

# Astérisque

BERNADETTE PERRIN-RIOU

**Exposé IV : Représentations  $p$ -adiques ordinaires**

*Astérisque*, tome 223 (1994), Séminaire Bourbaki, exp. n° 4, p. 185-207

<[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1994\\_\\_223\\_\\_185\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__223__185_0)>

© Société mathématique de France, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Exposé IV

### REPRÉSENTATIONS $p$ -ADIQUES ORDINAIRES

par **Bernadette Perrin–Riou** (avec un appendice par Luc Illusie)

#### 1. — Présentation

**1.1.** — Soient  $k$  un corps parfait de caractéristique  $p$ ,  $K_0$  un corps local complet de caractéristique 0 de corps résiduel  $k$ , non ramifié sur  $\mathbb{Q}_p$  et  $K$  une extension finie de  $K_0$  totalement ramifiée sur  $K_0$ . On choisit une clôture algébrique  $\overline{K}$  de  $K$ , une clôture algébrique  $\overline{k}$  de  $k$  et on note  $G_K$  le groupe de Galois de  $\overline{K}/K$ . Soit  $I_K$  le sous-groupe d'inertie de  $G_K$ . On note  $\sigma$  l'endomorphisme de Frobenius absolu sur  $K_0$  et sur  $k$ . On note  $P_0$  le corps des fractions de  $W(\overline{k})$ .

Nous sommes intéressés ici dans un certain type de représentations  $p$ -adiques de  $G_K$  dites ordinaires et en leur description complète en termes de certains  $(\varphi, N)$ -modules filtrés. Ces représentations  $p$ -adiques interviennent en géométrie algébrique. Bloch–Kato puis Hyodo ont en effet montré que sous certaines hypothèses sur la variété  $X$ , les représentations  $p$ -adiques données par la cohomologie étale de la variété  $X$  sont ordinaires (cf. l'appendice de L. Illusie). D'un autre point de vue, Greenberg [G89] a élaboré une théorie d'Iwasawa pour les représentations  $p$ -adiques ordinaires qui généralise celle déjà connue pour les variétés abéliennes ordinaires et pour le module de Tate cyclotomique. Nous n'en dirons pas plus ici dans ces deux directions. Tous les résultats du texte qui suit sont dus à J.–M. Fontaine.

**1.2.** — Notons  $\chi$  le caractère cyclotomique, c'est-à-dire le caractère à valeurs dans  $\mathbb{Z}_p^\times$  donnant l'action de  $G_K$  sur les racines de l'unité d'ordre une puissance de  $p$ . Une représentation  $p$ -adique  $V$  de  $G_K$  est dite **ordinaire** s'il existe une

filtration  $(\text{Fil}^i V)_{i \in \mathbb{Z}}$  de  $V$ , décroissante exhaustive et séparée, par des sous-espaces  $\text{Fil}^i V$  stables par  $G_K$  et telle que le groupe d'inertie  $I_K$  agit sur  $\text{Fil}^i V / \text{Fil}^{i+1} V$  par  $\chi^i$ . Remarquons que  $V$  est ordinaire si et seulement si sa restriction à  $I_K$  est ordinaire.

Pour la commodité du lecteur, nous reprenons quelques définitions tirées des exposés II et III de ce volume. Un  $(\varphi, N)$ -**module filtré sur  $K$**  est un  $K_0$ -espace vectoriel  $D$  muni d'un isomorphisme  $\sigma$ -linéaire  $\varphi$ , d'un endomorphisme  $N$  vérifiant

$$N\varphi = p\varphi N$$

et tel que le  $K$ -espace vectoriel  $D_K = K \otimes_{K_0} D$  soit muni d'une filtration par des  $K$ -sous-espaces vectoriels  $(D_K)^i$  qui soit décroissante, exhaustive et séparée. Les **nombre de Hodge** d'un  $(\varphi, N)$ -module filtré  $D$  de dimension finie sont les nombres de Hodge de la filtration

$$h_H(D, i) = \dim_K(D_K)^i / (D_K)^{i+1}.$$

Les **nombre de Newton** du  $(\varphi, N)$ -module filtré  $D$  sont ceux du  $\varphi$ -isocrystal sous-jacent, c'est-à-dire que si  $\alpha = r/s$  est un rationnel et si  $D_{[\alpha]}$  est le sous- $K_0$ -espace vectoriel de  $P_0 \otimes_{K_0} D$  engendré par les  $x$  vérifiant  $\varphi^s x = p^r x$ , on a

$$h_N(D, \alpha) = \dim_{K_0} D_{[\alpha]}.$$

Posons

$$t_N(D) = \sum_{\alpha} \alpha h_N(D, \alpha)$$

et

$$t_H(D) = \sum_i i h_H(D, i).$$

Un  $(\varphi, N)$ -module filtré  $D$  de dimension finie est dit **faiblement admissible** si

$$t_N(D) = t_H(D)$$

et si pour tout sous- $K_0$ -espace vectoriel  $D'$  de  $D$  stable par  $\varphi$  et par  $N$ , on a

$$t_H(D') \leq t_N(D')$$

où  $D'_K = K \otimes_{K_0} D'$  est muni de la filtration induite par celle de  $D_K$ . Un  $(\varphi, N)$ -module filtré est dit **ordinaire** s'il est faiblement admissible et si ses

nombre de Hodge et de Newton coïncident. Une manière concrète de décrire un  $(\varphi, N)$ -module filtré ordinaire est la suivante. Posons  $\overline{D} = P_0 \otimes_{K_0} D$ ,  $\overline{D}_{[r]} = P_0 \otimes_{K_0} D_{[r]}$ . Alors,  $D^{[r]} = D \cap \overline{D}_{[r]}$  est un  $K_0$ -sous-espace vectoriel de  $D$  dont la dimension est égale à  $h_N(D, r)$  et qui est stable par  $\varphi$  : en effet,  $\overline{D}$  est un  $P_0$ -espace vectoriel muni d'une action naturelle de  $G_k$  et  $\overline{D}_{[r]}$  en est un sous-espace vectoriel dont on vérifie facilement qu'il est stable par  $G_k$  ; on en déduit par descente galoisienne [S68] qu'il provient d'un  $K_0$ -espace vectoriel qui est  $D^{[r]}$ . On montrera en 2.6 que le  $(\varphi, N)$ -module filtré  $D$  est ordinaire si et seulement si les nombres de Newton de  $D$  sont des entiers et si l'on a

$$(1) \quad D_K = (D_K)^i \oplus \left( \bigoplus_{j < i} (D^{[j]})_K \right)$$

pour tout entier  $i$ . Cela signifie aussi qu'il existe un réseau  $M$  de  $D$ , c'est-à-dire un sous- $W(k)$ -module libre de  $D$  de rang maximal, et une décomposition de  $M$  en somme directe

$$M = \bigoplus M^{[i]}$$

telle que  $p^{-i}\varphi$  induise sur  $M^{[i]}$  un automorphisme ( $\sigma$ -linéaire) et telle que, si  $D^{[i]} = K_0 \otimes_{W(k)} M^{[i]}$ , on ait

$$D_K = (D_K)^i \oplus \left( \bigoplus_{j < i} (D^{[j]})_K \right).$$

Il est clair que le  $(\varphi, N)$ -module filtré  $D$  est ordinaire si et seulement si le  $(\varphi, N)$ -module filtré  $P_0 \otimes_{K_0} D$  déduit par extension des scalaires est ordinaire.

**1.3.** — On renvoie à l'exposé II pour la définition des anneaux de périodes  $p$ -adiques  $B_{dR}$ ,  $B_{cris}$  et  $B_{st}$ . Choisissons une valuation  $v$  de  $\overline{K}$  à valeurs dans  $\mathbb{Q}$ . Rappelons que  $B_{st}$  contient  $B_{cris}$ , est muni d'une action de  $G_K$ , d'une structure de  $K_0$ -espace vectoriel, d'un endomorphisme  $\varphi$   $\sigma$ -linéaire commutant à l'action de  $G_K$ , d'une filtration décroissante, d'une  $B_{cris}$ -dérivation  $N$  telle que  $N\varphi = p\varphi N$  (Exp. II, 3.2). Il existe un élément  $t$  de  $B_{cris}$  engendrant  $\mathbb{Z}_p(1)$  tel que  $\varphi t = pt$  et un élément  $u$  de  $B_{st}$  tel que  $B_{st}$  est une algèbre de polynômes sur  $B_{cris}$  en  $u$ ,  $N$  est alors la  $B_{cris}$ -dérivation

tel que  $Nu = 1$  et on a  $\varphi u = pu$ . Enfin, le choix d'un logarithme de  $\overline{K}^\times$  prolongeant le logarithme usuel permet de définir un plongement

$$K \otimes_{K_0} B_{st} \longrightarrow B_{dR}$$

(Exp. II, 4.2.4). On note encore  $u$  l'image de  $u$  dans  $B_{dR}$ .

1.4. — Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique, on pose

$$\underline{D}_{st}^*(V) = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, B_{st})^{G_K}.$$

Le  $K_0$ -espace vectoriel  $\underline{D}_{st}^*(V)$  est muni d'une structure naturelle de  $(\varphi, N)$ -module filtré induite par celle de  $B_{st}$  et on a  $\dim_{\mathbb{Q}_p} V \geq \dim_{K_0} \underline{D}_{st}^*(V)$ . Si  $D$  est un  $(\varphi, N)$ -module filtré, on pose

$$\begin{aligned} \underline{V}_{st}^*(D) = \{x \in \text{Hom}_{K_0}(D, B_{st}) \text{ t.q. } \varphi x = x, Nx = 0, \\ 1 \otimes x \in (K \otimes_{K_0} \text{Hom}_{K_0}(D, B_{st}))^0\} \end{aligned}$$

(le  $K$ -espace vectoriel  $K \otimes_{K_0} \text{Hom}_{K_0}(D, B_{st})$  est muni de la filtration naturelle  $(K \otimes_{K_0} \text{Hom}_{K_0}(D, B_{st}))^i$ ). C'est aussi le  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel des homomorphismes de  $D$  dans  $B_{st}$  dans la catégorie des  $(\varphi, N)$ -modules filtrés. Le groupe de Galois  $G_K$  agit sur  $\underline{V}_{st}^*(D)$  et cette action en fait une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ .

Une représentation  $p$ -adique  $V$  est dite **semi-stable** si

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} V = \dim_{K_0} \underline{D}_{st}^*(V).$$

Le  $(\varphi, N)$ -module filtré  $D$  est dit **admissible** s'il existe une représentation  $p$ -adique semi-stable  $V$  telle que  $D = \underline{D}_{st}^*(V)$ .

On pose de même  $\underline{D}_{cris}^*(V) = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, B_{cris})^{G_K}$ . C'est un  $\varphi$ -module filtré ( $N = 0$ ). La représentation  $p$ -adique  $V$  est dite **cristalline** si

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} V = \dim_{K_0} \underline{D}_{cris}^*(V).$$

Le  $\varphi$ -module filtré  $D$  est dit **admissible** s'il existe une représentation  $p$ -adique cristalline  $V$  telle que  $D = \underline{D}_{cris}^*(V)$ . Une représentation  $p$ -adique cristalline (resp. un  $\varphi$ -module filtré admissible) est semi-stable (resp. un  $(\varphi, N)$ -module filtré admissible).

1.5. THÉORÈME. — *Supposons que  $K$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ . Il existe une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des représentations  $p$ -adiques ordinaires de dimension finie de  $G_K$  et la catégorie des  $(\varphi, N)$ -modules filtrés ordinaires de dimension finie donnée par*

$$D = \underline{D}_{st}^*(V), \quad V = \underline{V}_{st}^*(D).$$

En particulier, toute représentation  $p$ -adique (resp.  $(\varphi, N)$ -module filtré) ordinaire de dimension finie est semi-stable (resp. admissible).

Nous démontrons dans le paragraphe 2 que tout  $(\varphi, N)$ -module filtré ordinaire est admissible et ceci sans restriction sur le corps  $K$ . Dans le paragraphe 3, nous étudions les extensions semi-stables de  $\mathbb{Q}_p$  par  $\mathbb{Q}_p(j)$  pour tout entier  $j$  lorsque  $K$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  et de  $\mathbb{Q}_p$  par  $\mathbb{Q}_p(1)$  sans restriction sur  $K$ . Dans le paragraphe 4, nous démontrons que toute représentation  $p$ -adique ordinaire est semi-stable.

## 2. — $(\varphi, N)$ -modules filtrés ordinaires

2.1. — Soit  $i \in \mathbb{Z}$ . Posons  $\mathbb{Q}_p(i)$  la représentation  $p$ -adique de dimension 1 donnée par le caractère  $\chi^i$ . Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique, on pose  $V(i) = V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(i)$ . On note  $K_0[i]$  le  $(\varphi, N)$ -module filtré donné par  $K_0$ ,  $\varphi(1) = p^i \cdot 1$ ,  $(K_0[i]_K)^i = K_0[i]$ ,  $(K_0[i]_K)^{i+1} = 0$ . Si  $D$  est un  $(\varphi, N)$ -module filtré, on pose  $D[i] = D \otimes K_0[i]$  où le produit tensoriel est pris dans la catégorie des  $(\varphi, N)$ -modules filtrés.

2.2. LEMME. — *Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique,  $V$  est semi-stable si et seulement si  $V(i)$  est semi-stable. Si  $D$  est un  $(\varphi, N)$ -module filtré,  $D$  est admissible si et seulement si  $D[i]$  est admissible. On a de plus*

$$\underline{D}_{st}^*(V(i)) = \underline{D}_{st}^*(V)[i] \quad \text{et} \quad \underline{V}_{st}^*(D[i]) = \underline{V}_{st}^*(D)(i).$$

**Démonstration.** Les deux premières affirmations sont claires : on a

$$x \in \underline{V}_{cris}^*(D[i]) \iff x \in \text{Hom}(D[i], B_{cris})^0 \quad \text{et} \quad \varphi x = x$$

et on écrit  $x = t^{-i}y$  avec  $y \in \text{Hom}(D, B_{cris})^0$  et  $\varphi y = p^i y$ . On montre de même l'autre égalité.

**2.3.** — Regardons d'abord le cas particulier facile et bien connu où  $D$  a un seul nombre de Hodge non nul (voir Exp. III, 5.4.1). La propriété  $N\varphi = p\varphi N$  implique que  $N$  est nul.

LEMME. — Soit  $D$  un  $\varphi$ -module filtré tel que  $(D_K)^i = D_K$  et  $(D_K)^{i+1} = 0$ . Alors  $D$  est faiblement admissible si et seulement s'il existe un réseau de  $D$  sur lequel  $p^{-i}\varphi$  agit comme un automorphisme. Il est alors admissible et l'inertie  $I_K$  agit sur  $V_{cris}^*(D)$  par  $\chi^i$ . Réciproquement, si  $V$  est une représentation  $p$ -adique sur laquelle  $I_K$  agit comme  $\chi^i$ , alors  $\dim_{K_0} \underline{D}_{cris}^*(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$  et  $\underline{D}_{cris}^*(V)_K^i = \underline{D}_{cris}^*(V)_K, \underline{D}_{cris}^*(V)_K^{i+1} = 0$ .

**Démonstration.** On se ramène par twist au cas où  $i = 0$ . Dire que  $D$  est faiblement admissible est équivalent à dire que  $D$  a un seul nombre de Newton non nul  $h_N(D, 0)$ . Il existe donc une base  $d_1, \dots, d_r$  de  $D$  et des éléments  $a_1, \dots, a_d$  de  $W(\bar{k})$  tels que

$$\varphi(a_j \otimes d_j) = a_j \otimes d_j \quad (j = 1, \dots, d).$$

On en déduit facilement que  $\varphi$  est un isomorphisme du sous- $W(k)$ -module de  $D$  engendré par  $d_1, \dots, d_r$ .

Calculons  $\underline{V}_{cris}^*(D)$ ; on a

$$x \in \underline{V}_{cris}^*(D) \iff x \in \text{Hom}_{K_0}(D, B_{cris})^0 \quad \text{et} \quad \varphi x = x.$$

Il existe une base  $\{d_1, \dots, d_r\}$  de  $D$  telle que

$$(\varphi - 1)(d_k) = \sum_{j=1}^r a_{kj} d_j$$

où la matrice  $A = ((a_{kj}))$  appartient à  $Gl_r(W(k))$ . Les équations

$$(\varphi x)(d_k) = x(d_k)$$

se traduisent alors par

$$\sum_{j=1}^r a_{kj}^\sigma \varphi(x(d_j)) = x(d_k),$$

c'est-à-dire si  $X = {}^t(x(d_1), \dots, x(d_r))$  par  $A^\sigma X^\sigma = X$ . On regarde alors l'équation  $B^{-1}A^\sigma B^\sigma = 1$  pour  $B \in M_r(\text{Fil}^0 B_{\text{cris}})$ . Elle admet une solution dans  $Gl_r(P_0)$  grâce à la nullité de  $H^1(P_0/K_0, Gl_r(P_0))$  ([S68]) puisque la restriction de  $\varphi$  à  $P_0$  est l'homomorphisme de Frobenius; deux solutions diffèrent d'un élément de  $Gl_r(\mathbb{Q}_p)$ . On en déduit que l'espace des solutions de  $B^{-1}A^\sigma B^\sigma = 1$  est un  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension  $r$  et que si  $x \in \underline{V}_{\text{cris}}^*(D)$ , les valeurs de  $x$  appartiennent à  $P_0$ . Il est alors clair que, si  $\tau \in I_K$ ,  $\tau(x) = x$ , ce qu'il fallait démontrer.

2.4. LEMME (Exp. III, 4.4.4). — *Soit une suite exacte de  $(\varphi, N)$ -modules filtrés*

$$0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow D \longrightarrow D_2 \longrightarrow 0$$

*dont deux d'entre eux sont faiblement admissibles, alors le troisième l'est aussi.*

2.5. LEMME. — *Soit  $D$  un  $(\varphi, N)$ -module filtré ordinaire et soit  $r$  le plus grand entier tel que  $D_K^r = D_K$ . Alors  $D^{[r]}$  est un sous-objet de  $D$  dans la catégorie des  $(\varphi, N)$ -modules filtrés. Il est ordinaire. Le quotient de  $D$  par  $D^{[r]}$  est un  $(\varphi, N)$ -module filtré ordinaire.*

**Démonstration.** Par hypothèse, les polygones de Hodge et de Newton de  $D$  sont égaux. En particulier, les nombres de Newton de  $D$  sont des entiers et on a

$$\dim_{K_0} D^{[r]} = \dim_K(D_K)^r - \dim_K(D_K)^{r+1}.$$

L'endomorphisme  $\varphi$  de  $D$  laisse stable le  $K_0$ -espace vectoriel  $D^{[r]}$ , l'endomorphisme  $N$  est nécessairement nul sur  $D^{[r]}$ . En effet la propriété  $p\varphi N = N\varphi$  implique que l'image de  $D^{[r]}$  par  $N$  est contenue dans  $D^{[r-1]}$  et  $D^{[r-1]}$  est nul. Montrons que

$$D_K = D_K^{r+1} \oplus (D^{[r]})_K.$$

Supposons que cela n'est pas vrai;  $D^{[r]}$  est un sous- $K_0$ -espace vectoriel de  $D$  stable par  $\varphi$  et par  $N$ ; lorsqu'on munit  $(D^{[r]})_K$  de la filtration induite par



celle de  $D$ , on a

$$h_N(D^{[r]}, r) = \dim_{K_0} D^{[r]}, \quad h_N(D^{[r]}, r + j) = 0 \quad \text{pour tout } j > 0,$$

$$h_H(D^{[r]}, r + j) > 0 \quad \text{pour un } j > 0.$$

On en déduit que

$$t_H(D^{[r]}) = r \dim_{K_0} D^{[r]} + \sum_{i>r} (i - r) h_H(D^{[r]}, i) > t_N(D^{[r]}) = r \dim_{K_0} D^{[r]},$$

ce qui contredit l'hypothèse de faible admissibilité de  $D$ .

La filtration de  $(D^{[r]})_K$  induite par celle de  $D_K$  en fait un  $(\varphi, N)$ -module filtré faiblement admissible et le quotient est un  $(\varphi, N)$ -module filtré faiblement admissible. Il est clair alors que les nombres de Hodge et de Newton de  $D^{[r]}$  (resp. de  $D/D^{[r]}$ ) sont égaux, c'est-à-dire que  $D^{[r]}$  et  $D/D^{[r]}$  sont ordinaires.

**2.6.** — Montrons que le  $(\varphi, N)$ -module filtré  $D$  est ordinaire si et seulement si les nombres de Newton de  $D$  sont des entiers et si l'on a

$$(1) \quad D_K = (D_K)^i \bigoplus \left( \bigoplus_{j<i} (D^{[j]})_K \right)$$

pour tout entier  $i$ . Soit  $D$  un  $(\varphi, N)$ -module filtré ordinaire. Les nombres de Newton de  $D$  sont des entiers et on montre facilement par récurrence à l'aide de 2.5 que l'on a (1) pour tout entier  $i$ . Réciproquement, l'égalité (1) implique que les nombres de Hodge et de Newton de  $D$  sont égaux. En particulier, on a  $t_N(D) = t_H(D)$ . Si  $D'$  est un sous-espace vectoriel de  $D$  stable par  $\varphi$  et  $N$ , on a une injection de  $(D'^{[j]})_K$  dans  $D_K^j / D_K^{j+1}$ . La filtration de  $D'_K$  étant la filtration induite par celle de  $D'$ , on en déduit facilement que les nombres de Newton de  $D'$  sont inférieurs ou égaux aux nombres de Hodge de  $D'$  et donc que  $t_N(D') \leq t_H(D')$ , ce qui montre que  $D$  est faiblement admissible.

**2.7.** — Notons  $\text{Ext}_{MF_{st}}^1(D, B_{st})$  le  $K_0$ -espace vectoriel des classes d'isomorphismes d'extensions de  $(\varphi, N)$ -modules filtrés de  $D$  par  $B_{st}$ .

LEMME. —

i) On a  $\text{Ext}_{MF_{st}}^1(K_0[i], B_{st}) = 0$  pour tout  $i$ .

ii) Si  $D$  est un  $(\varphi, N)$ -module filtré faiblement admissible ayant un seul nombre de Hodge non nul, toute extension de  $(\varphi, N)$ -modules filtrés de  $D$  par  $B_{st}$  est scindée, i.e.

$$\text{Ext}_{MF_{st}}^1(D, B_{st}) = 0.$$

**Démonstration.** Remarquons d'abord que (ii) se déduit facilement de (i) (nullité de  $H^1(P_0/K_0, GL_d(W(\bar{k})))$ ). Pour (i), on se ramène par twist au cas où  $i = 0$ . On a besoin des propriétés suivantes de  $B_{st}$  et  $B_{cris}$  :

- a) l'application  $\varphi - 1 : B_{st} \rightarrow B_{st}$  est surjective;
- b) l'application  $N : (B_{st})^{\varphi=1} \rightarrow (B_{st})^{\varphi=p^{-1}}$  est surjective;
- c) l'application  $\varphi - 1 : \text{Fil}^0 B_{cris} \rightarrow B_{cris}$  est surjective.

Pour (b), on écrit  $\alpha \in (B_{st})^{\varphi=p^{-1}}$  sous la forme  $\alpha = \sum_{n \geq 0} \alpha_n u^n$ ; les  $\alpha_n$  vérifient  $p^{n+1} \varphi \alpha_n = \alpha_n$ . Alors,  $\beta = \sum_{n \geq 0} \alpha_n u^{n+1} / (n+1)$  appartient à  $(B_{st})^{\varphi=1}$  et vérifie  $N\beta = \alpha$ . L'assertion (c) est démontrée dans Exp. II, théorème 5.3.7. Pour (a), on remarque que (c) implique que pour tout entier  $n$ , l'application  $(p^n \varphi - 1) : B_{cris} \rightarrow B_{cris}$  est surjective. On en déduit (a) en remarquant que

$$(\varphi - 1) \left( \sum_{n \geq 0} \alpha_n u^n \right) = \sum_{n \geq 0} (p^n \varphi - 1) \alpha_n u^n.$$

Soit  $X$  une extension de  $(\varphi, N)$ -modules filtrés de  $K_0$  par  $B_{st}$ . Montrons qu'elle est scindée. Soit  $\hat{1}$  un relèvement dans  $X$  de  $1 \in K_0$ . D'après (a), il existe  $\alpha \in B_{st}$  tel que

$$(\varphi - 1)\alpha = (\varphi - 1)\hat{1} \in B_{st}.$$

Posons  $\hat{1}_\varphi = \hat{1} - \alpha$ . C'est un relèvement de 1 dans  $X$  tel que  $\varphi(\hat{1}_\varphi) = \hat{1}_\varphi$  et  $X$  est scindée en tant que  $K_0[\varphi]$ -module. Soit  $\beta = N(\hat{1}_\varphi)$ . C'est un élément de  $B_{st}$  vérifiant  $p\varphi\beta = \beta$ . D'après (b), il existe  $\gamma \in B_{st}$  tel que  $\varphi\gamma = \gamma$ ,

$N\gamma = \beta$ . Donc,  $\widehat{1}_{\varphi, N} = \widehat{1}_{\varphi} - \gamma$  est un relèvement de 1 vérifiant  $\varphi(\widehat{1}_{\varphi, N}) = \widehat{1}_{\varphi, N}$ ,  $N(\widehat{1}_{\varphi, N}) = 0$ , c'est-à-dire que  $X$  est scindée en tant que  $K_0[\varphi, N]$ -modules. La filtration de  $X_K$  est alors donnée par un élément  $\delta$  de  $K \otimes_{K_0} B_{st}$  tel que  $\widehat{1}_{\varphi, N} + \delta$  appartienne à  $(X_K)^0$ . Comme  $K \otimes_{K_0} B_{st} \subset \text{Fil}^0(K \otimes_{K_0} B_{st}) + B_{cris}$ , on peut supposer que  $\delta \in B_{cris}$ . Pour montrer que  $X$  est scindée en tant que  $(\varphi, N)$ -module filtré, il suffit de démontrer qu'il existe  $\varepsilon \in \text{Fil}^0 B_{cris}$  tel que  $\varphi(\delta + \varepsilon) = \delta + \varepsilon$ , ou encore tel que  $(\varphi - 1)\varepsilon = (\varphi - 1)\delta$ , ce qui se déduit de (c).

**2.8.** — Soit  $D$  un  $(\varphi, N)$ -module filtré. Notons

$$\beta_D : B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \underline{V}_{st}(D) \longrightarrow B_{st} \otimes_{K_0} D$$

l'application canonique (Exp. III, 5.3), où  $\underline{V}_{st}(D) = \text{Hom}_{G_K}(\underline{V}_{st}^*(D), \mathbb{Q}_p)$ .

LEMME. — *Le  $(\varphi, N)$ -module filtré  $D$  est admissible si et seulement si  $\beta_D$  est injective et si  $\dim_{K_0} D = \dim_{\mathbb{Q}_p} \underline{V}_{st}(D) = \dim_{\mathbb{Q}_p} \underline{V}_{st}^*(D)$ .*

**Démonstration.** Le  $(\varphi, N)$ -module filtré  $D$  est admissible si et seulement si  $\beta_D$  est un isomorphisme (Exp. III, 5.3.6), ce qui est encore équivalent à ce que l'application  $\beta'_D$  déduite de  $\beta_D$  par passage au corps des fractions de  $B_{st}$  est un isomorphisme. Cela se démontre comme 3.5.2 dans [F79] (on peut se ramener d'abord au cas de dimension 1 car une puissance extérieure de  $(\varphi, N)$ -module filtré faiblement admissible est faiblement admissible;  $D$  est alors admissible et si  $d$  est un générateur de  $D$ , il existe un élément  $\alpha$  de  $P_0$  et un entier  $i$  tel que  $\alpha^i \otimes d$  soit un générateur de  $\underline{V}_{st}^*(D)$ ; comme  $\alpha^i$  est inversible dans  $B_{st}$ , cela termine la démonstration). On en déduit que le  $(\varphi, N)$ -module filtré  $D$  est admissible si et seulement si  $\beta_D$  est injective et si  $\dim_{\mathbb{Q}_p} B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \underline{V}_{st}(D) = \dim_{K_0} D$ .

**2.9. LEMME.** — *Si  $D$  est un  $(\varphi, N)$ -module filtré ordinaire,  $\beta_D$  est injective.*

**Remarque :** on peut démontrer que l'application  $\beta_D$  est injective pour tout  $(\varphi, N)$ -module filtré faiblement admissible  $D$ .

**Démonstration.** Si  $0 \rightarrow D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow D_3 \rightarrow 0$  est une extension de  $(\varphi, N)$ -modules filtrés faiblement admissibles tels que les applications canoniques  $\beta_{D_i}$  sont injectives pour  $i = 1$  et  $3$ , alors,  $\beta_{D_2}$  est injective. Par récurrence sur la dimension du  $(\varphi, N)$ -module filtré  $D$  ordinaire, on en déduit le lemme.

2.10. LEMME. — Soit  $0 \rightarrow D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow D_3 \rightarrow 0$  une extension de  $(\varphi, N)$ -modules filtrés faiblement admissibles. On suppose que  $D_1$  est admissible et que  $D_3$  n'a qu'un seul nombre de Hodge non nul. Alors,  $D_2$  est admissible.

Remarquons que le lemme est encore vrai si on échange les rôles de  $D_1$  et  $D_3$  en prenant la suite exacte duale.

**Démonstration.** Appliquons le foncteur  $\underline{V}_{st}^*$  à la suite exacte. On obtient la suite exacte de représentations *p*-adiques

$$0 \longrightarrow \underline{V}_{st}^*(D_3) \longrightarrow \underline{V}_{st}^*(D_2) \longrightarrow \underline{V}_{st}^*(D_1) \longrightarrow \text{Ext}_{MF_{st}}^1(D_3, B_{st}).$$

Grâce au lemme 2.7,  $\text{Ext}_{MF_{st}}^1(D_3, B_{st})$  est nul. L'admissibilité de  $D_3$  et de  $D_1$  implique les égalités

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} \underline{V}_{st}^*(D_i) = \dim_{K_0} D_i \quad \text{pour } i = 1 \text{ et } 3$$

et on a donc la même égalité pour  $i = 2$  grâce à l'exactitude de la suite précédente. D'où l'admissibilité de  $D_2$ .

2.11. — Soit maintenant  $D$  un  $(\varphi, N)$ -module filtré ordinaire. Par récurrence sur le cardinal des pentes de Hodge non nulles de  $D$  et en utilisant les lemmes précédents, on démontre facilement que  $\underline{V}_{st}^*(D)$  est une représentation *p*-adique ordinaire semi-stable. On obtient une filtration  $Fil^i V$  de  $V = \underline{V}_{st}^*(D)$  stable par  $G_K$  par

$$Fil^i V = \underline{V}_{st}^* \left( D / \bigoplus_{j < i} D^{[j]} \right)$$

et le quotient  $Fil^i V / Fil^{i-1} V$  est isomorphe à  $\underline{V}_{st}^*(D^{[i]})$ .

### 3. — Extensions galoisiennes de $V_1$ par $V_2(i)$

3.1. — Dans tout ce qui suit,  $V_1$  et  $V_2$  sont deux représentations *p*-adiques non ramifiées de  $G_K$  et  $V$  une représentation *p*-adique de  $G_K$ , extension de  $V_2(j)$  par  $V_1(i)$ .

Soient  $D_1 = \underline{D}_{st}^*(V_1)$  et  $D_2 = \underline{D}_{st}^*(V_2)$  les  $(\varphi, N)$ -modules filtrés admissibles associés. Lorsque  $i < j$ , on a  $\text{Ext}_{MF_{st}}^1(D_1[i], D_2[j]) = 0$  : en effet, tout

$(\varphi, N)$ -module filtré extension de  $D_1[i]$  par  $D_2[j]$  est une extension triviale. Un tel objet  $D$  est scindé en tant que  $K_0[\varphi]$ -module. On a d'une part  $D_1[i]_K^j = 0$ , donc  $D_K^j = D_2[j]_K$  et  $D_K^j \cap D_1[i]_K = \{0\}$ , d'autre part  $D_K^i = D_K$ , donc  $D_K^i \cap D_1[i]_K = D_1[i]_K$ . Enfin,  $N$  est nécessairement nul sur  $D_1[i]$  (à cause de la relation  $N\varphi = p\varphi N$ ). Donc,  $D_1[i]$  muni de la filtration induite est un sous- $(\varphi, N)$ -module filtré de  $D$  et  $D$  est scindé en tant que  $(\varphi, N)$ -module filtré. Il n'y a donc pas de représentation cristalline, extension non triviale de  $V_2(j)$  par  $V_1(i)$ .

Lorsque  $i \geq j + 1$ , toute extension de  $(\varphi, N)$ -modules filtrés  $D$  de  $D_1[i]$  par  $D_2[j]$  est admissible et  $V = \underline{D}_{st}^*(D)$  est une représentation  $p$ -adique ordinaire semi-stable extension de  $V_2(j)$  par  $V_1(i)$  (par exemple, lemme 2.10). On en déduit une application linéaire injective de  $\mathbb{Q}_p$ -espaces vectoriels

$$\Phi_{i,j} : \text{Ext}_{MF_{st}}^1(D_1[i], D_2[j]) \longrightarrow \text{Ext}_{G_K}^1(V_2(j), V_1(i))$$

PROPOSITION. — *Supposons que  $k$  est fini<sup>1</sup>. Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux représentations  $p$ -adiques non ramifiées. Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ , extension de  $V_2(j)$  par  $V_1(i)$ . Si  $i \geq j + 2$ , la représentation  $p$ -adique  $V$  est cristalline. Si  $i = j + 1$ , la représentation  $p$  adique  $V$  est semi-stable.*

La proposition signifie donc que si  $i \geq j + 1$ ,  $\Phi_{i,j}$  est un isomorphisme et que si de plus  $i \geq j + 2$ ,  $\text{Ext}_{MF_{st}}^1(D_1[i], D_2[j])$  et  $\text{Ext}_{MF}^1(D_1[i], D_2[j])$  sont égaux. En tordant la représentation  $V$  par  $\chi^j$ , on se ramène au cas où  $j = 0$ , ce que nous supposons maintenant. On notera alors

$$\Phi_i : \text{Ext}_{MF_{st}}^1(D_1[i], D_2) \longrightarrow \text{Ext}_{G_K}^1(V_2, V_1(i)).$$

La démonstration consiste à calculer les dimensions de ces deux  $\mathbb{Q}_p$ -espaces vectoriels (3.2, 3.3, 3.4). Le cas  $i = j + 1$  se déduit de 3.5.

**3.2.** — On note  $d_1$  (resp.  $d_2$ ) la dimension de la représentation  $V_1$  (resp.  $V_2$ ).

<sup>1</sup> Depuis, il est montré dans [P] que la proposition est encore vraie si  $K$  est l'extension de  $K_0$  obtenue en rajoutant les racines  $p^n$ -ièmes de l'unité sans hypothèse de finitude sur  $K_0$ .

LEMME. — Supposons  $i > 0$ . Les classes d'isomorphismes des extensions de  $\varphi$ -modules filtrés faiblement admissibles de  $D_1[i]$  par  $D_2$  forment un espace vectoriel sur  $K$  de dimension  $d_1 d_2$ .

**Démonstration.** Tout  $K_0[\varphi]$ -module  $D$  extension de  $D_1[i]$  par  $D_2$  est scindé. Il existe donc une base de  $D$  sur  $W$

$$\{e_i(1), e_j(2) \text{ pour } i = 1, \dots, d_1, j = 1, \dots, d_2\}$$

telle que l'action de  $\varphi$  sur cette base soit donnée par

$$\varphi(e_k(1)) = p^i \sum_{j=1}^{d_1} b_{kj}(1) e_j(1)$$

$$\varphi(e_k(2)) = \sum_{j=1}^{d_2} b_{kj}(2) e_j(2)$$

où les matrices  $((b_{ij}(\ell)))$  pour  $\ell = 1$  et  $2$  appartiennent à  $Gl_{d_\ell}(W)$ . Un  $\varphi$ -module filtré faiblement admissible est alors caractérisé par la donnée d'un  $K$ -sous-espace vectoriel  $(D_K)^i$  de  $D_K$  de dimension  $d_1$  dont l'image dans  $(D_1[i])_K$  par la projection est  $(D_1[i])_K$ . Un tel sous-espace est entièrement caractérisé par la donnée d'une base du type

$$e_j(1) + \sum_{k=1}^{d_2} a_{jk} e_k(2)$$

pour  $j = 1, \dots, d_1$ . On en déduit que  $\text{Ext}_{MF}^1(D_1[i], D_2)$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $d_1 d_2$ .

3.3. LEMME. — i) On a un isomorphisme canonique de  $\mathbb{Q}_p$ -espaces vectoriels

$$\text{Ext}_{G_K}^1(V_2, V_1(i)) \simeq H^1(G_K, \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V_2, V_1(i))).$$

ii) Si  $i \neq 0, 1$ ,  $H^1(G_K, \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V_2, V_1(i)))$  est un  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension  $[K : \mathbb{Q}_p] d_1 d_2$ .

**Démonstration.** Choisissons  $L_1$  (resp.  $L_2$ ) un réseau de  $V_1$  (resp.  $V_2$ ) stable par  $G_K$ . On a

$$\text{Ext}_{G_K}^1(L_2/p^n L_2, (L_1/p^n L_1)(i)) = H^1(G_K, \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(L_2/p^n L_2, (L_1/p^n L_1)(i))).$$

En passant à la limite projective sur  $n$ , on en déduit (i).

Posons  $C = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(L_2, L_1(i))$  et  $C_n = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(L_2/p^n L_2, (L_1/p^n L_1)(i))$ . En tant que représentation galoisienne,  $C$  est isomorphe à  $L_3(i)$  où  $L_3$  est une représentation non ramifiée. On commence par calculer la caractéristique d'Euler–Poincaré de  $C_n$  [Mi86]

$$\sum_{j=0}^2 (-1)^j \text{ord}_p(H^j(G_K, C_n)) = -[K : \mathbb{Q}_p] d_1 d_2 n.$$

On calcule d'autre part  $H^j(G_K, C_n)$  pour  $j = 0$  et  $2$  : lorsque  $i \neq 0$ ,  $H^0(G_K, C_n)$  est d'ordre borné par rapport à  $n$  ; si  $K_n = K(\mu_{p^n})$  où  $\mu_{p^n}$  est le groupe des racines  $p^n$ -ièmes de l'unité, la flèche de restriction

$$H^2(G_K, C_n) \longrightarrow H^2(G_{K_n}, C_n)^{\text{Gal}(K_n/K)}$$

est à noyau et conoyau bornés par rapport à  $n$ . On a ensuite

$$\begin{aligned} H^2(G_{K_n}, C_n)^{\text{Gal}(K_n/K)} &= H^2(G_{K_n}, C_n(1-i))(i-1)^{\text{Gal}(K_n/K)} = \\ &L_{3,n}(i-1)^{\text{Gal}(K_n/K)} \end{aligned}$$

(théorie du groupe de Brauer, on peut aussi utiliser les théorèmes de dualité locale). Pour  $i \neq 1$ ,  $H^2(G_K, C_n)$  est donc d'ordre borné par rapport à  $n$ . On en déduit que pour  $i \neq 0$  et  $i \neq 1$  et pour  $n$  assez grand,

$$\#(H^1(G_K, C_n)) = p^{[K:\mathbb{Q}_p]d_1 d_2 n + c}$$

où  $c$  est une constante et que  $H^2(G_K, C)$  est nul. On a la suite exacte de  $\mathbb{Z}_p$ -modules

$$0 \longrightarrow H^1(G_K, C)/p^n H^1(G_K, C) \longrightarrow H^1(G_K, C_n) \longrightarrow H^2(G_K, C) = 0.$$

Comme  $H^1(G_K, C)$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -module de type fini, on en déduit que  $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^1(G_K, C)$  est un  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension  $[K : \mathbb{Q}_p]d_1d_2$ .

**3.4.** — Lorsque  $K$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  et  $i \geq 1$ , les deux  $\mathbb{Q}_p$ -espaces vectoriels  $\text{Ext}_{MF}^1(D_1[i], D_2)$  et  $\text{Ext}_{D_K}^1(V_2, V_1(i))$  sont de dimension  $d_1d_2[K : \mathbb{Q}_p]$ . L'homomorphisme injectif de  $\mathbb{Q}_p$ -espaces vectoriels  $\Phi_i$  de  $\text{Ext}_{MF}^1(D_1[i], D_2)$  dans  $\text{Ext}_{G_K}^1(V_2, V_1(i))$  est donc un isomorphisme.

Nous allons maintenant décrire explicitement l'application

$$\Phi_i : \text{Ext}_{MF}^1(K_0[i], K_0) \longrightarrow \text{Ext}_{G_K}^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(i))$$

sans hypothèse de finitude sur  $k$ .

Soit  $D_\lambda$  le  $\varphi$ -module filtré muni d'une base  $\{e_0, e_i\}$  telle que

$$\varphi e_0 = e_0, \quad \varphi e_i = p^i e_i$$

et telle que la droite  $(D_\lambda)_K^i$  soit engendrée par  $e_i - \lambda e_0$  avec  $\lambda \in K$ . Calculons  $\underline{V}_{cris}^*(D_\lambda)$ . Il s'agit donc de trouver tous les  $K_0$ -homomorphismes  $f$  de  $D_\lambda$  dans  $B_{cris}$  tels que

$$\varphi(f(e_0)) = f(e_0), \quad \varphi(f(e_i)) = p^i f(e_i)$$

$$f(e_i - \lambda e_0) \in \text{Fil}^i B_{dR}, \quad f(e_0) \in \text{Fil}^0 B_{dR}.$$

Une première solution est donnée par

$$f_1(e_0) = 0, \quad f_1(e_i) = t^i.$$

Une deuxième solution est donnée par

$$f_2(e_0) = 1, \quad f_2(e_i) = \Lambda + \lambda$$

où  $\Lambda$  vérifie

$$\Lambda \in \text{Fil}^i B_{dR}, \quad \Lambda + \lambda \in B_{cris} \text{ et } \varphi(\Lambda + \lambda) = p^i(\Lambda + \lambda),$$



(l'existence d'un tel  $\Lambda$  se déduit de 2.7, c). Le  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel engendré par  $f_1$  et  $f_2$  est muni d'une action de  $G_K$  donnée par

$$\begin{aligned} g(f_1) &= \chi^i(g)f_1 \\ g(f_2) &= f_2 + t^{-i}(g\Lambda - \Lambda)f_1 \end{aligned}$$

(il est facile de vérifier que  $t^{-i}(g\Lambda - \Lambda)$  appartient à  $\mathbb{Q}_p$  : on a en effet

$$\begin{aligned} g\Lambda - \Lambda &= g(\Lambda + \lambda) - (\Lambda + \lambda) \in \text{Fil}^i B_{\text{cris}} \\ \varphi(g\Lambda - \Lambda) &= p^i(g\Lambda - \Lambda), \end{aligned}$$

ce qui implique que  $g\Lambda - \Lambda$  appartient à  $\mathbb{Q}_p t^i$ ). La représentation  $p$ -adique obtenue est une extension de  $\mathbb{Q}_p$  par  $\mathbb{Q}_p(i)$  dont l'image par  $\Phi_i$  dans  $H^1(G_K, \mathbb{Q}_p(i))$  est la classe du cocycle  $g \mapsto t^{-i}(g\Lambda - \Lambda)$ .

**Remarque** : la connaissance de  $\Lambda$  implique celle de  $\lambda$ ; par exemple, si  $\lambda$  est dans  $K_0$ , on a  $\varphi^n \Lambda = p^{in}(\Lambda + \lambda) - \sigma^n \lambda$ , donc si  $\sigma^a$  laisse fixe  $K_0$ , on a

$$\lambda = -\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{an} \Lambda.$$

**3.5.** — Le cas  $i = 1$  se traite sans hypothèse sur  $k$ , ce qui permet de supposer que  $V_1 = V_2 = \mathbb{Q}_p$ . Nous allons comme en 3.4 construire explicitement l'application

$$\Phi_1 : \text{Ext}_{MF_{st}}^1(K_0[1], K_0) \longrightarrow \text{Ext}_{G_K}^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(1)).$$

Par la théorie de Kummer,  $H^1(G_K, \mathbb{Z}_p(1))$  est canoniquement isomorphe à  $\varprojlim K^\times / K^{\times p^n}$ . On en déduit que l'on a un isomorphisme

$$\begin{aligned} R_K : H^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1)) &\longrightarrow K \times \mathbb{Q}_p \\ x &\longmapsto (\log_p x, v(x)). \end{aligned}$$

(rappelons que l'on a choisi une valuation  $v$  de  $K$  à valeurs dans  $\mathbb{Q}$  et un prolongement  $\log_p$  du logarithme  $p$ -adique à  $K$ ). Cet isomorphisme dépend du choix du logarithme et de la valuation choisis.

Décrivons maintenant un  $(\varphi, N)$ -module filtré  $D$  extension de  $K_0[1]$  par  $K_0$ . On fixe une base  $e_0, e_1$  de  $D$  vérifiant

$$\varphi e_0 = e_0, \quad \varphi e_1 = p e_1.$$

La relation  $N\varphi = p\varphi N$  implique que  $Ne_1 = \alpha e_0, Ne_0 = 0$  avec  $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ . La filtration est déterminée par une droite  $K(e_1 - \lambda e_0)$  avec  $\lambda \in K$ . On en déduit facilement que l'on a un isomorphisme

$$L_K : \text{Ext}_{MF_{st}}^1(K_0[1], K_0) \simeq K \times \mathbb{Q}_p$$

$$D \longmapsto (\lambda, \alpha).$$

On note  $D_{(\lambda, \alpha)}$  l'image réciproque de  $(\lambda, \alpha)$ .

PROPOSITION. — *L'application*

$$\Phi_1 : \text{Ext}_{MF_{st}}^1(K_0[1], K_0) \longrightarrow H^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1))$$

*est un isomorphisme et on a le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{MF_{st}}^1(K_0[1], K_0) & \longrightarrow & H^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1)) \\ L_K \downarrow \simeq & & R_K \downarrow \simeq \\ K \times \mathbb{Q}_p & = & K \times \mathbb{Q}_p. \end{array}$$

*En particulier, l'image de  $\text{Ext}_{MF_{st}}^1(K_0[1], K_0)$  est égal à  $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} U_K$  si  $U_K$  est le groupe des unités de  $K$  congrues à 1 modulo l'idéal maximal.*

**Démonstration.** Nous allons ici construire explicitement l'application réciproque de  $\Phi_1$ . Soit  $x$  un élément de  $K^\times$  et soit  $x^{(n)}$  une suite d'éléments de  $O_{\overline{K}}$  vérifiant  $x^{(n)p} = x^{(n-1)}, x^{(0)} = x$ . Alors  $(x^{(n)})_n$  est un élément de  $R$  (Exp. II, 1.2.2 et 1.3.1) et donc par l'application de Teichmüller définit un élément  $[(x^{(n)})_n]$  de  $W(R)$ . Si  $x$  est une unité de  $K$ , le logarithme de  $[(x^{(n)})]$  existe dans  $A_{cris} = W^{DP}(R)$ ; en particulier, si  $x = 1$  et  $x^{(n)} = \zeta_n$ ,

on a  $t = \log([\zeta_n])$ ; dans le cas général, on définit le logarithme de  $[(x^{(n)})]$  dans  $K \otimes_{K_0} B_{st}$  plongé dans  $B_{dR}$  par  $\lambda_{dR}([(x^{(n)})]) = \log([(x^{(n)})]/x) + \log(x)$  (Exp. III, 4.2.2). Notons abusivement  $\text{LOG}(x) = \lambda_{dR}([(x^{(n)})])$  qui n'est bien défini qu'à un élément de  $\mathbb{Z}_p t$  près. Les propriétés suivantes (dans  $K \otimes_{K_0} B_{st}$ ) sont faciles à vérifier :

$$\varphi(\text{LOG}(x)) = p\text{LOG}(x), \quad N(\text{LOG}(x)) = v(x) \quad (\text{Exp. II, 3.2.2})$$

$$\text{LOG}(x) - \log(x) \in \text{Fil}^1 B_{dR}.$$

De plus, comme  $gx = x$  pour  $g \in G_K$ , on a

$$g(\text{LOG}(x)) - \text{LOG}(x) = \log(g[(x^{(n)})]/[(x^{(n)})]) = \log[g(x^{(n)})/x^{(n)}] = a_g \in \mathbb{Z}_p(1)$$

où  $a_g$  est un cocycle à valeurs dans  $\mathbb{Z}_p(1)$  dont la classe dans  $H^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1))$  est  $x$ . Montrons que  $\underline{V}^*(D_{(\log(x), \text{ord}_p(x))})$  est isomorphe à  $V$  en tant qu'extension de  $\mathbb{Q}_p$  par  $\mathbb{Q}_p(1)$ . Un élément  $f$  de  $\underline{V}^*(D_{(\log(x), \text{ord}_p(x))})$  est un  $K_0$ -homomorphisme de  $D_{(\log(x), \text{ord}_p(x))}$  dans  $B_{st}$  vérifiant

$$\varphi(f(e_0)) = f(e_0), \quad \varphi(f(e_1)) = pf(e_1),$$

$$N(f(e_0)) = 0, \quad N(f(e_1)) = v(x)f(e_0), \quad f(e_1) - \log(x)f(e_0) \in \text{Fil}^1 B_{dR}.$$

Une première solution est  $f_1(e_1) = t$ ,  $f_1(e_0) = 0$ ; une deuxième solution indépendante est donnée par

$$f_2(e_0) = 1, \quad f_2(e_1) = \text{LOG}(x).$$

Le  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel  $W$  engendré par  $f_1$  et  $f_2$  est muni d'une action de Galois et est naturellement une extension de  $\mathbb{Q}_p$  par  $\mathbb{Q}_p(1)$ . Le cocycle associé dans  $H^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1))$  est alors  $g \mapsto g(\text{LOG}(x)) - \text{LOG}(x) = a_g$ . Les classes de  $W$  et de  $V$  dans  $H^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1))$  sont donc égales.

Nous avons pris  $x \in K$ ; le cas général s'en déduit facilement par continuité et tensorisation par  $\mathbb{Q}_p$ . Ce qui termine la démonstration des propositions 3.1 et 3.5.

4. — Fin de la démonstration

4.1. — On utilise maintenant la proposition 3.1 pour montrer que toute représentation  $p$ -adique ordinaire est semi-stable. On raisonne par récurrence sur le nombre  $r(V)$  des quotients  $Fil^i V / Fil^{i+1} V$  qui sont non triviaux. Supposons qu'il y en a au moins 3. On a donc une suite exacte de  $G_K$ -modules

$$0 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V \longrightarrow V_5 \longrightarrow 0$$

où  $V_5(-j)$  est une représentation  $p$ -adique non ramifiée pour un entier  $j$  tel que les pentes de Hodge de  $V_2$  soient strictement supérieures à  $j$  : on a donc  $r(V_2) = r(V) - 1$ . Comme  $r(V_2)$  est encore supérieur ou égal à 2, on peut de nouveau écrire une suite exacte de  $G_K$ -modules

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3 \longrightarrow 0$$

où  $V_3(-i)$  est une représentation  $p$ -adique non ramifiée pour un entier  $i$  tel que les pentes de Hodge de  $V_1$  soient strictement supérieures à  $i$ . Avec  $V_4 = V/V_1$ , on a donc un diagramme commutatif et exact de  $G_K$ -modules

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & V_1 & = & V_1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 (*) & 0 & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V_5 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\
 & 0 & \longrightarrow & V_3 & \longrightarrow & V_4 & \longrightarrow & V_5 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & & 0 & & 0 & & & & 
 \end{array}$$

De plus, les  $V_i$  sont des représentations ordinaires telles que  $r(V_i) < r(V)$ ; par hypothèse de récurrence, elles sont donc semi-stables.

Nous allons maintenant montrer qu'il existe une représentation  $p$ -adique  $V'$  semi-stable rendant le diagramme (\*) commutatif et exact (avec  $V'$  à la place de  $V$ ). Pour cela, on passe aux  $(\varphi, N)$ -modules filtrés en appliquant le foncteur  $\underline{D}_{st}$  (avec  $\underline{D}_{st}(V) = \text{Hom}_{MF_{st}}(\underline{D}_{st}^*(V), K_0)$ ) aux suites exactes de représentations semi-stables

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & V_3 & \longrightarrow & 0 \\ 0 & \longrightarrow & V_3 & \longrightarrow & V_4 & \longrightarrow & V_5 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

A cause de la semi-stabilité, les suites restent exactes. En posant  $D_i = \underline{D}_{st}(V_i)$ , on a donc les suites exactes de  $(\varphi, N)$ -modules filtrés admissibles

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & D_1 & \longrightarrow & D_2 & \longrightarrow & D_3 & \longrightarrow & 0 \\ 0 & \longrightarrow & D_3 & \longrightarrow & D_4 & \longrightarrow & D_5 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

4.2. LEMME. — *Il existe un  $(\varphi, N)$ -module filtré admissible rendant commutatif et exact le diagramme suivant*

$$(**) \quad \begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & D_1 & = & D_1 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & D_2 & \longrightarrow & D & \longrightarrow & D_5 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & D_3 & \longrightarrow & D_4 & \longrightarrow & D_5 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

**Démonstration.** Remarquons qu'il suffit de construire un  $(\varphi, N)$ -module filtré  $D$  rendant commutatif et exact le diagramme précédent. En effet,  $D$  sera alors faiblement admissible car  $D_2$  et  $D_5$  le sont (lemme 2.4) et même admissible car  $D_2$  et  $D_5$  le sont et  $D_5$  a une seule pente de Hodge non nulle (lemme 2.10).

Les pentes de Hodge de  $D_5$  étant différentes de celles de  $D_3$ , on peut scinder la suite exacte de  $K_0[\varphi]$ -modules

$$0 \longrightarrow D_3 \longrightarrow D_4 \longrightarrow D_5 \longrightarrow 0.$$

On considère donc un tel scindage  $D_4 = D_3 \oplus D_5$  avec  $\varphi D_3 \subset D_3$  et  $\varphi D_5 \subset D_5$ . La filtration de  $D_{4K}$  est alors déterminée à partir de celles de  $D_{3K}$  et de  $D_{5K}$  par un homomorphisme de  $K$ -espaces vectoriels  $f$  de  $D_{5K}$  dans  $D_{3K}$  :

$$(D_{4K})^i = (D_{3K})^i \oplus \{(f(d), d) \text{ pour } d \in (D_{5K})^i\}.$$

Soit  $u$  un homomorphisme de  $D_3$  dans  $D_2$  qui est un scindage de la suite exacte

$$0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow D_2 \longrightarrow D_3 \longrightarrow 0.$$

Posons  $\bar{f} = f \circ u$ . Alors le  $K_0$ -espace vectoriel  $D = D_2 \oplus D_5$  est muni d'un endomorphisme  $\sigma$ -linéaire induisant ceux de  $D_2$  et de  $D_5$  et si l'on munit  $D_K$  de la filtration

$$(D_K)^i = (D_{2K})^i \oplus \{(\bar{f}(d), d) \text{ pour } d \in (D_{5K})^i\},$$

le diagramme (\*\*\*) est commutatif et formé de suites exactes de  $\varphi$ -modules filtrés. Il reste à construire  $N$ . La restriction de  $N$  à  $D_5$  s'écrit  $N_3 \oplus N_5$  où  $N_i$  est un endomorphisme de  $D_5$  dans  $D_i$ . On a alors pour  $x \in D_5$

$$\begin{aligned} p\varphi N(x) &= p\varphi N_3(x) + p\varphi N_5(x) \\ &= N\varphi(x) = N_3(\varphi x) + N_5(\varphi x) \end{aligned}$$

car  $\varphi D_5 \subset D_5$ . Comme  $\varphi$  préserve aussi  $D_3$ , on en déduit que pour  $x \in D_5$

$$p\varphi N_3(x) = N_3(\varphi x)$$

$$p\varphi N_5(x) = N_5(\varphi x).$$

On considère alors l'endomorphisme de  $D$  défini sur  $D_2$  par l'opérateur  $N$  de  $D_2$  et sur  $D_5$  par  $u \circ N_3 \oplus N_5$ . Vérifions que  $p\varphi N = N\varphi$ . Cela est vrai sur  $D_2$ . Sur  $D_5$ , on a

$$\begin{aligned} p\varphi(u \circ N_3 \oplus N_5)(x) &= p\varphi u N_3(x) + p\varphi N_5(x) = pu\varphi N_3(x) + p\varphi N_5(x) \\ &= uN_3\varphi(x) + N_5\varphi(x) = pN\varphi(x) \end{aligned}$$

car  $u$  commute avec  $\varphi$ .

#### 4.3. — De la suite exacte

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3 \longrightarrow 0,$$

on déduit la suite exacte

$$\text{Ext}_{G_K}^1(V_5, V_1) \longrightarrow \text{Ext}_{G_K}^1(V_5, V_2) \longrightarrow \text{Ext}_{G_K}^1(V_5, V_3).$$

Soit  $c(V)$  (resp.  $c(V')$ ) la classe de l'extension  $V$  (resp.  $V'$ ) de  $V_5$  par  $V_2$  dans  $\text{Ext}_{G_K}^1(V_5, V_2)$ . Par hypothèse,  $c(V)$  et  $c(V')$  ont la même image dans  $\text{Ext}_{G_K}^1(V_5, V_3)$ . On en déduit que  $c(V) - c(V')$  est l'image d'une extension  $V_6$  de  $V_5$  par  $V_1$ . Par définition de la somme de deux extensions, on a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V' \oplus V_5 \longrightarrow V \longrightarrow 0.$$

Posons  $W = V' \oplus V_5$ . Pour montrer que  $V$  est semi-stable, il suffit de montrer que

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} V = \dim_{K_0} \underline{D}_{st}^*(V)$$

(on a toujours l'inégalité  $\dim_{\mathbb{Q}_p} V \geq \dim_{K_0} \underline{D}_{st}^*(V)$ ). En appliquant le foncteur  $\underline{D}_{st}^*$ , on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{D}_{st}^*(V) \longrightarrow \underline{D}_{st}^*(W) \longrightarrow \underline{D}_{st}^*(V_1)$$

d'où l'inégalité

$$\begin{aligned} \dim_{K_0} \underline{D}_{st}^*(V) &\geq \dim_{K_0} \underline{D}_{st}^*(W) - \dim_{K_0} \underline{D}_{st}^*(V_1) \\ &= \dim_{\mathbb{Q}_p} W - \dim_{\mathbb{Q}_p} V_1 = \dim_{\mathbb{Q}_p} V. \end{aligned}$$

Donc,  $V$  est aussi semi-stable, ce qui termine la démonstration du théorème.

Depuis l'exposé et la rédaction de ce texte, d'autres articles ont été écrits sur le sujet : citons principalement [Ne93].

BIBLIOGRAPHIE

- [F79] J.-M. FONTAINE. — *Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate* dans Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (III), Astérisque 65 (1979), 3–80.
- [Exp.II] J.-M. FONTAINE. — *Le corps des périodes  $p$ -adiques*, ce volume.
- [Exp.III] J.-M. FONTAINE. — *Représentations  $p$ -adiques semi-stables*, ce volume.
- [G89] R. GREENBERG. — *Iwasawa theory for  $p$ -adic representations*, vol. dédié à K. Iwasawa, Adv. Stud. Pure Math. 17 (1989).
- [M86] J.-S. MILNE. — *Arithmetic duality theorems*, Perspectives in Mathematics, vol. 1, Academic Press (1986).
- [Ne93] J. NEKOVAR. — *On  $p$ -adic height pairings*, dans Séminaire de Théorie des Nombres de Paris 1990/91, édit. S. David, Birkhäuser Boston 1993, 127–202.
- [S68] J.-P. SERRE. — *Abelian  $\ell$ -adic representations and elliptic curves*, W.A. Benjamin, Inc. New York 1968.
- [P] B. PERRIN-RIOU. — *Théorie d'Iwasawa des représentations  $p$ -adiques sur un corps local*, Invent. Math. 115 (1994), 81–149.

Bernadette Perrin-Riou  
 UFR 21, Mathématiques  
 Université de Paris VI  
 4, place Jussieu  
 75005 PARIS  
 FRANCE