_k Q_k \quad (t \geq 0).$$

Comme d'habitude, nous omettrons les indices (p, q) lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

On voit immédiatement sur la définition que le semigroupe P_t est une contraction de $L^2(\mu_{p,q})$, et que formellement $P_t = \exp(tL)$. On a aussi $P_t(1) = 1$, car $Q_0 = 1$ et $\lambda_0 = 0$.

Il n'est pas évident de voir sur la définition que P_t préserve la positivité des fonctions. Cela ressort d'un argument général qui utilise deux propriétés : l'existence d'une mesure positive pour laquelle $\langle L(f) \rangle = 0$ pour suffisamment de bonnes fonctions f (ici, il s'agit de la mesure $\mu_{p,q}$), et la propriété fondamentale de $L_{p,q}$ qui est que, pour toute fonction Φ convexe, $L(\Phi(f)) \geq \Phi'(f)L(f)$. Nous renvoyons le lecteur à [B2] pour plus de détails.

Ces deux propriétés (préserver les constantes et la positivité) font de P_t un semigroupe markovien.

Le fait d'être markovien, et d'être invariant pour μ montre qu'en fait P_t est une contraction de tous les espaces $L^p(\mu)$, $(1 \leq p \leq \infty)$. En fait, l'opérateur P_t vérifie de bien meilleures propriétés que cela : il se représente par un noyau borné $p_t(x, y)$, c'est à dire que

$$P_t(f)(x) = \int f(y) p_t(x, y)\, \mu(dy).$$

Il n'y a pas d'expression explicite raisonnable de la fonction $p_t(x, y)$ (ou tout du moins je n'en connais pas). Son existence et son comportement proviennent de considérations générales que nous allons détailler plus bas.

Admettons pour l'instant l'existence de la fonction $p_t(x, y)$. Remarquons tout d'abord que l'opérateur P_t étant symétrique, la fonction $p_t(x, y)$ est symétrique par rapport aux variables (x, y). D'autre part, l'opérateur étant markovien, la mesure $p_t(x, y)\, \mu(dy)$ est pour tous les couples (x, t) une mesure de probabilité sur $]-1, 1[$.

De plus, la propriété de semigroupe se traduit par l'équation de CHAPMAN-KOLMOGOROV :

$$p_{s+t}(x, y) = \int p_t(x, z) p_s(z, y)\, \mu(dz).$$

Cette formule montre que $\|p_t(x, \cdot)\|_2^2 = p_{2t}(x, x)$, où la norme $\| \, \|_p$ désigne la norme dans l'espace $L^p(\mu)$, et également, par l'inégalité de SCHWARZ, que

$$p_{2t}(x,y) \leq \|p_t(x,\cdot)\|_2 \|p_t(y,\cdot)\|_2,$$

d'où l'on tire

$$p_t(x,y)^2 \leq p_t(x,x) p_t(y,y).$$

Le maximum de la fonction $p_t(x,y)$ est donc atteint sur la diagonale.

Par un argument générique, l'existence d'une fonction bornée $p_t(x,y)$ représentant l'opérateur P_t est équivalente au fait que l'opérateur P_t est un opérateur borné de $L^1(\mu)$ dans $L^\infty(\mu)$ (cf [B2], par exemple). La borne supérieure de la fonction $p_t(x,y)$ est alors égale à cette norme d'opérateur.

Dans le cas qui nous intéresse ici, cette propriété est vérifiée : on va même pouvoir assurer un peu mieux en montrant que la norme d'opérateur $\|P_t\|_{1,\infty}$ est majorée par $ct^{-r/2}$, pour $0 < t < 1$, avec $r = \sup(p,q)$. En effet, il est bien connu qu'une telle estimation sur la norme $\|P_t\|_{1,\infty}$ pour un opérateur markovien symétrique est équivalente, pour une constante $r > 2$, à l'existence d'une inégalité de SOBOLEV de la forme

$$\|f\|^2_{2r/(r-2)} \leq C\{\|f\|_2 - \langle fL(f)\rangle\}, \tag{3}$$

satisfaite pour une famille de fonctions f dense dans le domaine de L. Cette relation fondamentale, établie dans [V], [CKS], [D], admet une extension un peu différente dans le cas $1 \leq r \leq 2$, mais nous restreindrons ici au cas $r > 2$. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [B2] pour plus de détails.

Dans la suite de cet exposé, nous allons donc nous attacher à établir des inégalités de type (3) pour les opérateurs de JACOBI.

3— Inégalités de SOBOLEV.

Dans ce qui suit, et quitte à changer x en $-x$, nous supposerons partout que $p \geq q$. Nous supposerons aussi que $p > 2$. Le type d'inégalités de SOBOLEV que nous allons établir prend une toute autre forme dans le cas $p = 2$ (inégalités de TRUDINGER-MOSER) ou dans le cas $1 \leq p < 2$ (inégalités de NASH ou de SOBOLEV faibles). Nous ne nous en occuperons pas. Quant à la forme que devraient prendre des inégalités optimales dans le cas $0 < p < 1$, elle reste encore largement mystérieuse.

Rappelons d'abord quelques faits sur les inégalités de SOBOLEV. Ces inégalités prennent sens dans le cadre général des semigroupes symétriques. On dispose alors d'une mesure de probabilité μ (ici $\mu_{p,q}$, sur $]-1,1[$), et d'un opérateur carré du champ $\Gamma(f,g)$, défini sur une bonne classe de fonctions (ici, $\Gamma(f,g) = (1-x^2)f'(x)g'(x)$, défini pour les fonctions f de classe C^1 sur $[-1,1]$). On désignera alors par $\| \ \|_r$ la norme dans $L^r(\mu)$ $(1 \leq r \leq \infty)$ et comme plus haut par $\langle f\rangle$ l'intégrale $\int f\,d\mu$.

L'opérateur carré du champ permet de parler de l'opérateur symétrique L associé à Γ par la formule

$$\int L(f)g\,d\mu = -\langle\Gamma(f,g)\rangle.$$

Ici, c'est de l'opérateur $L_{p,q}$ qu'il s'agit.

Dans le cadre qui nous intéresse, une inégalité de SOBOLEV de dimension $k > 2$ est une inégalité de la forme suivante

$$\forall f \in C^1([-1,1]),\ \|f\|_{r_k}^2 \leq a\|f\|^2 + b\langle\Gamma(f,f)\rangle, \qquad (S(k,a,b))$$

où l'on a posé $r_k = 2k/(k-2)$.

Le choix de cette définition de k comme une dimension vient de ce que, pour une variété riemannienne compacte de dimension k, ou pour un ouvert borné de $\mathbb{R}^k$, r_k est le plus grand exposant pour lequel on peut espérer une telle inégalité.

En appliquant l'inégalité à des fonctions constantes, on voit que $a \geq 1$. D'autre part, si $a = 1$, nous pouvons appliquer l'inégalité $S(k,1,b)$ à une fonction de la forme $(1+\varepsilon f)$, avec $\langle f\rangle = 0$, et faire tendre ε vers 0. On obtient alors

$$\forall f \in C^1([-1,1]),\ \langle f^2\rangle \leq \langle f\rangle^2 + \frac{b(k-2)}{4}\langle\Gamma(f,f)\rangle.$$

L'inégalité précédente, du type

$$\forall f \in C^1([-1,1]),\ \langle f^2\rangle \leq \langle f\rangle^2 + \frac{1}{\lambda}\langle\Gamma(f,f)\rangle, \qquad (TS(\lambda))$$

s'appelle une inégalité de trou spectral, et est équivalente au fait que la première valeur propre non nulle de l'opérateur symétrique $-L$ est supérieure à λ.

Réciproquement, la connaissance d'une inégalité $S(k,a,b)$ et d'une inégalité $TS(\lambda)$ permet d'obtenir une inégalité $S(k,1,b')$, cf [B2].

Ici, le trou spectral λ est égal à $(p+q)/2$, et donc nous pouvons ne nous intéresser qu'aux inégalités $S(k,1,b)$. (Elles sont appelées inégalités tendues dans [B2].) Nous appelerons alors k la dimension dans l'inégalité de SOBOLEV et b la constante de SOBOLEV.

La remarque précédente nous fournit une première minoration de la constante de SOBOLEV, en fonction du trou dans le spectre : $b \geq \frac{4}{(k-2)\lambda}$, où λ est la première valeur propre non nulle.

Un autre inégalité générique compare la constante de SOBOLEV au diamètre δ, défini de la façon suivante :

$$\delta = \sup_{\{\Gamma(f,f)\leq 1\}} \{f(x) - f(y)\}.$$

Dans le cas qui nous intéresse, cette constante est égale à π, ce sup étant obtenu pour la fonction $\arcsin(x)$. On a toujours (cf [BL])

$$\delta^2 \leq \pi^2 bk(k-2)/4.$$

Ici, cela nous donne $b \geq \frac{4}{(k-2)k}$, et cette inégalité est moins forte que la précédente dès que $\lambda \leq k$, ou encore $p+q \leq 2k$. Nous allons voir que c'est toujours le cas ici.

Théorème .—*Si une inégalité de* SOBOLEV $S(k,1,b)$ *a lieu pour la mesure* $\mu_{p,q}$*, alors* $k \geq p$*. De plus, l'inégalité* $S(p,1,b)$ *a lieu, et la meilleure constante* $b_{p,q}$ *apparaissant dans l'inégalité* $S(p,1,b)$ *satisfait*

$$\left(\frac{Z_{p,q}}{Z_{p,p}}\right)^{2/p} \frac{4}{p(p-2)} 2^{(p-q)/p} \leq b_{p,q} \leq \frac{16(p-1)}{p(p-2)(p+3q-4)}.$$

Preuve.

Nous commençons par montrer qu'il n'y a pas d'inégalité de SOBOLEV d'exposant inférieur à p. Pour cela, il suffit de considérer la famille de fonctions

$$f_{\varepsilon,\beta}(x) = (1+\varepsilon-x)^{\beta},\ \varepsilon > 0.$$

Il est facile de voir que, pour la mesure $\mu_{p,q}$, les quantités $\lim_{\varepsilon\to 0} \|f_{\varepsilon,\beta}\|^2$ et $\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\Gamma(f_{\varepsilon,\beta}, f_{\varepsilon,\beta})\rangle$ sont finies dès que $\beta > (2-p)/4$, tandis que $\lim_{\varepsilon\to 0} \|f_{\varepsilon,\beta}\|_{r_k} = \infty$ dès que $\beta \leq -p(k-2)/(4k)$. Ceci montre qu'il n'y a pas d'inégalité de SOBOLEV dès que

$$\frac{2-p}{4} < -\frac{p(k-2)}{4k},$$

c'est à dire $k < p$.

Nous allons maintenant montrer en même temps l'existence d'une inégalité de SOBOLEV pour l'exposant $k = p$ ainsi que la majoration de la constante $b_{p,q}$. Cela repose sur le critère Γ_2, que nous rappelons brièvement ci-dessous :

l'opérateur linéaire L étant comme plus haut symétrique par rapport à la mesure de probabilité μ, et vérifiant de plus l'identité

$$\int L(f)g\, d\mu = -\langle\Gamma(f,g)\rangle,$$

pour toutes les fonctions f et g appartenant à une classe suffisamment riche (ici, la famille des polynômes sur $[-1,1]$), la théorie générale s'applique dès que

$$\forall(f,g,h),\ \Gamma(fg,h) = f\Gamma(g,h) + g\Gamma(f,h),$$

ce qui est la propriété de diffusion. (Elle est évidemment vérifiée ici.) On introduit alors l'opérateur Γ_2 de la façon suivante

$$2\Gamma_2(f,g) = L(\Gamma(f,g)) - \Gamma(f,Lg) - \Gamma(g,Lf).$$

Nous disons que L satisfait une inégalité courbure-dimension $CD(\rho, k)$ ($\rho \in \mathbb{R}$, $k > 1$) si,

$$\forall f,\ \Gamma_2(f,f) \geq \rho\Gamma(f,f) + \frac{1}{k}(Lf)^2. \qquad (CD(\rho,k))$$

Nous avons alors le critère suivant pour obtenir une inégalité de SOBOLEV [B2] : si L satisfait l'inégalité $CD(\rho, k)$ avec $\rho > 0$ et $k > 2$, il satisfait à une inégalité de SOBOLEV $S(k, 1, b)$, avec

$$b = \frac{4(k-1)}{k(k-2)\rho}.$$

Dans le cas qui nous intéresse, l'inégalité $CD(\rho, k)$ prend une forme simple. Si L est un opérateur sur un intervalle réel I de la forme

$$L(f)(x) = f''(x) - a(x)f'(x),$$

L satisfait à l'inégalité $CD(\rho, k)$ ($\rho \in \mathbb{R}$, $k > 1$) si et seulement si

$$\forall x \in I,\ a'(x) \geq \rho + a^2(x)/(k-1). \qquad CD'(\rho,k)$$

Pour appliquer le critère, il nous suffit donc de mettre l'opérateur $L_{p,q}$ sous la forme précédente. Cela se fait en posant $x = \sin(y)$, avec $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, et alors L devient

$$Lf(y) = f''(y) - \frac{1}{2}((p+q-2)\tan(y) + \frac{q-p}{\cos(y)})f'(y).$$

Toujours avec $x = \sin(y)$, l'inégalité $CD'(\rho, k)$ s'écrit alors

$$\forall x \in [-1,1],\ 2[p+q-2+(q-p)x] \geq 4\rho(1-x^2) + \frac{[(p+q-2)x+q-p]^2}{k-1}.$$

Constatons au passage que cette inégalité en $x = \pm 1$ montre que $k \geq \sup(p, q) = p$. D'autre part, pour la valeur extrême $k = p$, cela se ramène à

$$\rho \leq \frac{p+3q-4}{4}.$$

Cela nous donne la majoration annoncée.

Pour la minoration, commençons par observer que, pour toute fonction $k(x)$ définie sur $[-1, 1]$, intégrable par rapport à la mesure de LEBESGUE et continue au point -1, nous avons, pour tout $\beta > p/2$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\beta - p/2} \int_{-1}^{1} k(u)(1+u)^{p/2-1}(1+\varepsilon+u)^{-\beta}\, du = k(-1)K(p,\beta),$$

où $K(p,\beta) = \int_0^\infty u^{p/2-1}(1+u)^{-\beta}\,du$. Pour s'en convaincre, il suffit de couper l'intervalle $[-1,1]$ en $[-1,-1+\alpha]$ et $[-1+\alpha,1]$, de telle façon que $k(x)$ soit bornée sur $[-1,-1+\alpha]$. L'intégrale sur le second intervalle converge vers une valeur finie, tandis que, sur le premier, le changement de variables $u=-1+\varepsilon v$ la transforme en

$$\varepsilon^{p/2-\beta}\int_0^{\alpha/\varepsilon} k(-1+\varepsilon v)v^{p/2-1}(1+v)^{-\beta}\,dv.$$

Considérons maintenant les fonctions $f_\varepsilon(x) = (1+\varepsilon+x)^{(2-p)/2}$. Sous la mesure $\mu_{p,q}$, il découle de ce qui précède que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\|f_\varepsilon\|^2_{r_p} - \|f_\varepsilon\|_2^2}{\langle\Gamma(f_\varepsilon,f_\varepsilon)\rangle} = \frac{4Z_{p,q}^{2/p}}{(p-2)^2}\,\frac{K(p,p)^{(p-2)/p}}{K(p,p)}2^{(2-p-q)/p}.$$

Bien entendu, le même résultat est valable lorsque $p=q$. Mais, dans ce cas, d'après la majoration que nous avons déjà obtenue, et les remarques précédentes sur le cas symétrique, nous savons déjà que $b_{p,p} = 4/(p(p-2))$. D'autre part, dans le cas symétrique, on peut voir que, pour tout $\lambda > 1$, les fonctions $f_\lambda(x) = (\lambda+x)^{(2-p)/2}$ sont des fonctions extrémales de l'inégalité de SOBOLEV. Ce n'est pas très difficile, et nous renvoyons à [BL] pour le cas général ou à [A] pour le cas où p est entier. Ceci nous montre que la même quantité calculée pour $q=p$ converge en fait vers $4/(p(p-2))$. Ceci permet de calculer $\dfrac{K(p,p)^{(p-2)/p}}{K(p,p)}$ en fonction de $Z_{p,p}$ et d'obtenir le résultat. □

Remarques.—

Dans le cas $p=q$, nous obtenons une égalité. Mais, dans ce cas, la majoration

$$b_{p,p} \le \frac{4}{p(p-2)}$$

est également une minoration grâce à l'une des deux inégalités précédentes (trou spectral ou diamètre). On voit donc qu'il s'agit là d'un cas tout à fait particulier .

Dans le cas $q=1$, nous pouvons voir aisément que $Z_{p,1} = 2^{(p-1)/2}Z_{p,p}$, en utilisant directement la définition de $Z_{p,p}$ et en y faisant le changement de variables déjà mentionné $x=\sqrt{(1+y)/2}$. Nous obtenons alors

$$\frac{16}{p(p-2)}2^{-2/p} \le b_{p,1} \le \frac{16}{p(p-2)}.$$

On voit que cet encadrement est d'autant meilleur que p est grand.

Remarquons encore que la minoration donnée est meilleure que celle obtenue par l'inégalité utilisant le trou spectral (elle même meilleure, rappelons-le, que l'inégalité obtenue en utilisant le diamètre). Pour le voir, il suffit de montrer que

$$\left(\frac{Z_{p,q}}{Z_{p,p}}\right)^{2/p} 2^{(p-q)/p} \geq \frac{2p}{p+q},$$

ou, ce qui revient au même,

$$2\left(\frac{Z_{p,q}}{Z_{p,p}}\right)^{2/(p-q)} \geq \left(\frac{2p}{p+q}\right)^{p/(p-q)}.$$

Posons alors $\alpha = (p-q)/2$. Le premier membre de l'inégalité précédente n'est autre que

$$2\langle\frac{1}{(1+x)^\alpha}\rangle_{p,p}^{1/\alpha} \geq 2/\langle 1+x\rangle_{p,p} = 2,$$

tandis que le second membre s'écrit, en posant $x = \alpha/p \in [0,1/2]$,

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{1/(2x)},$$

qui est une fonction croissante de x qui prend la valeur 2 en $x = 1/2$.

Remarquons finalement que, si l'on appelle $M_{p,q}$ le majorant de $b_{p,q}$ apparaissant dans l'énoncé du théorème et $m_{p,q}$ le minorant, le rapport $m_{p,q}/M_{p,q}$ converge vers

$$\frac{1+3\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^\alpha,$$

lorsque $p \to \infty$ et $q/p \to \alpha$, avec $\alpha \in [0,1]$. Cette limite ne vaut 1 qu'en $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$. Ceci permet de retrouver les valeurs exactes des constantes de SOBOLEV logarithmiques des semigroupes d'ORNSTEIN-UHLENBECK et de LAGUERRE.

En effet, commençons par observer le cas classique du semigroupe d'ORNSTEIN-UHLENBECK : si l'on fait le changement de variable $x = y/\sqrt{p}$, l'opérateur $L_{p,p}/p$ se transforme en

$$\hat{L}_p(f)(y) = (1-\frac{y^2}{p})f''(y) - yf'(y),$$

qui converge vers le générateur du semigroupe d'ORNSTEIN-UHLENBECK

$$Lf(y) = (1-y^2)f''(y) - yf'(y).$$

La mesure image de $\mu_{p,p}$ par cette transformation se transforme en

$$\hat{\mu}_p(dy) = \frac{1}{\hat{Z}_p}1_{[-\sqrt{p},\sqrt{p}]}(y)(1-\frac{y^2}{p})^{p/2-1}\,dy,$$

qui converge lorsque $p \to \infty$ vers la mesure gaussienne

$$\hat{\mu}_\infty(dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y^2/2)\, dy.$$

D'autre part, pour une fonction f de classe C^1 et à support compact, l'inégalité de SOBOLEV pour $\hat{L}_p$ s'écrit

$$\frac{\|f\|_p^{2/p} - \|f\|^2}{p-2} \leq 4\frac{p^2}{(p-2)^2}\langle(1-\frac{y^2}{p})f'^2\rangle,$$

les normes et les intégrales étant prises par la mesure $\hat{\mu}_p$. Il n'est alors pas difficile de voir que, lorsque $p \to \infty$,

$$\frac{\|f\|_p^{2/p} - \|f\|^2)}{p-2} \to 2(\langle f^2 \log f^2)\rangle - \langle f^2\rangle \log\langle f^2\rangle),$$

l'intégrale dans le second membre étant prise par rapport à la mesure $\hat{\mu}_\infty$ et nous obtenons à la limite l'inégalité de SOBOLEV logarithmique par rapport à la mesure gaussienne

$$\langle f^2 \log f^2)\rangle - \langle f^2\rangle \log\langle f^2\rangle \leq 2\langle f'^2\rangle.$$

Il est moins évident de voir que la borne inférieure passe à la limite, mais le même argument de trou spectral permet de voir la borne supérieure ainsi obtenue est en fait une borne inférieure. Ce cas correspond au cas $\alpha = 1$ du passage à la limite dans le rapport $m_{p,q}/M_{p,q}$.

Le cas $\alpha = 0$ correspond aux semigroupes de LAGUERRE. Cette fois-ci, nous fixons q et faisons converger p vers l'infini. Le changement de variables $x = 1-2y/p$ transforme $L_{p,q}/p$ en l'opérateur

$$\hat{L}_{p,q}(f)(y) = y(1-y/p)f''(y) - \frac{1}{2}(\frac{p+q}{p}y - q)f'(y),$$

défini sur $[0,p]$. Cet opérateur converge vers l'opérateur de LAGUERRE

$$\hat{L}_{\infty,q}(f)(y) = yf''(y) - \frac{1}{2}(y-q)f'(y),$$

défini sur $[0,\infty]$, et la mesure image

$$\frac{1}{\hat{Z}_{p,q}} 1_{[0,p]}(y) y^{q/2-1}(1-y/p)^{p/2-1}\, dy$$

converge vers la mesure réversible $\hat{\mu}_{\infty,q}$ du semigroupe de LAGUERRE

$$\frac{1}{\hat{Z}_q} 1_{[0,\infty]}(y)\, y^{q/2-1} \exp(-y/2)\, dy.$$

Le même raisonnement que plus haut permet de retrouver l'inégalité de SOBOLEV logarithmique de l'opérateur de LAGUERRE

$$\langle f^2 \log f^2 \rangle\rangle - \langle f^2 \rangle \log\langle f^2 \rangle \leq 8\langle y f'^2 \rangle,$$

les normes et intégrales étant cette fois-ci prises par rapport à la mesure $\hat{\mu}_{\infty,q}$.

Là encore, il n'est pas évident de voir que la borne inférieure passe à la limite, mais la meilleure constante dans l'inégalité de SOBOLEV logarithmique dans ce cas a été calculée dans [KS], et correspond bien à la valeur obtenue. D'ailleurs, si nous regardons attentivement quelles fonctions ont été utilisées pour obtenir notre borne inférieure et que nous faisons les changements de variables ad hoc ainsi que les passages à la limite correspondants, nous retrouvons les fonctions utilisées par [KS] pour obtenir la borne inférieure dans leur inégalité de SOBOLEV logarithmique.

Pour conclure, signalons que nous aurions pu nous intéresser aux inégalités de SOBOLEV pour des exposants $n > p$, c'est à dire pour des exposants non optimaux. La méthode proposée plus haut pour obtenir des minorations des constantes de SOBOLEV dans ce cas ne donne rien d'intéressant, et les meilleures minorations que nous ayons obtenues sont celles données par la comparaison avec le trou dans le spectre.

Pour les majorations, nous pouvons soit utiliser à nouveau la méthode Γ_2 en établissant une inégalité $CD(\rho, n)$, soit utiliser une amélioration de cette méthode proposée par [L] :

si une inégalité $CD(\rho, m)$ a lieu avec $m > 2$ et $\rho > 0$, et que λ_1 désigne la première valeur propre non nulle, nous avons pour tout $n > m$ une majoration de la constante de SOBOLEV dans l'inégalité $S(n, 1, b_n)$ donnée par

$$b_n \leq \frac{4}{n-2}\left(\frac{\alpha m \rho}{m-1} + (1-\alpha)\lambda_1\right)^{-1},$$

où la constante $\alpha \in [0, 1]$ vaut

$$\alpha = \frac{(n+2)(m-1)^2}{4+(n-2)(m+1)^2}.$$

Remarquons que $\alpha = 1$ lorsque $m = n$, et que, lorsque $\lambda_1 = m\rho/(m-1)$, cette constante est optimale car on retrouve alors la borne inférieure calculée en fonction du trou spectral.

Le calcul de la majoration des constantes de SOBOLEV par l'une de ces deux méthodes pour un exposant n général n'apporte pas de résultat particulièrement intéressant. Néanmoins, il vaut sans doute la peine de faire cette comparaison lorsque $n = p + q - 1$, qui est, rappelons le, la dimension de la sphère dont nous étions partis lorsque p et q sont entiers pour construire l'opérateur de JACOBI.

Dans ce cas, nous obtenons une inégalité $CD(\rho, n)$ avec

$$\rho = \frac{2(n-1)^2 - (q-p)^2}{4(n-1)},$$

ce qui donne une majoration de b_n par

$$b_n^1 = \frac{16(n-1)^2}{n(n-1)[2(n-1)^2 - (q-p)^2]}.$$

L'utilisation de la méthode proposée par [L] avec $m = p$ conduit à une majoration de b_n par

$$b_n^2 = \frac{16[n(p+1)^2 - 2(p^2+2p-1)]}{p(n-2)[n^2(3p-1) + n(2p^2+p-3) + 2(2p^2+3p-1)]}.$$

Il n'est pas surprenant de constater que, lorsque $p = q$, b_n^2 est supérieur à b_n^1, car nous sommes alors dans le cas où ce résultat est optimal. Mais il est par contre plus curieux de voir que $b_n^1 > b_n^2$ lorsque q est proche de 1.

D'autre part, il faut constater que l'on pourrait améliorer cette borne supérieure dans le cas $1 < q < p$ en utilisant une inégalité $CD(\rho, m)$ pour tous les $m \in [p, n]$ et optimisant en m le résultat obtenu par la majoration de [L]. Cela conduit à des calculs (presque) inextricables.

Références

[A] AUBIN (T.) — **Non linear analysis on manifolds, MONGE-AMPÈRE equations**, Springer, Berlin-Heidelberg-New-York, 1982.

[B1] BAKRY (D.) — La propriété de sous-harmonicité des diffusions dans les variétés, *Séminaire de probabilités XXII*, Lecture Notes in Math. 1321, 1988, Springer, p. 1-50.

[B2] BAKRY (D.) — L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes, *Lectures on Probability Theory*, Lecture Notes in Math. 1581, 1994, Springer.

[BL] BAKRY (D.), LEDOUX (M.) — MYER's theorem and SOBOLEV inequalities, preprint, 1994.

[CSK] CARLEN (E.), KUSUOKA (S.), STROOCK (D.W.) — Upperbounds for symmetric MARKOV transition functions, Ann. Inst. H. POINCARÉ, vol. 23, 1987, p. 245-287.

[D] DAVIES (E.B.) — **Heat kernels and spectral theory**, Cambridge University Press, Berlin-Heidelberg-New-York, 1989.

[G] GANGOLLI (R.) — Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to LEVY's Brownian motion of several parameters, Ann. Inst. H. POINCARÉ, vol. III, 1967, p. 121-226.

[KS] KORZENIOWSKI (A.), STROOCK (D.) — An example in the theory of hypercontractive semigroups, Proc. A.M.S., vol. 94, 1985, p.87-90.

[L] LEDOUX (M.) — Sur les inégalités de SOBOLEV dans les variétés riemanniennes compactes, preprint, 1994.

[M] MAZET (O.) — Semigroupes de diffusion associés à des familles de polynômes orthogonaux., preprint, 1994.

[SC] SALOFF -COSTE (L.) — Quantitative bounds on the convergence of diffusion semigroups to equilibrium, Math. Zeit., à paraître, 1994.

[Sz] SZEGÖ (G.) — **Orthogonal Polynomials, 4^{th} Ed.**, A.M.S., 1967.

[V] VAROPOULOS (N.) — HARDY-LITTLEWOOD theory for semigroups, J. Funct. Anal., vol. 63, 1985, p.240-260.

D. Bakry,
Laboratoire de Statistique et Probabilités,
Université PAUL SABATIER,
118, route de Narbonne,
31062, TOULOUSE Cedex.