Astérisque

JEAN-MARC FONTAINE

Introduction

Astérisque, tome 223 (1994), p. 3-8
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__223__3_0>

Introduction

Ce volume contient essentiellement la rédaction des exposés du séminaire sur les périodes p–adiques organisé à l'I.H.E.S., à Bures–sur–Yvette, en 1988[1] et je voudrais commencer par présenter mes plus plates excuses pour le délai ridiculement long qui se sera écoulé entre ce séminaire et sa parution, délai dont je suis en très grande partie responsable.

Je renvoie à [3] et [5] pour un historique du sujet mais je voudrais faire ici un bref historique du séminaire lui–même, qui trouve son origine dans une conjecture de Jannsen.

Soient K un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, à corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$, K_0 le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. J'avais conjecturé (cf. [2], conj. C_{dR}) l'existence, pour toute

---

[1] Le programme de ce séminaire avait été le suivant :

1. (2/2/88) J.–M. Fontaine : Exposé introductif.
2. (16/2/88) J.–P. Wintenberger : Le corps des périodes p–adiques.
3. (23/2/88) B. Mazur : Monodromie p–adique pour les formes modulaires.
4. (1/3/88) J.–M. Fontaine : Représentations p–adiques semi–stables et monodromie.
5. (8/3/88) L. Illusie : Autour du théorème de monodromie ℓ–adique.
6. (15/3/88) B. Perrin–Riou : Représentations p–adiques ordinaires.
7. (22/3/88) J.–M. Fontaine : Décomposition de Hodge–Tate pour les 1–motifs.
8. (12/4/88) et 9. (19/4/88) L. Illusie : Variétés semi–stables ordinaires, d'après Hyodo.
10. (26/4/88) et 11. (3/5/88) K. Kato : On Fontaine's "de Rham conjecture".
12. (10/5/88) M. Raynaud : Réalisation de de Rham des 1–motifs.
13. (17/5/88) J.–P. Wintenberger : Variation de structures de Hodge p–adiques.
14. (17/5/88, à Orsay) J.–M. Fontaine : Représentations galoisiennes potentiellement semi–stables.

variété X projective et lisse sur K, d'un isomorphisme de comparaison entre la cohomologie étale p–adique $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$ et la cohomologie de de Rham $H^m_{dR}(X/K)$, i.e. d'un isomorphisme canonique, fonctoriel et compatible avec toutes les structures

$$B_{dR} \otimes_{\mathbf{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p) \simeq B_{dR} \otimes_K H^m_{dR}(X/K)\,,$$

où B_{dR} est le "corps des périodes p–adiques". J'avais conjecturé aussi que dans le cas de bonne réduciton, on devait pouvoir faire mieux (conj. C_{cris}), c'est–à–dire récupérer la cohomologie étale p–adique à partir de la cohomologie cristalline de la fibre spéciale – considérée comme un K_0–espace vectoriel D muni d'un Frobenius et d'une filtration sur $K \otimes_{K_0} D$ grâce à la comparaison avec la cohomologie de de Rham – et vice versa.

Après des résultats partiels dus à divers auteurs, Faltings [1] prouvait les conjectures C_{cris} et C_{dR}[2]. Peu de temps auparavant, Jannsen [6], motivé par ses recherches sur la cohomologie galoisienne des représentations ℓ–adiques associées aux variétés algébriques sur les corps de nombres, suggérait que, dans le cas de mauvaise réduction, il devait exister des structures supplémentaires, en particulier un opérateur de monodromie comme dans le cas ℓ–adique. Ceci m'amena à construire l'anneau B_{st} qui contient l'anneau B_{cris} utilisé pour formuler C_{cris}. La conjecture de Jannsen se reformule alors (conj. C_{st}) en affirmant l'existence, pour une variété X comme ci–dessus, lorsqu'elle a "réduction semi–stable", d'une cohomologie qui généralise la cohomologie cristalline et d'un isomorphisme de comparaison entre cette cohomologie et la cohomologie étale p–adique. En utilisant les théorèmes de comparaison dans le cas de bonne réduction et le théorème de réduction semi–stable, je pus prouver C_{st} pour les variétés abéliennes (et même pour les 1–motifs).

Ceci nous conduisit à mettre sur pieds un séminaire autour de C_{dR}, C_{cris} et C_{st} et nous eûmes la chance de voir le sujet se développer au fur et à mesure que le séminaire avançait. En particulier,

– la conjecture C_{st} fut confortée par les travaux de Mazur, Tate et Teitelbaum [7] sur la représentation p–adique associée à une forme modulaire

---

[2] Du moins dans le cas de bonne réduction. Il y a un point obscur dans la preuve de C_{dR} et il n'est pas clair que la démonstration s'applique sans hypothèse restrictive.

de poids > 2 dont le niveau est exactement divisible par p : on comprenait comment cette représentation de dimension 2 pouvait être irréductible, malgré l'existence d'un opérateur de monodromie qui semblait décomposer l'espace de la représentation en somme directe de deux droites, on découvrait aussi une interprétation galoisienne conjecturale du nouvel invariant qu'ils avaient mis en évidence[3] ;

– nous fûmes conduit, B. Mazur et moi, à conjecturer que les représentations ℓ–adiques de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ qui "proviennent de la géométrie algébrique" sont exactement celles qui sont non ramifiées en dehors d'un nombre fini de places et sont potentiellement semi–stables en $p = \ell$ (cf. [4] pour un énoncé précis et pour une discussion de quelques travaux récents qui semblent étayer cette conjecture) ;

– mais surtout, alors que nous venions d'expliquer, Luc Illusie et moi, à Kazuya Kato qui se trouvait être à Orsay, ce qu'était la conjecture C_{st}, son élève, Osamu Hyodo, resté à Tokyo, lui écrivait pour lui dire comment, en utilisant un "complexe de de Rham–Witt à pôles logarithmiques", il pensait pouvoir construire une cohomologie qui s'avéra être celle que nous cherchions. Dès lors, on travailla dur, à Bures–Orsay et à Tokyo, et on aboutit aux exposé V et VI du présent volume qui, sans démontrer C_{st} en général, donnent toutefois des résultats substantiels sur la question.

Voici maintenant un très bref aperçu du contenu de chacun des exposés rédigés :

– Dans l'exposé I, Luc Illusie décrit quelques aspects, tournant autour du théorème de monodromie locale de Grothendieck, des analogues ℓ–adiques et analytiques complexes de certains des problèmes qui sont abordés dans la suite dans le cadre p–adique.

– Dans l'exposé II, on construit et on étudie quelques propriétés du corps des périodes p–adiques B_{dR} et de quelques–uns de ses sous–anneaux (en particulier B^+_{dR}, B_{cris} et B_{st}). Dans un appendice, Pierre Colmez montre que

[3] L'exposé de B. Mazur sur ce sujet n'a pas été rédigé. On ne sait toujours pas prouver que la représentation associée à une telle forme modulaire est bien semi–stable.

la clôture algébrique $\overline{K}$ de K est dense dans B_{dR}^{+}.

– L'exposé III a pour but l'étude des représentations p–adiques de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$: on introduit une hiérarchie entre ces représentations : cristallines $\Longrightarrow$ semi–stables $\Longrightarrow$ potentiellement semi–stables $\Longrightarrow$ de Rham $\Longrightarrow$ Hodge–Tate ; on explique quel genre de structure algébrique est associé à une telle représentation (par exemple, dans le cas semi–stable, on obtient ce qu'on appelle un (φ, N)–module filtré) ; on montre que lorsque la représentation est potentiellement semi–stable, elle est déterminée par cette structure.

– Dans l'exposé IV, Bernadette Perrin–Riou définit les représentations p–adiques ordinaires, montre qu'elles sont semi–stables et déterminent les (φ, N)–modules filtrés auxquelles elles correspondent. Dans un appendice, Luc Illusie explique les résultats de Bloch et Kato (cas de bonne réduction) et de Hyodo (cas de réduction semi–stable) qui montrent que la cohomologie étale p–adique d'une variété propre et lisse sur K "ayant réduction ordinaire" est ordinaire.

– Dans l'exposé V, Osamu Hyodo et Kazuya Kato définissent la cohomologie cristalline à pôles logarithmiques. Ceci leur permet en particulier d'associer à une variété propre et lisse X sur K munie d'un modèle sur les entiers à réduction semi–stable et à tout entier $m \geq 0$ un (φ, N)–module filtré D qui dans le cas où le modèle a bonne réduction n'est autre que le m–ième groupe de cohomologie cristalline de la fibre spéciale munie de la filtration fournie par la comparaison entre cette cohomologie et la cohomologie de de Rham de la fibre générique.

– Dans l'exposé VI, Kazuya Kato démontre la conjecture C_{st} pour une variété X comme ci–dessus lorsque sa dimension est $< (p-1)/2$; autrement dit, il montre que le module D ci–dessus détermine une représentation p–adique semi–stable de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ (via la recette expliquée dans l'exposé III) et que celle–ci s'identifie à $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$.

– Dans l'exposé VII, Michel Raynaud étudie les 1–motifs sur le corps K. Il montre que, du point de vue rigide analytique, tout 1–motif est canoniquement quasi–isomorphe à un 1–motif dont la variété semi–abélienne sous–jacente a potentiellement bonne réduction. Ceci lui permet d'étudier la monodromie de ce 1–motif ainsi que ses réalisations ℓ–adiques.

– L'exposé VIII donne une représentation unifiée de l'étude des représentations ℓ–adiques potentiellement semi–stables de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ (avec $\ell =$ ou $\neq p$). En particulier, on explique comment, lorsque le corps résiduel est fini, on peut associer à une telle représentation une représentation du groupe de Weil–Deligne de K, même lorsque $\ell = p$.

– Dans l'exposé IX enfin, Jean–Pierre Wintenberger donne une version relative du théorème de comparaison entre cohomologie étale p–adique et cohomologie de de Rham pour un schéma abélien, moyennant des hypothèses assez générales. Sa construction utilise une version relative de l'anneau B_{dR}^{+} construit dans l'exposé II.

RÉFÉRENCES

[1] G. Faltings. — Crystalline cohomology and p–adic Galois representations, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, The Johns Hopkins University Press, 1989, 25–80.

[2] J.–M. Fontaine. — Sur certains types de représentations p–adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti–tate, *Ann. of Maths*, 115 (1982), 529–577.

[3] J.–M. Fontaine and L. Illusie. — p–adic periods : a survey *in* Proceedings of the Indo–French Conference on Geometry, NBHM, Hindustan Book Agency, Dehli (1993), 57–93.

[4] J.–M. Fontaine and B. Mazur. — Geometric Galois Representations, *en préparation*.

[5] L. ILLUSIE. — Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p–adique [d'après G. Faltings, J.–M. Fontaine et al.] Séminaire Bourbaki n° 726, juin 1990, **Astérisque** 189–190 (1990), 325–374.

[6] U. JANNSEN. — On the ℓ–adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology, *in* Galois Groups over $\mathbb{Q}$, MSRI Pub. 16, Springer (1989), 315–360.

[7] B. MAZUR, J. TATE and J. TEITELBAUM. — On p–adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton–Dyer, *Inv. Math.* 84 (1986), 1–48.

Je voudrais remercier tous ceux qui m'ont aidé à la mise au point de ce séminaire et tout particulièrement Luc Illusie. Il est peu de dire que ce volume n'aurait jamais vu le jour sans son aide efficace, constante et généreuse.

Mes remerciements vont également à Mmes Bonnardel et Le Bronnec qui ont assuré avec leur compétence habituelle et une patience infinie la frappe des différentes versions des différents manuscrits.

Je ne peux pas terminer cette introduction sans évoquer la mémoire d'Osamu Hyodo. Peu de temps après la fin du séminaire, il vint passer quelques temps à Orsay et nous eûmes le plaisir de faire sa connaissance. C'était l'un des plus brillants mathématiciens de sa génération mais c'était surtout quelqu'un de très ouvert, curieux de tout et toujours souriant. Malgré les différences d'âge et de culture, je le considérais comme un ami. Le 22 avril 1989, il décidait de mettre fin à ses jours. Près de cinq ans après, c'est toujours avec la même émotion que nous évoquons son souvenir.

A Orsay, le 30 mars 1994

Jean–Marc Fontaine