Astérisque

MONGI BLEL

Sur le cône tangent associé à un courant positif fermé

Astérisque, tome 217 (1993), p. 29-38
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__217__29_0>

Sur le cône tangent associé à un courant positif fermé

Mongi BLEL

1- Introduction et énoncé des résultats . — On se donne un courant positif fermé T de bidegré (p,p) sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ avec $1 \leq p \leq n-1$. On suppose que $O \in \Omega$. Le "cône tangent" à T en O s'il existe est la limite faible au sens des courants de la famille $((h_r)^*T)_{r>0}$ quand r tend vers 0. Le problème de l'existence du cône tangent a été posé par R.Harvey [4] en 1977. Dans les travaux de C.O.Kiselman [5],puis de l'auteur en collaboration avec J.P.Demailly et M.Mouzali [1] il est répondu négativement à ce problème. Dans [5] C.O.Kiselman a construit une fonction plurisousharmonique φ sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$, telle que le courant $T = i\partial\bar{\partial}\varphi$ associé n'admet pas de cône tangent en O. Dans [1] on donne des conditions suffisantes pour que le cône tangent à un courant positif fermé T existe. On notera K_p l'ensemble des courants positifs fermés coniques de bidegré (p,p) sur $\mathbb{C}^n$ et de nombre de Lelong égal à 1 en O. C'est une partie convexe métrisable et faiblement compacte dans l'espace des courants. Pour tout courant positif fermé T, l'ensemble des valeurs limites de la famille $((h_r)^*T)_{r<1}$ est une partie compacte connexe contenue dans $m.K_p$, où m est le nombre de Lelong de T en O. Inversement si on se donne une partie M connexe fermée de K_1, il existe un courant positif fermé T de type $(1,1)$ telle que M soit l'ensemble des valeurs limites de la famille $((h_r)^*T)_{r>0}$ (cf [1] et [5]). Dans ce travail on généralise ces résultats pour les courants de type (p,p). On utilise la méthode de recollement par partition de l'unité en ajoutant un courant correctif de nombre de Lelong nul pour avoir la positivité. On démontre le théorème suivant :

Théorème 1 -1 . —

Soit M une partie connexe fermée de K_p où $p \geq 2$. Il existe un courant positif fermé T de bidegré (p,p) sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$ tel que la famille $((h_r)^*T)_{r>0}$ admet M comme ensemble de valeurs limites.

Dans ce travail on donne une esquisse de la démonstration de ce théorème et on donne une condition nécessaire et suffisante relative à la mesure trace pour les courants de type (p,p) ($p = 1$ ou $n-1$) pour l'existence du cône tangent. Les détails de démonstrations se trouvent dans l'article original de l'auteur [2].

On démontre en particulier :

Théorème 1-2 . —

Soit T un courant positif fermé de bidimension (p,p) sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ contenant O avec $p = 1$ ou $n-1$. Une condition nécessaire et suffisante pour que le courant T admette un cône tangent en O est que la famille de mesures $r^{2p}(h_r)^*\sigma_T$ admette une limite au sens vague des mesures quand r tend vers 0, où σ_T représente la mesure trace du courant T.

On montre que cette condition n'est pas suffisante pour les courants de bidimension (p,p) en général, avec $2p \leq n-1$. Le cas général et les détails de démonstrations paraîtront dans [2].

Nous utilisons les notations classiques : $\alpha = i\partial\bar{\partial}Log|z|$, $\beta = (i/2)\partial\bar{\partial}|z|^2$ où $z \in \mathbb{C}^n$ et $n \geq 2$. On note

$$T = \sum_{|I|=|J|=k} T_{I,J}\sigma_k dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

un courant de bidimension (p,p) dans $\mathbb{C}^n$ avec p+k=n et $\sigma_k = \dfrac{i^{k^2}}{2^k}$. On définit la mesure

$$\sigma_T = T \wedge \beta^p/p! = \sum_{|I|=k} T_{I,I} d\lambda$$

appelée mesure trace du courant T et $d\lambda = (i/2)^n dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_n$. On pose $\sigma_T(r) = \sigma_T(B(r))$ où $B(r)$ désigne la boule de centre O et de rayon r dans $\mathbb{C}^n$, et on considère enfin la masse projective de T notée $\nu_T(r) = \dfrac{\sigma_T(r)}{\tau_p r^{2p}}$, où $\tau_p = (\pi^p/p!)$ désigne le volume de la boule unité de $\mathbb{C}^p$. On sait que $\nu_T(r)$ est une fonction croissante de r. La limite de $\nu_T(r)$ quand r tend vers 0^+ est appelée nombre de Lelong de T en O et notée $\nu_T(0)$. On rappelle la formule classique de Lelong-Jensen pour un courant positif fermé sur $\mathbb{C}^n$: Pour tout $r_2 > r_1 > 0$,

$$\nu_T(r_2) - \nu_T(r_1) = (1/\pi^p) \int_{B(r_2)\setminus B(r_1)} T \wedge \alpha^p.$$

Il en résulte que si T est un courant positif fermé conique on a $T \wedge \alpha^p = 0$ sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ et donc $\nu_T(r) = \nu_T(0)$ (cf [1] pour d'autres propriétés des courants coniques).

2- Construction du courant . —

Etant donné une partie M fermée connexe de K_p, on se propose de construire un courant positif fermé T défini sur un voisinage de O tel que l'ensemble des valeurs limites de la famille $((h_r)^*T)_{r>0}$ est exactement l'ensemble M. Pour cela on prend une suite (T_j) dense dans M et telle que la suite $T_{j+1} - T_j$ tend faiblement vers 0. On associe à la suite T_j une suite de potentiels (Uj), $T = i\partial\overline{\partial}U_j$. On montre que pour une partition de l'unité adéquate le courant

$$U = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j U_j$$

est presque positif sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ dans le sens qu'il existe un courant W continu sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $i\partial\overline{\partial}U + W$ soit un courant positif fermé. On montrera que ce courant répond au problème posé ci-dessus.

Dans une première étape, on construit un potentiel canonique U associé à chaque courant conique T, tel que $T = i\partial\overline{\partial}U$ et la norme masse de U dépend continuement de la norme masse de T. Pour cela on se ramène à l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}$ et on utilise le théorème de décomposition de Hodge sur $\mathbb{P}^{n-1}$ et les propriétés de l'opérateur de Green G. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur au livre de De Rham [8].
On note d^*, $\overline{\partial}^*$ et ∂^* les opérateurs adjoints des opérateurs d, $\overline{\partial}$ et ∂ respectivement par rapport au produit hermitien défini sur les formes différentielles de bidegré (p,q) sur $\mathbb{P}^{n-1}$ relatif à la forme volume $\tau = w^{n-1}/(n-1)!$. On pose $\Delta = dd^* + d^*d$. On démontre que

$$\Delta = 2(\overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}) = 2(\partial\partial^* + \partial^*\partial).$$

L'opérateur Δ est appelé opérateur de Laplace Beltrami. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à A. Weil [10] et le livre de Demailly [3] et pour plus de détails de démonstration on renvoi à l'auteur [2].

Lemme 2-1 . —

Soit Θ un courant positif fermé sur $\mathbb{P}^{n-1}$ de bidegré (p,p) où $p \geq 2$. Il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\Theta = C\omega^p + \partial\overline{\partial}\partial^*\overline{\partial}^*(GG(\Theta))$$

où G est l'opérateur de Green associé à l'opérateur Δ.

Démonstration —

D'après le théorème de décomposition de Hodge il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\Theta = C\omega^p + \overline{\partial}\,\overline{\partial}^*G(\Theta) + \overline{\partial}^*\overline{\partial}\,G(\Theta).$$

Mais $\overline{\partial}G(\Theta) = G(\overline{\partial}\Theta) = 0$. Donc on aura:

$$G(\Theta) = \partial\partial^*GG(\Theta) + \partial^*\partial GG(\Theta) = \partial\partial^*GG(\Theta.$$

Il en résulte que

$$\Theta = C\omega^p + \partial\overline{\partial}\partial^*\overline{\partial}^*(GG(\Theta))$$

De cette manière on associe à chaque courant positif fermé Θ sur $\mathbb{P}^{n-1}$ un potentiel canonique $V = \partial^*\overline{\partial}^*GG(\Theta)$. Il résulte des propriétés de l'opérateur G que le potentiel V est d'ordre nul et que ses coefficients sont des fonctions localement intégrables.

Proposition 2-2 . —

Pour tout courant positif fermé T de K_p où $p \geq 2$, il existe un courant invariant par les homothéties complexes U d'ordre nul, de bidegré $(p-1, p-1)$ tel que

$$i\partial\overline{\partial}U = T$$

De plus la norme masse de U portée par un compact est bornée indépendamment de T dans K_p.

Démonstration —

Au courant T on associe le courant Θ sur $\mathbb{P}^{n-1}$ telle que T est le prolongement sur $\mathbb{C}^n$ de $\pi^*\Theta$, où π est la projection de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{P}^{n-1}$. D'après ce qui précède $\Theta = C\omega^p + \partial\overline{\partial}\partial^*\overline{\partial}^*(GG(\Theta))$. On pose U le prolongement trivial du courant $(\partial Log|z| \wedge \overline{\partial} Log|z|) \wedge \alpha^{p-2} + \pi^*V$ sur $\mathbb{C}^n$. Le reste de la proposition résulte du lemme 3-6 dans [2].

Proposition 2-3 . —

Soit M une partie fermée connexe de K_p où $p \geq 2$, il existe une suite $(S_k)_{k\geq 1}$ de courants positifs fermés coniques sur $\mathbb{C}^n$ de classe C^∞ sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ telle que: $||S_{k+1} - S_k||_{C^q(K)}$ tend vers 0 pour tout entier positif q et tout compact K de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, et telle que l'ensemble des limites de la suite S_k est égal à l'ensemble M.

Démonstration —

Il existe une suite $(T_k)_{k\geq 1}$ de courants dense dans M telle que la suite $(T_{k+1} - T_k)$ tend faiblement vers 0. Il résulte de la continuité de l'opérateur de Green G que $(U_{k+1} - U_k)$ converge faiblement vers 0, où U_k est le potentiel associé au courant T_k. Au courant T_k on associe la famille de courants :

$$T_{k,\varepsilon} = \rho_\varepsilon * T_k = \int_{U(n)} \rho_\varepsilon(g).g_*(T_k)dg$$

où $(\rho_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ est une approximation de l'identité sur le groupe unitaire $U(n)$. Le courant $T_{k,\varepsilon}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ et tend vers T_k quand ε tend vers 0. on choisit une suite $\varepsilon_k > 0$ tendant vers 0 telle que la suite $S_k = \rho_{\varepsilon_k} * T_k = i\partial\overline{\partial}V_k$ répond au problème, où $V_k = \rho_{\varepsilon_k} * U_k$. Il est évident que la suite S_k admet les mêmes valeurs limites que la suite T_k à savoir l'ensemble M. Les résultats précédents permettent de démontrer le théorème 1-1. En effet on pose

$$U = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j U_j$$

Avec φ_j une partition de l'unité de $B(0,1) \setminus \{0\}$ de $\mathbb{C}^n$ adéquate, U_j le potentiel associé au courant T_j. On construit un courant positif fermé W tellque $\nu_W(0) = 0$ pour que le courant $i\partial\overline{\partial}U + W$ soit positif fermé. Le cône tangent à W en O est le courant nul. On pose

$$T = i\partial\overline{\partial}U + W$$

Conséquences 2-4 . —

1) On se donne un courant positif fermé T de bidimension (p,p) sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ contenant l'origine. Si

$$T = \sum_{|I|=|J|=k} T_{I,J}(z)\sigma_k dz_I \wedge d\overline{z_J}$$

La fonction

$$\nu_{T_{I,J}}(r) = \frac{1}{\tau_p r^{2p}} \int_{B(O,r)} T_{I,J}(z)d\lambda(z)$$

admet-elle une limite quand r tend vers 0 ?

Il est facile de voir que la fonction $\nu_{T_{I,J}}(r)$ admet une limite dès que T admet un cône tangent en O, et elle est constante si T est conique. Cependant d'après le théorème 1-1, si on se donne une partie M femée connexe de K_p, il existe un courant positif fermé T tel que M soit l'ensemble des valeurs limites. Il est évident que si la partie M contient deux courants T_1 et T_2 tels que $\nu_{T_{1I,J}}(O) \neq \nu_{T_{2I,J}}(O)$ alors la fonction $\nu_{T_{I,J}}(r)$ n'admet pas de limite quand r tend vers 0.

2) On rappelle le théorème de Siu [9] :

Théorème 2-5 . —

Soit T un courant positif fermé de bidegré (p,p) sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, et soit X un ensemble analytiqueirréductible de dimension pure p. On suppose que $inf_{x\in X}\ \nu_T(x) = c > 0$, alors le courant $T - c[X]$ est positif fermé et $\nu_T(x) = c$ presque partout sur X.

Dans [1], on a démontré que le cône tangent au courant d'intégration sur un ensemble analytique existe en tout point. Il en résulte que pour un courant positif fermé T de bidimension (p,p) sur un ouvert Ω, l'ensemble des points où le cône tangent associé à T n'existe pas est au plus une réunion dénombrable d'ensembles analytiques de dimension $\leq p-1$. Pour le cas $p = 1$ cette condition est une condition limite.

3- Conditions suffisantes d'existence du cône tangent . —

Dans cette partie on va donner une condition nécéssaire et suffisante pour l'existence du cône tangent aux courants de type (1,1) et (n-1,n-1) dans $\mathbb{C}^n$ en termes de convergence de la mesure trace. On montrera que cette condition n'est pas suffisante pour les courants de bidimension (p,p) avec $2p \leq n-1$.

3- Théorème 3-1 . —

Soient T_1 et T_2 deux courants positifs fermés coniques de bidimension (p,p) sur $\mathbb{C}^n$ où $1 \leq p \leq n-1$. Si $T_1 \wedge \beta = T_2 \wedge \beta$ alors $T_1 = T_2$.

Démonstration —

Pour tout $1 \leq j \leq n$, on pose $C_j = \{z \in \mathbb{C}^n / z_j \neq 0\}$ et

$$f_j\ C_j \to C_j$$

définie par $f_j(z) = (z_1.z_j, ..., z_j, ..., z_n z_j)$. Dans [1] on a montré que

$$f_j^\star T_1(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n) = \sum_{j\notin I, j\notin J} T_{I,J}(\xi_1,\xi_2,,\check{\xi}_j,.....,\xi_n)\sigma_k d\xi_I \wedge d\overline{\xi_J}$$

De même

$$f_j^*T_2(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = \sum_{j \notin I, j \notin J} T'_{I,J}(\xi_1, \xi_2, , \check{\xi}_j, ..., \xi_n)\sigma_k d\xi_I \wedge d\overline{\xi_J}$$

k = n-p et $\sigma_k = \frac{i^{k^2}}{2^k}$. $\check{\xi}_j$ désigne qu'on omet le terme ξ_j de $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$. On pose $T = T_1 - T_2$.

$(f_j^*\beta)(\xi) = i\partial\overline{\partial}(|\xi_j|^2(1 + |\xi'|^2)$

$= (1 + |\xi'|^2)i\partial\overline{\partial}|\xi_j|^2 + i|\xi_j|^2\partial\overline{\partial}|\xi'|^2 + i\partial|\xi'|^2 \wedge \overline{\partial}|\xi_j|^2 + i\partial|\xi_j|^2 \wedge \overline{\partial}|\xi'|^2$

avec $\xi' = (\xi_1, \xi_2, ., \check{\xi}_j, ., \xi_n)$.

Si $T \wedge \beta = 0$ alors $f_j^*T \wedge \beta = 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$. Et comme ξ_j ne figure pas dans l'écriture de f_j^*T, il résulte que $f_j^*T = 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$ sur C_j car le seul terme dans $f_j^*(T \wedge \beta)$ qui multiplie $i\partial\overline{\partial}|\xi_j|^2$ est $(1 + |\xi'|^2)f_j^*T$. Il en résulte que $T = 0$.

Remarque . —

Si on se donne un courant positif fermé T sur un ouvert Ω contenant l'origine O tel que pour toutes valeurs limites T_1 et T_2 de $(h_r)^*T$ on a $T_1 \wedge \beta = T_2 \wedge \beta$ alors le cône tangent à T existe.

Corollaire 3-2 . — *Soient T_1 et T_2 deux courants coniques de bidimension (p,p) sur $\mathbb{C}^n$. On suppose que $T_1 \wedge \beta^p = T_2 \wedge \beta^p$, alors $T_1 \wedge \alpha^{p-1} = T_2 \wedge \alpha^{p-1}$.*

Démonstration —

Puisque les courants T_1 et T_2 sont coniques donc $T_1 \wedge \alpha^p = T_2 \wedge \alpha^p = 0$ sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. On a la relation classique $\alpha^p = \frac{\beta^p}{|z|^{2p}} - p\frac{\gamma \wedge \beta^{p-1}}{|z|^{2p+2}}$ sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Il en résulte que les courants $T_1 \wedge \alpha^{p-1}$ et $T_2 \wedge \alpha^{p-1}$ ont la même mesure trace, et comme ils sont de bidimension (1,1) ils sont égaux.

Corollaire 3-3 . —

Soit T un courant positif fermé de bidimension $(1,1)$ sur un voisinage Ω de 0 dans $\mathbb{C}^n$.

$$T = \sum_{j,k=1}^{n} T_{j,k}\sigma_{n-1} d\check{z}_j \wedge d\check{\overline{z}}_k$$

Le cône tangent à T en O existe si et seulement si $\forall \psi \in D_{(1,1)}(\mathbb{C}^n)$.

$$Lim_{r \to 0} < \sum_{j=1}^{n} r^{2n-2} T_{j,j}(rz), \psi(z) >$$

existe. $d\check{z}_j$ *et* $d\check{\bar{z}}_k$ *désignent qu'on omet ces termes dans la forme*

$$dz_1 \wedge .... \wedge dz_n \wedge d\overline{z_1} \wedge ..... \wedge d\overline{z_n}$$

Pour la démonstration on utilise le corollaire précédent en remarquant que la condition donnée par l'hypothèse est équivalente au fait que toutes les valeurs limites ont la même mesure trace.

On va démontrer le même résultat pour les courants de type $(1,1)$.

Proposition 3-4 . —

Soient T_1 *et* T_2 *deux courants positifs fermés coniques de type* $(1,1)$ *sur* $\mathbb{C}^n$ *qui admettent la même mesure trace, alors* $T_1 = T_2$.

Démonstration —

A chaque courant positif fermé T conique on associe la fonction

$$U(z) = -C_n \int_{\mathbb{C}^n} \left(\frac{1}{|z-\xi|^{2n-2}} - \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{n-1}}\right) T \wedge \beta^{n-1}$$

Où $C_n = (1/n-1)(2\pi)^{-n}$.D'après les résultats de P.Lelong[7], U est une fonction plurisouharmonique sur $\mathbb{C}^n$ et $T = i\partial\overline{\partial}U$. Le fait essentiel que l'intégrale définissant U converge est le fait que la fonction $\nu_T(r)$ est constante. On remarque que pour deux courants coniques qui ont la même mesure trace la fonction U est la même. Il s'ensuit que si T_1 et T_2 sont deux valeurs limites de la famille $(h_r)^\star T$ qui ont la même mesure trace alors elles sont égales.

Corollaire 3-5 . —

Soit φ *une fonction psh sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{C}^n$ *contenant l'origine. Une condition nécessaire et suffisante pour que le courant* $T = i\partial\bar{\partial}\varphi$ *admette un cône tangent en O est que la famille de mesures* $r^2(h_r)^\star\Delta\varphi$ *admet une limite vague quand r tend vers 0, où* $(r^2(h_r))^\star\Delta\varphi$ *représente la mesure trace du courant* $(h_r)^\star T$.

On se propose maintenant de montrer que si on se donne un courant positif fermé T de bidimension (p,p) sur $\mathbb{C}^n$ où $2p \leq n-1$, tel que la famille $r^{2k}T_{I,I}(rz)$ admet une limite au sens faible des mesures quand r tend vers 0, alors le courant T n'admet pas forcément un cône tangent en O. La mesure $T_{I,I}(z)\tau$ représente la mesure trace du courant T et $k = n-p$. Ceci met en défaut le résultat du corollaire 3-5 pour les courants de type (p,p) avec $2p \leq n-1$ dans $\mathbb{C}^n$. Pour répondre à ce problème il suffit de construire deux courants positifs fermés différents T_1 et T_2 coniques sur $\mathbb{C}^n$ qui ont la même mesure trace. En effet d'après le théorème 1-1 il existe un courant positif fermé T tel que T_1 et T_2 sont des valeurs limites de la famille $(h_r)^*T$. Si on note Θ_1 et Θ_2 les courants sur $\mathbb{P}^{n-1}$ associés aux courants T_1 et T_2 respectivement, le corollaire 3-2 peut encore se formuler de la manière suivante :

$$T_1 \wedge \beta^p = T_2 \wedge \beta^p \Leftrightarrow \Theta_1 \wedge \omega^{p-1} = \Theta_2 \wedge \omega^{p-1}.$$

Donc pour construire T_1 et T_2 il suffit de construire deux courants Θ_1 et Θ_2 différents de bidimension $(p-1, p-1)$ dans $\mathbb{P}^{n-1}$ qui ont la même mesure trace où $2p \leq n-1$. Il résulte du théorème de Lefschetz (cf[3]) que si $2k \geq n+1$ il existe une $(k-1, k-1)$- forme réelle non nulle f de classe $C\infty$ sur $\mathbb{P}^{n-1}$ telle $f \wedge \omega = 0$. Il en résulte qu'il existe une $(k-1, k-1)$- forme réelle non nulle qu'on notera encore f de classe $C\infty$ sur $\mathbb{P}^{n-1}$ telle $f \wedge \omega = 0$ et $i\partial\overline{\partial} f \neq 0$. On pose $\Theta_1 = i\partial\overline{\partial} f + A\omega^k$ et $\Theta_2 = A\omega^k$, avec A assez grand pour que Θ_1 soit positif où $p + k = n$.

Avec les hypothèses faites sur f on a :

$$\Theta_1 \neq \Theta_2 \; et \; \Theta_1 \wedge \omega^{p-1} = \Theta_2 \wedge \omega^{p-1} = A\omega^{n-1}$$

ce qui répond au problème. Dans [2], on a généralisé ce résultat pour les courants de bidegré (p,p), $2 \leq p \leq n-2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **M.BLEL J.P.DEMAILLY et M.MOUZALI** . — Sur l'existence du cône tangent à un courant positif fermé , Arkiv för Mathematik Vol 28 (1990) $n^o 2$.

[2] **M.BLEL** . — Sur le cône tangent à un courant positif fermé , Prpublication de l'Institut Fourier de Grenoble n^o 195 (1992), à paraître au Journal de Mathématiques pures et Appliquées .

[3] **J.P.DEMAILLY** . — Analytic geometry , Livre à paraître .

[4] **R.HARVEY** . — Holomorphic Chains and their Boundaries., Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Volume 30,1977. .

[5] **C.O.KISELMAN** . — Tangents of Plurisubharmonic Functions:, International Symposium in Memory of Hua Loo Keng,Gong Sheng, Lu Qi-king, Wang Yan, Yuang Lo (Eds.) VolII,157-167.Sciences Press and Springer-Verlag 1991 .

[6] **P.LELONG,L.GRUMAN** . — Entire Functions of Several Complex Variables , Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 282. Springer- Verlag.1986 .

[7] **P.LELONG** . — Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans $\mathbb{C}^n$, J.Analyse Math Jérusalem , t 12 1964 pp 365-407 .

[8] **G.DE RHAM** . — Variétés différentiables., Paris, Hermann 1960 .

[9] **Y.T.SIU** . — Analyticity of sets associeted to Lelong-number and the extension of closed positive currents., Inv. Math t 27, pp 53-156, 1974..

[10] **A.WEIL** . — Variétés Kählériennes , Hermann Paris 1957 .

BLEL Mongi
Faculté des sciences de Monastir
5000 TUNISIE