S. Attal
M. Émery

Martingales d'Azéma bidimensionnelles

Astérisque, tome 236 (1996), p. 9-21
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__9_0>

Martingales d'Azéma bidimensionnelles

S. Attal, M. Émery

Résumé. — Un théorème de Meyer affirme l'existence de solutions pour une équation de structure markovienne à coefficient continu; en l'étendant à deux dimensions, nous obtenons l'existence des martingales d'Azéma bidimensionnelles. Ces processus font l'objet d'une classification simple; certains d'entre eux jouissent de la propriété de représentation chaotique.

1. Martingales d'Azéma multidimensionnelles

D'abord quelques rappels sur les martingales d'Azéma réelles et les équations de structure réelles ou vectorielles. Une martingale réelle X est dite *normale* si $X_t^2 - t$ est une martingale; ceci revient à dire que $[X,X]_t - t$ en est une, ou encore que $\langle X,X\rangle_t = t$ pour tout t (par convention, tous les crochets et toutes les intégrales stochastiques seront nuls en zéro, même si $X_0 \neq 0$). Lorsque X est une martingale normale et possède de plus la propriété de représentation prévisible, la martingale $[X,X]_t - t$ est une intégrale stochastique par rapport à X : il existe un processus prévisible Φ tel que

$$[X,X]_t = t + \int_0^t \Phi_s \, dX_s \, ;$$

cette formule est une *équation de structure.* On l'écrit souvent sous forme différentielle $d[X,X]_t = dt + \Phi_t \, dX_t$. Un cas particulier fort intéressant (dit markovien) est celui où Φ_t est de la forme $f(X_{t-})$. Étant donnée une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, un théorème de Meyer ([3]) affirme qu'il existe, sur un espace probabilisé adéquat, une martingale X vérifiant l'équation de structure

$$d[X,X]_t = dt + f(X_{t-}) \, dX_t \, .$$

En particulier, lorsque f est une fonction affine, cette équation devient

$$d[X,X]_t = dt + (\alpha + \beta X_{t-}) \, dX_t \, ;$$

si l'on impose une valeur initiale $X_0 = x$, elle admet une solution unique en loi, la *martingale d'Azéma* de paramètres α et β (voir [2]).

Une martingale $X = (X^i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est dite normale lorsque l'on a $\langle X, X\rangle_t = \delta^{ij}t$ pour tout t. L'équation de structure qu'une telle martingale est susceptible de vérifier prend la forme

$$d[X^i, X^j]_t = \delta^{ij}\,dt + \sum_k \Phi_k^{ij}(t)\,dX_t^k\ .$$

Ces équations de structure multidimensionnelles sont étudiées dans [1] ; il y est montré que la famille des d^3 processus prévisibles Φ_k^{ij} n'est pas arbitraire : pour qu'il existe une solution X, il faut que, pour presque tout (t,ω), les $\Phi_k^{ij}(t,\omega)$ soient les d^3 composantes d'un tenseur *doublement symétrique*. (Un tenseur $T = (T_k^{ij})_{1\leqslant i,j,k\leqslant d}$ est dit doublement symétrique lorsque

$$T_k^{ij} \text{ est symétrique en } i,\ j \text{ et } k$$

et

$$\sum_m T_m^{ij}\,T_\ell^{mk} \text{ est symétrique en } i,\ j,\ k \text{ et } \ell;$$

les tenseurs doublement symétriques sont exactement ceux que l'on peut diagonaliser dans une base orthonormée.) Il est établi dans [1] que ces conditions de symétrie apparaissant dans les équations de structure sont maximales — ceci sera corroboré par le théorème 1 plus bas.

DÉFINITION. — *Une martingale normale $X = (X^i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est une* martingale d'Azéma *si elle vérifie une équation de structure de la forme*

$$d[X^i, X^j]_t = \delta^{ij}\,dt + \sum_{k=1}^d f_k^{ij}(X_{t-})\,dX_t^k\ ,$$

où les f_k^{ij} sont d^3 fonctions affines sur $\mathbb{R}^d$ telles que, pour presque tout (t,ω), le tenseur $f(X_{t-})$ soit doublement symétrique.

2. Le cas bidimensionnel

Nous allons nous restreindre au cas bidimensionnel ($d = 2$). Faute en effet d'être parvenus à des méthodes permettant de traiter le cas général, nous remplaçons la compréhension en profondeur des phénomènes par des calculs explicites qui deviendraient inextricables en dimensions supérieures ; nos résultats ne constituent donc qu'une première approche vers les martingales d'Azéma multidimensionnelles.

À deux dimensions, un tenseur doublement symétrique est un tenseur de la forme $(T_k^{ij})_{1\leqslant i,j,k\leqslant 2}$, où les conditions de symétrie imposent d'une part

$$T_2^{11} = T_1^{12} = T_1^{21} \; ; \qquad T_2^{12} = T_2^{21} = T_1^{22}$$

(donc T ne dépend que des quatre quantités $p = T_1^{11}$, $q = T_2^{22}$, $r = T_2^{11}$ et $s = T_1^{22}$), et d'autre part

$$\sum_m T_m^{1j} T_\ell^{m2} = \sum_m T_m^{2j} T_\ell^{m1} \; ,$$

qui exprime la symétrie en i et k de la somme $\sum_m T_m^{ij} T_\ell^{mk}$ déjà symétrique en i et j et en k et ℓ. Compte tenu de la symétrie de T en ses trois indices, échanger j et ℓ revient à échanger les deux membres; cette relation est donc automatiquement vérifiée lorsque $j = \ell$ et il suffit de l'écrire pour $j = 1$ et $\ell = 2$. On obtient

$$ps + qr = r^2 + s^2 \; .$$

Une équation de structure bidimensionnelle se met donc sous la forme

$$\begin{cases} d[X,X]_t = dt + P_t \, dX_t + R_t \, dY_t \\ d[X,Y]_t = \qquad\quad R_t \, dX_t + S_t \, dY_t \\ d[Y,Y]_t = dt + S_t \, dX_t + Q_t \, dY_t \end{cases}$$

où les processus prévisibles P, Q, R et S vérifient pour presque tout (t,ω) la relation $PS{+}QR = R^2{+}S^2$. Et les martingales d'Azéma bidimensionnelles sont les martingales normales $Z = (X,Y)$ telles qu'il existe quatre fonctions affines p, q, r et s sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant pour presque tout (t,ω)

$$(*) \qquad p(Z_{t-})\, s(Z_{t-}) + q(Z_{t-})\, r(Z_{t-}) = r(Z_{t-})^2 + s(Z_{t-})^2$$

et telles que

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} d[X,X]_t = dt + p(Z_{t-}) \, dX_t + r(Z_{t-}) \, dY_t \\ d[X,Y]_t = \qquad\quad r(Z_{t-}) \, dX_t + s(Z_{t-}) \, dY_t \\ d[Y,Y]_t = dt + s(Z_{t-}) \, dX_t + q(Z_{t-}) \, dY_t \; . \end{cases}$$

LEMME 1. — *Les quatre fonctions affines p, q, r et s associées à une martingale d'Azéma bidimensionnelle Z sont uniquement déterminées par Z.*

DÉMONSTRATION. — Si p', q', r' et s' sont aussi associées à Z, l'ensemble $E = \{p{=}p', q{=}q', r{=}r', s{=}s'\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$, dans lequel se trouvent presque tous les $Z(t-,\omega)$. Par limites à droite, pour presque tout t, $Z_t(\omega)$ est p. s. dans E; soient $s < t$ deux instants auxquels ceci a lieu. Puisque Z est normale, la matrice de covariance $\mathbb{E}\big[(Z_t{-}Z_s)\otimes(Z_t{-}Z_s)\big]$ du vecteur aléatoire $Z_t{-}Z_s$ est égale à $(t{-}s)\,\mathrm{Id}$; ce vecteur ne peut donc pas prendre ses valeurs dans une droite déterministe de $\mathbb{R}^2$, et E est l'espace $\mathbb{R}^2$ tout entier. ∎

Cependant la relation $(*)$ ne peut être simplifiée : nous rencontrerons plus bas certaines martingales d'Azéma pour lesquelles les quatre fonctions affines p, q, r et s ne vérifient pas la relation $ps+qr = r^2+s^2$ sur tout $\mathbb{R}^2$, mais seulement sur un fermé dans lequel Z prend ses valeurs.

3. Existence

Comme dans le cas unidimensionnel, l'existence de martingales d'Azéma bidimensionnelles découle d'un résultat plus général : voici une extension bidimensionnelle du théorème d'existence de Meyer ([3]).

THÉORÈME 1. — *Soient z un point de $\mathbb{R}^2$ et p, q, r, s quatre fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, liées par la relation $ps+qr = r^2+s^2$. Sur un espace probabilisé filtré convenable, il existe une martingale bidimensionnelle $Z = (X,Y)$ telle que $Z_0 = z$ et vérifiant l'équation de structure*

$$\begin{cases} d[X,X]_t = dt + p(Z_{t-})\,dX_t + r(Z_{t-})\,dY_t \\ d[X,Y]_t = \qquad\quad r(Z_{t-})\,dX_t + s(Z_{t-})\,dY_t \\ d[Y,Y]_t = dt + s(Z_{t-})\,dX_t + q(Z_{t-})\,dY_t\,. \end{cases}$$

Nous l'allons prouver en suivant le même schéma que Meyer dans [3], c'est-à-dire en discrétisant le temps dans l'équation de structure. Une difficulté nouvelle apparaît en dimension 2 : les équations de structure en temps discret et continu n'ont pas la même forme, le tenseur des coefficients en temps discret étant non pas doublement symétrique, mais *sesqui-symétrique*. Ceci signifie que, si h est un réel positif et $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale à temps discret à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont les accroissements $\Delta\zeta_n = \zeta_n - \zeta_{n-1}$ vérifient une équation de structure de la forme

$$\Delta\zeta_n^i\,\Delta\zeta_n^j = h\,\delta^{ij} + \sum_k \Phi_k^{ij}(n)\,\Delta\zeta_n^k\,,$$

où les Φ_k^{ij} sont des processus prévisibles, alors, à tout instant n,

$$\Phi_k^{ij} \text{ dépend symétriquement de } i,\ j \text{ et } k$$

et

$$\sum_m \Phi_m^{ij}\,\Phi_\ell^{mk} + h\,\delta^{ij}\,\delta_\ell^k \text{ dépend symétriquement de } i,\ j,\ k \text{ et } \ell.$$

Lorsque $h = 1$ ceci se trouve dans la proposition 6 de [1] ; le cas général s'en déduit immédiatement par homothétie de rapport $\sqrt{h}$.

Réciproquement, on a un résultat d'existence : d'après le corollaire 3 de [1], si l'on se donne un tenseur Φ possédant les propriétés de sesqui-symétrie rappelées ci-dessus, il existe un (et, en loi, un seul) vecteur aléatoire $\Delta\zeta$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que

$\Delta\zeta^i \,\Delta\zeta^j \;=\; h\,\delta^{ij} + \sum_k \Phi^{ij}_k \,\Delta\zeta^k$; il en résulte en particulier, par récurrence et conditionnement, que si f est une fonction borélienne de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans les tenseurs sesqui-symétriques, il existe pour tout $z \in \mathbb{R}^2$ une martingale ζ (unique en loi) telle que $\zeta_0 = z$ et que, pour tout $n > 0$

$$\Delta\zeta^i_n \,\Delta\zeta^j_n = h\,\delta^{ij} + \sum_k f^{ij}_k(\zeta_{n-1})\,\Delta\zeta^k_n \,.$$

Ce sont de telles martingales discrètes qui seront utilisées pour démontrer le théorème 1; il faudra pour cela savoir approcher les tenseurs doublement symétriques par des tenseurs sesqui-symétriques. Nous avons vu plus haut qu'en dimension 2 les tenseurs doublement symétriques peuvent être identifiés aux quadruplets (p,q,r,s) de $\mathbb{R}^4$ vérifiant $ps + qr = r^2 + s^2$; nous noterons $\mathcal{D}$ leur ensemble. De même, le lecteur écrira facilement, en dimension 2, les tenseurs sesqui-symétriques de paramètre $h > 0$ comme les quadruplets vérifiant $ps + qr + h = r^2 + s^2$; leur ensemble sera noté $\mathcal{S}(h)$.

LEMME 2. — *Soit* $\|\,.\,\|$ *une norme sur l'espace vectoriel (quadridimensionnel) des tenseurs symétriques à trois indices. Il existe une constante* C *et, pour tout* $h > 0$*, une application borélienne* I^h *de* $\mathcal{D}$ *dans* $\mathcal{S}(h)$ *telles que, pour tout* $T \in \mathcal{D}$*, on ait* $\|I^h(T) - T\| < C\sqrt{h}$.

En langage clair : quand h tend vers zéro, les tenseurs doublement symétriques sont approchés uniformément par des tenseurs sesqui-symétriques de paramètre h.

DÉMONSTRATION DU LEMME 2. — Étant donnés $h > 0$ et quatre réels p_0, q_0, r_0 et s_0 vérifiant $p_0s_0 + q_0r_0 - r_0^2 - s_0^2 = 0$, il s'agit de trouver p, q, r et s proches de p_0, q_0, r_0 et s_0 et vérifiant $ps + qr - r^2 - s^2 = -h$. Le changement linéaire de coordonnées $u = s - p$ et $v = r - q$ permet de remplacer (p,q,r,s) par (u,v,r,s); les équations ci-dessus deviennent $u_0s_0 + v_0r_0 = 0$ et $us + vr = h$.

Si $u_0 = v_0 = r_0 = s_0 = 0$, il suffit de poser $u = v = r = s = \sqrt{h/2}$. Sinon, on peut définir $\alpha > 0$ par la formule $(u_0^2 + v_0^2 + r_0^2 + s_0^2)\,\mathrm{sh}\,2\alpha = 2h$, et poser $r = r_0\,\mathrm{ch}\,\alpha + v_0\,\mathrm{sh}\,\alpha$, $v = v_0\,\mathrm{ch}\,\alpha + r_0\,\mathrm{sh}\,\alpha$, $s = s_0\,\mathrm{ch}\,\alpha + u_0\,\mathrm{sh}\,\alpha$ et $u = u_0\,\mathrm{ch}\,\alpha + s_0\,\mathrm{sh}\,\alpha$. Compte tenu de $u_0s_0 + v_0r_0 = 0$, on a bien

$$us + vr = (u_0^2 + v_0^2 + r_0^2 + s_0^2)\,\mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha = h\ ;$$

et l'estimation de norme résulte de

$$(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2 + (r-r_0)^2 + (s-s_0)^2 = 2\,\mathrm{ch}\,\alpha\,(\mathrm{ch}\,\alpha - 1)(u_0^2 + v_0^2 + r_0^2 + s_0^2) < 2\,h\ ,$$

car pour $\alpha > 0$ on a $\mathrm{ch}\,\alpha - 1 = \mathrm{sh}\,\alpha + e^{-\alpha} - 1 < \mathrm{sh}\,\alpha$. ∎

On aurait pu tenter de démontrer ce lemme par une autre méthode. Il est en effet montré dans [1] que les tenseurs doublement symétriques (respectivement sesqui-symétriques) sont en bijection avec des systèmes particuliers de vecteurs de $\mathbb{R}^2$, les *systèmes droits* (respectivement *obtus*). On aurait pu approcher le système droit par des systèmes obtus, ce qui serait d'ailleurs aussi simple en toute dimension qu'en dimension 2 (alors que nous reculons devant l'extension à la dimension n des calculs faits ici en dimension 2). Mais pour démontrer le théorème nous aurons besoin du caractère uniforme de l'approximation, que nous ne voyons pas comment obtenir en passant par les systèmes droits et obtus.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. — Les quatre fonctions continues p, q, r et s sont données. Pour chaque $h > 0$, le lemme 2 fournit des fonctions boréliennes p^h, q^h, r^h et s^h, uniformément proches de p, q, r et s quand h est petit, et telles que $p^h s^h + q^h r^h + h = (r^h)^2 + (s^h)^2$. Il est donc possible de définir des martingales discrètes $\zeta^h = (\xi^h, \eta^h)$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\zeta_0^h = z$ et

$$\begin{cases} (\Delta\xi_{n+1}^h)^2 = h + p^h(\zeta_n^h)\,\Delta\xi_{n+1}^h + r^h(\zeta_n^h)\,\Delta\eta_{n+1}^h \\ \Delta\xi_{n+1}^h\Delta\eta_{n+1}^h = \qquad r^h(\zeta_n^h)\,\Delta\xi_{n+1}^h + s^h(\zeta_n^h)\,\Delta\eta_{n+1}^h \\ (\Delta\eta_{n+1}^h)^2 = h + s^h(\zeta_n^h)\,\Delta\xi_{n+1}^h + q^h(\zeta_n^h)\,\Delta\eta_{n+1}^h\,. \end{cases}$$

On peut ensuite définir des martingales à temps continu Z^h dans $\mathbb{R}^2$ par $Z_t^h = \zeta_n^h$ si $nh \leqslant t < (n+1)h$; dans leurs filtrations naturelles, elles vérifient $\langle (Z^h)^i, (Z^h)^j \rangle_t = \delta^{ij}\,[t/h]h \leqslant \delta^{ij} t$ et sont donc uniformément bornées dans L^2 sur tout intervalle fini. Leurs lois sont pseudo-tendues (*cf* [3] et [4]) et il existe donc une suite h_n tendant vers zéro telle que les lois des Z^{h_n} convergent pseudo-étroitement vers une loi de martingale L. On peut supposer (mêmes références) que les Z^{h_n} sont toutes définies sur un même espace probabilisé et que les trajectoires $Z^{h_n}(\omega)$ convergent (presque partout en t) vers celles d'une martingale Z de loi L. Il reste à montrer que Z est solution de l'équation de structure proposée.

De la même façon que dans [3], on peut montrer que les crochets $[X,X]$, $[X,Y]$ et $[Y,Y]$ sont proches en probabilité des crochets correspondants de Z^{h_n} ; que $\int_0^t p(Z_{s-})\,dX_s$ est proche en probabilité de $\int_0^t p(Z_{s-}^{h_n})\,dX_s^{h_n}$ et de même pour les cinq intégrales analogues. Il reste, pour conclure, à vérifier que $\int_0^t p(Z_{s-}^{h_n})\,dX_s^{h_n}$ est proche de $\int_0^t p^{h_n}(Z_{s-}^{h_n})\,dX_s^{h_n}$ (et de même pour les cinq autres intégrales). Or le lemme 2 donne

$$\Big\| \int_0^t \big(p(Z_{s-}^{h_n}) - p^{h_n}(Z_{s-}^{h_n})\big)\,dX_s^{h_n} \Big\|^2 = \mathbb{E}\Big[\int_0^t \big(p(Z_{s-}^{h_n}) - p^{h_n}(Z_{s-}^{h_n})\big)^2\,d[X^{h_n}, X^{h_n}]_s\Big]$$
$$\leqslant C\,h_n\,\mathbb{E}\big[[X^{h_n}, X^{h_n}]_t\big] \leqslant C\,h_n\,t\,,$$

ce qui permet de conclure comme dans [3]. ∎

4. Classification des martingales d'Azéma bidimensionnelles

THÉORÈME 2. — *Les martingales d'Azéma bidimensionnelles $Z = (X,Y)$ peuvent être classées en trois types, selon les propriétés des fonctions affines p, q, r et s figurant dans l'équation de structure*

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} d[X,X]_t = dt + p(Z_{t-})\,dX_t + r(Z_{t-})\,dY_t \\ d[X,Y]_t = \qquad r(Z_{t-})\,dX_t + s(Z_{t-})\,dY_t \\ d[Y,Y]_t = dt + s(Z_{t-})\,dX_t + q(Z_{t-})\,dY_t\,. \end{cases}$$

Le type (I) *rassemble celles telles que $p-s = \lambda r$ et $r-q = \lambda s$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ (le cas $\lambda = \infty$ signifiant $r = s = 0$); elles se ramènent par rotation au cas $r = s = 0$.*

Ce sont les martingales d'Azéma dont les sauts sont tous parallèles à l'une ou l'autre de deux directions fixes, que l'on peut toujours choisir orthogonales; quand $r = s = 0$, *ces directions sont celles des axes.*

Le type (II) *est formé de toutes celles pour lesquelles* $p-s = \lambda(r-q)$ *et* $r = \lambda s$ *pour un* $\lambda \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ *(le cas* $\lambda = \infty$ *signifiant* $r-q = s = 0$*), sans que* p, q, r *et* s *ne soient colinéaires (c'est-à-dire constantes, ou multiples d'une même fonction affine non constante). Ces martingales se ramènent par rotation au cas où* $r-q = s = 0$.

Pour toute position initiale dans $\mathbb{R}^2$, *les équations de structure* (A) *associées aux types* (I) *et* (II) *ont une solution.*

Le type (III) *est constitué des martingales d'Azéma* Z *pour lesquelles l'égalité* $ps+qr = r^2+s^2$ *n'a pas lieu identiquement, mais seulement sur une partie stricte du plan, dans laquelle vit* Z *; cette partie du plan est nécessairement la réunion de deux droites orthogonales. Ces martingales se ramènent par translation et rotation au cas où ces deux droites sont les axes; l'équation de structure prend alors la forme*

$$(\mathrm{III}') \qquad \begin{cases} d[X,X]_t = dt + (-X_{t-} + a\,Y_{t-})\,dX_t - Y_{t-}\,dY_t \\ d[X,Y]_t = \qquad -Y_{t-}\,dX_t - X_{t-}\,dY_t \\ d[Y,Y]_t = dt - X_{t-}\,dX_t + (b\,X_{t-} - Y_{t-})\,dY_t\,, \end{cases}$$

où a *et* b *sont deux réels tels que* $a+b \neq 0$. *Étant donné* $z \in \mathbb{R}^2$, *l'équation* (III′) *a une solution de valeur initiale* z *si* z *est sur l'un des axes et dans ce cas seulement.*

REMARQUE. — Les équations du type (III′) avec $a+b = 0$ sont en fait du type (I), avec $\lambda = b = -a$. Les martingales correspondantes restent sur la courbe $xy = x_0y_0$ (hyperbole équilatère ou les deux axes) puisque l(e morceau d)'équation de structure $d[X,Y]_t = -Y_{t-}\,dX_t - X_{t-}\,dY_t$ entraîne que le produit X_tY_t reste constant.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. — Les quatre fonctions affines p, q, r et s doivent vérifier la relation $ps + qr = r^2 + s^2$ en presque tout point de la forme $Z_{t-}(\omega)$. Une alternative se présente : cette relation est vérifiée soit partout, soit seulement sur un sous-ensemble strict de $\mathbb{R}^2$.

Regardons d'abord le premier cas : $ps + qr - r^2 - s^2 \equiv 0$. Cette relation peut aussi s'écrire $(p-s)s = (r-q)r$; on a ainsi deux factorisations en facteurs de degrés $\leqslant 1$, $(p-s)s$ et $(r-q)r$, d'un même polynôme en x et y de degré $\leqslant 2$. Ces factorisations sont donc les mêmes, à l'ordre près et à un facteur scalaire près, et l'un au moins des quatre cas suivants se réalise :

$$(1) \quad \begin{cases} p - s = \lambda r \\ r - q = \lambda s \end{cases} \qquad\qquad (2) \quad \begin{cases} p - s = \lambda(r - q) \\ r = \lambda s \end{cases}$$

$$(\mathrm{I}') \quad r = s = 0 \qquad\qquad (\mathrm{II}') \quad r-q = s = 0$$

où λ est un nombre réel. Il est plus joli de résoudre en r et s les systèmes (1) et (2) pour les mettre sous la forme

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} r = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\,p + \frac{1}{1+\lambda^2}\,q \\ s = \frac{1}{1+\lambda^2}\,p - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\,q \end{cases} \qquad \text{(II)}\quad \begin{cases} r = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\,p + \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\,q \\ s = \frac{1}{1+\lambda^2}\,p + \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\,q\ ; \end{cases}$$

on retrouve (I′) et (II′) comme cas particuliers de (I) et (II) en autorisant la valeur $\lambda = \infty$ dans ces derniers. Les cas (I) et (II) sont simultanément réalisés si et seulement si les quatre fonctions affines $p-s$, $r-q$, r et s sont colinéaires; ceci revient à dire que p, q, r et s le sont. Par convention, les martingales correspondantes seront exclues du type (II) et mises dans le type (I).

Pour chaque valeur finie de λ, les équations de structure (I) et (II) sont respectivement obtenues à partir de (I′) et (II′) par une rotation convenable des axes. En effet, si l'on effectue une rotation de matrice orthogonale $U = (u_i^\alpha)$, en notant $V = (v_\alpha^i)$ l'inverse de U (de sorte que $v_\alpha^i = u_i^\alpha$), la formule de changement de base pour les tenseurs s'écrit

$$T_\gamma^{\alpha\beta} = \sum_{i,j,k} v_\gamma^k T_k^{ij} u_i^\alpha u_j^\beta = \sum_{i,j,k} T_k^{ij} u_i^\alpha u_j^\beta u_k^\gamma$$

(les indices grecs sont relatifs à la nouvelle base, les latins à l'ancienne). En dimension 2, on peut poser $u_1^1 = u_2^2 = \cos\theta = \gamma$ et $u_2^1 = -u_1^2 = \sin\theta = \sigma$, et les composantes dans la nouvelle base p', q', r' et s' d'un tenseur doublement symétrique de composantes p, q, r et s dans l'ancienne sont données par

$$\begin{cases} p' = \gamma^3 p + 3\gamma^2\sigma r + 3\gamma\sigma^2 s + \sigma^3 q \\ r' = -\gamma^2\sigma p + (\gamma^3 - 2\gamma\sigma^2) r - (\sigma^3 - 2\gamma^2\sigma) s + \gamma\sigma^2 q \\ s' = \gamma\sigma^2 p + (\sigma^3 - 2\gamma^2\sigma) r + (\gamma^3 - 2\gamma\sigma^2) s + \gamma^2\sigma q \\ q' = -\sigma^3 p + 3\gamma\sigma^2 r - 3\gamma^2\sigma s + \gamma^3 q\ . \end{cases}$$

Lorsque (I′) est satisfaite, ceci devient

$$\begin{cases} p' = \gamma^3 p + \sigma^3 q \\ r' = -\gamma^2\sigma p + \gamma\sigma^2 q \\ s' = \gamma\sigma^2 p + \gamma^2\sigma q \\ q' = -\sigma^3 p + \gamma^3 q\ , \end{cases}$$

de sorte que $p'-s' = (\gamma^3 - \gamma\sigma^2)p + (\sigma^3 - \gamma^2\sigma)q$ et $r'-q' = (\sigma^3 - \gamma^2\sigma)p - (\gamma^3 - \gamma\sigma^2)q$, et les relations (1) sont vérifiées par (p', q', r', s') avec $\lambda = \sigma/\gamma - \gamma/\sigma = -2\operatorname{cotg} 2\theta$; pour tout λ, il existe donc au moins une rotation $\mathcal{R}$ qui transforme (I′) en (1). Pour vérifier que toutes les fonctions affines satisfaisant (1) proviennent de (I′) par $\mathcal{R}$, il suffit dès lors d'un petit argument de dimension : $\mathcal{R}$ transforme linéairement et injectivement les quadruplets vérifiant (I') en certains quadruplets vérifiant (1); la surjectivité résulte de l'égalité des dimensions.

Pour le type (II), le calcul est analogue : lorsque (II') est satisfaite, on a

$$\begin{cases} p' = \gamma^3 p + (\sigma^3 + 3\gamma^2\sigma)q \\ r' = -\gamma^2\sigma p + (\gamma^3 - \gamma\sigma^2)q \\ s' = \gamma\sigma^2 p + (\sigma^3 - \gamma^2\sigma)q \\ q' = -\sigma^3 p + (\gamma^3 + 3\gamma\sigma^2)q \,, \end{cases}$$

et les relations (2) sont vérifiées avec $\lambda = -\gamma/\sigma = -\cot\theta$; on conclut comme ci-dessus que (2) se ramène toujours à (II') par rotation, et il ne reste qu'à remarquer que le sous-espace à exclure, formé des quadruplets colinéaires, est invariant par rotations.

Par la proposition 3 de [1], une martingale vérifiant une équation de structure a tous ses sauts parallèles aux axes si et seulement si le tenseur prévisible (P, Q, R, S) figurant dans l'équation est diagonal : $R = S = 0$. Une martingale d'Azéma du type (I) a donc ses sauts parallèles aux axes si $r = s = 0$ et, par rotation, parallèles à deux droites orthogonales dans le cas général. Réciproquement, si une martingale d'Azéma a ses sauts dans deux directions fixes, l'ensemble $\Sigma(t,\omega)$ associé à son tenseur prévisible par le corollaire 1 de [1] reste composé de vecteurs ayant ces directions; mais puisque c'est un système droit, les sauts (s'il y en a) sont tous soit dans une direction, soit dans deux directions orthogonales; on peut donc trouver deux directions orthogonales contenant tous les sauts. Après s'être ramené, par rotation, au cas où les sauts sont parallèles aux axes, on a un tenseur diagonal, donc $r(Z_{t-}) = s(Z_{t-}) = 0$ pour presque tout (t,ω); le lemme 1 entraîne $r = s = 0$. Et dans le cas général, obtenu par rotation à partir de ce cas particulier, la martingale est du type (I).

L'existence de solutions de (I) et (II) pour toute condition initiale est un cas particulier du théorème 1.

Il reste à étudier le second terme de l'alternative, qui donnera le type (III) : nous supposons maintenant que que l'égalité $ps+qr = r^2+s^2$ n'a pas lieu identiquement dans tout le plan. Puisque cette relation est du second degré, l'ensemble H sur lequel elle a lieu est une conique, propre ou dégénérée. Pour presque tout (t,ω), Z_{t-} est dans H; comme H est fermé, Z lui-même est (indistinguable d'un processus) à valeurs dans H. La projection de Z sur n'importe quelle direction est une martingale normale, donc non convergente, donc non unilatéralement bornée. En conséquence, H ne peut être ni une ellipse, ni une parabole, ni deux droites parallèles, ni une droite double : c'est donc une hyperbole, éventuellement dégénérée en deux droites concourantes. Au moyen d'une translation et d'une rotation, on se ramène au cas où les asymptotes de cette hyperbole ont pour équations $x = 0$ et $y = \rho x$, où ρ est un nombre réel; l'équation de H est alors de la forme $x(y-\rho x) = c$ pour une constante c, et le processus $X(Y-\rho X)$ est constant. Mais, puisque Z est normale, ce processus $X(Y-\rho X)$ est aussi somme d'une martingale et du processus $-\rho t$; il en résulte que $\rho = 0$, et H est une hyperbole équilatère, d'équation $xy = c$. Il s'ensuit que le processus XY est constant, d'où $d[X,Y]_t = -Y_{t-}dX_t - X_{t-}dY_t$ et le lemme 1 donne $r(x,y) = -y$

et $s(x,y) = -x$. L'équation de H, $xy = c$, s'écrit aussi $ps+qr = r^2+s^2$, c'est-à-dire $-xp(x,y) - yq(x,y) = y^2 + x^2$. En identifiant les deux équations, on voit que $c = 0$ (donc H consiste en les deux axes), $p(x,y) = -x + ay$ et $q(x,y) = -y + bx$, où les réels a et b vérifient $a+b \neq 0$; la martingale Z vérifie donc l'équation (III′) et reste sur les axes.

Réciproquement, étant donnés a et $b \neq -a$, si l'on pose $p(x,y) = -x + ay$, $q(x,y) = -y+bx$, $r(x,y) = -y$ et $s(x,y) = -x$, la relation $ps+qr = r^2+s^2$ est vérifiée uniquement sur les axes; il nous reste à construire, pour toute condition initiale z_0 sur l'un des axes, une solution de (III′). Remplaçons pour cela p et q par les fonctions non affines mais continues

$$p'(x,y) = -x + \frac{ay^2-bx^2}{x^2+y^2}\, y \quad \text{et} \quad q'(x,y) = -y + \frac{bx^2-ay^2}{x^2+y^2}\, x \,,$$

qui coïncident avec p et q sur les axes et qui vérifient partout $p's+q'r = r^2+s^2$. Le théorème 1 appliqué à p', q', r et s fournit une martingale Z issue de z_0 et vérifiant (III′) avec p' et q' au lieu de p et q. Mais puisque $r = -y$ et $s = -x$, elle vérifie aussi $d[X,Y]_t = -Y_{t-}dX_t - X_{t-}dY_t$ et XY est constant; puisque $X_0Y_0 = 0$, Z reste sur les axes et le système (III′) est satisfait.

Enfin, l'analyse ci-dessus montre que toute martingale d'Azéma qui n'est pas du type (I) ou (II) vit sur deux droites; le système (III′), pour lequel ces deux droites sont les axes, ne saurait donc avoir aucune solution issue d'un point non situé sur les axes. ∎

5. Propriété de représentation chaotique

Pour les martingales d'Azéma unidimensionnelles, la propriété de représentation chaotique n'est connue que pour les valeurs des paramètres telles que le processus soit borné sur tout intervalle fini de temps. Il en va de même à deux dimensions : nous ne savons obtenir la propriété de représentation chaotique que pour certaines martingales du type (I) bien particulières, que nous prouvons d'abord bornées sur tout intervalle fini. Puisque les martingales du type (I) se ramènent par rotation au cas “diagonal” où $r = s = 0$, nous nous restreindrons à ce cas-là.

PROPOSITION 1. — *Soit Z une martingale d'Azéma du type* (I), *d'équation de structure*

$$\begin{cases} d[X,X]_t = dt + p(Z_{t-})\, dX_t \\ d[X,Y]_t = 0 \\ d[Y,Y]_t = dt + q(Z_{t-})\, dY_t \end{cases}$$

avec $p(x,y) = ax+by+c$ et $q(x,y) = \alpha x+\beta y+\gamma$. On suppose $-2 \leqslant a < 0$, $-2 \leqslant \beta < 0$ et $0 < b\alpha < a\beta$. Si le vecteur aléatoire Z_0 est borné, le processus Z est borné sur tout intervalle fini $[0,t]$: il reste dans un compact qui ne dépend que de Z_0, de t et de l'équation de structure.

DÉMONSTRATION.[1] — Dans l'équation de structure

$$\begin{cases} d[X,X]_t = dt + (aX_{t-}+bY_{t-}+c)\,dX_t \\ d[X,Y]_t = 0 \\ d[Y,Y]_t = dt + (\alpha X_{t-}+\beta Y_{t-}+\gamma)\,dY_t\ , \end{cases}$$

remplaçons X_-dX par $\frac{1}{2}d(X^2)-\frac{1}{2}d[X,X]$ et Y_-dY par $\frac{1}{2}d(Y^2)-\frac{1}{2}d[Y,Y]$:

$$\begin{aligned}(1+\tfrac{1}{2}a)\,d[X,X] &= dt + \tfrac{1}{2}a\,d(X^2) + b\,Y_-dX + c\,dX \\ (1+\tfrac{1}{2}\beta)\,d[Y,Y] &= dt + \tfrac{1}{2}\beta\,d(Y^2) + \alpha\,X_-dY + \gamma\,dY\ ;\end{aligned}$$

multiplions la première par α, la seconde par b et ajoutons. Compte tenu de $[X,Y]=0$, on peut remplacer X_-dY+Y_-dX par $d(XY)$, et il reste

$$\begin{aligned}\alpha(1+\tfrac{1}{2}a)[X,X]_t &+ b(1+\tfrac{1}{2}\beta)[Y,Y]_t \\ &= (\alpha+b)t + \tfrac{1}{2}\alpha aX_t^2 + \tfrac{1}{2}b\beta Y_t^2 + b\alpha X_tY_t + \alpha cX_t + b\gamma Y_t \\ &\qquad - \tfrac{1}{2}\alpha aX_0^2 - \tfrac{1}{2}b\beta Y_0^2 - b\alpha X_0Y_0 - \alpha cX_0 - b\gamma Y_0\ ;\end{aligned}$$

ceci est de la forme

$$F(X_t,Y_t) - F(X_0,Y_0) = (\alpha+b)t - \alpha(1+\tfrac{1}{2}a)[X,X]_t - b(1+\tfrac{1}{2}\beta)[Y,Y]_t\ .$$

Par hypothèse, α et b sont de même signe $\varepsilon \in \{-1,1\}$. Comme a et β sont supérieurs ou égaux à -2, les coefficients $\alpha+b$, $\alpha(1+\frac{1}{2}a)$ et $b(1+\frac{1}{2}\beta)$ sont tous du signe de ε. Les hypothèses $a\beta > b\alpha$, $a<0$ et $\beta<0$ impliquent que la forme quadratique $-\frac{1}{2}\alpha ax^2-b\alpha xy-\frac{1}{2}b\beta y^2$ qui figure dans F est définie positive si $\varepsilon=1$ et définie négative si $\varepsilon=-1$. Quitte à tout multiplier par ε, on est ainsi ramené à

$$G(X_t,Y_t) - G(X_0,Y_0) \leqslant |\alpha+b|\,t\ ,$$

où G est un polynôme du second degré elliptique. Lorsque t décrit un intervalle fini, $G(X_t,Y_t)-G(X_0,Y_0)$ reste majoré; puisque Z_0 est borné, $G(Z_t)$ est majoré, et Z reste à l'intérieur d'une ellipse. ∎

REMARQUE. — L'hypothèse $0 < b\alpha < a\beta$ peut être remplacée par $b=\alpha=0$ (et la démonstration se simplifie un peu : il faut bien entendu se garder de multiplier les équations par α et b avant de les ajouter!). Ce cas n'a guère d'intérêt : compte tenu de l'unicité en loi établie plus bas, X et Y sont alors deux martingales d'Azéma unidimensionnelles indépendantes.

1. Nous remercions Ph. Biane pour son aide.

LEMME 3. — *Soit Z une martingale d'Azéma à valeurs dans un espace vectoriel euclidien E de dimension finie; on suppose Z_0 déterministe. Soit Q un polynôme à n variables sur E. Pour $t_1 \geqslant 0, \ldots, t_n \geqslant 0$, la variable aléatoire $Q(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n})$ est de la forme*

$$\sum_{k=0}^{\deg Q} \int_{0<s_1<\ldots<s_k} \phi_k(s_1, \ldots, s_k)\, dZ_{s_1} \ldots dZ_{s_k} ,$$

où, pour chaque k, ϕ_k est une application mesurable bornée et à support compact de $\mathbb{R}_+^k$ dans l'espace $(E^*)^{k\otimes}$ des formes k-linéaires sur E. (Pour $k = 0$, l'intégrale multiple est une constante.) La fonction ϕ_k est déterminée de façon unique (presque partout) sur l'ensemble $0 < s_1 < \ldots < s_k$ par Q, les t_i et l'équation de structure vérifiée par Z.

Nous omettons la démonstration de ce lemme : elle recopie mot pour mot celle du cas unidimensionnel (lemme 7 de [2]), en remplaçant là où c'est nécessaire les réels par des tenseurs convenables.

PROPOSITION 2. — *Soit donnée une équation de structure bidimensionnelle vérifiant les hypothèses de la proposition 1 (ou de la remarque qui la suit). Pour toute condition initiale dans le plan, cette équation a une solution Z, unique en loi. La martingale Z possède la propriété de représentation chaotique.*

DÉMONSTRATION. — La position initiale z étant donnée dans $\mathbb{R}^2$, soit $t > 0$. La proposition 1 fournit un compact K dans lequel restent jusqu'à l'instant t toutes les solutions de l'équation de structure issues de z. La constante obtenue pour $k = 0$ dans le lemme 3, qui n'est autre que $\mathbb{E}[Q(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n})]$, est la même pour toutes les solutions Z. Comme, sur K, les polynômes sont denses dans les fonctions continues, pour f continue et $0 \leqslant t_i \leqslant t$, l'espérance $\mathbb{E}[f(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n})]$ ne dépend pas de Z : toutes les solutions ont donc la même loi.

Puisque, sur le compact K, les polynômes sont denses dans L^2 pour n'importe quelle loi de probabilité, la propriété de représentation chaotique de Z, établie par le lemme 3 pour les polynômes, s'étend à toutes les variables aléatoires de L^2 de la forme $f(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n})$ où $0 \leqslant t_i \leqslant t$, puis à tout $\mathrm{L}^2(\sigma(Z))$. ∎

REMARQUE. — Comme nous l'avons observé plus haut, lorsque $b = \alpha = 0$, les coordonnées X et Y de Z sont deux martingales d'Azéma unidimensionnelles indépendantes, complètement découplées dans l'équation de structure. On pourrait s'attendre à ce que cette situation soit en un sens la meilleure possible et espérer que, si a et β sont dans l'ouvert $]-2, 0[$, la propriété de représentation chaotique subsiste pour des coefficients a', b', α' et β' suffisamment voisins de a, 0, 0 et β. Mais la méthode employée ci-dessus semble inutilisable dès lors que $b\alpha < 0$...

5. Références

[1] S. Attal & M. Émery. Équations de structure pour des martingales vectorielles. *Séminaire de Probabilités XXVIII*, Lecture Notes in Mathematics 1583, Springer 1994.

[2] M. Émery. On the Azéma martingales. *Séminaire de Probabilités XXIII*, Lecture Notes in Mathematics 1372, Springer 1989.

[3] P.-A. Meyer. Construction de solutions d'équations de structure. *Séminaire de Probabilités XXIII*, Lecture Notes in Mathematics 1372, Springer 1989.

[4] P.-A. Meyer & W. Zheng. Tightness criteria for laws of semimartingales. *Ann. Inst. Henri Poincaré Série B,* vol. 20, 353–372, 1984.

Université Louis Pasteur et C. N. R. S.
I. R. M. A.
7 rue René Descartes
67 084 STRASBOURG Cedex