

# *Astérisque*

JEAN-MARC FONTAINE

## **Exposé II : Le corps des périodes $p$ -adiques**

*Astérisque*, tome 223 (1994), Séminaire Bourbaki, exp. n° 2, p. 59-101

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1994\\_\\_223\\_\\_59\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__223__59_0)

© Société mathématique de France, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Exposé II

### LE CORPS DES PÉRIODES $p$ -ADIQUES

par Jean–Marc Fontaine (avec un appendice par Pierre Colmez)

#### 0. — Introduction

##### 0.1. — Notations

Dans cet exposé,  $K$  est un corps, complet pour une valuation discrète, à corps résiduel parfait  $k$  de caractéristique  $p > 0$ . On note  $W$  l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $k$ ,  $K_0$  son corps des fractions,  $\sigma$  le Frobenius absolu opérant sur  $k$ ,  $W$  et  $K_0$ . Si  $K$  est de caractéristique 0, on pose  $e = [K : K_0]$ .

On note  $\bar{K}$  une clôture séparable fixée de  $K$  et  $\bar{k}$  son corps résiduel. On pose  $G = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ . On désigne par  $C$  le complété de  $\bar{K}$ . On note  $\mathcal{O}_C$  (resp.  $\mathcal{O}_K$ ,  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ ) l'anneau des entiers de  $C$  (resp.  $K$ ,  $\bar{K}$ ).

##### 0.2. — Le plan de ce texte est le suivant :

– Au § 1, on rappelle la définition de l'anneau  $B_{dR}^+$  et de son corps des fractions  $B_{dR}$  (le “corps des périodes  $p$ -adiques”) introduits dans [Fo82a], § 2. L'exposition diffère de *op. cit.* en ce sens que l'on donne une caractérisation de  $B_{dR}^+$  par une propriété universelle : cela nous amène à introduire (n° 1.1) la notion d'épaississement pro-infinitésimal  $p$ -adique universel d'une algèbre séparée et complète pour la topologie  $p$ -adique et à montrer (n° 1.2 et 1.3) son existence dès que le Frobenius est surjectif sur la réduction mod  $p$ .

On donne aussi (n° 1.4) une description de l'anneau quotient  $B_{dR}^+ / \text{Fil}^2 B_{dR}^+$  à l'aide des  $\mathcal{O}_K$ -différentielles de Kähler de  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ . Celle-ci joue un rôle essentiel dans l'appendice. Elle est aussi utile pour donner une construction élémentaire

des périodes  $p$ -adiques des variétés abéliennes (Fontaine–Messing, travail non publié, voir aussi l’exposé de Wintenberger, [Exp. IX], dans ce volume).

Au n° 1.5, on explique comment les anneaux filtrés  $B_{dR}^+$  et  $B_{dR}$  se construisent à partir de l’épaississement pro-infinitésimal universel  $p$ -adique de  $\mathcal{O}_C$ . On rappelle aussi la définition de l’anneau  $B_{HT}$  des “périodes de Hodge–Tate”, qui est le gradué associé à l’anneau filtré  $B_{dR}$ .

– Au § 2, on rappelle la définition des anneaux  $A_{cris}$  (souvent noté  $W^{DP}(R)$ ),  $B_{cris}^+$  et  $B_{cris}$  introduits dans [Fo83] et [FM87] : on définit ici  $B_{cris}^+$  comme solution d’un problème universel : c’est l’anneau obtenu en rendant  $p$  inversible dans le complété  $p$ -adique de l’épaississement à puissances divisées universel de la  $W$ -algèbre  $\mathcal{O}_C$ .

– Au § 3, on définit les anneaux  $B_{st}^+$  et  $B_{st}$  à partir de  $B_{cris}^+$  et  $B_{cris}$  comme étant les anneaux obtenus en “agrandissant de façon universelle le domaine de définition du logarithme”.

– Au § 4, on explique comment  $B_{cris}$  se plonge dans  $B_{dR}$  et comment le choix d’un prolongement du logarithme  $p$ -adique usuel définit un plongement de  $B_{st}$  dans  $B_{dR}$ .

– Dans le § 5, on donne quelques compléments sur la structure de  $A_{cris}$  et  $B_{cris}$ . On en déduit, en particulier, l’exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow B_{cris} \cap B_{dR}^+ \longrightarrow B_{cris} \longrightarrow 0 ,$$

qui joue un rôle important dans les travaux de Bloch et Kato ([BK90]).

Enfin, dans l’appendice, Pierre Colmez montre que  $\overline{K}$  est dense dans  $B_{dR}^+$  (cf. [Co90]). Si l’on définit inductivement  $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(r)}$  pour  $r \in \mathbb{N}$  par  $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(0)} = \mathcal{O}_{\overline{K}}$  et

$$\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(r)} = \text{Ker}(\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(r-1)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes \Omega_{\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(r-1)}/\mathcal{O}_{\overline{K}}}^1), \quad r \geq 1 ,$$

le théorème de Colmez permet d’identifier  $B_{dR}^+$  au séparé complété de  $\overline{K}$  pour la topologie obtenue en prenant comme système fondamental de voisinages de  $a \in \overline{K}$  les ensembles de la forme  $a + p^m \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(r)}$ , pour  $m, r \in \mathbb{N}$ .

1. — Épaississements pro-infinitésimaux universels

1.1. — Généralités

Soient  $\Lambda$  un anneau et  $V$  une  $\Lambda$ -algèbre.

1.1.1. — Un  $\Lambda$ -épaississement pro-infinitésimal de  $V$  est un couple  $(D, \theta)$  formé d'une  $\Lambda$ -algèbre  $D$  et d'un homomorphisme surjectif de  $\Lambda$ -algèbres

$$\theta_D = \theta : D \longrightarrow V$$

tel que, si  $I_D = I$  désigne le noyau de  $\theta$ , alors  $D$  est séparé et complet pour la topologie  $I$ -adique.

Les  $\Lambda$ -épaississements pro-infinitésimaux de  $V$  forment une catégorie : un morphisme

$$\alpha : D_1 \longrightarrow D_2$$

est un homomorphisme des  $\Lambda$ -algèbres sous-jacentes qui vérifie

$$\theta_{D_1} = \theta_{D_2} \circ \alpha .$$

Si cette catégorie admet un objet initial, celui-ci est unique à isomorphisme unique près et s'appelle le  $\Lambda$ -épaississement pro-infinitésimal universel de  $V$ .

1.1.2. — Si  $D$  est un  $\Lambda$ -épaississement pro-infinitésimal de  $V$  et si  $I_D$  est nilpotent, on dit que  $D$  est un  $\Lambda$ -épaississement infinitésimal de  $V$ ; si  $m$  est un entier tel que  $I_D^{m+1} = 0$ , on dit que l'épaississement est d'ordre  $\leq m$ .

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , les  $\Lambda$ -épaississements infinitésimaux d'ordre  $\leq m$  de  $V$  forment une sous-catégorie pleine de celle des  $\Lambda$ -épaississements pro-infinitésimaux. Si elle admet un objet initial, on l'appelle le  $\Lambda$ -épaississement infinitésimal universel d'ordre  $\leq m$  de  $V$ .

Bien sûr, si le  $\Lambda$ -épaississement pro-infinitésimal universel  $D$  de  $V$  existe, alors  $D/I_D^{m+1}$  est un  $\Lambda$ -épaississement infinitésimal universel d'ordre  $\leq m$  de  $V$ .

1.1.3. — Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal de  $\Lambda$  et supposons  $V$  séparé et complet pour la topologie  $\mathfrak{p}$ -adique. On définit de manière évidente la notion de

$\Lambda$ -épaississement pro-infinitésimal (resp. infinétesimal d'ordre  $\leq m$ ) formel  $\mathfrak{p}$ -adique de  $V$  et les objets universels éventuels correspondants. Ces notions ne dépendent que de la topologie définie par les puissances de  $\mathfrak{p}$ , et non de l'idéal  $\mathfrak{p}$  lui-même.

Bien sûr, si  $D$  est un  $\Lambda$ -épaississement pro-infinitésimal (resp. infinétesimal d'ordre  $\leq m$ ) formel  $\mathfrak{p}$ -adique universel de  $V$  et si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D/\mathfrak{p}^n D$  est un  $(\Lambda/\mathfrak{p}^n)$ -épaississement pro-infinitésimal (resp. infinétesimal d'ordre  $\leq m$ ) universel de  $V/\mathfrak{p}^n V$ .

## 1.2. — Existence d'épaississements pro-infinitésimaux formels $p$ -adiques universels

1.2.1. THÉORÈME. — Soient  $\Lambda$  un anneau et  $V$  une  $\Lambda$ -algèbre séparée et complète pour la topologie  $p$ -adique. On suppose que, pour tout  $a \in V$ , il existe  $x, y \in V$  tels que  $a = x^p + py$ . Alors l'anneau  $V$  admet un  $\Lambda$ -épaississement pro-infinitésimal formel  $p$ -adique universel.

*Démonstration* : Nous allons construire (n° 1.2.2) un  $\Lambda$ -épaississement pro-infinitésimal formel  $p$ -adique  $A_{\text{inf}}(V/\Lambda)$  de  $V$  et montrer (n° 1.2.3) que cet anneau convient.

1.2.2. — Soient  $\bar{V} = \widehat{V/pV}$  et  $R_V$  la limite projective du diagramme

$$\bar{V} \longleftarrow \bar{V} \longleftarrow \bar{V} \longleftarrow \dots \longleftarrow \bar{V} \longleftarrow \dots,$$

les applications de transition étant l'élevation à la puissance  $p$ .

Un élément  $x \in R_V$  peut donc être considéré comme une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\bar{V}$  vérifiant  $x_{n+1}^p = x_n$ , pour tout  $n$ . Si, pour un tel  $x$ , on choisit, pour tout  $n$ , un relèvement  $\hat{x}_n$  de  $x_n$  dans  $V$ , alors, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , la suite des  $\hat{x}_{n+m}^{p^n}$  converge pour  $n \mapsto +\infty$  vers un élément  $x^{(m)} \in V$  qui ne dépend pas du choix des relèvements. L'application

$$x \longmapsto (x^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$$

définit une bijection de  $R_V$  sur l'ensemble des familles  $(x^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $V$  vérifiant  $(x^{(m+1)})^p = x^{(m)}$  pour tout  $m$ ; et nous l'utilisons pour identifier

$R_V$  à l'ensemble de telles familles. Si  $x = (x^{(m)})_{m \in \mathbf{N}}, y = (y^{(m)})_{m \in \mathbf{N}} \in R_V$ , on a  $xy = (x^{(m)}y^{(m)})_{m \in \mathbf{N}}$  et  $x+y = (z^{(m)})_{m \in \mathbf{N}}$  avec  $z^{(m)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x^{(m+n)} + y^{(m+n)})p^n$ .

Soit  $W(R_V)$  l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $R_V$ . Pour tout  $x \in R_V$ , on note

$$[x] = (x, 0, 0, \dots, 0, \dots) \in W(R_V)$$

son représentant de Teichmüller dans  $W(R_V)$ .

On voit que  $R_V$  est un anneau parfait (i.e. le Frobenius  $x \mapsto x^p$  est un automorphisme) et que  $W(R_V)$  est séparé et complet pour la topologie  $p$ -adique.

On note

$$\theta : W(R_V) \longrightarrow V$$

l'application qui envoie  $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$  sur  $\Sigma p^n x_n^{(n)}$ .

On vérifie que  $\theta$  est un homomorphisme surjectif d'anneaux. On note encore

$$\theta : \Lambda \otimes_{\mathbf{Z}} W(R_V) \longrightarrow V$$

l'homomorphisme de  $\Lambda$ -algèbres déduit par extension des scalaires.

Notons  $A_{\text{inf}}(V/\Lambda)$  le séparé complété de  $\Lambda \otimes_{\mathbf{Z}} W(R_V)$  pour la topologie définie par l'idéal engendré par  $p$  et le noyau de  $\theta$  (et encore  $\theta : A_{\text{inf}}(V/\Lambda) \longrightarrow V$  l'application induite).

Comme  $A_{\text{inf}}(V/\Lambda)$  et les  $A_{\text{inf}}(V/\Lambda)/(\text{Ker } \theta)^{m+1}$  sont séparés et complets pour la topologie  $p$ -adique,  $A_{\text{inf}}(V/\Lambda)$  a une structure de  $\Lambda$ -épaississement pro-infinitésimal formel  $p$ -adique de  $V$ .

**1.2.3. — Il reste à vérifier que  $A_{\text{inf}}(V/\Lambda)$  est universel.** Pour cela, considérons un  $\Lambda$ -épaississement pro-infinitésimal formel  $p$ -adique  $(D, \theta_D)$  de  $V$ . Prouver l'existence et l'unicité d'un morphisme de  $\Lambda$ -épaississements pro-infinitésimaux formels  $p$ -adiques de  $A_{\text{inf}}(V/\Lambda)$  dans  $D$  revient à vérifier l'existence et l'unicité d'un homomorphisme continu d'anneaux  $p$ -adiques

$$\alpha : W(R_V) \longrightarrow D$$

tel que  $\theta_D \circ \alpha = \theta$ .

Si  $I_D$  désigne le noyau de  $\theta_D$  et si  $I'_D = I_D + pD$ , l'anneau  $D$  est séparé et complet pour la topologie  $I'_D$ -adique.

Soit  $x \in R_V$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , choisissons un relèvement  $\xi_m$  dans  $D$  de  $x^{(m)} \in V$ . Comme  $\xi_{m+1}^p \equiv \xi_m \pmod{I_D}$ , donc a fortiori  $\pmod{I'_D}$ , la suite des  $\xi_m^{p^m}$  tend vers une limite  $\rho(x)$  dans  $D$  indépendante du choix des relèvements. On voit que l'on doit avoir

$$\alpha([x]) = \rho(x), \quad \text{pour tout } x \in R_V.$$

L'unicité de  $\alpha$  est alors claire, car il faut

$$\alpha((x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)) = \sum p^n \rho(x_n^{p^{-n}})$$

et l'existence résulte de ce que l'application  $\alpha$  ainsi définie est bien un homomorphisme continu qui commute aux applications  $\theta$ .

**1.2.4. — Remarques :** Soient  $V$  comme dans le théorème et  $\bar{V} = V/pV$ .

a) L'application évidente de  $R_V$  dans  $R_{\bar{V}}$  est un isomorphisme.

b) On voit que le  $\Lambda$ -épaississement pro-infinitésimal formel  $p$ -adique de  $V$  ne dépend que de  $\bar{V}$  i.e. l'homomorphisme naturel de  $A_{\text{inf}}(V/\Lambda)$  dans  $A_{\text{inf}}(\bar{V}/\Lambda)$  est un isomorphisme. La filtration naturelle de  $A_{\text{inf}}(V/\Lambda)$  (par les puissances de l'idéal noyau de  $\theta$ ) en revanche dépend en général du choix du relèvement  $V$  de  $\bar{V}$ .

c) Supposons que  $\Lambda$  soit une  $W$ -algèbre (où, rappelons-le,  $W = W(k)$ ). L'application de  $k$  dans  $R_V$ , qui à  $\varepsilon$  associe  $(\varepsilon^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ , où  $\varepsilon^{(m)}$  désigne l'image dans  $V$  du représentant de Teichmüller dans  $W$  de  $\varepsilon^{p^{-m}}$ , permet d'identifier  $k$  à un sous-anneau de  $R_V$ . L'anneau  $W(R_V)$  devient une  $W$ -algèbre, l'application

$$\theta : W(R_V) \longrightarrow V$$

est  $W$ -linéaire et s'étend en une application  $\Lambda$ -linéaire

$$\theta : \Lambda \otimes_W W(R_V) \longrightarrow V,$$

ce qui fait que  $A_{\text{inf}}(V/\Lambda)$  s'identifie au séparé complété de  $\Lambda \otimes_W W(R_V)$  pour la topologie définie par l'idéal engendré par  $p$  et le noyau de  $\theta$ .

d) Supposons que  $\bar{V}$  soit tel que le noyau  $\text{Ker } f$  de l'endomorphisme de Frobenius (élévation à la puissance  $p$ ) soit un idéal de type fini et soient  $x_1, x_2, \dots, x_r$  des éléments de  $R_{\bar{V}}$  tels que les images des  $x_i^{(1)}$  dans  $\bar{V}$  engendrent  $\text{Ker } f$ . Si  $I$  désigne l'idéal de  $R_{\bar{V}}$  engendré par les  $x_i$ , on voit que  $R_{\bar{V}}$  est séparé et complet pour la topologie  $I$ -adique et que  $I$  est le noyau de la projection naturelle de  $R_{\bar{V}}$  sur  $\bar{V}$  (i.e. l'application  $x \rightarrow x^{(0)}$ ). En particulier, pour tout corps parfait  $k$  contenue dans  $\bar{V}$ ,  $R_V = R_{\bar{V}}$  s'identifie à  $A_{\text{inf}}(\bar{V}/k)$ .

e) On déduit facilement des remarques c) et d) que, si  $W$  est comme ci-dessus, alors, lorsque  $\text{Ker } f$  est de type fini sur  $\bar{V}$  et lorsque  $\Lambda = W$  (resp. l'anneau des entiers d'une extension finie totalement ramifiée du corps des fractions de  $W$ ), l'anneau  $A_{\text{inf}}(V/\Lambda)$  s'identifie à  $W(R_V)$  (resp.  $\Lambda \otimes_W W(R_V)$ ).

f) Ces constructions peuvent aussi se faisceautiser : de façon précise, soient  $\Lambda$  un quotient de  $W$  ou de  $\mathcal{O}_K$  (avec  $W$  et  $\mathcal{O}_K$  comme ci-dessus) par un idéal non trivial,  $Y = \text{Spec } \Lambda$ ,  $Y_{\text{syn}}$  le petit site syntomique de  $Y$  (cf. [FM87], II, n° 1) et  $\mathcal{O}_Y$  le faisceau structural (si  $U$  est un schéma syntomique sur  $Y$ , on a donc  $\mathcal{O}_Y(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ ). Alors, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on peut définir un faisceau  $\mathcal{O}_{Y, \text{inf}}^m$  de  $\Lambda$ -algèbres sur  $Y_{\text{syn}}$ , muni d'un épimorphisme de faisceaux de  $\Lambda$ -algèbres

$$\theta : \mathcal{O}_{Y, \text{inf}}^m \longrightarrow \mathcal{O}_Y ,$$

dont le noyau a sa puissance  $(m + 1)$ -ième nulle et qui est universel pour ces propriétés. En outre, si  $V$  est une  $\Lambda$ -algèbre, limite inductive de  $\Lambda$ -algèbres syntomiques, telle que l'élévation à la puissance  $p$  soit surjective sur  $V/pV$ , le  $\Lambda$ -épaissement infinitésimal universel d'ordre  $\leq m$  de  $V$  s'identifie à la limite inductive des  $\mathcal{O}_{Y, \text{inf}}^m(S)$ , pour  $S$  parcourant les  $\Lambda$ -algèbres syntomiques dont  $V$  est la limite inductive.

### 1.3. — Le cas de l'anneau des entiers d'un corps local

Dans toute la suite de ce paragraphe, les hypothèses et notations sont celles du n° 0.1.

1.3.1. — Nous posons  $R = R_{\mathcal{O}_C}$ . Si  $v$  est une valuation de  $K$ , et si l'on



note encore  $v$  son unique prolongement à  $C$ , on obtient une valuation  $v_R$  de  $R$  en posant

$$v_R((x^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}) = v(x^{(0)}) .$$

Il est facile de voir que le corps des fractions de  $R$  est un corps complet pour cette valuation, algébriquement clos et que  $R$  est l'anneau de ses entiers.

**1.3.2.** — Si  $K$  est de caractéristique  $p$ , l'application

$$x \longrightarrow x^{(0)}$$

définit un isomorphisme de  $R$  sur  $\mathcal{O}_C$  compatible avec la valuation.

En outre,  $A_{\text{inf}}(\mathcal{O}_C/\Lambda)$  s'identifie à  $R$ , donc aussi à  $\mathcal{O}_C$ , si  $\Lambda = k$  où  $\mathcal{O}_K$  est à  $W(R)$  (ou  $W(\mathcal{O}_C)$ ) si  $\Lambda = W$ .

**1.3.3.** — Dans toute la fin du §1, on suppose que  $K$  est de caractéristique 0.

S'il n'y a pas de risque de confusion, on écrit  $A_{\text{inf}}$  au lieu de  $A_{\text{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_K)$  (qui s'identifie – cf. la remarque (c) du n° 1.2.4 – à  $W_{\mathcal{O}_K}(R) := \mathcal{O}_K \otimes_W W(R)$ ). Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on note  $Fil^m A_{\text{inf}}$  la puissance  $m$ -ième du noyau de  $\theta : A_{\text{inf}} \longrightarrow \mathcal{O}_C$  et, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$A_{\text{inf}}^m = A_{\text{inf}}^m(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_K) = A_{\text{inf}}/Fil^{m+1} A_{\text{inf}} ,$$

le  $\mathcal{O}_K$ -épaississement infinitésimal formel  $p$ -adique universel d'ordre  $\leq m$  de  $\mathcal{O}_C$ .

#### 1.4. — Épaississement du 1<sup>o</sup> ordre et différentielles de Kähler

**1.4.1.** — Fixons quelques **notations** : Pour tout groupe abélien  $\Gamma$ , on note  $T_p(\Gamma)$  le  $\mathbb{Z}_p$ -module  $\text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \Gamma)$  et on pose  $V_p(\Gamma) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(\Gamma)$ . Le  $\mathbb{Z}_p$ -module  $\mathbb{Z}_p(1) = T_p(\overline{K}^*)$  est libre de rang 1 ; pour tout  $\mathbb{Z}_p$ -module  $M$ , on pose  $M(1) = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1)$ .

**1.4.2.** — Notons  $\Omega = \Omega_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}^1$  le module des différentielles de Kähler de  $\mathcal{O}_{\overline{K}}$  relatives à  $\mathcal{O}_K$ .

Rappelons ([Fo82b], thm. 1') que  $\Omega$  est un  $\mathcal{O}_K$ -module de  $p$  torsion,  $p$ -divisible. Soient  $K_0$  le corps des fractions de  $W(k)$ ,  $\mathcal{D}_{K/K_0}$  la différentielle de

l'extension  $K/K_0$ ,  $\varepsilon = (\varepsilon^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  un générateur de  $\mathbb{Z}_p(1)$  (autrement dit, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $(\varepsilon^{(m+1)})^p = \varepsilon^{(m)}$  et  $\varepsilon^{(1)}$  est une racine primitive  $p$ -ième de l'unité dans  $\overline{K}$ ). Alors, si  $\mathfrak{a}$  est l'idéal fractionnaire de  $\mathcal{O}_{\overline{K}}$  inverse de l'idéal engendré par  $(\varepsilon^{(1)} - 1) \cdot \mathcal{D}_{K/K_0}$ , on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a}(1) \longrightarrow \overline{K}(1) \longrightarrow \Omega \longrightarrow 0$$

où l'application de  $\overline{K}(1)$  dans  $\Omega$  est celle qui, à  $p^{-m}a \otimes \varepsilon$ , avec  $m \in \mathbb{N}$  et  $a \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ , associe

$$a \cdot d_{\log} \varepsilon^{(m)} = a \cdot d\varepsilon^{(m)} / \varepsilon^{(m)} .$$

Ceci permet d'identifier  $\Omega$  à  $(\overline{K}/\mathfrak{a})(1)$  ( $= (C/\widehat{\mathfrak{a}})(1)$ , si  $\widehat{\mathfrak{a}}$  désigne l'adhérence de  $\mathfrak{a}$  dans  $C$ ),  $T_p(\Omega)$  à  $\widehat{\mathfrak{a}}(1)$  et  $V_p(\Omega)$  à  $C(1)$ .

1.4.3. PROPOSITION. — Soient  $\mathcal{O}'_{\overline{K}}$  le sous-anneau de  $\mathcal{O}_{\overline{K}}$  noyau de

$$d : \mathcal{O}_{\overline{K}} \longrightarrow \Omega ,$$

$A'_{\text{inf}}$  le séparé complété de  $\mathcal{O}'_{\overline{K}}$  pour la topologie  $p$ -adique et

$$\theta' : A'_{\text{inf}} \longrightarrow \mathcal{O}_C$$

l'application déduite, par passage aux séparés complétés, de l'inclusion de  $\mathcal{O}'_{\overline{K}}$  dans  $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ . Alors  $A'_{\text{inf}}$ , muni de  $\theta'$ , est un  $\mathcal{O}_K$ -épaississement infinitésimal universel du premier ordre de  $\mathcal{O}_C$ .

Autrement dit, il existe un unique  $\mathcal{O}_K$ -homomorphisme  $\beta$  de l'anneau  $A'_{\text{inf}}$  construit au n° 1.3.3 dans  $A'_{\text{inf}}$ , tel que  $\theta = \theta' \circ \beta$  et cet homomorphisme est un isomorphisme.

1.4.4. — Commençons par vérifier que  $A'_{\text{inf}}$  est bien un  $\mathcal{O}_K$ -épaississement infinitésimal du premier ordre de  $\mathcal{O}_C$  :

LEMME. — Les applications  $d : \mathcal{O}_{\overline{K}} \longrightarrow \Omega$  et  $\theta' : A'_{\text{inf}} \longrightarrow \mathcal{O}_C$  sont surjectives et le noyau de  $\theta'$  est un idéal de carré nul qui s'identifie à  $T_p(\Omega) = \widehat{\mathfrak{a}}(1)$ .

*Preuve* : Soient  $a, b \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ . Montrons qu'il existe  $c \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$  tel que  $dc = a \cdot db$  : choisissons des entiers  $r, s > 0$  tels que  $p^r da = p^s db = 0$ , ainsi que  $x \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$  solution de  $x^{p^{r+s}} + p^r x = b$ ; on a  $p^r(1 + p^s x^{p^{r+s}-1})dx = db$ , d'où  $p^r dx = (1 + p^s x^{p^{r+s}-1})^{-1} db = db$  et

$$a \cdot db = p^r a \cdot dx = d(p^r ax) ,$$

puisque  $d(p^r a) = p^r da = 0$ .

On a donc une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}'_{\overline{K}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{K}} \longrightarrow \Omega \longrightarrow 0 .$$

Si, pour tout groupe abélien  $\Gamma$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $\Gamma_n = \Gamma/p^n\Gamma$ , on obtient une autre suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \Omega_{p^n} \longrightarrow \mathcal{O}'_{\overline{K},n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{K},n} \longrightarrow 0$$

qui fait de  $\mathcal{O}'_{\overline{K},n}$  une  $\mathcal{O}_{K,n}$ -algèbre extension de  $\mathcal{O}_{\overline{K},n}$  par un idéal de carré nul identifié à  $\Omega_{p^n}$ . En passant à la limite sur  $n$ , on obtient alors la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow T_p(\Omega) \longrightarrow A'_{\text{inf}} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0 .$$

1.4.5. LEMME. — *Soient  $L$  une extension algébrique de  $K$  et  $B$  une  $\mathcal{O}_K$ -algèbre, extension de  $\mathcal{O}_L$  par un idéal  $J$  de carré nul. Alors la suite*

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow \mathcal{O}_L \otimes_B \Omega^1_{B/\mathcal{O}_K} \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} \longrightarrow 0$$

*est exacte.*

*Preuve* : Il s'agit de vérifier l'injectivité de l'application canonique de  $J$  dans  $\mathcal{O}_L \otimes \Omega^1_{B/\mathcal{O}_K}$  et il est clair que l'on peut supposer l'extension  $L/K$  finie.

Soit  $a$  un élément de  $\mathcal{O}_L$  qui engendre  $\mathcal{O}_L$  en tant que  $\mathcal{O}_K$ -algèbre (un tel élément existe, cf. [Se68], chap. III). Si  $P$  désigne le polynôme minimal de  $a$  sur  $K$ ,  $\mathcal{O}_L$  s'identifie au quotient  $\mathcal{O}_K[X]/(P(X))$ . Soient  $\hat{a}$  un relèvement de  $a$  dans  $B$  et  $b = P(\hat{a}) \in J$ .

Soit  $\mathcal{B} = J \oplus \mathcal{O}_K[X]$ , vue comme une  $\mathcal{O}_K$ -algèbre, extension (triviale) de  $\mathcal{O}_K[X]$  par l'idéal de carré nul  $J$  (vu comme un  $\mathcal{O}_K[X]$ -module via la projection de  $\mathcal{O}_K[X]$  sur  $\mathcal{O}_L$ ). Alors  $B$  s'identifie au quotient de  $\mathcal{B}$  par l'idéal engendré par  $(-b, P(X))$ .

On a  $\mathcal{O}_K[X] \otimes \Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{O}_K}^1 = J \oplus \mathcal{O}_K[X] \cdot dX$  et  $\mathcal{O}_L \otimes \Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{O}_K}^1 = J \oplus \mathcal{O}_L \overline{dX}$ , somme directe de  $J$  et du  $\mathcal{O}_L$ -module libre de rang 1 de base  $\overline{dX} = 1 \otimes dX$ .

Enfin,  $\mathcal{O}_L \otimes \Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{O}_K}^1$  est le quotient de  $J \oplus \mathcal{O}_L \overline{dX}$  par le sous- $\mathcal{O}_L$ -module  $M$  engendré par  $(-b, P'(a)\overline{dX})$ . Comme  $P'(a) \neq 0$  et comme  $\mathcal{O}_L$  est intègre, l'homomorphisme de  $J$  dans  $(J \oplus \mathcal{O}_L \overline{dX})/M$  est bien injectif.

**1.4.6. — Fin de la preuve de la proposition 1.4.3.** : Il reste à démontrer que, si  $(S, \theta_S)$  est un  $\mathcal{O}_K$ -épaississement infinitésimal du premier ordre de  $\mathcal{O}_C$ , il existe un et un seul homomorphisme continu de  $\mathcal{O}_K$ -algèbres

$$\alpha : A'_{\text{inf}} \longrightarrow S ,$$

tel que  $\theta' = \theta_S \circ \alpha$ .

Notons  $D_f$  (resp.  $S_f$ ) l'image inverse de  $\mathcal{O}_{\overline{K}}$  par  $\theta'$  (resp.  $\theta_S$ ). Il est clair qu'il suffit de vérifier qu'il existe un unique homomorphisme de  $\mathcal{O}_K$ -algèbres  $\alpha_f : D_f \longrightarrow S_f$  tel que  $\theta' = \theta_S \circ \alpha_f$  (où l'on a encore désigné par  $\theta_S$  et  $\theta'$  leurs restrictions à  $S_f$  et  $D_f$ ).

**Unicité** : Si  $\alpha_f$  et  $\alpha'_f$  sont deux telles applications, on a

$$\alpha'_f = \alpha_f + \delta \circ \theta_f ,$$

où  $\delta$  est une  $\mathcal{O}_K$ -dérivation de  $\mathcal{O}_{\overline{K}}$  dans  $I = \ker \theta_S$ ; comme  $\Omega$  est divisible et  $I$  est séparé pour la topologie  $p$ -adique, on a  $\delta = 0$ .

**Existence** : Comme  $\mathcal{O}'_{\overline{K}}$  est dense dans  $A'_{\text{inf}}$ , donc a fortiori dans  $D_f$ , il suffit de montrer l'existence d'une application

$$\alpha_0 : \mathcal{O}'_{\overline{K}} \longrightarrow S_f$$

telle que  $\theta_S \circ \alpha_0$  soit l'identité sur  $\mathcal{O}'_{\overline{K}}$ .

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & S_f & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\overline{K}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes \Omega_{S_f/\mathcal{O}_K}^1 & \longrightarrow & \Omega & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes grâce au lemme précédent. On en déduit que tout  $a \in \mathcal{O}'_{\overline{K}}$  a un unique relèvement  $\alpha_0(a) \in S_f$  tel que  $1 \otimes d\alpha_0(a) = 0$  (dans  $\mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes \Omega_{S_f/\mathcal{O}_K}^1$ ). L'unicité de ce relèvement implique que  $\alpha_0$  est un homomorphisme de  $\mathcal{O}_K$ -algèbres.

**1.4.7. — Remarque :** Soit  $\Lambda = C(1) \oplus \mathcal{O}_{\overline{K}} = V_p(\Omega) \oplus \mathcal{O}_{\overline{K}}$ , vu comme  $\mathcal{O}_K$ -algèbre, extension triviale de  $\mathcal{O}_{\overline{K}}$  par un idéal de carré nul identifié à  $V_p(\Omega)$ .

On voit que  $V_p(\Omega)$  peut s'identifier au  $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -module des  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , avec  $\omega_n \in \Omega$  et  $p\omega_{n+1} = \omega_n$ . Soit alors  $\Lambda_0$  le sous-anneau de  $\Lambda$  formé des  $(\omega, a)$  tels que  $\omega_0 = da$ .

On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow T_p(\Omega) \longrightarrow \Lambda_0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{K}} \longrightarrow 0 ,$$

qui fait du séparé complété  $\widehat{\Lambda}_0$  de  $\Lambda_0$  pour la topologie  $p$ -adique un  $\mathcal{O}_K$ -épaississement infinitésimal du premier ordre de  $\mathcal{O}_C$ . On en déduit un homomorphisme de  $A_{\text{inf}}^1 = A'_{\text{inf}}$  dans  $\widehat{\Lambda}_0$  dont on voit tout de suite que c'est un isomorphisme et qu'il identifie  $D_f$  et  $\Lambda_0$ . Ceci implique en particulier

i) que  $\mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes \Omega_{D_f/\mathcal{O}_K}^1$  s'identifie à  $V_p(\Omega) = C(1)$  (via la dérivation de  $D_f = \Lambda_0$  dans  $V_p(\Omega)$  qui envoie  $(\omega, a)$  sur  $\omega$ );

ii) que l'extension

$$0 \longrightarrow V_p(\Omega) \longrightarrow D_f[1/p] \longrightarrow \overline{K} \longrightarrow 0$$

est scindée; en particulier,  $\overline{K}$  s'identifie à un sous-corps de  $D_f[1/p]$ , donc a fortiori de  $A_{\text{inf}}^1[1/p]$ .

**1.4.8. — Autres remarques :** a) Les constructions ci-dessus s'étendent à des situations plus générales (cf. [Exp. IX], § 1).

b) Ces constructions peuvent aussi se faisceautiser, moyennant quelques précautions : par exemple, si  $X$  est un schéma syntomique sur  $\mathcal{O}_K$ , à fibre générique lisse et si  $X_{syn-ét}$  désigne le petit site syntomique-étale de  $X$  (cf. [FM87], un morphisme  $U \rightarrow V$  de  $X$ -schémas est "syntomique-étale" s'il est syntomique et s'il devient étale lorsque l'on rend  $p$  inversible), alors les différentielles de Kähler relatives  $\Omega_{/X}$  (par définition,  $\Gamma(U, \Omega_{/X}) = \Gamma(U, \Omega_{U/X})$ , pour tout schéma  $U$  syntomique-étale sur  $X$ ) forment un faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -modules sur ce site. C'est un faisceau de  $p$ -torsion,  $p$ -divisible et la différentiation

$$d : \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{/X}$$

est un épimorphisme de faisceaux. Si  $\pi$  est une uniformisante de  $\mathcal{O}_K$ , si l'on note  $\mathcal{O}'_X$  le faisceau (de  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -algèbres) qui est le noyau de  $d$ , si  $n \in \mathbf{N}$ , et si  $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)/\pi^n \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ , alors le faisceau conoyau de la multiplication par  $\pi^n$  dans  $\mathcal{O}'_X$  est un  $A$ -épaississement infinitésimal du premier ordre du faisceau conoyau de la multiplication par  $\pi^n$  dans  $\mathcal{O}_X$ .

**1.5. — Les anneaux  $B_{dR}^+$ ,  $B_{dR}$ ,  $B_{HT}^+$  et  $B_{HT}$**

**1.5.1. —** Soit  $A_{inf,K} = K \otimes_{\mathcal{O}_K} A_{inf} = A_{inf}[1/p]$ . L'application  $\theta : A_{inf} \rightarrow \mathcal{O}_C$  s'étend de manière unique en un homomorphisme de  $K$ -algèbres

$$\theta : A_{inf,K} \rightarrow C$$

qui est surjectif. Son noyau  $J_K$  est un idéal principal maximal. Comme dans [Fo82a], n° 2.8, on note  $B_{dR}^+$  le séparé complété de  $A_{inf,K}$  pour la topologie  $J_K$ -adique.

**1.5.2.** L'anneau  $B_{dR}^+$  est un anneau de valuation discrète, complet, contenant  $A_{inf,K}$  comme sous-anneau dense et dont l'idéal maximal est l'adhérence  $\bar{J}_K$  de  $J_K$  dans  $A_{inf,K}$ . Son corps résiduel  $B_{dR}^+/\bar{J}_K = A_{inf,K}/J_K$  s'identifie à  $C$ . Pour tout entier  $m \geq 0$ ,  $B_{dR}^+(\bar{J}_K)^{m+1}$  s'identifie à  $A_{inf,K}^m = K \otimes_{\mathcal{O}_K} A_{inf}^m = A_{inf}^m[1/p]$ , où, rappelons-le,  $A_{inf}^m$  désigne le  $\mathcal{O}_K$ -épaississement infinitésimal formel  $p$ -adique universel d'ordre  $\leq m$  de  $\mathcal{O}_C$ .

1.5.3. — On a

$$B_{dR}^+ = \varprojlim A_{\text{inf},K}^m.$$

Si, au lieu de munir chaque  $A_{\text{inf},K}^m$  de la topologie discrète, on le munit de la topologie induite par la topologie  $p$ -adique sur  $A_{\text{inf}}^m$  (topologie pour laquelle  $A_{\text{inf}}^m$  est séparée et complet), la topologie limite projective ainsi obtenue sur  $B_{dR}^+$  est moins fine que sa topologie d'anneau de valuation discrète; nous l'appelons la **topologie canonique**.

1.5.4. — On dispose d'un plongement naturel  $\nu$  de  $\mathbb{Z}_p(1)$  dans le groupe multiplicatif de  $A_{\text{inf}}$  que l'on peut décrire de (au moins) deux manières différentes : soit  $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (avec  $\varepsilon_n \in \mathcal{O}_C, \varepsilon_0 = 1, \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n$ ) un élément de  $\mathbb{Z}_p(1)$  :

i) si, pour tout  $n$ ,  $a_n$  est un relèvement de  $\varepsilon_n$  dans  $A_{\text{inf}}$ , la suite  $a_n^{p^n}$  converge dans  $A_{\text{inf}}$  vers un élément  $\nu(\varepsilon)$  indépendant des choix des relèvements;

ii) si l'on identifie  $A_{\text{inf}}$  à  $W_{\mathcal{O}_K}(R) = \mathcal{O}_K \otimes_W W(R)$ , on peut identifier  $\varepsilon$  à un élément de  $R$  (en posant  $\varepsilon^{(n)} = \varepsilon_n$ ) et l'on a  $\nu(\varepsilon) = 1 \otimes [\varepsilon]$  (où  $[\varepsilon] = (\varepsilon, 0, \dots, 0, \dots)$ ).

Pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p(1)$ , on a  $\theta(\nu(\varepsilon)) = 1$  et la série

$$\log(\nu(\varepsilon)) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot (\nu(\varepsilon) - 1)^n / n$$

converge dans l'idéal maximal de  $B_{dR}^+$ . L'application

$$\varepsilon \longmapsto \log(\nu(\varepsilon))$$

est un homomorphisme injectif et **on l'utilise pour identifier  $\mathbb{Z}_p(1)$  à un sous-groupe du groupe additif de  $B_{dR}^+$** .

Dans [Fo82a], on démontre par un calcul explicite un peu pénible (prop. 2.17) qu'un élément non nul de  $\mathbb{Z}_p(1)$  est une uniformisante de  $B_{dR}^+$ , i.e. n'est pas contenu dans le carré de l'idéal maximal de  $B_{dR}^+$ . Cela peut se voir directement en remarquant que, si l'on utilise la description de  $A_{\text{inf}}^1 = A'_{\text{inf}}$  donnée au n° 1.4, alors le noyau de la projection de  $A_{\text{inf},K}^1$  sur  $C$  s'identifie à

$V_p(\Omega)$  et l'image de  $\varepsilon$  dans  $V_p(\Omega)$  est  $(\varepsilon_n^{-1} \cdot d\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui est un générateur de ce  $C$ -espace vectoriel de dimension 1.

**1.5.5.** — Rappelons enfin que l'on définit  $B_{dR}$  comme étant le corps des fractions de  $B_{dR}^+$ . Comme n'importe quel corps muni d'une valuation discrète, il est muni d'une filtration naturelle décroissante indexée par  $\mathbb{Z}$  : si  $v_{dR}$  désigne la valuation de  $B_{dR}$  normalisée par  $v_{dR}(B_{dR}^*) = \mathbb{Z}$ , on a

$$Fil^m B_{dR} = \{b \in B_{dR} | v_{dR}(b) \geq m\}, \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{Z}$$

(en particulier  $Fil^0 B_{dR} = B_{dR}^+$  et  $Fil^1 B_{dR}$  est son idéal maximal).

Rappelons que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbb{Z}_p(m)$  la  $m$ -ième puissance tensorielle du  $\mathbb{Z}_p$ -module  $\mathbb{Z}_p(1)$  et  $\mathbb{Z}_p(-m)$  son dual; rappelons aussi que si  $M$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -module et si  $m \in \mathbb{Z}$ , on pose  $M(m) = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(m)$ .

Il résulte alors du n° précédent que, pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $gr^m B_{dR} (= Fil^m B_{dR} / Fil^{m+1} B_{dR})$  s'identifie à  $C(m)$ . Autrement dit, l'algèbre graduée associée à l'algèbre filtrée  $B_{dR}$  s'identifie à l'algèbre

$$B_{HT} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} C(m) = C[t, t^{-1}]$$

anneau des polynômes de Laurent en  $t$ , si  $t$  est n'importe quel élément non nul de  $\mathbb{Z}_p(1)$  (ici  $HT$  signifie Hodge-Tate).

**1.5.6.** — La construction de  $B_{dR}$  est fonctorielle. De façon précise, donnons-nous deux corps  $K$  et  $L$  de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, à corps résiduel parfait de caractéristique  $p$ , des clôtures algébriques  $\overline{K}$  de  $K$  et  $\overline{L}$  de  $L$  et un homomorphisme continu  $\nu : \overline{K} \rightarrow \overline{L}$  envoyant  $K$  sur un sous-corps fermé de  $L$ . Alors, avec des conventions évidentes,  $\nu$  induit un homomorphisme continu

$$B_{dR}(\nu) : B_{dR}(K, \overline{K}) \rightarrow B_{dR}(L, \overline{L}),$$

qui est "non ramifié", au sens que l'image d'une uniformisante du premier corps est une uniformisante du second, et qui, sur les corps résiduels, n'est autre que le plongement du complété de  $\overline{K}$  dans le complété de  $\overline{L}$  induit par  $\nu$ . Par conséquent  $B_{dR}(\nu)$  est un isomorphisme si et seulement si  $\nu$  induit un



isomorphisme du complété de  $\overline{K}$  sur celui de  $\overline{L}$ , ce qui équivaut à dire que la fermeture algébrique de  $\nu(K)$  dans  $L$  est dense dans  $L$ , ou encore que  $\nu$  induit un isomorphisme du corps résiduel de  $\overline{L}$  sur celui de  $\overline{K}$ , ou encore que le corps résiduel de  $L$  est algébrique sur celui de  $K$ .

En particulier, on ne change pas  $B_{dR}$  si l'on remplace  $K$  par un sous-corps fermé de  $C$  contenant  $K$  pour lequel la valuation est encore discrète, ce que l'on peut traduire en disant que  $B_{dR}$  “**dépend de  $C$  mais non de  $K$** ”.

**1.5.7.** — Par functorialité,  $G = \text{Gal}(\overline{K}/K)$  opère continuellement sur  $B_{dR}$  (et l'action induite sur le gradué associé est l'action naturelle).

Si  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $j \in \mathbb{N}$  et  $H$  est un sous-groupe ouvert de  $G$ , on a

$$(Fil^i B_{HT}/Fil^{i+j} B_{HT})^H = (Fil^i B_{dR}/Fil^{i+j} B_{dR})^H = \begin{cases} \overline{K}^H & \text{si } i \leq 0 < i+j \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

cela est immédiat, par récurrence sur  $j$ , à partir de la description des  $H^r(H, C(s))$  due à Tate ([Ta67], Thm. 1 et 2). En particulier, on a  $(A_{\text{inf},K}^m)^H = \overline{K}^H$ , pour tout entier  $m \geq 1$ , et, par passage à la limite,

$$(B_{HT}^+)^H = (B_{HT})^H = (B_{dR}^+)^H = (B_{dR})^H = \overline{K}^H.$$

Il en résulte que  $B_{HT}^+$ ,  $B_{HT}$ ,  $B_{dR}^+$  et  $B_{dR}$  sont en fait des  $\overline{K}$ -algèbres.

**1.5.8.** — **Remarques :** a) Bien sûr,  $B_{HT}^+$  et  $B_{HT}$  sont même des  $C$ -algèbres; on sait par ailleurs qu'il existe une section

$$s : C \longrightarrow B_{dR}^+$$

de la projection  $\theta : B_{dR}^+ \longrightarrow C$ ; on peut vérifier qu'il n'est pas possible de choisir  $s$  continue (pour la topologie  $p$ -adique sur  $C$  et la topologie canonique sur  $B_{dR}^+$ ; il n'existe déjà pas de section continue de  $C$  sur  $A_{\text{inf},K}^1$ ) et que l'on ne peut pas non plus choisir  $s$  commutant à l'action de  $G$ .

b) On renvoie à Faltings ([Fa89]) et à Wintenberger ([Exp. IX], §1) pour une définition de  $B_{dR}$  dans un contexte plus général.

## 2. — Pd-épaississements universels : l'anneau $B_{cris}^+$

### 2.1. — Généralités

**2.1.1.** — Rappelons que, si  $D$  est un anneau, un  $pd$ -idéal  $J$  de  $B$  est un idéal muni de puissances divisées, i.e. d'une famille  $\gamma = (\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  d'applications de  $J$  dans lui-même vérifiant les propriétés que l'on obtient en pensant que, "moralement"  $\gamma_m(x) = x^m/m!$  (cf. par exemple, [BO], § 3, pour un énoncé précis et pour plus de détails sur les puissances divisées); il est commode de poser  $\gamma_0(x) = 1$ , pour tout  $x \in J$ .

**2.1.2.** — Soient  $\Lambda$  un anneau,  $\mathfrak{p} = (\pi)$  un idéal principal de  $\Lambda$  muni de puissances divisées et  $V$  une  $\Lambda$ -algèbre.

Un  $\Lambda$ -épaississement à puissances divisées  $\mathfrak{p}$ -adique de  $V$ , ou encore **un  $\Lambda$ - $pd$ -épaississement  $\pi$ -adique de  $V$**  est la donnée d'un triplet formé d'une  $\Lambda$ -algèbre  $D$ , d'un homomorphisme surjectif de  $\Lambda$ -algèbres  $\theta : D \rightarrow V$  et d'une structure  $\gamma$  de  $pd$ -idéal sur le noyau de  $\theta$ , compatible avec les puissances divisées  $\gamma^{\mathfrak{p}}$  de  $\mathfrak{p}$ , i.e. telle que, si  $a \in D$  vérifie  $a\pi \in J$ , alors

$$\gamma_m(a\pi) = a^m \cdot \gamma_m^{\mathfrak{p}}(\pi), \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N}.$$

Les  $\Lambda$ - $pd$ -épaississements  $\pi$ -adiques de  $V$  forment, de manière évidente, une catégorie. Si cette catégorie admet un objet initial, celui-ci est unique à isomorphisme unique près et s'appelle le  **$\Lambda$ - $pd$ -épaississement  $\pi$ -adique universel de  $V$** .

Si  $V$  est séparé et complet pour la topologie  $\mathfrak{p}$ -adique, un  **$\Lambda$ - $pd$ -épaississement formel  $\pi$ -adique de  $V$**  est un  $\Lambda$ - $pd$ -épaississement  $\pi$ -adique de  $V$  qui est séparé et complet pour la topologie  $\mathfrak{p}$ -adique. Ici encore, on a une notion évidente d'objet universel.

Bien sûr, si  $D$  est un  $\Lambda$ - $pd$ -épaississement formel  $\pi$ -adique universel de  $V$  et si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D/\pi^n D$  est un  $(\Lambda/\mathfrak{p}^n)$ - $pd$ -épaississement  $\pi$ -adique universel de  $V/\pi^n V$ .

**2.2. — Existence de  $pd$ -épaississements formels  $p$ -adiques universels**

2.2.1. THÉORÈME. — *Soient  $\Lambda$  un anneau et  $V$  une  $\Lambda$ -algèbre séparée et complète pour la topologie  $p$ -adique. On suppose que, pour tout  $a \in V$ , il existe  $x, y \in V$  tels que  $a = x^p + py$ . Alors l'anneau  $V$  admet un  $\Lambda$ - $pd$ -épaississement formel  $p$ -adique universel.*

2.2.2. — **Preuve :** Soient  $R_V, W(R_V)$  et

$$\theta : \Lambda \otimes_{\mathbf{Z}} W(R_V) \longrightarrow V$$

comme au n° 1.2.2. Notons  $A_{cris}(V/\Lambda)$  le séparé complété pour la topologie  $p$ -adique de l'enveloppe à puissances divisées de  $\Lambda \otimes_{\mathbf{Z}} W(R_V)$ , relativement à l'idéal noyau de  $\theta$ , compatibles avec les puissances divisées canoniques sur l'idéal engendré par  $p$ ; notons encore

$$\theta : A_{cris}(V/\Lambda) \longrightarrow V$$

l'application induite.

Il est clair que  $A_{cris}(V/\Lambda)$  est un  $\Lambda$ - $pd$ -épaississement formel  $p$ -adique de  $V$  et nous allons montrer qu'il est universel.

La démonstration est essentiellement la même que dans le cas pro-infinitésimal. De façon précise, soit  $(D, \theta_D, \gamma)$  un autre  $\Lambda$ - $pd$ -épaississement formel  $p$ -adique de  $V$ . Prouver l'existence et l'unicité d'un morphisme de  $\Lambda$ - $pd$ -épaississements formels  $p$ -adiques de  $A_{cris}(V/\Lambda)$  dans  $D$  revient à vérifier l'existence et l'unicité d'un homomorphisme continu d'anneaux  $p$ -adiques

$$\alpha : W(R_V) \longrightarrow D$$

tel que  $\theta_D \circ \alpha = \theta$  (car un tel morphisme s'étend de façon unique en un morphisme de  $\Lambda$ -algèbres de  $\Lambda \otimes_{\mathbf{Z}} W(R_V)$  dans  $D$ , puis en un  $pd$ -homomorphisme continu de  $A_{cris}(V/\Lambda)$  dans  $D$ ).

Soit alors  $J_D$  le noyau de  $\theta_D$ . Si  $d_1, d_2 \in D$  vérifient  $d_1 \equiv d_2 \pmod{J_D}$ , on a  $d_1^p \equiv d_2^p \pmod{pJ_D}$ . Il en résulte que, si  $x \in R_V$  et si, pour tout  $m \in \mathbf{N}$ , on

choisit un relèvement  $\xi_m$  dans  $D$  de  $x^{(m)} \in V$ , la suite des  $\xi_m^{p^m}$  tend vers une limite  $\rho(x)$  dans  $D$  indépendante du choix des relèvements. On voit que l'on doit avoir

$$\alpha([x]) = \rho(x), \quad \text{pour tout } x \in R_V .$$

L'unicité de  $\alpha$  est alors claire, car il faut

$$\alpha((x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)) = \Sigma p^n \rho(x_n^{p^{-n}})$$

et l'existence résulte de ce que l'application  $\alpha$  ainsi définie est bien un homomorphisme continu qui commute aux applications  $\theta$ .

**2.2.3. — Remarques :** a) Dans la suite, on note  $A_{cris}(V/\Lambda)$  le  $\Lambda$ - $p$ - $d$ -épaississement formel  $p$ -adique universel de  $V$ .

b) Cette construction est fonctorielle. En outre  $A_{cris}(V/\Lambda)$  ne dépend que de la réduction modulo  $p$  de  $V$ , i.e. si  $\bar{V} = V/pV$ , l'homomorphisme évident  $A_{cris}(V/\Lambda) \rightarrow A_{cris}(\bar{V}/\Lambda)$  est un isomorphisme.

c) Dans le cas où l'anneau  $\Lambda$  considéré ci-dessus est l'anneau  $W$  des vecteurs de Witt à coefficients dans le corps parfait  $k$  (resp. l'anneau  $\mathcal{O}_K$  des entiers d'une extension finie totalement ramifiée du corps des fractions de  $W$ ), on voit que  $A_{cris}(V/\Lambda)$  s'identifie à l'enveloppe à puissances divisées de  $W(R_V)$  (resp.  $W_{\mathcal{O}_K}(R_V) = \mathcal{O}_K \otimes_W W(R_V)$ ) relativement à l'idéal noyau de  $\theta$ , compatibles avec les puissances divisées canoniques sur l'idéal engendré par  $p$ .

d) Si  $\Lambda = W$ , on écrit  $A_{cris}(V)$  au lieu de  $A_{cris}(V/W)$ ; c'est une  $W$ -algèbre et le Frobenius absolu  $x \mapsto x^p$  sur  $\bar{V}$  induit par functorialité un endomorphisme  $\varphi$  de l'anneau  $A_{cris}(V) = A_{cris}(\bar{V})$ ; on voit que  $\varphi$  est semi-linéaire par rapport au Frobenius absolu agissant sur  $W$ .

e) Ces constructions peuvent aussi se faisceautiser : dans le cas où  $\Lambda = W$ , ceci est fait dans [FM87], part II.

### 2.3. — Les anneaux $B_{cris}^+$ et $B_{cris}$

On reprend les notations du n° 1. On note

$$A_{cris} = A_{cris}(\mathcal{O}_C)$$

le  $W$ - $pd$ -épaississement formel  $p$ -adique universel de  $\mathcal{O}_C$  et

$$\theta : A_{cris} \longrightarrow \mathcal{O}_C$$

l'homomorphisme canonique.

**2.3.1.** — On note  $K_0$  le corps des fractions de  $W$  et on pose

$$B_{cris}^+ = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris} = K_0 \otimes_W A_{cris}.$$

C'est donc une  $K_0$ -algèbre, sur laquelle opère le Frobenius  $\varphi$  (semi-linéairement par rapport au Frobenius absolu  $\sigma$  agissant sur  $K_0$ ). Par functorialité, on a aussi une action linéaire de  $G = \text{Gal}(\overline{K}/K)$  qui commute à l'action de  $\varphi$ .

**2.3.2.** — Si  $K$  est de caractéristique  $p$ ,  $R = R_{\mathcal{O}_C}$  s'identifie à  $\mathcal{O}_C$  (n° 1.3.2), on a  $A_{cris} = W(R) = W(\mathcal{O}_C)$  (car le noyau de la projection de  $W(R)$  sur  $\mathcal{O}_C$  est le  $pd$ -idéal engendré par  $p$ ) et  $B_{cris}^+ = W(\mathcal{O}_C)[1/p]$ .

**2.3.3.** — Si  $K$  est de caractéristique 0,  $W(R)$  est un anneau intègre et le noyau de

$$\theta : W(R) \longrightarrow \mathcal{O}_C$$

est un idéal principal (un élément  $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$  du noyau de  $\theta$  est un générateur si et seulement si  $x_1$  est une unité). Si  $\xi$  est un générateur de cet idéal,  $A_{cris}$  (qui est l'anneau noté  $W^{DP}(R)$  dans [Fo83]) s'identifie au séparé complété pour la topologie  $p$ -adique de la sous- $W(R)$ -algèbre de  $W(R)[1/p]$  engendrée par les  $\gamma_m(\xi) = \xi^m/m!$  et  $B_{cris}^+ = A_{cris}[1/p]$ .

**2.3.4.** — Supposons encore  $K$  de caractéristique 0. On a vu au n° 2.4 comment on pouvait identifier  $\mathbb{Z}_p(1)$  à un sous-groupe additif de  $B_{dR}^+$ . La même construction [i.e. l'application  $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \log(\nu(\varepsilon))$  où  $\nu(\varepsilon) = [\varepsilon] \in W(R) \subset A_{cris}$  et  $\log(\nu(\varepsilon)) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot (\nu(\varepsilon) - 1)^n/n$ ] permet d'identifier  $\mathbb{Z}_p(1)$  à un sous-groupe (et même un sous- $\mathbb{Z}_p$ -module) du groupe additif de  $A_{cris}$ . Si  $t$  est un générateur de  $\mathbb{Z}_p(1) \subset A_{cris}$ , on pose

$B_{cris} = B_{cris}^+[1/t]$  (indépendant du choix de  $t$ ). Comme  $t$  appartient au  $pd$ -idéal de  $A_{cris}$  qui est le noyau de  $\theta$ , on a  $t^p \in pA_{cris}$  (par un calcul plus précis, on peut vérifier que  $t^{p-1} \in pA_{cris}$ ) et on a aussi  $B_{cris} = A_{cris}[1/t]$ .

On voit en outre que  $\varphi t = pt$ . Ceci permet d'étendre le Frobenius à  $B_{cris}$  en posant  $\varphi t^{-1} = p^{-1}t^{-1}$ .

### 3. — L'anneau $B_{st}$

Dans toute la suite de cet exposé, on conserve les hypothèses et notations qui précèdent ; en particulier, on suppose toujours  $K$  de caractéristique 0.

#### 3.1. — Construction de $B_{st}^+$ et $B_{st}$

**3.1.1.** — Pour tout groupe commutatif  $\Gamma$ , on pose  $V_{(p)}(\Gamma) = \text{Hom}(\mathbb{Z}[1/p], \Gamma)$ . Si l'on note  $\Gamma$  multiplicativement,  $V_{(p)}(\Gamma)$  s'identifie à l'ensemble des  $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $x^{(n)} \in \Gamma$  vérifiant  $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ . On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow T_p(\Gamma) \longrightarrow V_{(p)}(\Gamma) \longrightarrow \Gamma ,$$

où  $T_p(\Gamma)$  est le  $\mathbb{Z}_p$ -module  $\text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \Gamma)$ . Si  $\Gamma$  est  $p$ -divisible, l'application  $V_{(p)}(\Gamma) \longrightarrow \Gamma$  est surjective ; si de plus  $\Gamma$  est sans  $p$ -torsion, cette application est un isomorphisme.

**3.1.2.** — Pour tout anneau  $V$ , soit  $V^*$  le groupe de ses unités. Si  $R^{*,+}$  (resp.  $\mathcal{O}_C^{*,+}$ ) désigne le sous-groupe de  $R^*$  (resp.  $\mathcal{O}_C^*$ ) formé des unités congrues à 1 modulo l'idéal maximal, on a des identifications naturelles

$$\mathcal{O}_C^* = \bar{k}^* \times \mathcal{O}_C^{*,+}, \quad R^* = \bar{k}^* \times R^{*,+}, \quad V_{(p)}(\mathcal{O}_C^*) = R^*, \quad V_{(p)}(C^*) = (Fr R)^* ,$$

où  $Fr R$  désigne le corps des fractions de  $R$ . Si  $v$  est une valuation de  $C$  et si  $v_R$  est la valuation de  $Fr R$  qui lui est naturellement associée (cf. n° 1.3.1),

on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}_p(1) & \longrightarrow & R^* & \longrightarrow & \mathcal{O}_C^* \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}_p(1) & \longrightarrow & (Fr R)^* & \longrightarrow & C^* \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow v_R & & \downarrow v \\
 & & & & \mathbb{Q} & = & \mathbb{Q} \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

dont les lignes et les colonnes sont exactes.

**3.1.3.** — Pour tout  $y \in R$ , on note  $[y] \in W(R)$  ( $\subset A_{cris} \subset B_{cris}^+$ ) son représentant de Teichmüller.

Soit  $x = 1 + y \in R^{*,+}$ . Pour  $n \gg 0$ ,  $[y]^n/n \in A_{cris}$ , et la suite  $[y]^n/n$  tend  $p$ -adiquement vers 0. La série

$$\sum_{n>0} (-1)^{n+1} [y]^n/n$$

converge donc vers un élément  $\lambda(x) \in B_{cris}^+$ . L'application

$$\lambda : R^{*,+} \longrightarrow B_{cris}^+$$

est un homomorphisme injectif que l'on étend à  $R^*$  en posant  $\lambda(x) = 0$ , si  $x \in \bar{k}^*$ .

**3.1.4.** — Considérons les couples  $(S, \lambda_S)$  où  $S$  est une  $B_{cris}^+$ -algèbre et

$$\lambda_S : (Fr R)^* \longrightarrow S$$

est un homomorphisme qui prolonge  $\lambda$ . Avec une définition évidente pour les flèches, ces couples forment une catégorie. Il est clair que celle-ci a un objet

initial, unique à isomorphisme unique près. On note  $B_{st}^+$  la  $B_{cris}^+$ -algèbre ainsi obtenue et

$$\lambda : (Fr R)^* \longrightarrow B_{st}^+$$

l'homomorphisme correspondant.

**3.1.5.** — On a donc

$$B_{st}^+ = Sym((Fr R)^*) \otimes_{Sym(R^*)} B_{cris}^+ .$$

En fait  $B_{st}^+$  est un anneau de polynômes à une variable à coefficients dans  $B_{cris}^+$ . Plus précisément, comme  $B_{cris}^+$  est une  $\mathbb{Q}$ -algèbre et comme  $(Fr R)^*/R^*$  est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension un, si l'on choisit un élément  $b \in (Fr R)^*$  qui n'appartient pas à  $R^*$ , l'homomorphisme de  $B_{cris}^+$ -algèbres

$$B_{cris}^+[X] \longrightarrow B_{st}^+ ,$$

qui envoie  $X$  sur  $\lambda(b)$  est un isomorphisme. En outre, pour tout élément  $x \in (Fr R)^*$ , il existe un entier  $r \geq 1$  tel que l'on puisse écrire  $x^r = b^m a$ , avec  $m \in \mathbb{Z}$  et  $a \in R^*$ ; on a alors

$$\lambda(x) = r^{-1} \cdot \lambda(x^r) = r^{-1} \cdot (\lambda(a) + m \cdot \lambda(b)) .$$

**3.1.6.** — On pose enfin

$$B_{st} = B_{cris} \otimes_{B_{cris}^+} B_{st}^+ .$$

C'est donc un anneau de polynômes en une variable à coefficients dans  $B_{cris}$  et c'est aussi  $B_{st}^+[1/t]$ .

Grâce à la propriété universelle qui définit  $B_{st}^+$  l'action de  $G$  s'étend de manière unique à  $B_{st}^+$  et à  $B_{st}$ .

## 3.2. — Frobenius et monodromie

**3.2.1.** — Le Frobenius s'étend de manière canonique à  $B_{st}^+$  et  $B_{st}$ . En effet, dans  $B_{cris}^+$ , on a  $\varphi(\lambda(x)) = p \cdot \lambda(x)$ , pour tout  $x \in R^*$ . On voit donc qu'il y a une manière et une seule d'étendre  $\varphi$  en un endomorphisme de  $B_{st}^+$



de sorte que  $\varphi(\lambda(x)) = p \cdot \lambda(x)$ , pour tout  $x \in (Fr R)^*$ . Bien sûr,  $\varphi$  s'étend aussi à  $B_{st}$  et commute à l'action de  $G$ .

**3.2.2.** — On a des isomorphismes  $(Fr R)^*/R^* \simeq C^*/\mathcal{O}_C^* \simeq \overline{K}^*/\mathcal{O}_{\overline{K}}^* (\simeq \mathbb{Q})$  et l'application

$$\kappa : B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}} (\overline{K}^*/\mathcal{O}_{\overline{K}}^*) \longrightarrow \Omega_{B_{st}/B_{cris}}^1$$

qui envoie  $b \otimes \tilde{x}$  sur  $b \cdot d(\lambda(x))$  où  $\tilde{x}$  est l'image de  $x \in (Fr R)^*$  est un isomorphisme.

**Choisissons** une valuation  $v$  sur  $\overline{K}$ , à valeurs dans  $\mathbb{Q}$ , et notons encore  $v$  son prolongement à  $C$ . On peut considérer  $v$  comme le choix d'un isomorphisme

$$(Fr R)^*/R^* = C^*/\mathcal{O}_C^* = \overline{K}^*/\mathcal{O}_{\overline{K}}^* \simeq \mathbb{Q} .$$

Par extension des scalaires,  $v$  fournit un isomorphisme

$$\tilde{v} : B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}} (\overline{K}^*/\mathcal{O}_{\overline{K}}^*) \longrightarrow B_{st}$$

donc une **dérivation**

$$N := \tilde{v} \circ \kappa^{-1} \circ d : B_{st} \longrightarrow B_{st}$$

que nous appelons **l'opérateur de monodromie** associé à  $v$ . C'est l'unique  $B_{cris}$ -dérivation de  $B_{st}$  à valeurs dans  $B_{st}$  telle que  $N(\lambda(b)) = v_R(b)$  pour tout  $b \in (Fr R)^*$  (où  $v_R$  est la valuation de  $Fr R$  associée à  $v$ ).

**3.2.3.** — On voit que  $N$  commute à l'action de  $G$  et, comme  $\varphi(\lambda(b)) = p\lambda(b)$ , pour tout  $b \in (Fr R)^*$ , que

$$N \circ \varphi = p\varphi \circ N .$$

En outre, on a des suites exactes courtes de  $B_{cris}^+$ -modules

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B_{cris}^+ & \longrightarrow & B_{st}^+ & \xrightarrow{N} & B_{st}^+ \longrightarrow 0 \text{ et} \\ 0 & \longrightarrow & B_{cris} & \longrightarrow & B_{st} & \xrightarrow{N} & B_{st} \longrightarrow 0 . \end{array}$$

**3.2.4. — Remarque :** Un choix naturel pour  $v$  est la valuation  $v_0$  normalisée par  $v_0(p) = 1$ . Nous appelons “**canonique**” l’opérateur de monodromie correspondant.

#### 4. — Comparaisons

##### 4.1. — Le plongement de $B_{cris}$ dans $B_{dR}$

**4.1.1. —** Posons  $W_{K_0}(R) = W(R)[1/p] = K_0 \otimes_W W(R)$  et  $W_K(R) = K \otimes_W W(R) = K \otimes_{K_0} W_{K_0}(R)$ . On a des inclusions naturelles  $W(R) \subset W_{K_0}(R) \subset W_K(R)$ .

Choisissons, comme au n° 2.3.3, un générateur  $\xi$  du noyau de  $\theta : W(R) \rightarrow \mathcal{O}_C$ . Si  $m \in \mathbb{Z}$  et si  $(a_n)_{n \geq m}$  est une suite d’éléments de  $W_K(R)$ , la série  $\sum_{n \geq m} a_n \xi^n / n!$  converge, dans  $B_{dR}$  vers un élément de  $Fil^m B_{dR}$  et tout élément de  $Fil^m B_{dR}$  peut s’écrire (de manière non unique) sous cette forme. Pour qu’un tel élément n’appartienne pas à  $Fil^{m+1} B_{dR}$ , il faut et il suffit que  $\theta(a_m) \neq 0$  (où l’on désigne encore par  $\theta : W_K(R) \rightarrow C$  l’homomorphisme de  $K$ -algèbres déduit de  $\theta : W(R) \rightarrow \mathcal{O}_C$  par extension des scalaires).

Par ailleurs,  $W(R)$  est séparé et complet pour la topologie  $\xi$ -adique et s’identifie donc à un sous-anneau de  $B_{dR}$ .

**4.1.2. —** Si maintenant  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d’éléments de  $W(R)$  tendant  $p$ -adiquement vers 0, la série  $\sum_{n \geq 0} a_n \xi^n / n!$  converge dans  $A_{cris}$  et tout élément de  $A_{cris}$  peut s’écrire (de manière non unique) sous cette forme. On voit que l’on peut choisir les  $a_n$  de façon que, si  $a_n \neq 0$  alors  $\theta(a_n) \neq 0$ .

On en déduit en particulier que l’application naturelle de  $A_{cris}$  dans  $B_{dR}^+$  est injective.

**4.1.3. —** De même, si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d’éléments de  $W_{K_0}(R)$  (resp.  $W_K(R)$ ) tendant  $p$ -adiquement vers 0, la série  $\sum_{n \geq 0} a_n \xi^n / n!$  converge dans  $B_{cris}^+$  (resp.  $K \otimes_{K_0} B_{cris}^+$ ) et tout élément de cet anneau peut s’écrire (de manière non unique) sous cette forme. Ici encore, on peut choisir les  $a_n$  de façon que, si  $a_n \neq 0$  alors  $\theta(a_n) \neq 0$ . Il en résulte que les applications naturelles  $A_{cris} \rightarrow B_{cris}^+ \rightarrow K \otimes_{K_0} B_{cris}^+ \rightarrow B_{dR}^+$  sont injectives. Il en est

de même des applications  $B_{cris} \longrightarrow K \otimes_{K_0} B_{cris} \longrightarrow B_{dR}$  que l'on en déduit en rendant inversible un élément non nul de  $\mathbb{Z}_p(1)$ .

Dans la suite nous utilisons ces injections pour identifier tous ces anneaux, ainsi que  $W(R)$ , à des sous-anneaux de  $B_{dR}$ .

**4.1.4. — Remarque :** Dans [Fo82a], au lieu de  $B_{cris}$ , on utilisait d'autres sous-anneaux de  $B_{dR}$ , les anneaux notés  $B_a$  et  $B$ . Rappelons brièvement comment on les construit : Notons  $\mathfrak{a}_0$  l'idéal de  $R$  formé des éléments  $x$  tels que  $v_R(x) = v_0(x^{(0)}) \geq 1$  (où  $v_0$  est la valuation de  $C$  telle que  $v_0(p) = 1$ ). Pour tout idéal  $\mathfrak{a}$  de  $R$  contenu dans  $\mathfrak{a}_0$ , on note  $S_a$  la sous- $W(R)$ -algèbre de  $W_{K_0}(R) = W(R)[1/p]$  engendrée par les éléments de la forme  $[x]/p$ , avec  $x \in \mathfrak{a}$ ,  $\widehat{S}_a$  le séparé complété de  $S_a$  pour la topologie  $p$ -adique et  $B_a = \widehat{S}_a[1/p]$ . Alors l'inclusion de  $S_a$  dans  $W_{K_0}(R) \subset B_{dR}^+$  se prolonge par continuité en un plongement de  $S_a$ , donc aussi de  $B_a$  dans  $B_{dR}^+$ . On a  $B_{a'}^+ \subset B_a^+$  si  $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$  et on note  $B^+$  l'intersection des  $B_a^+$ . On a  $\mathbb{Z}_p(1) = \mathbb{Z}_p \cdot t \subset B^+$  et on pose  $B_a = B_a^+[1/t]$  et  $B = B^+[1/t]$ .

On vérifie facilement que  $\widehat{S}_{\mathfrak{a}_0^p} \subset A_{cris} \subset \widehat{S}_{\mathfrak{a}_0^{p-1}}$ , donc que

$$B_{\mathfrak{a}_0^p}^+ \subset B_{cris}^+ \subset B_{\mathfrak{a}_0^{p-1}}^+ \quad \text{et} \quad B_{\mathfrak{a}_0^p} \subset B_{cris} \subset B_{\mathfrak{a}_0^{p-1}} .$$

On voit aussi que  $\varphi(\widehat{S}_a) = \widehat{S}_{a^p}$ ,  $\varphi(B_a^+) = B_{a^p}^+$  et  $\varphi(B_a) = B_{a^p}$ . En particulier, on a  $B^+ = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi^n(B_{cris}^+)$  et  $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi^n(B_{cris})$ .

## 4.2. — Construction d'un plongement de $B_{st}$ dans $B_{dR}$

4.2.1. — Soit

$$\log : \mathcal{O}_{\overline{K}}^* \longrightarrow \overline{K}$$

le logarithme  $p$ -adique usuel (si  $a \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^*$  est de la forme  $a = [u] \cdot a^+$ , où  $[u]$  est le représentant de Teichmüller d'un élément de  $k$  et où  $a^+ \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{*,+} = \mathcal{O}_{\overline{K}}^* \cap \mathcal{O}_C^{*,+}$ ,  $\log(a) = \sum_{n>0} (-1)^{n+1} n^{-1} (a^+ - 1)^n$ ).

On choisit un prolongement du logarithme à  $\overline{K}^*$ , i.e. un homomorphisme

$$\log : \overline{K}^* \longrightarrow \overline{K} ,$$

dont la restriction à  $\mathcal{O}_{\overline{K}}^*$  est le logarithme  $p$ -adique usuel, **commutant à l'action de  $G = \text{Gal}(\overline{K}/K)$ .**

Faire un tel choix revient à choisir un élément  $c \in K$  et à décider que

$$\log(p) = c ;$$

en effet, pour tout  $x \in \overline{K}^*$ , il existe  $r, s \in \mathbb{Z}$ , avec  $r > 0$  tels que  $x^r/p^s \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^*$  et on a alors

$$\log(x) = r^{-1}(sc + \log(x^r/p^s)) .$$

On voit aussi qu'il revient au même de choisir un prolongement du logarithme  $p$ -adique usuel à  $\overline{K}^*$  ou à  $C^*$ .

**4.2.2.** — Le choix que l'on vient de faire permet de définir un homomorphisme de  $B_{cris}^+$ -algèbres

$$\iota^+ : B_{st}^+ \longrightarrow B_{dR}^+ .$$

D'après la propriété universelle servant à définir  $B_{st}^+$  (n° 3.1.4), il suffit en effet de définir un homomorphisme

$$\lambda_{dR} : (Fr R)^* \longrightarrow B_{dR}^+ .$$

prolongeant  $\lambda$ .

Commençons par définir  $\lambda_{dR}(x)$  lorsque  $x \in (Fr R)^*$  vérifie  $x^{(0)} \in \overline{K}^*$ . Comme  $B_{dR}^+ \supset \overline{K}$ ,  $[x]/x^{(0)} \in B_{dR}^+$ ; comme  $\theta([x]/x^{(0)}) = 1$ ,  $y = [x]/x^{(0)} - 1$  appartient à l'idéal maximal de  $B_{dR}^+$  et la série

$$\log([x]/x^{(0)}) = \sum_{n>0} (-1)^{n+1} n^{-1} \cdot y^n$$

converge dans  $B_{dR}^+$  et on pose

$$\lambda_{dR}(x) = \log([x]/x^{(0)}) + \log(x^{(0)}) .$$

Dans le cas général, remarquons que tout  $x \in (Fr R)^*$  peut s'écrire (de façon non unique) sous la forme  $x = ab$ , avec  $a \in R^*$  et  $b^{(0)} \in \overline{K}^*$ ; si l'on pose

$$\lambda_{dR}(x) = \lambda(a) + \lambda_{dR}(b) ,$$

on voit que le résultat obtenu est indépendant du choix de l'écriture de  $x$  sous cette forme et que l'application  $\lambda_{dR}$ , ainsi définie, convient.

**4.2.3.** — En rendant un élément non nul de  $\mathbb{Z}_p(1)$  inversible, l'application  $\iota^+$  induit un homomorphisme de  $B_{cris}$ -algèbres

$$\iota : B_{st} \longrightarrow B_{dR} .$$

Par extension des scalaires, l'application  $\iota^+$  (resp.  $\iota$ ) induit un homomorphisme de  $(K \otimes_{K_0} B_{st}^+)$ -algèbres (resp.  $(K \otimes_{K_0} B_{cris})$ -algèbres)

$$\iota_K^+ : K \otimes_{K_0} B_{st}^+ \longrightarrow B_{dR} \text{ (resp. } \iota_K : K \otimes_{K_0} B_{st} \longrightarrow B_{dR}) .$$

**4.2.4. THÉORÈME.** — *Les applications*

$$\iota_K^+ : K \otimes_{K_0} B_{st}^+ \longrightarrow B_{dR} \quad \text{et} \quad \iota_K : K \otimes_{K_0} B_{st} \longrightarrow B_{dR}$$

*sont injectives.*

La preuve est l'objet du n° 4.3.

**4.2.5.** — **Remarques :** a) Dans la suite, nous utilisons les applications  $\iota$  et  $\iota_K$  pour identifier  $B_{st}$  et  $K \otimes_{K_0} B_{st}$  à des sous-anneaux de  $B_{dR}$ . On prendra garde toutefois que cette identification **dépend du choix de l'application log** prolongeant le logarithme  $p$ -adique usuel.

b) On voit facilement que l'image de  $K \otimes_{K_0} B_{st}$  dans  $B_{dR}$  est indépendante du choix du logarithme. En particulier, lorsque  $e = 1$ , l'application  $\iota$  dépend du choix du logarithme mais pas son image; en revanche, l'action de  $\varphi$  sur cette image, déduite par transport de structure de l'action de  $\varphi$  sur  $B_{st}$  en dépend.

c) Pour l'application log, il y a un choix "naturel" consistant à choisir  $\log(p) = 0$ . Nous appelons l'application  $\iota$  (resp.  $\iota_K$ ) correspondante **le plongement canonique de  $B_{st}$  (resp.  $K \otimes_{K_0} B_{st}$ ) dans  $B_{dR}$ .**

d) Tout comme celle de  $B_{dR}$ , les constructions de  $B_{cris}$  et de  $B_{st}$  et leurs plongements dans  $B_{dR}$  sont fonctoriels. De façon précise, si  $K, L, \overline{K}$ .

$\bar{L}$  et  $\nu : \bar{K} \longrightarrow \bar{L}$  sont comme au n° 1.5.6,  $\nu$  induit des homomorphismes continus

$$B_{cris}(\nu) : B_{cris}(K, \bar{K}) \longrightarrow B_{cris}(L, \bar{L}) \text{ et } B_{st}(\nu) : B_{st}(K, \bar{K}) \longrightarrow B_{st}(L, \bar{L}) ,$$

compatibles avec l'action de  $\varphi$  et avec celle de  $N$ , du moins si l'on choisit l'opérateur  $N$  associé à une valuation  $v$  sur  $\bar{L}$  et à sa restriction à  $\bar{K}$ .

Les morphismes  $B_{cris}(\nu)$  et  $B_{dR}(\nu)$  commutent aux plongements naturels de chaque  $B_{cris}$  dans chaque  $B_{dR}$ . Si l'on choisit un logarithme  $\log$  sur  $\bar{K}^*$  et si l'on note  $\iota(K, \bar{K})$  (resp.  $\iota(L, \bar{L})$ ) le plongement de  $B_{st}(K, \bar{K})$  dans  $B_{dR}(K, \bar{K})$  (resp. de  $B_{st}(L, \bar{L})$  dans  $B_{dR}(L, \bar{L})$ ) qui lui est associé (resp. associé au prolongement à  $\bar{L}^*$  de  $\log$ ), on a

$$\iota(L, \bar{L}) \circ B_{st}(\nu) = B_{dR}(\nu) \circ \iota(K, \bar{K}) .$$

Les applications  $B_{cris}(\nu)$  et  $B_{st}(\nu)$  sont injectives et  $B_{st}(L, \bar{L})$  s'identifie à  $B_{cris}(L, \bar{L}) \otimes_{B_{cris}((K, \bar{K}))} B_{st}(K, \bar{K})$ . Ici encore  $B_{cris}(\nu)$  et  $B_{st}(\nu)$  sont des isomorphismes si et seulement si  $\nu$  induit un isomorphisme du complété de  $\bar{K}$  sur celui de  $\bar{L}$ .

#### 4.3. — Preuve du théorème 4.2.4

**4.3.1.** — Commençons par énoncer un lemme. Pour cela, choisissons  $u_0 \in R$  tel que  $u_0^{(0)} = p$ . Alors  $[u_0] - p \in W(R) \subset B_{dR}^+$  et  $\theta([u_0] - p) = 0$ , ce qui fait que la série

$$\log([u_0]/p) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{np^n} \cdot ([u_0] - p)^n$$

converge dans  $B_{dR}^+$ . Par ailleurs, l'inclusion de  $B_{cris}$  dans  $B_{dR}$  permet d'identifier le corps des fractions  $Fr(B_{cris})$  à un sous-corps de  $B_{dR}$ .

LEMME. — *L'élément  $u = \log([u_0]/p) \in B_{dR}^+$  n'appartient pas à  $Fr(B_{cris})$ .*

**4.3.2.** — **Preuve du lemme :** On voit que  $\xi = p - [u_0]$  est un générateur du noyau de  $\theta : W(R) \longrightarrow \mathcal{O}_C$ , donc que  $\xi$  et  $\beta = \xi/p$  sont dans  $Fil^1 B_{dR}^+$  et

pas dans  $Fil^2 B_{dR}^+$ . Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont des éléments de  $W_{K_0}(R) = W(R)[1/p]$ , la série  $\sum_{n \geq 0} a_n \beta^n$  converge dans  $B_{dR}^+$ . Notons  $S = W(R)[[\beta]]$  le sous-anneau de  $B_{dR}^+$  formé des éléments qui peuvent s'écrire sous la forme  $\sum_{n \geq 0} a_n \beta^n$  avec les  $a_n \in W(R)$ . Si, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on pose  $Fil^i S = S \cap Fil^i B_{dR}$ , on voit que  $Fil^i S$  est l'idéal principal engendré par  $\beta^i$ . En particulier, si on note

$$\theta^i : Fil^i S \longrightarrow \mathcal{O}_C$$

l'application qui envoie  $\beta^i \alpha$  sur  $\theta(\alpha)$ , on a  $\theta^i(Fil^i S) = \mathcal{O}_C$ .

Comme  $A_{cris}$  est le sous-anneau de  $B_{dR}^+$  formé des  $\sum_{n \geq 0} a_n \xi^n / n! = \sum_{n \geq 0} (p^n / n!) \cdot a_n \beta^n$  avec les  $a_n \in W(R)$  tendant  $p$ -adiquement vers 0 (cf. n° 4.1.2),  $A_{cris} \subset S$ . On a  $Fr(B_{cris}) = Fr(A_{cris}) \subset Fr(S)$  et il suffit de vérifier que, si  $\alpha \in S$  est non nul, alors  $\alpha u \notin S$ .

Comme  $S$  est séparé pour la topologie  $p$ -adique, il suffit de vérifier que, si  $r \in \mathbb{N}$  et si  $\alpha \in S - pS$ , alors  $p^r \alpha u \notin S$ . Si  $a \in W(R)$  vérifie  $\theta(a) \in p\mathcal{O}_C$ , alors  $a$  appartient à l'idéal de  $W(R)$  engendré par  $p$  et  $\xi = p\beta$ , donc  $a \in pS$ . On en déduit que l'on peut trouver un entier  $i \geq 0$  et des  $b_n \in W(R)$  tels que  $\theta(b_i) \notin p\mathcal{O}_C$  et

$$\alpha = p \left( \sum_{0 \leq n < i} b_n \beta^n \right) + \sum_{n \geq i} b_n \beta^n .$$

Mais  $u = -\sum_{n > 0} \beta^n / n$ . Soit  $j$  un entier  $> r$  tel que  $p^j > i$ . Si  $p^r \alpha u \in S$ , on aurait  $\alpha \cdot \left( \sum_{n > 0} p^{j-1} \beta^n / n \right) \in S$ , donc  $\alpha \cdot \beta^{p^j} / p \in S + Fil^{2p^j} B_{dR}$ , donc

$$b_i \beta^{i+p^j} / p \in S + Fil^{i+p^j+1} B_{dR} .$$

On devrait donc avoir  $\theta^{i+p^j}(b_i \beta^{i+p^j} / p) = \theta^{i+p^j}(b_i \beta^{i+p^j}) / p \in \theta^{i+p^j}(Fil^{i+p^j} S) = \mathcal{O}_C$ ; mais  $\theta^{i+p^j}(b_i \beta^{i+p^j} / p) = \theta^0(b_i) / p \notin \mathcal{O}_C$ , d'où une contradiction.

**4.3.3. — Montrons enfin le théorème :** Il suffit de prouver l'injectivité de  $\iota_K$ . Il est clair qu'il existe  $\hat{u} \in K \otimes_{K_0} B_{st}$  tel que  $K \otimes_{K_0} B_{st} = (K \otimes_{K_0} B_{cris})[\hat{u}]$  et  $\iota_K(\hat{u}) = u$ . Il suffit donc de prouver que  $u$  est transcendant

sur le corps des fractions  $Fr(K \otimes_{K_0} B_{cris})$  de  $K \otimes_{K_0} B_{cris}$  (vu comme sous-corps de  $B_{dR}$ ). Comme  $Fr(K \otimes_{K_0} B_{cris})$  est une extension finie de  $Fr(B_{cris})$ , il suffit de vérifier que  $u$  est transcendant sur  $Fr(B_{cris})$ .

Sinon, soit  $c_0 + c_1X + \dots + c_{d-1}X^{d-1} + X^d$  le polynôme minimal de  $u$  sur  $Fr(B_{cris})$ .

Soit  $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in R$ , avec  $\varepsilon^{(0)} = 1$ ,  $\varepsilon^{(1)} \neq 1$  et  $t = \log(\nu(\varepsilon))$  (cf. n° 1.5.4), de sorte que  $\mathbb{Z}_p(1)$  s'identifie au sous- $\mathbb{Z}_p$ -module libre de rang 1 de  $B_{dR}$  engendré par  $t$ . Soit  $G_0 = \text{Gal}(\overline{K}/K_0)$ . Il existe une application continue

$$\eta : G_0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p$$

telle que, dans  $W_{K_0}(R)$ ,  $g([u_0]/p) = ([u_0]/p) \cdot [\varepsilon]^{\eta(g)}$  pour tout  $g \in G_0$ , et donc que

$$gu = u + \eta(g)t .$$

Le corps  $Fr(B_{cris})$  est stable par  $G_0$  et pour tout  $g \in G_0$ ,

$$g(c_0) + g(c_1)(u + \eta(g)t) + \dots + g(c_{d-1})(u + \eta(g)t)^{d-1} + (u + \eta(g)t)^d = 0 .$$

L'unicité du polynôme minimal de  $u$  sur  $Fr(B_{cris})$  implique que, pour tout  $g \in G_0$ ,  $g(c_{d-1}) + d \cdot \eta(g)t = c_{d-1}$ . Si  $c = c_{d-1} + du$ , on a  $g(c) = c$ , d'où  $c \in (B_{dR})^{G_0} = K_0 \subset B_{cris}$ . On aurait donc  $u = d^{-1}(c - c_{d-1}) \in Fr(B_{cris})$ , ce qui contredit le lemme 4.3.1.

## 5. — Quelques propriétés de $B_{cris}$

### 5.1. — Quelques idéaux de $W(R)$

**5.1.1.** — Pour tout sous-anneau  $A$  de  $B_{dR}$  (en particulier, pour  $A = W(R)$ ,  $W_{K_0}(R)$ ,  $W_K(R)$ ,  $A_{cris}$ ,  $B_{cris}$ ,  $B_{cris}^+$ ), et tout  $r \in \mathbb{Z}$ , on pose  $Fil^r A = A \cap Fil^r B_{dR}$ . En particulier, on a  $Fil^0 A = A \cap B_{dR}^+$  et on note  $\theta : Fil^0 A \longrightarrow C$  la restriction de la projection de  $B_{dR}^+$  sur  $C$ .

Si  $A$  est un sous-anneau de  $B_{cris}$  stable par  $\varphi$  et si  $r \in \mathbb{Z}$ , on pose  $I^{[r]}A = \{a \in A \mid \varphi^n(a) \in Fil^r A, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$ . Si  $I^{[0]}A = A$  (c'est le cas, par exemple, si  $A = W(R)$ ,  $W_{K_0}(R)$ ,  $A_{cris}$  ou  $B_{cris}^+$ ) les  $I^{[r]}A$ , pour  $r \in \mathbb{N}$ , forment une suite décroissante d'idéaux de  $A$ ; on pose aussi  $I^{[1]}A = IA$ .



**5.1.2.** — On choisit  $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in R$ , tel que  $\varepsilon^{(0)} = 1$  et  $\varepsilon^{(1)} \neq 1$ , et on pose  $t = \log([\varepsilon])$ . On a donc  $[\varepsilon] = (\varepsilon, 0, 0, \dots, 0, \dots) \in W(R)$  tandis que  $\mathbb{Z}_p(1)$  s'identifie au sous- $\mathbb{Z}_p$ -module libre de rang 1 de  $A_{\text{cris}}$  engendré par  $t$ . On pose aussi  $\pi_\varepsilon = [\varepsilon] - 1 \in W(R)$ . Le Frobenius est bijectif sur  $W(R)$  et, pour tout  $x \in W(R)$ , on pose  $x' = \varphi^{-1}(x)$ . On pose  $\xi = 1 + [\varepsilon'] + [\varepsilon']^2 + \dots + [\varepsilon']^{p-1}$ . On a donc  $\pi_\varepsilon = \pi'_\varepsilon \cdot \xi$ .

On note  $v_0$  la valuation de  $C$  normalisée par  $v_0(p) = 1$  et  $v_R$  la valuation de  $R$  définie par  $v_R((x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}) = v_0(x^{(0)})$ . Pour tout  $x \in W(R)$ , on note  $\tilde{x} \in R$  sa réduction modulo  $p$ .

On vérifie facilement qu'un élément  $x \in \text{Fil}^1 W(R)$  engendre cet idéal principal de  $W(R)$  si et seulement si  $v_R(\tilde{x}) = 1$ . C'est le cas de  $\xi$ , car  $\theta(\xi) = \sum_{0 \leq i \leq p-1} (\varepsilon^{(1)})^i = 0$  et  $\tilde{\xi} = 1 + \varepsilon' + \varepsilon'^2 + \dots + \varepsilon'^{p-1} = (\varepsilon'^p - 1)/(\varepsilon' - 1) = (\varepsilon - 1)/(\varepsilon' - 1)$  et  $v_R(\tilde{\xi}) = (1 - p^{-1}) \cdot v_R(\varepsilon - 1) = ((p-1)/p) \cdot v_R(\varepsilon - 1) = 1$  puisque  $v_R(\varepsilon - 1) = v_0(\lim_{n \rightarrow \infty} (\varepsilon^{(n)} - 1)^{p^n}) = p/(p-1)$ .

**5.1.3. PROPOSITION.** — Pour tout  $r \in \mathbb{N}$ ,

i) l'idéal  $I^{[r]}W(R)$  est l'idéal principal engendré par  $\pi_\varepsilon^r$  (en particulier,  $I^{[r]}W(R)$  est la puissance  $r$ -ième de  $IW(R)$ );

ii) pour qu'un élément  $a \in I^{[r]}W(R)$  engendre cet idéal, il faut et il suffit que  $v_R(\tilde{a}) = rp/(p-1)$ .

**5.1.4.** — Commençons par le cas  $r = 1$ , qui consiste à préciser un résultat de [Fo82a] (cf. démonstration du lemme 4.16) :

LEMME. — i) l'idéal  $IW(R)$  est principal, engendré par  $\pi_\varepsilon$ ;

ii) pour qu'un élément  $a = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \in IW(R)$  soit un générateur de cet idéal, il faut et il suffit que  $v_R(a_0) = p/(p-1)$  et on a alors  $v_R(a_n) = p/(p-1)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

*Démonstration* : Commençons par rappeler (c'est le résultat de *loc. cit.*) que si  $a = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \in IW(R)$ , alors  $v_R(a_n) \geq p/(p-1)$ , pour tout  $n$  [Cela peut se voir ainsi : si l'on pose  $\alpha_n = a_n^{(n)}$ , on a

$$\theta(\varphi^m a) = \sum p^n \cdot \alpha_n^{p^m} = \alpha_0^{p^m} + \dots + p^m \alpha_m^{p^m} + p^{m+1} \alpha_{m+1}^{p^m} + \dots ;$$

on est ramené à prouver que pour tout couple  $(r, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , on a  $v_R(\alpha_m) \geq p^{-m}(1 + p^{-1} + \dots + p^{-r})$ , ce qui se fait par récurrence sur les couples  $(r, m)$  ordonnés lexicographiquement, en comparant les valuations des termes dominants dans  $\sum p^n \cdot \alpha_n^{p^m}$ ; cette comparaison montre aussi que, si  $v_0(\alpha_0) = p/(p-1)$ , alors  $v_R(\alpha_m) = v_0(\alpha_m^{p^m}) = p/(p-1)$ , pour tout  $m$ ].

Par ailleurs, on a  $\theta(\varphi^n(\pi_\varepsilon)) = \theta([\varepsilon]^{p^n} - 1) = (\varepsilon^{(0)})^{p^n} - 1 = 1 - 1 = 0$  et  $\pi_\varepsilon \in IW(R)$ . Comme  $\tilde{\pi}_\varepsilon = \varepsilon - 1$  et  $v_R(\varepsilon - 1) = p/(p-1)$ , ce qui précède implique que

$$IW(R) \subset (\pi_\varepsilon, p).$$

Comme  $(\mathcal{O}_C)^\mathbb{N}$  est sans  $p$ -torsion, si  $px \in IW(R)$ , alors  $x \in IW(R)$ ; et le lemme résulte de ce que  $W(R)$  est séparé et complet pour la topologie  $p$ -adique.

**5.1.5. — Prouvons la proposition 5.1.3 :** Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , soient  $gr^i W(R) = Fil^i W(R)/Fil^{i+1} W(R)$  et  $\theta^i$  la projection de  $Fil^i W(R)$  sur  $gr^i W(R)$ . Alors  $Fil^i W(R)$  est l'idéal principal engendré par  $\xi^i$  et  $gr^i W(R)$  est un  $\mathcal{O}_C$ -module libre de rang 1 engendré par  $\theta^i(\xi^i) = \theta^1(\xi)^i$ .

On a  $\pi_\varepsilon = \pi'_\varepsilon \xi$ , d'où,

$$\varphi^n(\pi_\varepsilon) = \pi'_\varepsilon \cdot \xi^{1+\varphi+\dots+\varphi^n}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour  $i \geq 1$ ,  $\theta(\varphi^i(\xi)) = p$  et on a donc  $\theta^1(\varphi^n(\pi_\varepsilon)) = p^n(\varepsilon^{(1)} - 1) \cdot \theta^1(\xi)$ .

Montrons l'assertion *i*) : L'inclusion  $\pi_\varepsilon^r W(R) \subset I^{[r]} W(R)$  est claire. L'inclusion dans l'autre sens se fait par récurrence sur  $r$ , le cas  $r = 0$  étant trivial. Supposons donc  $r \geq 1$ , et soit  $a \in I^{[r]} W(R)$ ; on peut supposer  $a = \pi_\varepsilon^{r-1} b$ , avec  $b \in W(R)$ . On doit avoir  $\theta^{r-1}(\varphi^n(a)) = 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Mais

$$\theta^{r-1}(\varphi^n(a)) = \theta(\varphi^n(b)) \cdot (\theta^1(\varphi^n(\pi_\varepsilon)))^{r-1} = (p^n(\varepsilon^{(1)} - 1))^{r-1} \cdot \theta(\varphi^n(b)) \cdot \theta^1(\xi)^{r-1}.$$

Comme  $\theta^1(\xi)^{r-1}$  est un générateur de  $gr^{r-1} W(R)$  et comme  $p^n(\varepsilon^{(1)} - 1) \neq 0$ , on doit avoir  $\theta(\varphi^n(b)) = 0$ , pour tout  $n$ ; donc  $b \in IW(R)$ , et d'après le lemme précédent, il existe  $c \in W(R)$  tel que  $b = \pi_\varepsilon c$ . On a bien  $a \in \pi_\varepsilon^r W(R)$ .

L'assertion *ii*) résulte trivialement de ce que  $v_R(\tilde{\pi}_\varepsilon^r) = r \cdot v_R(\varepsilon - 1) = rp/(p-1)$  et de ce qu'un élément  $x \in W(R)$  est une unité si et seulement si  $\tilde{x}$  est une unité de  $R$ , i.e. si  $v_R(\tilde{x}) = 0$ .

**5.2. — Une description de  $A_{cris}$**

**5.2.1.** Pour tout entier  $n \geq 1$ , soit  $K_n = K_0(\varepsilon^{(n)})$  et soit  $K_\infty = UK_n$ . Posons  $G_0 = \text{Gal}(\overline{K}/K_0)$ ,  $H_0 = \text{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$ ,  $\Gamma_0 = G_0/H_0 = \text{Gal}(K_\infty/K_0)$ ,  $\Gamma_{tor}$  le sous-groupe de torsion de  $\Gamma_0$  et  $\Gamma = \Gamma_0/\Gamma_{tor}$  (qui est donc un groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}_p$ ).

**5.2.2.** Pour toute indéterminée  $X$ , on note  $W\{\langle X \rangle\}$  le séparé complété pour la topologie  $p$ -adique de l'enveloppe à puissances divisées de l'anneau  $W[X]$  des polynômes (ou de l'anneau  $W[[X]]$  des séries formelles, cela revient au même) en une variable  $X$  à coefficients dans  $W$ , relativement à l'idéal engendré par  $X$ . La  $W$ -algèbre  $W\{\langle X \rangle\}$  est donc l'ensemble des éléments de la forme

$$\sum a_m \gamma_m(X), \text{ avec les } a_m \in W \text{ tendant } p\text{-adiquement vers } 0,$$

la multiplication étant induite par  $\gamma_r(X) \cdot \gamma_s(X) = \binom{r+s}{s} \cdot \gamma_{r+s}(X)$ .

**5.2.3.** Le séparé complété pour la topologie  $t$ -adique de l'anneau  $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} \text{Sym}_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(1)$  s'identifie à l'anneau  $K_0[[t]]$  des séries formelles à coefficients dans  $K_0$  en la variable  $t$  (et ne dépend pas du choix du générateur  $t$  de  $\mathbb{Z}_p(1)$ ).

Cet anneau et son corps des fractions  $K_0((t))$  sont munis d'une action naturelle de  $G_0$  qui se factorise à travers  $\Gamma_0$ . On les munit d'un Frobenius, en posant

$$\varphi(\sum a_m t^m) = \sum \sigma(a_m) p^m t^m, \quad \text{si les } a_m \in K_0.$$

Notons  $\Lambda_\varepsilon = W[t]\{\langle t^{p-1}/p \rangle\}$  le séparé complété pour la topologie  $p$ -adique de l'enveloppe à puissances divisées du sous-anneau  $W[t, t^{p-1}/p]$  de  $K_0[[t]]$  relativement à l'idéal engendré par  $t^{p-1}/p$ . Si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $n = r(n) + (p-1)q(n)$ , avec  $r(n), q(n) \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq r(n) < p-1$ , et

$$t^{\{n\}} = t^{r(n)} \gamma_{q(n)}(t^{p-1}/p) = (p^{q(n)} \cdot q(n)!)^{-1} \cdot t^n,$$

alors,  $\Lambda_\varepsilon$  s'identifie au sous-anneau de  $K_0[[t]]$  formé des éléments qui peuvent s'écrire  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n t^{\{n\}}$ , avec les  $a_n \in W$  tendant  $p$ -adiquement vers 0. Il est

indépendant du choix de  $t$  et stable par  $\Gamma_0$  et  $\varphi$ . Lorsque  $p = 2$ , on a aussi  $\Lambda_\varepsilon = W\{\langle t/2 \rangle\}$ .

**5.2.4.** Notons  $S_\varepsilon$  l'adhérence de la sous- $W$ -algèbre de  $W(R)$  engendrée par  $[\varepsilon]$ . On voit que  $S_\varepsilon$  s'identifie à l'anneau  $W[[\pi_\varepsilon]]$  des séries formelles en l'indéterminée  $\pi_\varepsilon = [\varepsilon] - 1$  à coefficients dans  $W$ . On peut identifier  $S_\varepsilon$  à une sous- $W$ -algèbre de  $\Lambda_\varepsilon$  en posant

$$\pi_\varepsilon = e^t - 1 = \sum_{n \geq 1} t^n/n! = \sum_{n \geq 1} c_n t^{\{n\}},$$

où  $c_n = p^{q(n)}q(n)!/n!$  (si  $s(m)$  désigne la somme des chiffres de l'entier  $m$  écrit en base  $p$ , un petit calcul montre que, si  $q = q(n)$ ,  $v_p(c_n) = (q - s(q) + s((p-1)q))/(p-1)$  est  $\geq 0$  et tend vers l'infini avec  $n$ ).

Il est clair que cette identification est compatible avec l'action de  $\Gamma_0$ . Comme, dans  $\Lambda_\varepsilon$ ,  $\varphi(e^t) = e^{pt} = (e^t)^p$ , elle est aussi compatible avec l'action de  $\varphi$ .

Remarquons également que l'idéal de  $\Lambda_\varepsilon$  qui est l'adhérence de l'idéal engendré par les  $t^{\{n\}}$ , avec  $n \geq 1$ , est un  $pd$ -idéal, séparé et complet pour la topologie  $p$ -adique. Comme  $\pi_\varepsilon$  appartient à cet idéal, la série

$$\log([\varepsilon]) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} n^{-1} \pi_\varepsilon^n$$

converge dans  $\Lambda_\varepsilon$  et sa somme est  $t$ . On voit qu'il existe une unité  $v_0$  de  $\Lambda_\varepsilon$  telle que  $\pi_\varepsilon = v_0 t$ .

**5.2.5.** Le sous-corps de  $K_0((t))$  fixe par  $\Gamma_{tor}$  est le corps  $K_0((t^{p-1}))$  si  $p \neq 2$  (resp.  $K_0((t^2))$  si  $p = 2$ ). Il en résulte que le sous-anneau  $\Lambda$  de  $\Lambda_\varepsilon$  fixé par  $\Gamma_{tor}$  est le sous-anneau  $W\{\langle t^{p-1}/p \rangle\}$  (resp.  $W\{\langle t^2/8 \rangle\}$ ) formé des  $\sum a_n t^{\{n\}}$  tels que  $a_n = 0$  si  $p-1$  ne divise pas  $n$  (resp. si 2 ne divise pas  $n$ ) et l'application  $X \mapsto t^{p-1}/p$  (resp.  $t^2/8$ ) induit un isomorphisme - de  $W$ -algèbres topologiques - de  $W\{\langle X \rangle\}$  sur  $\Lambda$ .

Soit  $\pi_0$  la trace, de  $K_0((t))$  à  $K_0((t^{p-1}))$  (resp.  $K_0((t^2))$ ), de  $\pi_\varepsilon$ ; on a

$$\pi_0 = -p + \sum_{a \in \mathbb{F}_p} [\varepsilon]^{[a]} = (p-1) \cdot \sum_{n \geq 1, (p-1)|n} t^n/n!$$

(resp.  $\pi_0 = -2 + [\varepsilon] + [\varepsilon]^{-1} = 2 \cdot \sum_{n \geq 1, 2|n} t^n/n!$ ).

On voit que le sous-anneau  $S$  de  $S_\varepsilon$  formé des éléments fixes par  $\Gamma_{tor}$  s'identifie à l'anneau  $W[[\pi_0]]$  des séries formelles en  $\pi_0$  à coefficients dans  $W$ . Un calcul facile montre que  $\pi_0 \in p\Lambda$  (resp.  $4\Lambda$ ) et qu'il existe une unité  $v$  de  $\Lambda$  telle que

$$\pi_0/p = v \cdot (t^{p-1}/p) \text{ (resp. } \pi_0/8 = v \cdot (t^2/8) \text{)} .$$

En particulier, on a  $\Lambda = W\{\langle \pi_0/p \rangle\}$  (resp.  $W\{\langle \pi_0/8 \rangle\}$ ), complétion  $p$ -adique de la  $pd$ - $W$ -algèbre en "l'indéterminée"  $\pi_0/p$  (resp.  $\pi_0/8$ ).

On voit également que l'application évidente de  $S_\varepsilon \otimes_S \Lambda$  dans  $\Lambda_\varepsilon$  est un isomorphisme.

5.2.6. PROPOSITION. — *Avec les notations qui précèdent,*

(i) *l'élément  $\pi_0$  est un générateur de  $I^{[p-1]}W(R)$  si  $p \neq 2$  (resp. de  $I^{[2]}W(R)$  si  $p = 2$ ).*

(ii) *si  $q = p + \pi_0$ , il existe une unité  $u \in S$  telle que*

$$\varphi\pi_0 = u\pi_0q^{p-1} \text{ si } p \neq 2 \text{ (resp. } u\pi_0q^2 \text{ si } p = 2) .$$

*Démonstration :* Les cas  $p \neq 2$  et  $p = 2$  sont très proches et nous ne traitons que le cas  $p \neq 2$ .

**Prouvons** (i). La norme  $\pi_1$ , de  $K_0((t))$  à  $K_0((t^{p-1}))$ , de  $\pi_\varepsilon$  est un élément de  $S$ . On a  $\pi_1 = \prod_{h \in \Gamma_{tor}} h(\pi_\varepsilon) = \prod_{a \in \mathbb{F}_p^*} ([\varepsilon]^{[a]} - 1)$ ; comme chaque  $[\varepsilon]^{[a]} - 1$  est un générateur de  $IW(R)$ ,  $\pi_1$  est un générateur de  $(IW(R))^{p-1} = I^{[p-1]}W(R)$  (prop. 5.1.3). On a donc (*loc. cit.*)  $v_R(\tilde{\pi}_1) = (p-1) \cdot v(\varepsilon - 1) = p = v_R(\tilde{\pi}_0)$ , ce qui prouve que  $W[[\pi_0]] = W[[\pi_1]]$ , et que si l'on écrit

$$\pi_0 = \sum a_m \pi_1^m, \quad \text{avec les } a_m \in W ,$$

alors  $a_1$  est une unité. Il suffit alors de vérifier que  $a_0$  est nul, ce qui résulte de  $0 = \theta(\pi_0) = a_0$ .

**Prouvons** (ii) : On remarque que  $q'$  et  $\xi = \sum_{0 \leq i \leq p-1} [\varepsilon']^i$  sont tous deux des générateurs de l'idéal noyau de la restriction de  $\theta$  à  $S'_\varepsilon = \varphi^{-1}(S_\varepsilon) =$

$W[[\pi'_\varepsilon]]$ . On a donc  $\pi_\varepsilon = \varphi\pi'_\varepsilon = \pi'_\varepsilon\xi = u'_1\pi'_\varepsilon q'$ , où  $u'_1$  est une unité de  $S'_\varepsilon$ , ou encore  $\varphi\pi_\varepsilon = u_1\pi_\varepsilon q$ , où  $u_1$  est une unité de  $S_\varepsilon$ . Par conséquent,  $\varphi(\pi_\varepsilon^{p-1}) = u_1^{p-1}\pi_\varepsilon^{p-1}q^{p-1}$ ; comme  $\pi_0$  et  $\pi_\varepsilon^{p-1}$  sont tous deux des générateurs de  $S_\varepsilon \cap I^{[p-1]}W(R)$ , il existe une unité  $u$  de  $S_\varepsilon$  telle que  $\varphi\pi_0 = u\pi_0q^{p-1}$ . L'unicité de  $u$  et le fait que  $S = (S_\varepsilon)^{\Gamma_{\text{tor}}}$  impliquent que  $u$  et  $u^{-1} \in S$ .

**5.2.7.** Si  $A_0$  est un anneau commutatif, si  $A_1$  et  $A_2$  sont des  $A_0$ -algèbres et si  $A_0, A_1$  et  $A_2$  sont séparés et complets pour la topologie  $p$ -adique, on note  $A_1 \widehat{\otimes}_{A_0} A_2$  le séparé complété de  $A_1 \otimes_{A_0} A_2$  pour la topologie  $p$ -adique.

**THÉORÈME.** — *Il existe des homomorphismes de  $W(R)$ -algèbres, continus pour la topologie  $p$ -adique,*

$$\alpha : W(R) \widehat{\otimes}_S \Lambda \longrightarrow A_{\text{cris}} \quad \text{et} \quad \alpha_\varepsilon : W(R) \widehat{\otimes}_{S_\varepsilon} \Lambda_\varepsilon \longrightarrow A_{\text{cris}} .$$

*Chacun de ces homomorphismes est unique et est un isomorphisme.*

**5.2.8.** — **Remarques :** *i)* Supposons  $p \neq 2$  et soit

$$\mathfrak{a}_{\text{cris}} = W(R)\{\langle t^{p-1}/p \rangle\} = W(R)\{\langle \pi_0/p \rangle\} = W(R) \widehat{\otimes}_W \Lambda .$$

L'application  $(a_m)_{m \in \mathbf{N}} \mapsto \Sigma a_m \widehat{\otimes} \gamma_m(\pi_0/p)$  définit une bijection entre l'ensemble des suites d'éléments de  $W(R)$  tendant  $p$ -adiquement vers 0 et  $\mathfrak{a}_{\text{cris}}$ . Le théorème précédent signifie que  $\mathfrak{a}_{\text{cris}}$  s'envoie surjectivement sur  $A_{\text{cris}}$  et que le noyau est l'adhérence de l'idéal engendré par  $c = \pi_0 \widehat{\otimes} 1 - p \widehat{\otimes} (\pi_0/p)$ , i.e. l'idéal des  $\Sigma a_m \widehat{\otimes} \gamma_m(\pi_0/p)$  tels qu'il existe une suite  $(b_m)_{m \in \mathbf{N}}$  d'éléments de  $W(R)$  tels que

$$a_0 = \pi_0 b_0 \text{ et } a_m = \pi_0 b_m - m p b_{m-1}, \text{ pour tout } m \geq 1 .$$

On voit que le fait que la suite des  $a_m$  tende  $p$ -adiquement vers 0 implique qu'il en est de même de celle des  $b_m$ . Autrement dit  $A_{\text{cris}} = \mathfrak{a}_{\text{cris}}/c\mathfrak{a}_{\text{cris}}$ , ou encore on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a}_{\text{cris}} \xrightarrow{\times c} \mathfrak{a}_{\text{cris}} \longrightarrow A_{\text{cris}} \longrightarrow 0 .$$

On a un résultat analogue pour  $p = 2$  en posant  $\mathfrak{a}_{\text{cris}} = W(R)\{\langle t/2 \rangle\} = W(R)\{\langle \pi_\varepsilon/2 \rangle\} = W(R) \widehat{\otimes}_W \Lambda_\varepsilon$  et  $c = \pi_\varepsilon \otimes 1 - 2 \otimes (\pi_\varepsilon/2)$ .

ii) L'application de  $\Lambda$  (resp.  $\Lambda_\varepsilon$ ) dans  $W(R)\widehat{\otimes}_S\Lambda$  (resp.  $W(R)\widehat{\otimes}_S\Lambda_\varepsilon$ ), qui à  $x$  associe  $1\widehat{\otimes}x$ , est injective et le théorème nous permet d'identifier  $\Lambda$  et  $\Lambda_\varepsilon$  à des sous-anneaux de  $A_{cris}$ .

**5.2.9. — Prouvons** le théorème pour  $p \neq 2$  (la preuve pour  $p = 2$  est analogue) : Tout d'abord,  $W(R)\widehat{\otimes}_{S_\varepsilon}\Lambda_\varepsilon \simeq W(R)\widehat{\otimes}_{S_\varepsilon}S_\varepsilon \otimes_S \Lambda \simeq W(R)\widehat{\otimes}_S\Lambda$  et les assertions concernant  $\alpha_\varepsilon$  résultent de celles concernant  $\alpha$ .

Prouvons donc les assertions concernant  $\alpha$ . Dans  $W(R)$ , si  $q' = \sum_{a \in \mathbb{F}_p} [\varepsilon']^{[a]}$ , on a  $\pi_0 \equiv \varphi(q') \equiv q'^p \pmod{p}$ ; comme  $\theta(q') = 0$ ,  $\gamma_p(q') \in A_{cris}$  et  $q'^p = p! \cdot \gamma_p(q') \in pA_{cris}$  donc  $\pi_0 \in pA_{cris}$ . On doit donc avoir  $\alpha(1 \otimes (\pi_0/p)) = \pi_0/p$ . Comme  $\theta(\pi_0) = 0$ ,  $\theta(\pi_0/p) = 0$ , et  $\pi_0/p \in Fil^1 A_{cris}$ . L'existence et l'unicité de  $\alpha$  en résulte : avec des notations évidentes, on doit avoir

$$\alpha(\Sigma a_m \otimes \gamma_m(\pi_0/p)) = \Sigma a_m \gamma_m(\pi_0/p) .$$

Il reste à s'assurer que  $\alpha$  est un isomorphisme. Comme source et but sont des anneaux séparés et complets pour la topologie  $p$ -adique, sans  $p$ -torsion, il suffit de prouver que  $\alpha$  induit un isomorphisme sur les réductions mod  $p$ .

Mais la réduction modulo  $p$  de  $A_{cris}$  s'identifie à l'enveloppe à puissances divisées de  $R$  relativement à l'idéal engendré par  $\tilde{q}'$  et l'on en déduit que c'est un module libre sur  $R/q'^p$  de base les images des  $\gamma_{pm}(q')$ , ou encore les  $\gamma_m(q'^p/p)$ . D'après la proposition 5.2.6, il existe une unité  $u$  de  $W(R)$  telle que  $\varphi\pi_0 = u\pi_0q^{p-1}$ . On a donc  $\pi_0 = u'\pi'_0q'^{p-1} = u'(q'^p - pq'^{p-1})$ , ou encore  $\pi_0/p = u'(p^{-1}q'^p - q'^{p-1})$ . On en déduit que  $R/\tilde{q}'^p = R/\tilde{\pi}_0$  et que la réduction mod  $p$  de  $A_{cris}$  est aussi le module libre sur cet anneau de base les images des  $\gamma_m(p^{-1}\pi_0)$ . Il est clair qu'il en est bien de même de la réduction mod  $p$  de  $W(R)\widehat{\otimes}_S\Lambda$ .

### 5.3. — La filtration par les $I^{[r]}$ et les anneaux $W^r(R)$

5.3.1. PROPOSITION. — *Pour tout  $r \in \mathbb{N}$ , posons*

$$I^{[r]} = I^{[r]}A_{cris} = \{a \in A_{cris} \mid \varphi^n a \in Fil^r A_{cris}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\} .$$

*Si  $r \geq 1$ ,  $I^{[r]}$  est un  $pd$ -idéal de  $A_{cris}$ ; c'est l'adhérence du-sous- $W(R)$ -module (qui est aussi l'idéal) engendré par les  $t^{\{s\}}$ , pour  $s \geq r$ .*

*Preuve* : Soit  $I(r)$  l'adhérence du  $W(R)$ -module engendré par les  $t^{\{s\}}$ , avec  $s \geq r$ . Il est clair que  $I(r) \subset I^{[r]}$  et que, si  $r \geq 1$ , c'est un  $pd$ -idéal.

L'assertion revient à vérifier que  $I^{[r]} \subset I(r)$  pour tout  $r$ , ce que nous allons faire par récurrence sur  $r$ , le cas  $r = 0$  étant trivial.

Supposons donc  $r \geq 1$  et soit  $a \in I^{[r]}$ . L'hypothèse de récurrence nous permet d'écrire  $a$  sous la forme

$$a = \sum_{s \geq r-1} a_s t^{\{s\}},$$

où les  $a_s \in W(R)$  tendent  $p$ -adiquement vers 0. Si  $b = a_{r-1}$ , on a  $a = bt^{\{r-1\}} + a'$ , avec  $a' \in I(r)$  et on doit avoir  $bt^{\{r-1\}} \in I^{[r]}$ . Mais  $\varphi^n(bt^{\{r-1\}}) = p^{(r-1)n} \cdot \varphi^n(b) \cdot t^{\{r-1\}} = c_{r,n} \cdot \varphi^n(b) \cdot t^{r-1}$ , où  $c_{r,n}$  est un nombre rationnel non nul. Comme  $t^{r-1} \in \text{Fil}^{r-1} - \text{Fil}^r$ , on doit avoir  $b \in I^{[1]} \cap W(R)$ , qui est, d'après la proposition 5.1.3, l'idéal engendré par  $\pi_\varepsilon$ . Donc  $bt^{\{r-1\}}$  appartient à l'idéal de  $A_{cris}$  engendré par  $\pi_\varepsilon t^{\{r-1\}}$ . Mais, dans  $\Lambda_\varepsilon$ , donc a fortiori dans  $A_{cris}$ ,  $t$  et  $\pi_\varepsilon$  engendrent le même idéal. Donc  $bt^{\{r-1\}}$  appartient à l'idéal engendré par  $t \cdot t^{\{r-1\}}$  qui est bien contenu dans  $I(r)$ .

**5.3.2. — Remarques :** *i*) La proposition dit en particulier que  $I^{[r]}$  est la  $r$ -ième puissance divisée du  $pd$ -idéal  $I^{[1]}$ . Dans toute la suite, on pose  $I = I^{[1]}$ , et, pour tout sous-anneau  $A$  de  $A_{cris}$ , on pose  $IA = A \cap I$  et  $I^{[r]}A = A \cap I^{[r]}$ . Ces notations sont compatibles avec celles que l'on avait utilisées pour  $W(R)$ .

*ii*) Le fait que  $I$  soit un  $pd$ -idéal n'est pas surprenant. Si l'on note  $W(\mathcal{O}_C)$  l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $\mathcal{O}_C$ , l'idéal  $V \cdot W(\mathcal{O}_C)$  est muni de puissances divisées canoniques, il existe un unique  $pd$ -homomorphisme

$$\rho : A_{cris} \longrightarrow W(\mathcal{O}_C)$$

tel que, pour tout  $a \in W(R)$ , les composantes fantômes de  $\rho(a)$  soient les  $\theta(\varphi^n a)$  et  $I$  est le noyau de  $\rho$ .

**5.3.3. —** Le corps résiduel de l'anneau local  $R$  s'identifie au corps résiduel  $\bar{k}$  de  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ . La projection de  $R$  sur  $\bar{k}$  induit par functorialité un homomorphisme

$$\nu : W(R) \longrightarrow W(\bar{k})$$



et nous notons  $W_+(R)$  son noyau. Comme  $\nu$  est l'identité sur  $W(\bar{k})$ , on a  $W(R) = W(\bar{k}) \oplus W_+(R)$ . Comme  $\nu(\ker \theta)$  est le  $pd$ -idéal  $pW(\bar{k})$ ,  $\nu$  s'étend en un  $pd$ -homomorphisme de  $A_{cris}$  sur  $W(\bar{k})$ , dont nous notons  $A_{cris,+}$  le noyau.

**5.3.4.** — On note  $\bar{\mathbb{N}}$  l'ensemble qui est l'union disjointe de  $\mathbb{N}$  et de l'ensemble des  $r^+$  pour  $r \in \mathbb{N}$ . On munit  $\bar{\mathbb{N}}$  d'une relation d'ordre total en convenant que, pour tout  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r < r^+ < r + 1$ .

Si  $r \in \mathbb{N}$ , on pose  $I^{[r^+]} = I^{[r]} \cdot A_{cris,+}$ . Si  $A$  est un sous-anneau de  $A_{cris}$ , on pose  $I^{[r^+]}A = A \cap I^{[r^+]}$ . En particulier,  $I^{[r^+]}W(R) = I^{[r]}W(R) \cdot W_+(R)$ .

On a ainsi obtenu **une filtration décroissante, indexée par  $\bar{\mathbb{N}}$ , de  $A_{cris}$**  et de ses sous-anneaux par des idéaux  $(I^{[r]})_{r \in \bar{\mathbb{N}}}$  (resp.  $(I^{[r]}A)_{r \in \bar{\mathbb{N}}}$ ).

Pour tout  $r \in \bar{\mathbb{N}}$ , on pose

$$A_{cris}^r = A_{cris}/I^{[r]} \quad \text{et} \quad W^r(R) = W(R)/I^{[r]}W(R) .$$

**5.3.5. PROPOSITION.** — *Pour tout  $r \in \bar{\mathbb{N}}$ , les  $W$ -algèbres  $A_{cris}^r$  et  $W^r(R)$  sont sans  $p$ -torsion. L'application naturelle*

$$\iota^r : W^r(R) \longrightarrow A_{cris}^r$$

*est injective et son conoyau est de  $p$ -torsion, annulé par  $p^m m!$ , si  $m$  est le plus grand entier tel que  $(p-1)m < r$ .*

*Preuve :* Pour  $r \in \mathbb{N}$ , l'anneau  $A_{cris}/\text{Fil}^r A_{cris}$  est sans torsion. Il en est de même de  $A_{cris}^r$  qui est le quotient de  $A_{cris}$  par l'idéal noyau de l'homomorphisme

$$A_{cris} \longrightarrow (A_{cris}/\text{Fil}^r A_{cris})^{\mathbb{N}} ,$$

envoyant  $x$  sur  $(\varphi^n x \bmod \text{Fil}^r)_{n \in \mathbb{N}}$ . Le fait que  $A_{cris}^r$  soit sans torsion résulte alors facilement de ce que  $W(\bar{k})$  est sans torsion.

Par construction,  $\iota^r$  et  $\iota^{r^+}$  sont injectives (et, en particulier,  $W^r(R)$  et  $W^{r^+}(R)$  sont sans  $p$ -torsion).

On voit que, comme  $W(R)$ -module,  $A_{cris}^r$  (resp.  $A_{cris}^{r^+}$ ) est engendré par les images des  $\gamma_s(p^{-1}\pi_0)$ , pour  $0 \leq (p-1)s < r$  (resp.  $0 \leq (p-1)s \leq r$ ). La

fin de la proposition résulte de ce que la suite des  $v_p(p^s s!)$  est croissante et de ce que  $p^s s! \cdot \gamma_s(p^{-1}\pi_0) \in W(R)$ .

**5.3.6.** — Pour tout sous-anneau  $A$  de  $A_{cris}$  et tout  $r \in \mathbb{N}$ , on pose

$$Fil^r A = A \cap Fil^r A_{cris} \quad \text{et} \quad Fil_p^r A = \{x \in Fil^r A \mid \varphi x \in p^r A\}.$$

PROPOSITION. — *i) Pour tout  $r \in \mathbb{N}$ , la suite*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p t^{\{r\}} \longrightarrow Fil_p^r A_{cris} \xrightarrow{p^{-r}\varphi-1} A_{cris} \longrightarrow 0$$

*est exacte.*

*ii) L'idéal  $Fil_p^r A_{cris}$  est l'adhérence du sous- $W(R)$ -module (ou de l'idéal, cela revient au même) de  $A_{cris}$  engendré par les  $q^j \gamma_n(p^{-1}t^{p-1})$ , pour  $j + (p-1)n \geq r$ .*

*iii) Soit  $m$  le plus grand entier tel que  $(p-1)m < r$ .*

*Pour tout  $x \in Fil^r A_{cris}$ ,  $p^m m! \cdot x \in Fil_p^r A_{cris}$ .*

*Preuve :* Posons  $\nu = p^{-r}\varphi - 1$ . Il est clair que  $\mathbb{Z}_p t^{\{r\}} \subset \text{Ker } \nu$ . Inversement, si  $x \in \text{Ker } \nu$ ,  $x \in I^{\{r\}}$  et peut s'écrire

$$x = \sum_{s \geq r} a_s t^{\{s\}}, \quad \text{avec les } a_s \in W(R) \text{ tendant } p\text{-adiquement vers } 0.$$

On voit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(p^{-r}\varphi)^n(x) \equiv \sigma^n(a_r) t^{\{r\}} \pmod{p^n A_{cris}}$  et on en déduit que  $x$  peut s'écrire  $x = bt^{\{r\}}$ , avec  $b \in W(R)$ . On doit avoir alors  $\sigma b = b$ , i.e.  $b \in \mathbb{Z}_p$ .

Si  $j, n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\varphi(q^j \gamma_n(t^{p-1}/p)) = q^j p^{n(p-1)} \gamma_n(t^{p-1}/p) = p^{j+n(p-1)} (1 + p^{-1}\pi_0)^j \gamma_n(t^{p-1}/p).$$

En particulier, si  $N$  est l'adhérence du sous- $W(R)$ -module de  $A_{cris}$  engendré par les  $q^j \gamma_n(p^{-1}t^{p-1})$ , avec  $j + n(p-1) \geq r$ ,  $N \subset Fil_p^r A_{cris}$ .

Comme  $\mathbb{Z}_p t^{\{r\}} \subset N$ , pour prouver les deux premières assertions, il suffit de vérifier que, pour tout  $a \in A_{cris}$ , il existe  $x \in N$  tel que  $\nu(x) = a$ . Comme  $N$  et  $A_{cris}$  sont séparés et complets pour la topologie  $p$ -adique, il suffit de

montrer que, pour tout  $a \in A_{cris}$ , il existe  $x \in N$  tel que  $\nu(x) \equiv a \pmod{p}$ .  
 Si  $a = \sum_{n>r/(p-1)} a_n \gamma_n(p^{-1}t^{p-1})$ , avec les  $a_n \in W(R)$ , il n'y a qu'à prendre  $x = -a$ .

On est alors ramené à vérifier que, pour tout  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $(p-1)i \leq r$  et tout  $b \in W(R)$ , il existe  $x \in N$  tel que  $\nu(x) - b\gamma_i(p^{-1}t^{p-1})$  appartient à l'idéal  $M$  engendré par  $p$  et les  $\gamma_n(p^{-1}t^{p-1})$ , avec  $n > i$ . Il suffit de prendre  $x = yq^{r-(p-1)i}\gamma_i(p^{-1}t^{p-1})$  avec  $y \in W(R)$  solution de l'équation

$$\varphi y - q^{r-(p-1)i}y = b .$$

Montrons enfin (iii). Soit  $x \in Fil^r A_{cris}$ . D'après la proposition 5.3.5, on peut écrire

$$p^m m! \cdot x = y + z, \quad \text{avec } y \in W(R) \quad \text{et } z \in I^{[r]} .$$

Comme  $I^{[r]} \subset Fil^r A_{cris}$ , on doit avoir  $y \in Fil^r W(R) = q^{r'}W(R) \subset N$ . L'assertion résulte de ce que l'on a aussi  $I^{[r]} \subset N$ .

5.3.7. THÉORÈME. — *i) Soit*

$$B'_{cris} = \{x \in B_{cris} \mid \varphi^n x \in Fil^0 B_{cris}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\} .$$

Alors  $\varphi(B'_{cris}) \subset B^+_{cris} \subset B'_{cris}$  si  $p \neq 2$  et  $\varphi^2(B'_{cris}) \subset B^+_{cris} \subset B'_{cris}$  si  $p = 2$ .

*ii) Pour tout  $r \in \mathbb{N}$ , la suite*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p(r) \longrightarrow Fil^r B^+_{cris} \xrightarrow{p^{-r}\varphi-1} B^+_{cris} \longrightarrow 0$$

*est exacte.*

*iii) Pour tout  $r \in \mathbb{Z}$ , la suite*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p(r) \longrightarrow Fil^r B_{cris} \xrightarrow{p^{-r}\varphi-1} B_{cris} \longrightarrow 0$$

*est exacte.*

*Preuve :* Montrons (i). L'inclusion  $B_{cris}^+ \subset B'_{cris}$  est triviale. Inversement, soit  $x \in B'_{cris}$ . Il existe  $r, j \in \mathbb{N}$  et  $y \in A_{cris}$  tels que  $x = t^{-r} p^{-j} y$ . Si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi^n(x) = p^{-nr-j} t^{-r} \varphi^n(y)$ , et on doit avoir  $\varphi^n(y) \in Fil^r A_{cris}$  pour tout  $n$ , donc  $y \in I^{[r]}$ . D'après la proposition 5.3.1, on peut écrire  $y = \sum_{m \geq 0} a_m t^{\{m+r\}}$ , avec les  $a_m \in W(R)$  tendant  $p$ -adiquement vers 0. On a donc  $x = p^{-j} \cdot \sum_{m \geq 0} a_m t^{\{m+r\}-r}$  et  $\varphi x = p^{-j-r} \cdot \sum_{m \geq 0} \varphi(a_m) p^{m+r} t^{\{m+r\}-r}$ .

Un calcul simple montre que  $\varphi x = p^{-j-r} \cdot \sum_{m \geq 0} c_m \varphi(a_m) t^m$ , où  $c_m$  est un nombre rationnel vérifiant

$$v_p(c_m) \geq (m+r)(1 - (p-1)^{-1} - (p-1)^{-2}) .$$

Si  $p \neq 2$ , c'est donc un entier et  $\varphi x \in p^{-j-r} W(R)[[t]] \subset p^{-j-r} A_{cris} \subset B_{cris}^+$ . Pour  $p = 2$ , la démonstration est analogue.

L'assertion (ii) résulte de la proposition 5.3.6.

Montrons enfin (iii). D'après (ii), pour tout entier  $i$  tel que  $r+i \geq 0$ , on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p(r+i) \longrightarrow Fil^{r+i} B_{cris}^+ \longrightarrow B_{cris}^+ \longrightarrow 0 ,$$

qui, en tensorisant par  $\mathbb{Q}_p(-i)$ , donne naissance à une autre suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p(r) \longrightarrow t^{-i} Fil^{r+i} B_{cris}^+ \longrightarrow t^{-i} B_{cris}^+ \longrightarrow 0 ;$$

le résultat cherché s'en déduit par passage à la limite.