MICHEL BROUÉ
JEAN MICHEL

Blocs à groupes de défaut abéliens des groupes réductifs finis

Astérisque, tome 212 (1993), p. 93-117
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__212__93_0>

BLOCS À GROUPES DE DÉFAUT ABÉLIENS DES GROUPES RÉDUCTIFS FINIS

MICHEL BROUÉ ET JEAN MICHEL

Ecole Normale Supérieure, Paris

SOMMAIRE

0. INTRODUCTION

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique connexe réductif sur une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_q$ d'un corps fini $\mathbb{F}_q$ (où q est puissance d'un nombre premier p), muni d'un endomorphisme de Frobenius $F\colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ lui conférant une structure rationnelle sur $\mathbb{F}_q$, et soit $\mathbf{G}^F$ le groupe des points rationnels de $\mathbf{G}$ ($\mathbf{G}^F$ est un groupe fini "de type de Lie"). Soit ℓ un nombre premier différent de p et bon pour $\mathbf{G}$. On suppose en outre que ℓ satisfait certaines conditions techniques : ℓ ne divise ni $|(Z(\mathbf{G})/Z^\circ(\mathbf{G}))^F|$ ni $|(Z(\mathbf{G}^*)/Z^\circ(\mathbf{G}^*))^{F^*}|$ (où $\mathbf{G}^*$ est le dual "de Langlands" de $\mathbf{G}$ pris sur le même corps $\overline{\mathbb{F}}_q$), et si $\mathbf{G}^F$ possède une composante de type ${}^3D_4$, alors $\ell \neq 3$.

Le but de cet article est de classifier les ℓ–blocs unipotents à groupes de défaut abéliens de $\mathbf{G}^F$, et de démontrer dans ce cas la validité de la conjecture générale faite dans [Br1] : si e est un ℓ–bloc de $\mathbf{G}^F$ à groupe de défaut abélien D, et si (D, f) est une e-sous-paire maximale de $\mathbf{G}^F$, les blocs e de $\mathbf{G}^F$ et f de $N_{\mathbf{G}^F}(D, f)$ sont isotypiques. Chemin faisant, nous démontrons un

1991 *Mathematics Subject Classification.* 20, 20G.

S. M. F.

Astérisque 212* (1993)

résultat plus général concernant les π–blocs de $\mathbf{G}^F$ (où π est un ensemble de nombres premiers ℓ possédant en particulier les propriétés ci–dessus). La partie concernant la classification des blocs a déja été obtenue par [CaEn] par d'autres méthodes.

Dans [BMM], des résultats analogues sont démontrés sous l'hypothèse plus forte que ℓ est "grand" (*i.e.*, essentiellement, ℓ ne divise pas l'ordre du groupe de Weyl de $\mathbf{G}$). Dans ce cas, ces résultats sont obtenus comme application des "méthodes génériques" de [BMM]. Pour les étendre au cas des petits nombres premiers (non génériques) nous devons développer ici des techniques combinant certaines méthodes de [BMM] avec celles de [BrMi].

Si $\ell \neq p$, les conditions sur ℓ énoncées ci-dessus sont automatiquement vérifiées si les ℓ-sous-groupes de Sylow de $\mathbf{G}^F$ sont abéliens ([En]), donc nous avons en particulier :

Théorème. *Si un ℓ-sous-groupe de Sylow D de $\mathbf{G}^F$ est abélien, les ℓ-blocs principaux de $\mathbf{G}^F$ et de $N_{\mathbf{G}^F}(D)$ sont isotypiques.*

1. Ensembles de nombres premiers, π–séries

Dans ce premier paragraphe, nous introduisons les principales notations, et nous redémontrons, en les améliorant, les principaux résultats de [BrMi]. *Nous déterminons les principales propriétés des nombres premiers considérés par la suite.*

Les notations suivantes sont en vigueur dans la suite : $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique réductif connexe sur une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_q$ d'un corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p, muni d'une structure rationnelle sur $\mathbb{F}_q$. Nous notons $F\colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ l'endomorphisme de Frobenius correspondant, et $\mathbf{G}^F$ le groupe des points rationnels de $\mathbf{G}$. Nous appelons "sous–groupe de Levi de $\mathbf{G}$" un sous–groupe de Levi d'un sous–groupe parabolique de $\mathbf{G}$, et, si $\mathbf{L}$ est rationnel, nous notons $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ (resp. ${}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$) le foncteur d'induction (resp. de restriction) de Deligne–Lusztig (*cf.* par exemple [DiMi]) associé.

1.A. Généralités.

Soit π un ensemble de nombres premiers ne contenant pas p, et soit π' son complémentaire dans l'ensemble de tous les nombres premiers. Si n est un nombre entier, nous notons n_π le plus grand diviseur de n produit d'éléments de π.

1.1. Définition. *Soit $\sigma_{\pi'}^{\mathbf{G}^F}$ la fonction centrale sur $\mathbf{G}^F$ définie par*

$$\sigma_{\pi'}^{\mathbf{G}^F}(g) = \begin{cases} |\mathbf{G}^F|_\pi & \text{si } g \text{ est un } \pi'\text{–élément,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que $\sigma_{\pi'}^{\mathbf{G}^F}(g)$ ne dépend que de la partie semi-simple de g.

Les faits suivants résultent de [BrMi], 2.5 :

(1.2)

(1) *Si* $\mathbf{L}$ *est un sous-groupe de Levi* F*-stable de* $\mathbf{G}$ *et* γ *(resp.* λ*) une fonction centrale sur* $\mathbf{G}^F$ *(resp.* $\mathbf{L}^F$*), on a*

$$ {}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\sigma_{\pi'}^{\mathbf{G}^F}\gamma) = \deg(R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(1))_\pi \sigma_{\pi'}^{\mathbf{L}^F}\, {}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\gamma) $$

et

$$ \sigma_{\pi'}^{\mathbf{G}^F} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda) = \deg(R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(1))_\pi R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\sigma_{\pi'}^{\mathbf{L}^F}\lambda)\ , $$

(2) $\sigma_{\pi'}^{\mathbf{G}^F}$ *est uniforme, et*

$$ \sigma_{\pi'}^{\mathbf{G}^F} = \sum_{[\mathbf{T}]_{\mathbf{G}^F}} \frac{\deg(R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(1))_\pi}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T})|} R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\sigma_{\pi'}^{\mathbf{T}^F})\ . $$

où la somme porte sur un système de représentants des classes de $\mathbf{G}^F$*–conjugaison de tores maximaux* F*–stables de* $\mathbf{G}$*, et où* $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}) = N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$.

Remarque. Avec nos conventions, la π–partie d'un entier est toujours positive. En particulier

$$ \deg(R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(1))_\pi \deg(R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(1))_{\pi'} = \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}} \deg(R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(1))\ , $$

où $\varepsilon_{\mathbf{G}} = (-1)^{\mathbb{F}_q\text{-rang semi-simple de } \mathbf{G}}$.

On a $\sigma_{\pi'}^{\mathbf{T}^F} = \sum\theta$, où θ parcourt l'ensemble des caractères de $\mathbf{T}^F$ dont l'ordre est un π–entier. Si on note $\mathrm{U}f$ la projection d'une fonction centrale f sur le sous–espace des fonctions centrales engendré par les caractères unipotents, on en déduit :

$$ \mathrm{U}\sigma_{\pi'}^{\mathbf{G}^F} = \sum_{[\mathbf{T}]_{\mathbf{G}^F}} \frac{\deg(R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(1))_\pi}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T})|} R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(1)\ . \tag{1.3} $$

Conformément à l'usage, nous notons $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,(s))$ la "série de Lusztig" associée à la classe de conjugaison d'un élément semi–simple $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$ et nous posons $\mathcal{E}_\pi(\mathbf{G}^F,1) := \bigcup_{s\in(\mathbf{G}^{*F^*})_\pi} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F,(s))$ (*cf.* [BrMi]). Nous notons $\mathrm{pr}_\pi^{\mathbf{G}^F}$ la projection de l'espace des fonctions centrales sur $\mathbf{G}^F$ sur le sous–espace engendré par les éléments de $\mathcal{E}_\pi(\mathbf{G}^F,1)$, et nous posons

$$ \mathrm{Reg}_\pi^{\mathbf{G}^F} := \mathrm{pr}_\pi^{\mathbf{G}^F} \mathrm{Reg}^{\mathbf{G}^F} = \sum_{\chi\in\mathcal{E}_\pi(\mathbf{G}^F,1)} \chi(1)\chi\,. $$

Notons que $\mathrm{U}\mathrm{Reg}_\pi^{\mathbf{G}^F} = \mathrm{U}\,\mathrm{Reg}^{\mathbf{G}^F}$.

La deuxième assertion de la proposition suivante a déjà été démontrée dans [BrMi].

1.4. Proposition.

(1) $\mathrm{Reg}_\pi^{\mathbf{G}^F} = \sum_{[\mathbf{T}]_{\mathbf{G}^F}} \frac{\deg R_\mathbf{T}^\mathbf{G}(1)}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T})|} R_\mathbf{T}^\mathbf{G}(\mathrm{Reg}_\pi^{\mathbf{T}^F})$,

(2) $\mathrm{Reg}_\pi^{\mathbf{G}^F} = \sigma_{\pi'}^{\mathbf{G}^F} D(\mathrm{U}\sigma_{\pi\cup\{p\}}^{\mathbf{G}^F})$, *où D désigne la dualité de Curtis–Alvis–Kawanaka.*

Preuve.

On obtient (1) en appliquant $\mathrm{pr}_\pi^{\mathbf{G}^F}$ à la formule

$$\mathrm{Reg}^{\mathbf{G}^F} = \sum_{[\mathbf{T}]_{\mathbf{G}^F}} \frac{\deg R_\mathbf{T}^\mathbf{G}(1)}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T})|} R_\mathbf{T}^\mathbf{G}(\mathrm{Reg}^{\mathbf{T}^F}) ,$$

car

$$\mathrm{pr}_\pi^{\mathbf{G}^F}(R_\mathbf{T}^\mathbf{G}(\mathrm{Reg}^{\mathbf{T}^F})) = R_\mathbf{T}^\mathbf{G}(\mathrm{pr}_\pi^{\mathbf{T}^F}(\mathrm{Reg}^{\mathbf{T}^F})) = R_\mathbf{T}^\mathbf{G}(\mathrm{Reg}_\pi^{\mathbf{T}^F}) .$$

(2) Par 1.3, on voit que

$$\mathrm{U}\sigma_{\pi\cup\{p\}}^{\mathbf{G}^F} = \sum_{[\mathbf{T}]_{\mathbf{G}^F}} \frac{\deg(R_\mathbf{T}^\mathbf{G}(1))_{\pi'}}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T})|} R_\mathbf{T}^\mathbf{G}(1) . \tag{1.5}$$

Multipliant les deux membres de 1.3 par $\sigma_{\pi'}^{\mathbf{G}^F}$ et utilisant 1.2, (1), ainsi que l'égalité $D(R_\mathbf{T}^\mathbf{G}(1)) = \varepsilon_\mathbf{G}\varepsilon_\mathbf{T} R_\mathbf{T}^\mathbf{G}(1)$, on obtient le résultat. □

Comme dans [BrMi], on déduit de 1.4, (2), que $\mathrm{Reg}_\pi^{\mathbf{G}^F}$ est le caractère régulier associé à un π–idempotent central de $\overline{\mathbb{Q}}\mathbf{G}^F$, que l'on désigne par $e_\pi^{\mathbf{G}^F}$.

1.B. Cas où π est formé de bons nombres premiers.

Supposons maintenant que π ne contient que des nombres premiers bons pour $\mathbf{G}$. Pour tout π–sous–groupe abélien S de $\mathbf{G}^F$, le groupe $C_\mathbf{G}^o(S)$ est alors un sous–groupe de Levi F–stable de $\mathbf{G}$ (*cf.* par exemple [GeHi], 2.1).

1.6. Définition. *On appelle sous–groupes de Levi π–déployés de $\mathbf{G}$ les centralisateurs connexes des π–sous–groupes abéliens de $\mathbf{G}^F$.*

Un groupe $\mathbf{M}$ est un sous–groupe de Levi π–déployé de $\mathbf{G}$ si et seulement si il existe un tore maximal F–stable $\mathbf{T}$ de $\mathbf{G}$ tel que $\mathbf{M} = C_\mathbf{G}^o(\mathbf{T}_\pi^F)$, où on a noté $\mathbf{T}_\pi^F$ un π–sous–groupe de Sylow de $\mathbf{T}^F$.

1.7. Définition.

(1) *Un tore maximal F–stable $\mathbf{T}$ de $\mathbf{G}$ est dit π–anisotrope si le π–sous–groupe de Sylow $\mathbf{T}_\pi^F$ de $\mathbf{T}^F$ est contenu dans $Z^o(\mathbf{G})^F$. Nous notons $\mathcal{T}_\pi(\mathbf{G})$ l'ensemble de tous les tores maximaux π–anisotropes de $\mathbf{G}$.*

(2) *Pour toute fonction centrale uniforme ψ sur $\mathbf{G}^F$, soit $\mathrm{c}_\pi(\psi)$ la "projection π-cuspidale" de ψ, définie par*

$$\mathrm{c}_\pi(\psi) := \sum_{[\mathbf{T}\in\mathcal{T}_\pi(\mathbf{G})]_{\mathbf{G}^F}} \frac{1}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T})|} R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}({}^*R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\psi)) \, .$$

Dans tout ce qui suit, les symboles "$=_{\mathbf{G}^F}$, $\leq_{\mathbf{G}^F}$, $\subseteq_{\mathbf{G}^F}$, $\preccurlyeq_{\mathbf{G}^F}$", représentent les symboles "$=$, $\leq$, $\subseteq$, $\preccurlyeq$" modulo $\mathbf{G}^F$-conjugaison.

L'analogue suivant du lemme [BMM], 2.14, nous sera utile.

1.8. Lemme. *Soit φ une fonction sur l'ensemble de tous les tores maximaux F-stables de $\mathbf{G}$, invariante par $\mathbf{G}^F$-conjugaison. Soit M un sous-groupe de Levi π-déployé de $\mathbf{G}$. Alors*

$$\sum_{[\mathbf{T};\mathbf{T}_\pi^F =_{\mathbf{G}^F} Z^\circ(\mathbf{M})_\pi^F]_{\mathbf{G}^F}} \varphi(\mathbf{T}) = \frac{1}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M})|} \sum_{[\mathbf{T}\in\mathcal{T}_\pi(\mathbf{M})]_{\mathbf{M}^F}} \frac{\varphi(\mathbf{T})}{|W_{\mathbf{M}^F}(\mathbf{T})|} \, .$$

Preuve. Il suffit de suivre la preuve de [BMM], lemme 2.14, en remplaçant d par π. $\square$

Comme dans [BMM], §2.C, on note $\mathrm{Ab}\,\mathrm{Irr}(\mathbf{G}^F)$ le groupe des caractères du groupe abélien $\mathbf{G}^F/[\mathbf{G},\mathbf{G}]^F$ (vus comme caractères de $\mathbf{G}^F$), et on note $\mathrm{Ab}_\pi\,\mathrm{Irr}(\mathbf{G}^F)$ le sous-groupe des éléments dont l'ordre est un π-entier. On pose

$$\mathrm{Ab}_\pi\,\mathrm{Reg}(\mathbf{G}^F) := \sum_{\theta\in\mathrm{Ab}_\pi\,\mathrm{Irr}(\mathbf{G}^F)} \theta \, .$$

1.9. Proposition.

$$(1)\quad \mathrm{Reg}_\pi^{\mathbf{G}^F} = \sum_{[\mathbf{M}\ \pi\text{-déployé}]_{\mathbf{G}^F}} \frac{\deg R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(1)}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M})|} R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\mathrm{Ab}_\pi\,\mathrm{Reg}^{\mathbf{M}^F}\mathrm{c}_\pi(\mathrm{UReg}^{\mathbf{M}^F}))\, .$$

$$(2)\quad \mathrm{UReg}^{\mathbf{G}^F} = \sum_{[\mathbf{M}\ \pi\text{-déployé}]_{\mathbf{G}^F}} \frac{\deg R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(1)}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M})|} R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\mathrm{c}_\pi(\mathrm{UReg}^{\mathbf{M}^F}))\, .$$

Preuve. La démonstration ressemble à celle de [BMM], 2.16, 2.33. Regroupant les tores dans la formule 1.4, (1), pour $\mathrm{Reg}_\pi^{\mathbf{G}^F}$, selon la classe de $\mathbf{G}^F$-conjugaison de $\mathbf{T}_\pi$, et appliquant 1.8 à chaque regroupement, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathrm{Reg}_\pi^{\mathbf{G}^F} &= \sum_{[\mathbf{M}]_{\mathbf{G}^F}} \frac{1}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M})|} \sum_{[\mathbf{T}\in\mathcal{T}_\pi(\mathbf{M})]_{\mathbf{M}^F}} \frac{\deg R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(1)}{|W_{\mathbf{M}^F}(\mathbf{T})|} R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\mathrm{Reg}_\pi^{\mathbf{T}^F}) \\
&= \sum_{[\mathbf{M}]_{\mathbf{G}^F}} \frac{\deg R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(1)}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M})|} R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}\Big(\sum_{[\mathbf{T}\in\mathcal{T}_\pi(\mathbf{M})]_{\mathbf{M}^F}} \frac{\deg R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{M}}(1)}{|W_{\mathbf{M}^F}(\mathbf{T})|} R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{M}}(\mathrm{Reg}_\pi^{\mathbf{T}^F})\Big) \\
&= \sum_{[\mathbf{M}]_{\mathbf{G}^F}} \frac{\deg R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(1)}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M})|} R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(c_\pi(\mathrm{Reg}_\pi^{\mathbf{M}^F}))
\end{aligned}$$

où chacune des sommes porte sur des représentants des $\mathbf{G}^F$-classes de sous-groupes de Levi π-déployés. (1) est alors conséquence de l'analogue suivant de [BMM], 2.34.

1.10. Lemme.

$$c_\pi(\mathrm{Reg}_\pi^{\mathbf{G}^F}) = \mathrm{Ab}_\pi \, \mathrm{Reg}^{\mathbf{G}^F} c_\pi(\mathrm{UReg}^{\mathbf{G}^F})\,.$$

Preuve de 1.10. D'après 1.4, (1), et 1.7, (2), on voit que

$$\begin{aligned}
c_\pi(\mathrm{Reg}_\pi^{\mathbf{G}^F}) &= \sum_{[\mathbf{T}\in\mathcal{T}_\pi(\mathbf{G})]_{\mathbf{G}^F}} \frac{\deg R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(1)}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T})|} R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\mathrm{Reg}_\pi^{\mathbf{T}^F})\,, \\
c_\pi(\mathrm{UReg}^{\mathbf{G}^F}) &= \sum_{[\mathbf{T}\in\mathcal{T}_\pi(\mathbf{G})]_{\mathbf{G}^F}} \frac{\deg R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(1)}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T})|} R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(1^{\mathbf{T}^F})\,.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de démontrer que, pour tout $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_\pi(\mathbf{G})$, on a $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\mathrm{Reg}_\pi^{\mathbf{T}^F}) = \mathrm{Ab}_\pi \, \mathrm{Reg}^{\mathbf{G}^F} R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(1^{\mathbf{T}^F})$. Puisque la fonction $\mathrm{Ab}_\pi \, \mathrm{Reg}^{\mathbf{G}^F}$ est "p–constante" (*cf.* [BrMi], 2.5), on a $\mathrm{Ab}_\pi \, \mathrm{Reg}^{\mathbf{G}^F} R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(1^{\mathbf{T}^F}) = R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\mathrm{Res}_{\mathbf{T}^F}^{\mathbf{G}^F}(\mathrm{Ab}_\pi \, \mathrm{Reg}^{\mathbf{G}^F})$. Il suffit donc de vérifier que

$$(*) \qquad \mathrm{Res}_{\mathbf{T}^F}^{\mathbf{G}^F}(\mathrm{Ab}_\pi \, \mathrm{Reg}^{\mathbf{G}^F}) = \mathrm{Reg}_\pi^{\mathbf{T}^F}\,.$$

La fonction $\mathrm{Res}_{\mathbf{T}^F}^{\mathbf{G}^F}(\mathrm{Ab}_\pi \, \mathrm{Reg}^{\mathbf{G}^F})$ est la fonction sur $\mathbf{T}^F$ qui prend la valeur $|\mathbf{G}^F/[\mathbf{G},\mathbf{G}]^F|_\pi$ sur les éléments $t \in \mathbf{T}^F$ dont l'image modulo $[\mathbf{G},\mathbf{G}]^F$ est un élément π–régulier, et la valeur 0 sur les autres éléments de $\mathbf{T}^F$.

Le groupe $\mathbf{G}^F/[\mathbf{G},\mathbf{G}]^F$ est un quotient de $\mathbf{T}^F$ (*cf.* par exemple [BMM], §2) et $|\mathbf{G}^F/[\mathbf{G},\mathbf{G}]^F| = |Z^\circ(\mathbf{G})^F|$. Comme, par hypothèse sur $\mathbf{T}^F$, on a $|\mathbf{T}^F|_\pi = |Z^\circ(\mathbf{G})^F|_\pi$, donc $|\mathbf{T}^F|_\pi = |\mathbf{G}^F/[\mathbf{G},\mathbf{G}]^F|_\pi$, on voit que $\mathbf{T}^F \cap [\mathbf{G},\mathbf{G}]^F$ est un

π'–groupe. Il en résulte que la fonction $\mathrm{Res}_{\mathbf{T}^F}^{\mathbf{G}^F}(\mathrm{Ab}_\pi \, \mathrm{Reg}^{\mathbf{G}^F})$ est aussi celle qui prend la valeur $|\mathbf{T}^F|_\pi$ sur les éléments π–réguliers de $\mathbf{T}^F$ et la valeur 0 sur les éléments π–singuliers de $\mathbf{T}^F$. Ceci prouve bien l'égalité (*). □

La preuve de (2) est identique, en partant cette fois de la formule 1.3. □

Remarque. La démonstration de 1.10 ci-dessus montre que s'il existe des tores π–anisotropes, alors $Z([\mathbf{G},\mathbf{G}])^F$ est un π'–groupe. Cette hypothèse est précisément celle de la proposition 1.19, (1), ci-dessous.

1.C. Nombres premiers F–excellents.

Pour des raisons qui apparaîtront plus loin (voir par exemple 1.15 et 1.16), nous devons imposer quelques restrictions sur les ensembles de nombres premiers que nous utilisons (comparer avec [GeHi], 2.3, et aussi avec [CaEn]).

1.11. Définition. *Un nombre premier ℓ est dit $(\mathbf{G}, F)$–excellent si et seulement si*

(1) *ℓ est bon pour $\mathbf{G}$,*
(2) *$\ell \neq p$,*
(3) *ℓ ne divise ni $|(Z(\mathbf{G})/Z^o(\mathbf{G}))^F|$ ni $|(Z(\mathbf{G}^*)/Z^o(\mathbf{G}^*))^{F^*}|$,*
(4) *ℓ n'est pas égal à 3, si $\mathbf{G}^F$ possède une composante de type ${}^3D_4$.*

Les nombres premiers "grands" ("génériques") de [BMM], §5, vérifient ces conditions :

1.12. Proposition. *Si $\ell \neq p$ et $\ell \nmid |W|$ alors ℓ est $(\mathbf{G}, F)$–excellent.*

Preuve. Puisque les mauvais nombres premiers divisent $|W|$, et que 3 divise l'ordre du groupe de Weyl de D_4, nous devons juste vérifier la condition (3).

Suivant les notations de [BMM], on note R le système de racines de $\mathbf{G}$, sous-ensemble du groupe des caractères X de $\mathbf{T}$, et $R^\vee$ le système dual, sous-ensemble du groupe des co-caractères Y de $\mathbf{T}$. De plus, on note $Q(R)$ (resp. $Q(R^\vee)$) le $\mathbb{Z}$–sous-module de X (resp. de Y) engendré par R (resp. par $R^\vee$), et $P(R)$ le dual de $Q(R^\vee)$ dans $\mathbb{Q} \otimes X$.

Le groupe des caractères de $Z(\mathbf{G})/Z^o(\mathbf{G})$ est isomorphe au sous-groupe de p'-torsion de $X/Q(R)$. Puisque le sous-groupe de torsion de $X/Q(R)$, à savoir le groupe $Q(R)^{\perp\perp}/Q(R)$, est un sous-groupe de $P(R)/Q(R)$, il suffit de vérifier que $|P(R)/Q(R)|$ et $|P(R^\vee)/Q(R^\vee)|$ (ce dernier doit être considéré afin d'obtenir le résultat pour $\mathbf{G}^*$) divisent $|W|$. Mais, par définition, $|P(R)/Q(R)|$ est l'indice de connexion f_R de R, et $f_R = f_{R^\vee}$ divise $|W|$ par [Bou], ch. VI, §2, Prop.7. □

La propriété suivante de l'excellence est fondamentale (elle a déjà été observée par [CaEn], 1.2).

1.13. Proposition. *Soit* $\mathbf{L}$ *un sous-groupe de Levi* F*–stable de* $\mathbf{G}$*. Si* ℓ *est* $(\mathbf{G}, F)$*–excellent, il est aussi* $(\mathbf{L}, F)$*–excellent.*

Preuve. À nouveau, seule la condition (3) demande une vérification. D'après [GeHi], 2.4, le groupe $H^1(F, Z(\mathbf{L})/Z^o(\mathbf{L}))$ est isomorphe à un facteur direct de $H^1(F, Z(\mathbf{G})/Z^o(\mathbf{G}))$. Ceci donne le résultat car pour tout groupe fini A muni d'un automorphisme F nous avons une suite exacte

$$1 \longrightarrow A^F \longrightarrow A \xrightarrow{F-1} A \longrightarrow H^1(F, A) \longrightarrow 1$$

ce qui montre que $|H^1(F, Z(\mathbf{G})/Z^o(\mathbf{G}))| = |(Z(\mathbf{G})/Z^o(\mathbf{G}))^F|$. Il en est de même pour $\mathbf{L}$. $\square$

Nous avons besoin de certains concepts définis dans [BrMa] et [BMM]. Soit $\mathbf{T}$ un tore sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, défini sur $\mathbb{F}_q$. L'endomorphisme de Frobenius associé induit sur $Y(\mathbf{T})$ un opérateur de la forme $q\phi$ où ϕ est un endomorphisme d'ordre fini. Nous appelons *tore générique* la donnée $\mathbb{T} = (X(\mathbf{T}), Y(\mathbf{T}), \phi)$. On note $|\mathbb{T}|$ le polynôme caractéristique de ϕ; cette notation est "justifiée" par le fait que $|\mathbf{T}^F| = |\mathbb{T}|(q)$. Étant donné un entier d, on appelle *Φ_d-groupe* un tore F-stable tel que $|\mathbb{T}|$ soit une puissance de Φ_d (le d-ième polynôme cyclotomique). Un tore F-stable $\mathbf{T}$ possède un unique Φ_d-sous-groupe maximal, appelé Φ_d-sous-groupe de Sylow de $\mathbf{T}$. Nous appelons d-déployés les sous-groupes de Levi de $\mathbf{G}$ qui sont centralisateurs de Φ_d-sous-groupes.

1.14. Définition. *Soit* $\mathbf{S}$ *un tore* F*-stable, et soit* $d \in \mathbb{N}$*. Un nombre premier* ℓ *est dit* $(\mathbf{S}, F, d)$*–adapté si* $|\mathbf{S}^F|_\ell = |(\mathbf{S}_d)^F|_\ell$ *(i.e., si le* ℓ*-sous-groupe de Sylow de* $\mathbf{S}^F$ *est contenu dans le* Φ_d*–sous-groupe de Sylow de* $\mathbf{S}$*).*

Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal F-stable de $\mathbf{G}$, et $\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}^F)$. Nous notons $\mathbf{G}(\mathbf{T}, \theta)$ (*cf.* [BMM], 2.C) le groupe engendré par $\mathbf{T}$ ainsi que par les sous-groupes radiciels $\mathbf{U}_\alpha$ (relatifs à $\mathbf{T}$) tels que $\theta(\alpha^\vee) = 1$.

1.15. Proposition. *Soit* $\mathbf{L}$ *un sous-groupe de Levi* F*-stable de* $\mathbf{G}$*. Soit* π *un ensemble de nombres premiers* $(\mathbf{G}, F)$*–excellents et* $(Z^o(\mathbf{L})/Z^o(\mathbf{G}), F, d)$*-adaptés.*

(1) *Soit* S *un* π*-sous-groupe de* $(Z^o(\mathbf{L}))^F$*. Alors* $C^o_{\mathbf{G}}(S)$ *est un sous-groupe de Levi* d*–déployé de* $\mathbf{G}$*.*
(2) *Soit* θ *un* π*-caractère de* $(\mathbf{L}/[\mathbf{L}, \mathbf{L}])^F$*, et soit* $\mathbf{T}$ *un tore maximal* F*-stable de* $\mathbf{L}$*. Alors* $\mathbf{G}(\mathbf{T}, \theta)$ *est un sous-groupe de Levi* d*–déployé de* $\mathbf{G}$*.*

Preuve. (1) Comme tout élément de π est bon pour $\mathbf{G}$, le groupe $C^o_{\mathbf{G}}(S)$ est un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$ (*cf.* par exemple [GeHi], 2.1); on a $S \subset C^o_{\mathbf{G}}(S)$

puisque $C^o_{\mathbf{G}}(S) \supset \mathbf{L} \supset S$, et, comme tout élément π est encore $(C^o_{\mathbf{G}}(S), F)$-excellent par 1.13, on a $S \subset Z^o(C^o_{\mathbf{G}}(S))$. Puisque $Z^o(C^o_{\mathbf{G}}(S)) \subset Z^o(\mathbf{L})$ (car $C^o_{\mathbf{G}}(S) \supset \mathbf{L}$), π est encore d–adapté à $Z^o(C^o_{\mathbf{G}}(S))/Z^o(\mathbf{G})$. Il en résulte que le quotient $(Z^o(C^o_{\mathbf{G}}(S)))^F/(\mathbf{S}^F.(Z^o(\mathbf{G}))^F)$ est un π'–groupe, si $\mathbf{S}$ est le Φ_d-sous-groupe de Sylow de $Z^o(C^o_{\mathbf{G}}(S))$, donc S est contenu dans $\mathbf{S}.Z^o(\mathbf{G})$. Donc nous avons $C^o_{\mathbf{G}}(S) = C^o_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$, ce qui montre que $C^o_{\mathbf{G}}(S)$ est un sous-groupe de Levi d–déployé de $\mathbf{G}$.

(2) La seconde assertion résulte de la première appliquée dans le groupe $\mathbf{G}^*$, ce qui est possible car les nombres premiers $(\mathbf{G}, F)$-excellents sont $(\mathbf{G}^*, F^*)$-excellents, et $Z^o(\mathbf{G})$ et $Z^o(\mathbf{G}^*)$ (resp. $Z^o(\mathbf{L})$ et $Z^o(\mathbf{L}^*)$) ont le même ordre générique.

□

Le résultat technique suivant sera utilisé au §2 pour la description des blocs à ℓ–défaut abélien de $\mathbf{G}^F$. Si $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{G}$, et $\lambda \in \mathrm{Irr}(\mathbf{L}^F)$, nous posons $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda) = N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)/\mathbf{L}^F$.

1.16. Proposition. *Soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{G}$, et soit ℓ un nombre premier bon pour $\mathbf{G}$ et ne divisant pas $|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)|$ pour une certaine représentation unipotente λ de $\mathbf{L}^F$. Si $\ell = 3$, supposons de plus que $\mathbf{G}^F$ n'a pas de composante de type ${}^3D_4$. Alors il existe d tel que ℓ soit $(Z^o(\mathbf{L})/Z^o(\mathbf{G}), F, d)$–adapté.*

Preuve. Pour démontrer la proposition, on peut supposer $\mathbf{G}$ adjoint. En effet, si $\mathbf{L}'$ est l'image de $\mathbf{L}$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{ad}}$, alors $Z^o(\mathbf{L})/Z^o(\mathbf{G})$ et $Z^o(\mathbf{L}')$ ont le même ordre générique. Le caractère λ, étant unipotent, se factorise à travers un caractère unipotent λ' de $\mathbf{G}^F_{\mathrm{ad}}$ et $W_{\mathbf{G}^F_{\mathrm{ad}}}(\mathbf{L}', \lambda') = W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$.

Nous supposons donc $\mathbf{G}$ adjoint. Comme un groupe adjoint est un produit de restrictions de scalaires de groupes simples, $\mathbf{G}$ est un produit de groupes de la forme $(\mathbf{G}_i^{(a)}, F_i^{(a)})$ (restriction de scalaires de $\mathbb{F}_{q^a}$ à $\mathbb{F}_q$ de $(\mathbf{G}_i, F_i)$), et $(\mathbf{L}, \lambda)$ est un produit de $(\mathbf{L}_i^{(a)}, \lambda_i^{(a)})$. Comme $(\mathbf{L}_i^{(a)})^F = \mathbf{L}_i^{F^a}$ et

$$W_{\mathbf{G}_i^{(a)F^{(a)}}}(\mathbf{L}_i^{(a)}, \lambda_i^{(a)}) = W_{\mathbf{G}_i^{F^a}}(\mathbf{L}_i, \lambda_i)\,,$$

on peut, quitte à remplacer $(\mathbf{G}_i^{(a)}, F_i^{(a)}, \mathbf{L}_i^{(a)}, \lambda_i^{(a)})$ par $(\mathbf{G}_i, F_i^a, \mathbf{L}_i, \lambda_i)$, supposer que $\mathbf{G}$ est un produit de groupes simples, chacun stable par F.

Nous utilisons maintenant le lemme suivant, qui apparaît déjà dans [Ge], 3.1.

1.17. Lemme. *Si $\mathbb{T} = (X, Y, \phi)$ est un tore générique, et $(\mathbf{T}, F)$ est le tore algébrique correspondant pour un certain choix de q, alors un nombre premier ℓ qui ne divise pas l'ordre de ϕ est $(\mathbf{T}, F)$–adapté.*

Preuve de 1.17. Soit $|\mathbb{T}| = \prod_{i=1}^{r} \Phi_{d_i}^{n_i}$ l'ordre polynômial de $\mathbb{T}$. Comme c'est le polynôme caractéristique de ϕ sur Y, l'ordre de ϕ est le p.p.c.m. des ordres (comme racines de l'unité) des racines des Φ_{d_i}, qui est le p.p.c.m. des d_i. Par ailleurs, si ℓ n'est pas $(\mathbf{T}, F)$–adapté, il divise deux des facteurs cyclotomiques, disons $\Phi_d(q)$ et $\Phi_{d'}(q)$. Il divise alors (*cf.* par exemple [BrMa], appendice 2, (3)) le p.p.c.m. de d et d', donc il divise l'ordre de ϕ, d'où le lemme. □

Le paragraphe qui suit utilise librement concepts et notations de [BMM]. Supposons que $(\mathbf{G}, \mathbf{T}_0, F)$ est un triple associé au groupe générique $\mathbb{G} = ((X, R, Y, R^\vee), W\phi)$, où $\mathbf{T}_0$ est choisi quasi-déployé, *i.e.,* tel qu'il existe un sous-groupe de Borel F-stable $\mathbf{B}$ contenant $\mathbf{T}_0$. Supposons aussi que $\mathbf{L}$ est associé à $\mathbb{L} = ((X, R', Y, R'^\vee), W_{\mathbb{L}} w\phi)$. On peut identifier $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$ à $W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda})$ où $\boldsymbol{\lambda} \in \mathrm{Uch}(\mathbb{G})$ est tel que $\rho_{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathbf{L}^F} = \lambda$ (voir [BMM], 1.26). Soit R^+ le système de racines positives correspondant au choix de $\mathbf{B}$. Nous avons alors une décomposition en produit semi-direct $N_{W_{\mathbb{G}}}(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda}) = W_{\mathbb{L}} \rtimes W'$ où $W' \simeq W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda})$ est formé des $v \in N_{W_{\mathbb{G}}}(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda})$ tels que $v(R'^+) = R'^+$. Nous pouvons supposer que, dans la classe $W_{\mathbb{L}} w\phi$ qui définit $\mathbb{L}$, w a été choisi tel que $w\phi(R'^+) = R'^+$. Soit δ l'ordre de ϕ : on a $(w\phi)^\delta \in N_{W_{\mathbb{G}}}(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda})$, et, puisqu'il vérifie encore $(w\phi)^\delta(R'^+) = R'^+$, on a même $(w\phi)^\delta \in W'$. Donc, par l'hypothèse de la proposition, ℓ ne divise pas l'ordre de $(w\phi)^\delta$.

Si ℓ ne divise pas δ, alors ℓ ne divise pas l'ordre de $w\phi$, et par le lemme 1.17 on obtient qu'il existe d tel que ℓ soit $(\mathbf{T}, F, d)$-adapté où $\mathbf{T}$ est un tore maximal de $\mathbf{L}$ correspondant au tore générique $(X, Y, w\phi)$. Ceci implique en particulier que ℓ est $(Z^o(\mathbf{L}), F, d)$-adapté, d'où la proposition dans ce cas.

Supposons maintenant que ℓ divise δ. Comme nous avons choisi $\mathbf{T}_0$ quasi-déployé, ϕ est un automorphisme du diagramme, d'ordre 2 ou 3 sur chaque composante non-déployée $\mathbb{G}_i$ de $\mathbb{G}$ puisqu'elles sont simples et F–stables. Donc $\ell = 2$ ou $\ell = 3$. On voit même, puisque nous avons supposé ℓ bon pour $\mathbb{G}$, et exclu les composantes de type ${}^3D_4$ pour $\ell = 3$, que $\delta = \ell = 2$ et que toute composante non-déployée de $\mathbf{G}$ est de type A_n. Soit $\mathbf{G}_i$ une telle composante. Alors $\mathbb{G}_i^-$ est déployé et, puisque $W_{\mathbb{G}_i^-}(\mathbb{L}_i^-, \sigma^{\mathbb{L}_i}(\boldsymbol{\lambda}_i)) = W_{\mathbb{G}_i}(\mathbb{L}_i, \boldsymbol{\lambda}_i)$ (*cf.* [BMM], 3.3, pour la définition de $\sigma^{\mathbb{L}_i}$) nous savons, en appliquant le résultat déjà démontré pour $\delta = 1$ dans $\mathbb{G}_i^-$, que 2 divise au plus un des facteurs cyclotomiques de $|\mathrm{Rad}(\mathbb{L}_i^-)|(q) = \pm|\mathrm{Rad}(\mathbb{L}_i)|(-q)$. Ceci donne le résultat puisque $\Phi_d(q) \equiv \Phi_d(-q) \pmod 2$. □

Remarque. Soit $\mathbf{G}$ un groupe de type ${}^3D_4$, et prenons $(\mathbf{L}, \lambda) = (\mathbf{T}, 1)$ où,

- si $q \equiv 1 \pmod 3$, $\mathbf{T}$ est un tore maximal tel que
$$|\mathbb{T}| = (x^2 + x + 1)(x - 1)(x + 1)$$
- et si $q \equiv -1 \pmod 3$, $\mathbf{T}$ est un tore maximal tel que
$$|\mathbb{T}| = (x^2 - x + 1)(x + 1)(x - 1)\,.$$

Alors 3 n'est pas $(\mathbf{T}, F, d)$-adapté pour ces tores, mais, ces deux tores ont un groupe de Weyl $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}, 1)$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ (*cf.* [DeMi]) : ceci montre que l'exclusion du type ${}^3D_4$ dans l'énoncé de la proposition est nécessaire.

1.18. Proposition.

(1) *Soit π un ensemble de nombres premiers différents de p, et ne divisant pas l'ordre de $(Z(\mathbf{G}^*)/Z^\circ(\mathbf{G}^*))^{F^*}$, et soit s un π-élément de $\mathbf{G}^F$. Alors $C_{\mathbf{G}}(s)^F = C^\circ_{\mathbf{G}}(s)^F$.*

(2) *Soit π un ensemble de nombres premiers bons pour $\mathbf{G}$ et ne divisant pas l'ordre de $(Z(\mathbf{G})/Z^\circ(\mathbf{G}))^F$. Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal F-stable de $\mathbf{G}$ et soit $\theta \in \operatorname{Irr}(\mathbf{T}^F)_\pi$. Alors $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}, \theta) \subset \mathbf{G}(\mathbf{T}, \theta)$.*

Preuve. Le (1) est dans [GeHi], 2.5 (voir aussi [CaEn], 4.4, (i)). Le (2) se déduit de (1) appliqué dans $\mathbf{G}^*$ en utilisant le fait que, si $(\mathbf{T}^*, s)$ est dual de $(\mathbf{T}, \theta)$, alors, puisque π ne contient que des nombres premiers bons pour $\mathbf{G}$, le groupe $\mathbf{G}(\mathbf{T}, \theta)$ est dual de $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$. □

Le résultat suivant sera utilisé au paragraphe 3 pour la description des isotypies.

1.19. Proposition.

(1) *Soit π un ensemble de nombres premiers dont aucun ne divise l'ordre de $Z([\mathbf{G}, \mathbf{G}])^F$. Alors la restriction de $\mathbf{G}^F$ à $Z^\circ(\mathbf{G})^F_\pi$ induit un isomorphisme*
$$\operatorname{Ab}_\pi \operatorname{Irr}(\mathbf{G}^F) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Irr}(Z^\circ(\mathbf{G})^F_\pi)\,.$$

(2) *Soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{G}$, soit $\mathbf{T}$ un tore maximal de $\mathbf{L}$, soit π un ensemble de nombres premiers $(\mathbf{G}, F)$-excellents et dont aucun ne divise $Z([\mathbf{L}, \mathbf{L}])^F$. Soit $\theta \in \operatorname{Ab}_\pi \operatorname{Irr}(\mathbf{L}^F)$, soient $\theta_{\mathbf{T}}$ la restriction de θ à $\mathbf{T}^F$ et θ_Z sa restriction à $Z^\circ(\mathbf{L})^F_\pi$. Alors*
$$N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \theta_Z) = N_{\mathbf{G}^F(\mathbf{T}, \theta_{\mathbf{T}})}(\mathbf{L})$$

Preuve. (1) La suite exacte :
$$0 \to Z([\mathbf{G}, \mathbf{G}]) \cap Z^\circ(\mathbf{G}) \to Z^\circ(\mathbf{G}) \to \mathbf{G}/[\mathbf{G}, \mathbf{G}] \to 0$$
donne la suite exacte de cohomologie galoisienne
$$\begin{aligned} 0 \to (Z([\mathbf{G}, \mathbf{G}]) \cap Z^\circ(\mathbf{G}))^F &\to (Z^\circ(\mathbf{G}))^F \\ &\to (\mathbf{G}/[\mathbf{G}, \mathbf{G}])^F \to H^1(F, Z([\mathbf{G}, \mathbf{G}]) \cap Z^\circ(\mathbf{G})) \to 0 \end{aligned}$$
et par hypothèse, les termes extrêmes sont des π'-groupes, d'où l'assertion (1).

(2) Sous les hypothèses de l'énoncé, $\mathbf{G}(\mathbf{T},\theta_\mathbf{T})$ est le plus grand sous-groupe de Levi F-stable $\mathbf{M}$ contenant $\mathbf{L}$ tel que $\theta_\mathbf{T}$ soit la restriction d'un caractère de $\mathrm{Ab\,Irr}(\mathbf{M}^F)$. De plus, si $\mathbf{T}'$ est un autre tore maximal rationnel de $\mathbf{L}$, on a $\mathbf{G}(\mathbf{T},\theta_T) = \mathbf{G}(\mathbf{T}',\theta_{\mathbf{T}'})$. On peut donc supposer que l'on a choisi pour $\mathbf{T}$ un tore quasi-déployé de $\mathbf{L}$. Deux tores quasi-déployés étant conjugués sous $\mathbf{L}^F$ on peut alors trouver des représentants de $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\theta_Z)/\mathbf{L}^F$ dans $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\mathbf{T})$ (et par (1) ces représentants sont dans $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\mathbf{T},\theta)$ donc dans $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\mathbf{T},\theta_\mathbf{T})$) d'où $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\theta_Z) = N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T},\theta_\mathbf{T},\mathbf{L}).\mathbf{L}^F$ ce qui est égal à $N_{\mathbf{G}(\mathbf{T},\theta_\mathbf{T})^F}(\mathbf{L})$ par 1.19, (1). □

2. Blocs unipotents à groupes de défaut abéliens

2.A. Conditions nécessaires.

Nous analysons la structure des paires maximales des ℓ-blocs unipotents de $\mathbf{G}^F$ à groupe de défaut abélien, quand ℓ est $(\mathbf{G},F)$-excellent.

Soit ℓ un nombre premier excellent pour $(\mathbf{G},F)$. Soit K une extension finie du corps des nombres ℓ-adiques $\mathbb{Q}_\ell$ "assez grosse" pour $\mathbf{G}^F$, et soit $\mathcal{O}$ son anneau d'entiers, extension finie de l'anneau des entiers ℓ-adiques $\mathbb{Z}_\ell$.

Soit e un bloc unipotent de $\mathcal{O}\mathbf{G}^F$, *i.e.*, un idempotent primitif central de $\mathcal{O}\mathbf{G}^F$ tel que $ee_\ell^{\mathbf{G}^F} = e$, où $e_\ell^{\mathbf{G}^F}$ est l'idempotent central correspondant à $\mathcal{E}_\ell(\mathbf{G}^F,1)$ (*cf.* §1). Soit D un groupe de défaut de e, supposé abélien. Posons $\mathbf{L} := C^o_\mathbf{G}(D)$. Puisque ℓ est bon, c'est un sous-groupe de Levi (F-stable) de $\mathbf{G}$, et on a même (*cf.* ci-dessus 1.17, (2)) $\mathbf{L}^F = C_{\mathbf{G}^F}(D)$. Soit f un ℓ-bloc de $\mathbf{L}^F$ tel que $\mathrm{Br}_D(e).f = f$, où Br_D désigne le morphisme de Brauer (en d'autres termes, f est une "racine" de e, ou (D,f) est une "sous-paire de Sylow" de e). Soit λ le caractère canonique de $\mathbf{L}^F$ dans f.

2.1. Théorème.

(1) *D est ℓ-sous-groupe de Sylow de $Z(\mathbf{L}^F)$, et $D \subset Z^o(\mathbf{L})^F$.*
(2) *λ est un caractère de ℓ-défaut zéro de $\mathbf{L}^F/D$, i.e.,* $\deg(\lambda)_\ell = |\mathbf{L}^F_{\mathrm{ss}}|_\ell$.
(3) *$N_{\mathbf{G}^F}(D,\lambda) = N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$, et $\ell \nmid |W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)|$.*
(4) *λ est un caractère unipotent de $\mathbf{L}^F$ et il est l'unique caractère unipotent de $\mathbf{L}^F$ dans le bloc f .*
(5) *$\ell \nmid |Z([\mathbf{L},\mathbf{L}]^F)|$.*
(6) *Il existe un entier d tel que $\ell \mid \Phi_d(q)$ et $(\mathbf{L},\lambda)$ est une paire d-cuspidale de $\mathbf{G}$. L'entier d est uniquement déterminé si $\mathbf{L}$ est un sous-groupe propre de $\mathbf{G}$, et alors ℓ est $(Z^o(\mathbf{L})/Z^o(\mathbf{G}),F,d)$-adapté.*

Remarque. Le groupe $\mathbf{GL}_{15}(13)$ a un caractère unipotent de 7-défaut 0, qui est à la fois 2-cuspidal et 14-cuspidal. Nous voyons donc que l'unicité de d dans l'assertion (6) impose que $\mathbf{L}$ soit propre.

Preuve.

Les trois premières assertions sont des résultats classiques de la théorie des blocs (l'inclusion $D \subset Z^o(\mathbf{L})^F$ vient de l'excellence de ℓ).

Pour démontrer (4), nous vérifions d'abord que le bloc f est unipotent, *i.e.*, que $fe_\ell^{\mathbf{L}^F} = f$. Par itération de la formule $\mathrm{Br}_{<x>}(e_\ell^{\mathbf{G}^F}) = e_\ell^{C^o_{\mathbf{G}}(x)^F}$ (*cf.* [BrMi], 3.2), où x désigne un ℓ-élément de $\mathbf{G}^F$, on déduit $\mathrm{Br}_D(e_\ell^{\mathbf{G}^F}) = e_\ell^{\mathbf{L}^F}$. Il suffit alors d'appliquer le morphisme de Brauer Br_D à l'égalité $ee_\ell^{\mathbf{G}^F} = e$ pour obtenir que tous les constituants de $\mathrm{Br}_D(e)$ (et donc en particulier f) sont unipotents.

Le lemme suivant résulte immédiatement de [Hi], 3.1.

2.2. Lemme (G. Hiß). *Tout bloc unipotent contient un caractère unipotent.*

Comme λ est l'unique caractère de f qui est trivial sur D, et comme tout caractère unipotent de $\mathbf{L}^F$ est trivial sur $Z(\mathbf{L}^F)$, on en déduit l'assertion (4).

Pour démontrer (5) notons que, puisque λ est unipotent, sa restriction à $[\mathbf{L},\mathbf{L}]^F$ est encore un caractère irréductible. Mais $|[\mathbf{L},\mathbf{L}]^F| = |(\mathbf{L}/Z(\mathbf{L}))^F| = |\mathbf{L}^F/Z(\mathbf{L})^F|.|H^1(F, Z(\mathbf{L}))|$, donc $(\deg\lambda)_\ell = |[\mathbf{L},\mathbf{L}]^F|_\ell$. Ainsi λ est un caractère de ℓ-défaut 0 de $[\mathbf{L},\mathbf{L}]^F$, ce qui implique que ce groupe n'a pas de ℓ-sous-groupe central non trivial et démontre (5).

Démontrons (6). Supposons d'abord que $\mathbf{L} \neq \mathbf{G}$. Il existe alors $d \in \mathbb{N}$ tel que Φ_d divise l'ordre générique de $Z^o(\mathbf{L})/Z^o(\mathbf{G})$ et $\ell \mid \Phi_d(q)$. Comme ℓ ne divise pas $|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)|$, il résulte de 1.16 que d est uniquement déterminé par ces conditions. En d'autres termes, ℓ est $(Z^o(\mathbf{L})/Z^o(\mathbf{G}), F, d)$–adapté. Nous obtenons alors par 1.15, (i), que $\mathbf{L}$ est d-déployé.

Nous notons $\mathrm{Deg}(\gamma)$ le degré générique d'un caractère unipotent de $\mathbf{G}^F$. Ainsi, on a $\mathrm{Deg}(\gamma) \in \mathbb{Q}[x]$, et $\deg(\gamma) = \gamma(1) = \mathrm{Deg}(\gamma)(q)$. Il existe un produit c de mauvais nombres premiers pour $\mathbf{L}$ tel que $c.\mathrm{Deg}(\lambda) \in \mathbb{Z}[x]$ soit un polynôme unitaire (*cf.* par exemple, [BMM], 1.32). Donc $\dfrac{|\mathbb{L}_{ss}|}{c.\mathrm{Deg}(\lambda)}$ est un produit de polynômes cyclotomiques multiplié par une puissance de x, dont la valeur en q n'est pas divisible par ℓ. Comme ℓ divise Φ_d, on voit que les contributions du polynôme cyclotomique Φ_d à $\mathrm{Deg}(\lambda)$ et à $|\mathbb{L}_{ss}|$ sont égales, ce qui prouve que λ est d-cuspidal par [BMM], 2.9, et achève la démonstration de 2.1. $\square$

Remarque. Notons que, si $\mathbf{L} = \mathbf{G}$, la preuve ci-dessus montre que λ est un caractère d-cuspidal de $\mathbf{G}^F$ pour tout d tel que $\ell \mid \Phi_d(q)$ et $\Phi_d \mid |\mathbb{G}_{ss}|$.

2.B. Les π–blocs unipotents "à groupe de défaut abélien".

Dans ce paragraphe, pour certains ensembles π de nombres premiers, nous définissons des sous-ensembles de la π-série $\mathcal{E}_\pi(\mathbf{G}^F, 1)$ dont nous montrons qu'ils correspondent à des π–idempotents de $Z\overline{\mathbb{Q}}\mathbf{G}^F$, et pour $\pi = \{\ell\}$ qu'ils correspondent aux ℓ–blocs de défaut abélien de $\mathbf{G}^F$.

Les notations et hypothèses suivantes seront en vigueur dans toute la suite de ce paragraphe :

(Hd) $(\mathbf{L}, \lambda)$ est une paire d-cuspidale de $\mathbf{G}$.
(Hπ1) π est un ensemble de nombres premiers $(\mathbf{G}, F)$–excellents.
(Hπ2) Pour tous $\ell \in \pi$, $\mathbf{L} = C_{\mathbf{G}}(Z^o(\mathbf{L})_\ell^F)$.
(Hπ3) $\deg(\lambda)_\pi = |\mathbf{L}_{\mathrm{ss}}^F|_\pi$.
(Hπ4) $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$ est un π'-groupe.
(H$d\pi$) π est $(Z^o(\mathbf{L})/Z^o(\mathbf{G}), F, d)$–adapté.

Remarque. Si π est formé d'un seul nombre premier $(\mathbf{G}^F, F)$-excellent ℓ, nous avons vu (*cf.* 2.1) que les hypothèses ci-dessus sont satisfaites pour un choix convenable de $(\mathbf{L}, \lambda)$ si $\mathbf{G}^F$ possède un ℓ-bloc à groupe de défaut abélien.

Notations.

- Dorénavant, nous supposons choisi un tore maximal F-stable $\mathbf{T}_0$ de $\mathbf{L}$.
- Soit $\ell \in \pi$. Nous notons $e_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{L}^F}$ le ℓ–idempotent primitif de $Z\overline{\mathbb{Q}}\mathbf{L}^F$ défini par λ. Ainsi $e_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{L}^F}$ est un ℓ–bloc de $\mathbf{L}^F$ de groupe de défaut $Z^o(\mathbf{L})_\ell^F$.
- Nous notons $e_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F}$ l'unique bloc de $\mathbf{G}^F$ correspondant à $e_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{L}^F}$ par la correspondance de Brauer — en d'autres termes, utilisant les notations de [AlBr], on a

$$(\{1\}, e_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F}) \subseteq (Z^o(\mathbf{L})_\ell^F, e_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{L}^F}) .$$

Comme $N_{\mathbf{G}^F}(Z^o(\mathbf{L})_\ell^F, e_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{L}^F}) = N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$ et ℓ ne divise pas $|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)|$, il résulte du "first main theorem" de Brauer (*cf.* par exemple [AlBr]) que $(Z^o(\mathbf{L})_\ell^F, e_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{L}^F})$ est une $e_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F}$–sous-paire maximale. En particulier,

(2.3) $Z^o(\mathbf{L})_\ell^F$ est un groupe de défaut de $e_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F}$.

Nous allons donner entre autres (voir 2.8 ci-dessous) une description complète des caractères de $\mathbf{G}^F$ dans $e_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F}$, en démontrant que ce sont exactement les caractères de $\mathcal{E}_\ell(\mathbf{G}^F, 1)$ qui sont "au-dessus de $(\mathbf{L}, \lambda)$". Nous procédons en plusieurs étapes.

Étude de $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1, (\mathbf{L}, \lambda))$.

Soit $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1, (\mathbf{L}, \lambda))$ l'ensembles des caractères unipotents γ de $\mathbf{G}^F$ tels que $(\gamma, R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda))_{\mathbf{G}^F} \neq 0$. Nous notons $\mathrm{Irr}(\mathbf{G}^F, e_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F})$ l'ensemble des caractères irréductibles de $\mathbf{G}^F$ dans $e_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F}$.

2.4. Lemme. $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1, (\mathbf{L}, \lambda)) \subseteq \mathrm{Irr}(\mathbf{G}^F, e_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F})$.

Preuve. Elle se fait par récurrence sur $|\mathbf{G}^F : \mathbf{L}^F|$. Si $\mathbf{G}^F = \mathbf{L}^F$, 2.4 est trivial. Sinon il existe $x \in Z^o(\mathbf{L})^F_\ell$, $x \notin Z(\mathbf{G}^F)$. Soit $\mathbf{G}(x) := C^o_{\mathbf{G}}(x)$ et $\mathbf{G}^F(x) := \mathbf{G}(x)^F$. Par récurrence, 2.4 est vrai si on remplace $\mathbf{G}$ par $\mathbf{G}(x)$.

Soit $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1, (\mathbf{L}, \lambda))$. Par la formule "of Curtis–type" écrite comme dans [Br2], 4.3, on a

$$\mathrm{dec}_\ell^{x,\mathbf{G}^F}(\gamma) = \mathrm{dec}_\ell^{x,\mathbf{G}^F(x)}({}^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{G}(x)}(\gamma)).$$

Comme, par [BMM], 4.5, le caractère ${}^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{G}(x)}(\gamma)$ appartient au $\mathbb{Z}$-module libre engendré par $\bigcup_{(\mathbf{L}',\lambda')=_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F(x), 1, (\mathbf{L}', \lambda'))$ (où $(\mathbf{L}', \lambda')$ parcourt l'ensemble des paires de $\mathbf{G}(x)$ qui sont $\mathbf{G}^F$–conjuguées à $(\mathbf{L}, \lambda)$), nous voyons que

$$\mathrm{dec}_\ell^{x,\mathbf{G}}(\gamma) \in \overline{\mathbb{Z}} \bigcup_{(\mathbf{L}',\lambda')=_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F(x), 1, (\mathbf{L}', \lambda')),$$

et, par l'hypothèse de récurrence :

$$\mathrm{dec}_\ell^{x,\mathbf{G}}(\gamma) \in \overline{\mathbb{Z}} \bigcup_{(\mathbf{L}',\lambda')=_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)} \mathrm{Irr}(\mathbf{G}^F(x), e^{\mathbf{G}^F(x)}_{\ell,(\mathbf{L}',\lambda')}).$$

Comme $(<x>, e^{\mathbf{G}^F(x)}_{\ell,(\mathbf{L}',\lambda')}) \supseteq (\{1\}, e^{\mathbf{G}^F}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)})$ pour tous $(\mathbf{L}', \lambda') =_{\mathbf{G}^F} (\mathbf{L}, \lambda)$, pour démontrer 2.4 il suffit maintenant (d'après le "second main theorem" de Brauer) de vérifier que $\mathrm{dec}_\ell^{x,\mathbf{G}^F}(\gamma) \neq 0$.

Appliquant encore la formule "of Curtis-type" ([Br2], 4.3) nous obtenons

$${}^*R^{\mathbf{G}(x)}_{\mathbf{L}}(\mathrm{dec}_\ell^{x,\mathbf{G}^F}(\gamma)) = \mathrm{dec}_\ell^{x,\mathbf{L}^F}({}^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}(\gamma)),$$

et il suffit de voir que $\mathrm{dec}_\ell^{x,\mathbf{L}^F}({}^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}(\gamma)) \neq 0$. Comme, par [BMM], 3.15,

$${}^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}(\gamma) = (\gamma, R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}(\lambda)) \sum_{w \in W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L})/W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)} \lambda^w$$

il suffit de vérifier que $\mathrm{dec}_\ell^{x,\mathbf{L}^F}(\lambda) \neq 0$. Mais, puisque λ est unipotent (donc trivial sur $Z^o(\mathbf{L})^F$) et est de défaut nul, nous avons $\mathrm{dec}_\ell^{x,\mathbf{L}^F}(\lambda) = \lambda$. □

La caractérisation suivante des groupes de défaut abéliens est l'analogue de [BMM], 4.8. Noter que, dans le cas où $\pi = \{\ell\}$, elle fournit une caractérisation du groupe de défaut en termes de l'application de Deligne–Lusztig $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}}$ (une telle caractérisation nous a été suggérée par G. Hiß).

2.5. Proposition. *Soit $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1, (\mathbf{L}, \lambda))$. Si $\mathbf{T}$ est un tore maximal F-stable $\mathbf{G}$, et si $(R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(1), \gamma)_{\mathbf{G}^F} \neq 0$, alors le π-sous-groupe de Hall $\mathbf{T}_\pi^F$ de $\mathbf{T}^F$ est $\mathbf{G}^F$-conjugué à un sous-groupe de $Z^o(\mathbf{L})^F$. De plus, il existe un tore maximal F-stable $\mathbf{T}$ tel que $(R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(1), \gamma)_{\mathbf{G}^F} \neq 0$ et $\mathbf{T}_\pi^F = Z^o(\mathbf{L})_\pi^F$.*

Preuve.

• Supposons que $(\gamma, R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(1))_{\mathbf{G}^F} \neq 0$, et soit $x \in \mathbf{T}_\ell^F$ pour un certain $\ell \in \pi$. Par la formule "of Curtis-type" on a :

$$^*R_{\mathbf{T}}^{C^0_{\mathbf{G}}(x)} \operatorname{dec}_\ell^{x,\mathbf{G}^F}(\gamma) = \operatorname{dec}_\ell^{x,\mathbf{T}^F}(^*R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\gamma)),$$

donc en particulier $\operatorname{dec}_\ell^{x,\mathbf{G}^F}(\gamma) \neq 0$ puisque $^*R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\gamma) = (R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(1), \gamma)_{\mathbf{G}^F}.1_{\mathbf{T}^F}$ et $\operatorname{dec}_\ell^{x,\mathbf{T}^F}(1_{\mathbf{T}^F}) \neq 0$. Ceci implique que x est $\mathbf{G}^F$-conjugué à un élément du groupe de défaut du ℓ-bloc de γ, qui par 2.4 est $Z^0(\mathbf{L})^F$.

Montrons maintenant la première partie de la proposition par récurrence sur $\dim \mathbf{G}$. Si $\mathbf{T}_\pi^F \subset Z^0(\mathbf{G})^F$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, il existe $\ell \in \pi$ et $x \in \mathbf{T}_\ell^F - Z^0(\mathbf{G})^F$. Par le raisonnement ci-dessus, x est $\mathbf{G}^F$-conjugué à un $x' \in Z^0(\mathbf{L})^F$; et cette conjugaison envoie $\mathbf{T}$ sur un certain tore maximal $\mathbf{T}'$ de $\mathbf{M} := C^0_{\mathbf{G}}(x')$. Comme π est $(Z^0(\mathbf{L})/Z^0(\mathbf{G}), F, d)$-adapté, il résulte de 1.15, (i), que $\mathbf{M}$ est un sous-groupe de Levi d-déployé de $\mathbf{G}$. Comme $(R_{\mathbf{T}'}^{\mathbf{G}}(1), \gamma)_{\mathbf{G}^F} = (R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(1), \gamma)_{\mathbf{G}^F} \neq 0$, il s'ensuit qu'il existe $\mu \in \mathcal{E}(\mathbf{M}^F, 1)$ tel que $^*R_{\mathbf{T}'}^{\mathbf{M}}(\mu) \neq 0$ et $(\mathbf{M}, \mu) \preccurlyeq (\mathbf{G}, \gamma)$ (cette dernière relation exprime que $(R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\mu), \gamma)_{\mathbf{G}^F} \neq 0$, *cf.*[BMM], 3.1). Soit $(\mathbf{L}', \lambda')$ une paire d-cuspidale telle que $(\mathbf{L}', \lambda') \preccurlyeq (\mathbf{M}, \mu)$. Alors $(\mathbf{L}', \lambda')$ est $\mathbf{G}^F$-conjugué à $(\mathbf{L}, \lambda)$, et, par l'hypothèse de récurrence nous avons

$$\mathbf{T}'_\pi \leq_{\mathbf{M}^F} Z^0(\mathbf{L}') \quad \text{et} \quad Z^0(\mathbf{L}') =_{\mathbf{G}^F} Z^0(\mathbf{L}),$$

d'où la première partie de la proposition.

• Pour tout tore maximal F-stable $\mathbf{T}$ de $\mathbf{L}$ tel que $(\lambda, R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{L}}(1)) \neq 0$, par [BMM], 1.38, on voit que $(\deg \lambda)_\pi$ divise $|\mathbf{L}^F : \mathbf{T}^F|_\pi$. Comme $(\deg \lambda)_\pi = |\mathbf{L}_{\mathrm{ss}}^F|_\pi$, on voit que $\mathbf{T}_\pi^F \leq Z^o(\mathbf{L})$, d'où $\mathbf{T}_\pi^F = Z^o(\mathbf{L})_\pi$. □

Le résultat suivant montre que les sous-groupes "π–locaux" utilisés dans notre contexte sont, comme dans [BMM], des groupes d–déployés.

2.6. Lemme. *Un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{L}$ est π-déployé si et seulement si il est d-déployé.*

Preuve. Un sous-groupe de Levi $\mathbf{M}$ π-déployé contenant $\mathbf{L}$ est le centralisateur connexe d'un π-sous-groupe de $Z(\mathbf{L})^F$. Ce π-sous-groupe est nécessairement dans $Z^o(\mathbf{L})^F$ puisque π est $(\mathbf{G}, F)$-excellent (donc $(\mathbf{L}, F)$-excellent). Par 1.15 et d'après l'hypothèse (H$d\pi$), $\mathbf{M}$ est d-déployé.

Réciproquement, si $\mathbf{M} \supset \mathbf{L}$ est d-déployé, alors $\mathbf{M}$ est le centralisateur de la π-partie de son centre. En effet, soit $\mathbf{M}'$ le centralisateur de la π-partie du centre de $\mathbf{M}'$. Par ce qui précède, $\mathbf{M}'$ est d-déployé. Si $\mathbf{M}'$ contient strictement $\mathbf{M}$, la d-partie du centre de $\mathbf{M}'$ est strictement plus petite que la d-partie du centre de $\mathbf{M}$, et de (H$d\pi$) il résulte qu'il doit en être de même de la π-partie, une contradiction. □

Comme dans [BMM], nous posons

$$\mathrm{UReg}^{\mathbf{G}^F}_{(\mathbf{L},\lambda)} := \sum_{\gamma\in\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,1,(\mathbf{L},\lambda))} \deg\gamma.\gamma\,.$$

2.7. Lemme.

(1) *Soit $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1, (\mathbf{L}, \lambda))$, et soit ψ une fonction unipotente uniforme sur $\mathbf{G}^F$. Alors*

$$(\gamma,\psi)_{\mathbf{G}^F} = \sum_{[\mathbf{M}]_{\mathbf{G}^F}} \frac{1}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M})|}(\gamma, R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(c_\pi{}^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\psi)))_{\mathbf{G}^F}$$

où $\mathbf{M}$ parcourt l'ensemble de tous les sous-groupes de Levi d–déployés de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{L}$.

(2) *On a*

$$\mathrm{UReg}^{\mathbf{G}^F}_{(\mathbf{L},\lambda)} = \sum_{[(\mathbf{M},\mu)]_{\mathbf{G}^F}} \frac{\deg(R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(1))}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M},\mu)|} R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\deg c_\pi(\mu).\mu)$$

où $(\mathbf{M},\mu)$ parcourt l'ensemble de toutes les paires d–déployées telles que $(\mathbf{L},\lambda) \preccurlyeq (\mathbf{M},\mu)$.

Preuve.

(1) Comme ψ est uniforme, on a :

$$(\gamma,\psi)_{\mathbf{G}^F} = \left(\gamma, \sum_{[\mathbf{T}]_{\mathbf{G}^F}} \frac{1}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T})|} R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}}{}^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}}\psi\right)_{\mathbf{G}^F}.$$

On continue comme dans la preuve de 1.9, (1). Nous savons ici que les termes où $\mathbf{M}$ n'est pas π–déployé contenant $\mathbf{L}$ (ce qui équivaut à d-déployé contenant $\mathbf{L}$ par 2.6) sont nuls par 2.5.

(2) On a :

$$\mathrm{UReg}^{\mathbf{G}^F}_{(\mathbf{L},\lambda)} = \sum_{\gamma\in\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,1,(\mathbf{L},\lambda))} (\gamma, \mathrm{UReg}^{\mathbf{G}^F})_{\mathbf{G}^F}\gamma\,.$$

En appliquant (1) avec $\psi = \mathrm{UReg}^{\mathbf{G}^F}$, échangeant les sommes, et utilisant l'égalité

$$^*R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\mathrm{UReg}^{\mathbf{G}^F}) = \deg(R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(1))\,\mathrm{UReg}^{\mathbf{M}^F}\,,$$

on obtient

$$\mathrm{UReg}_{(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F} = \sum_{[\mathbf{M}]_{\mathbf{G}^F}} \frac{\deg(R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(1))}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M})|} \sum_{\gamma\in\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,1,(\mathbf{L},\lambda))} \Big(\gamma, R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(c_\pi\,\mathrm{UReg}^{\mathbf{M}^F})\Big)_{\mathbf{G}^F}\gamma$$

où $\mathbf{M}$ parcourt les sous-groupes de Levi π–déployés de $\mathbf{G}^F$. Développant $c_\pi\,\mathrm{UReg}^{\mathbf{M}^F} = \sum_{\mu\in\mathcal{E}(\mathbf{M}^F,1)} \deg c_\pi(\mu).\mu$, et ne sommant que sur des représentants des classes de $\mathbf{G}^F$–conjugaison des couples $(\mathbf{M},\mu)$ (qui sont nécessairement à $\mathbf{G}^F$-conjugaison près "au-dessus de $(\mathbf{L},\lambda)$"), nous obtenons le lemme. □

Description des blocs.

Rappelons les notations utilisées dans [BMM] pour l'indexation de Lusztig des caractères irréductibles de $\mathbf{G}^F$. Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal rationnel de $\mathbf{G}^F$. Pour θ un caractère de $\mathbf{T}^F$ et ν un caractère unipotent de $\mathbf{G}^F(\mathbf{T},\theta)$, on note $\chi_{(\mathbf{G}(\mathbf{T},\theta),\theta,\nu)}^{\mathbf{G}^F}$ le caractère irréductible de $\mathbf{G}^F$ qui correspond à la paire (θ,ν) par décomposition de Jordan de caractères.

2.8. Théorème. *On pose*

$$\mathrm{Reg}_{\pi,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F} = \sum_{[(\mathbf{N},\theta,\nu)]_{\mathbf{G}^F}} \deg(\chi_{(\mathbf{N},\theta,\nu)}^{\mathbf{G}^F})\chi_{(\mathbf{N},\theta,\nu)}^{\mathbf{G}^F}$$

où θ parcourt $\mathrm{Ab}_\pi\,\mathrm{Irr}(\mathbf{L}^F)$, $\mathbf{N} := \mathbf{G}(\mathbf{T},\theta)$, et $\nu \in \mathcal{E}(\mathbf{N}^F,1,(\mathbf{L},\lambda))$.

(1) *On a*

$$\mathrm{Reg}_{\pi,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F} = \sum_{[(\mathbf{M},\mu)]_{\mathbf{G}^F}} \frac{\deg R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(1)}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M},\mu)|} R_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\mathrm{Ab}_\pi\,\mathrm{Reg}^{\mathbf{M}^F}.\deg c_\pi(\mu)\mu)$$

où $(\mathbf{M},\mu)$ parcourt l'ensemble des paires d–déployées de $\mathbf{G}^F$ telles que $(\mathbf{L},\lambda) \preccurlyeq_{\mathbf{G}^F} (\mathbf{M},\mu)$.

(2) *Le caractère $\mathrm{Reg}_{\pi,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F}$ est le caractère régulier associé à un π-idempotent central de $\overline{\mathbb{Q}}\mathbf{G}^F$. En particulier, ses valeurs sont divisibles par $|\mathbf{G}^F|_\pi$.*

Remarque. Pour $\pi = \{\ell\}$, l'idempotent correspondant à $\mathrm{Reg}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F}$ est celui que nous avons déjà désigné par $e_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F}$. Dans le cas général, nous désignons par $e_{\pi,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F}$ l'idempotent correspondant à $\mathrm{Reg}_{\pi,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F}$.

Preuve.

(1) On pose $\Theta_{\mathbf{G},\pi}^{\mathbf{N}^F} := \sum \theta$ où la somme porte sur tous les éléments θ de $\mathrm{Ab}_\pi \operatorname{Irr}(\mathbf{L}^F)$ tels que $\mathbf{G}(\mathbf{T},\theta) = \mathbf{N}$. Alors

$$\mathrm{Reg}_{\pi,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F} = \sum_{[(\mathbf{N},\nu)]_{\mathbf{G}^F}} \frac{\deg R_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}}(1)}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{N},\nu)|} R_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}}(\Theta_{\mathbf{G},\pi}^{\mathbf{N}^F}.\deg(\nu)\nu)$$

où $(\mathbf{N},\nu)$ parcourt l'ensemble des paires d–déployées telles que $(\mathbf{L},\lambda) \preccurlyeq_{\mathbf{G}^F} (\mathbf{N},\nu)$.

Nous allons utiliser deux fois le lemme technique suivant.

2.9. Lemme. *Soit φ un fonction $\mathbf{G}^F$–invariante sur l'ensemble des paires d–déployées $(\mathbf{N},\nu)$ telles que $(\mathbf{L},\lambda) \leq_{\mathbf{G}^F} (\mathbf{N},\nu)$. Alors*

$$\sum_{[(\mathbf{N},\nu);(\mathbf{L},\lambda)\leq_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{N},\nu)]_{\mathbf{G}^F}} \frac{\varphi(\mathbf{N},\nu)}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{N},\nu)|} = \sum_{\{(\mathbf{N},\nu);(\mathbf{L},\lambda)\leq_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{N},\nu)\}} \frac{|W_{\mathbf{N}^F}(\mathbf{L},\lambda)|}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)|}\varphi(\mathbf{N},\nu).$$

Noter que la première somme porte sur les classes de $\mathbf{G}^F$–conjugaison des paires $(\mathbf{N},\nu)$, alors que la seconde porte sur toutes les paires $(\mathbf{N},\nu)$. Le lemme résulte aisément de [BMM], 3.14. □

Par 2.9, on voit que

$$\begin{aligned}\mathrm{Reg}_{(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F} &= \sum_{\{(\mathbf{N},\nu);(\mathbf{L},\lambda)\leq_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{N},\nu)\}} \frac{|W_{\mathbf{N}^F}(\mathbf{L},\lambda)|}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)|} R_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}}(\Theta_{\mathbf{G},\pi}^{\mathbf{N}^F}.\deg(\mu)\mu) \\ &= \sum_{\{\mathbf{N};\mathbf{L}\leq\mathbf{N}\}} \frac{|W_{\mathbf{N}^F}(\mathbf{L},\lambda)|}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)|} R_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}}(\Theta_{\mathbf{G},\pi}^{\mathbf{N}^F}.\,\mathrm{UReg}_{(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{N}^F}).\end{aligned}$$

Par 2.9, et par 2.7, (2), on voit que

$$\mathrm{UReg}_{(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{N}^F} = \sum_{\{\mathbf{M};\mathbf{L}\leq\mathbf{M}\leq\mathbf{N}\}} \frac{|W_{\mathbf{M}^F}(\mathbf{L},\lambda)|}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)|} R_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}}(\sum_\mu \deg c_\pi(\mu)\mu)$$

où $(\mathbf{M},\mu)$ est d–déployé et tel que $(\mathbf{L},\lambda) \preccurlyeq (\mathbf{M},\mu)$. Grâce à la formule

$$\sum_{\mathbf{N}\geq\mathbf{M}} \Theta^{\mathbf{N}^F}_{\mathbf{M},\pi}|_{\mathbf{M}^F} = \mathrm{Ab}_\pi \,\mathrm{Reg}^{\mathbf{M}^F},$$

on obtient

$$\mathrm{Reg}^{\mathbf{G}^F}_{(\mathbf{L},\lambda)} = \sum_{\{(\mathbf{M},\mu);(\mathbf{L},\lambda)\leq_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M},\mu)\}} \frac{|W_{\mathbf{M}^F}(\mathbf{L},\lambda)|}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)|} R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\mathrm{Ab}_\pi \,\mathrm{Reg}^{\mathbf{M}^F}.\deg c_\pi(\mu)\mu)$$

où $(\mathbf{M},\mu)$ parcourt l'ensemble des paires d–déployées. La formule que nous voulons obtenir en résulte en appliquant encore une fois 2.9.

(2) Il est nécessaire et suffisant de démontrer que $|\mathbf{G}^F|_\pi$ divise toutes les valeurs de $\mathrm{Reg}^{\mathbf{G}^F}_{\pi,(\mathbf{L},\lambda)}$. Par (1), on voit qu'il suffit de démontrer que pour toutes les paires d–déployées $(\mathbf{M},\mu)$ telles que $(\mathbf{L},\lambda) \preccurlyeq (\mathbf{M},\mu)$,

$$|\mathbf{G}^F|_\pi \text{ divise } \frac{\deg R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(1)}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M},\mu)|} R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\mathrm{Ab}_\pi \,\mathrm{Reg}^{\mathbf{M}^F}.\deg c_\pi(\mu)\mu)\,.$$

Comme $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M},\mu)$ est un quotient d'un sous-groupe de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$ (*cf.* [BMM], 3.14), on voit que $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M},\mu)$ est un π'–groupe, et il suffit donc de vérifier que $|\mathbf{M}^F_{\mathrm{ss}}|_\pi$ divise $\deg c_\pi(\mu)$. Ceci est conséquence de la proposition suivante.

2.10. Proposition. *Pour $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F,1,(\mathbf{L},\lambda))$, $|\mathbf{G}^F_{\mathrm{ss}}|_\pi$ divise $\deg c_\pi(\gamma)$.*

Preuve de 2.10. Nous démontrons d'abord le lemme technique suivant, corollaire de 1.8.

2.11. Lemme. *Soit $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F,1)$. Alors*

$$(\gamma, D(\mathrm{U}\sigma^{\mathbf{G}^F}_{\pi\cup\{p\}}))_{\mathbf{G}^F} = \sum_{[(\mathbf{M},\mu)]_{\mathbf{G}^F}} \frac{\varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{M}}|\mathbf{G}^F:\mathbf{M}^F|_{\pi'}}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M},\mu)|}(R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\mu),\gamma)_{\mathbf{G}^F}\frac{\deg(c_\pi(\mu))}{|\mathbf{M}^F_{\mathrm{ss}}|_\pi}$$

où la somme porte sur des représentants des classes de $\mathbf{G}^F$-conjugaison de paires formées d'un sous-groupe de Levi π–déployé $\mathbf{M}$ de $\mathbf{G}$ et d'un $\mu \in \mathcal{E}(\mathbf{M}^F,1)$.

Preuve de 2.11. De 1.5 et 1.8 nous déduisons que

$$D(\mathrm{U}\sigma^{\mathbf{G}^F}_{\pi\cup\{p\}}) = \sum_{[\mathbf{M}\ \pi\text{–déployé}]_{\mathbf{G}^F}} \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{M}}\frac{(\deg R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(1))_{\pi'}}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M})|}R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(c_\pi(\mathrm{U}\sigma^{\mathbf{M}^F}_{\pi\cup\{p\}}))\,.$$

Donc

$$(\gamma, D(\mathrm{U}\sigma^{\mathbf{G}^F}_{\pi\cup\{p\}}))_{\mathbf{G}^F} = \sum_{[\mathbf{M}\ \pi\text{-déployé}]_{\mathbf{G}^F}} \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{M}} \frac{(\deg R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(1))_{\pi'}}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M})|}(c_\pi(\mathrm{U}\sigma^{\mathbf{M}^F}_{\pi\cup\{p\}}), {}^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\gamma))_{\mathbf{M}^F}\,.$$

D'autre part, à partir encore de 1.5, on a aussi :

$$\begin{aligned}(\gamma, D(c_\pi(\mathrm{U}\sigma^{\mathbf{G}^F}_{\pi\cup\{p\}})))_{\mathbf{G}^F} &= \sum_{[\mathbf{T}\in\mathcal{T}_\pi(\mathbf{G})]_{\mathbf{G}^F}} \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{T}} \frac{|\mathbf{G}^F : \mathbf{T}^F|_{\pi'-\{p\}}}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T})|}(\gamma, R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}}(1))_{\mathbf{G}^F} \\ &= \sum_{[\mathbf{T}\in\mathcal{T}_\pi(\mathbf{G})]_{\mathbf{G}^F}} \frac{\deg R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}}(1)}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T})|}\frac{(\gamma, R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}}(1))_{\mathbf{G}^F}}{|\mathbf{G}^F_{\mathrm{ss}}|_\pi} \\ &= \frac{\deg c_\pi(\gamma)}{|\mathbf{G}^F_{\mathrm{ss}}|_\pi}\,.\end{aligned}$$

Appliquant cette dernière formule dans $\mathbf{M}$, nous obtenons :

$$(\gamma, D(\mathrm{U}\sigma^{\mathbf{G}^F}_{\pi\cup\{p\}}))_{\mathbf{G}^F} = \sum_{[\mathbf{M}\ \pi\text{-déployé}]_{\mathbf{G}^F}} \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{M}} \frac{|\mathbf{G}^F : \mathbf{M}^F|_{\pi'}}{|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M})|}\frac{\deg(c_\pi({}^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\gamma)))}{|\mathbf{M}^F_{\mathrm{ss}}|_\pi}$$

et 2.11 en résulte aisément. □

Ce lemme nous permet de démontrer la proposition, par récurrence sur $|\mathbf{G}^F/\mathbf{L}^F|$. En effet, le membre de gauche de 2.11 est un entier, puisque $\sigma^{\mathbf{G}^F}_{\pi\cup\{p\}}$, et donc le dual de sa projection unipotente $D(\mathrm{U}\sigma^{\mathbf{G}^F}_{\pi\cup\{p\}})$, est un caractère virtuel. Si $\mathbf{L} = \mathbf{G}$, la somme du membre de droite de 2.11 ne contient qu'un terme égal à $\deg c_\pi(\gamma)/|\mathbf{G}^F_{\mathrm{ss}}|_\pi$, d'où le résultat dans ce cas. Dans le cas général, le membre de droite ne comprend qu'un terme où $\mathbf{M} = \mathbf{G}$, égal à $\deg c_\pi(\gamma)/|\mathbf{G}^F_{\mathrm{ss}}|_\pi$, et, puisque par l'hypothèse de récurrence $\dfrac{\deg(c_\pi(\mu))}{|\mathbf{M}^F_{\mathrm{ss}}|_\pi}$ est un entier, tous les autres termes sont des π-entiers. En effet, par [BMM], 3.3, (2)(a), $(R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\mu), \gamma)_{\mathbf{G}^F}$ divise $|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{M}, \mu)|$ et ce dernier nombre est premier à π par (Hπ4). On en déduit que le terme pour $\mathbf{M} = \mathbf{G}$ est aussi un π-entier, d'où la proposition. □

□

3. Les isotypies

Soit ℓ un nombre premier $(\mathbf{G}, F)$-excellent. Soit $e^{\mathbf{G}^F}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}$ un ℓ-bloc de $\mathbf{G}^F$ à groupe de défaut D abélien (*cf.* 2.1 pour les propriétés et notations utilisées ici), où $\mathbf{L} = C^\circ_{\mathbf{G}}(D)$, et où λ est le caractère canonique de $C_{\mathbf{G}^F}(D)$ dans le bloc qui correspond à $e^{\mathbf{G}^F}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}$ par la correspondance de Brauer. On rappelle les propriétés suivantes (*cf.* 2.1, 2.8; voir aussi [CaEn], 4.2).

- $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$, et $\mathbf{L}^F = C_{\mathbf{G}^F}(D)$. De plus, il existe d tel que $\mathbf{L}$ soit d-déployé et $(\mathbf{L},\lambda)$ soit une paire d-cuspidale, et ℓ est $Z^\circ(\mathbf{L})/Z^\circ(\mathbf{G})$-adapté.
- $\mathrm{Irr}(\mathbf{G}^F, e^{\mathbf{G}^F}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)})$ est l'ensemble des constituants des caractères $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}(\theta\lambda)$, où $\theta \in \mathrm{Ab}_\ell\,\mathrm{Irr}(\mathbf{L}^F)$.

On choisit une fois pour toute un tore maximal F–stable $\mathbf{T}$ de $\mathbf{L}$. Si θ est un caractère linéaire de $\mathbf{L}^F$, on pose alors (*cf.* §1 ci-dessus)

$$\mathbf{G}(\theta) := \mathbf{G}(\mathbf{T},\theta_{|_{\mathbf{T}^F}}) \quad \text{et} \quad \mathbf{G}^F(\theta) := \mathbf{G}(\theta)^F\,.$$

D'après 1.18, (2), on sait que l'ensemble des caractères irréductibles du groupe $Z^\circ(\mathbf{L})^F_\ell \rtimes W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$ est alors

$$\mathrm{Irr}\left(Z^\circ(\mathbf{L})^F_\ell \rtimes W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)\right) = \{\mathrm{Ind}^{Z^\circ(\mathbf{L})^F_\ell \rtimes W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)}_{Z^\circ(\mathbf{L})^F_\ell \rtimes W_{\mathbf{G}^F(\theta)}(\mathbf{L},\lambda)}(\theta.\tau)\}\,,$$

où θ parcourt un système de représentants des orbites de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$ sur $\mathrm{Irr}(Z^\circ(\mathbf{L})^F_\ell)$, τ parcourt les caractères irréductibles de $W_{\mathbf{G}^F(\theta)}(\mathbf{L},\lambda)$ et où on a identifié θ à son prolongement à $\mathbf{T}^F$ trivial sur les ℓ'-éléments.

3.1 Théorème.

(1) *Pour tout sous-groupe S de $Z^\circ(\mathbf{L})^F_\ell$, le groupe $\mathbf{M} = C^\circ_{\mathbf{G}}(S)$ est un sous-groupe de Levi d-déployé de $\mathbf{G}$. On a $\mathbf{M}^F = C_{\mathbf{G}^F}(S)$, et le correspondant de Brauer $\mathrm{Br}_S(e^{\mathbf{G}^F}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)})$ de $e^{\mathbf{G}^F}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}$ est donné par la formule :*

$$\mathrm{Br}_S(e^{\mathbf{G}^F}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}) = \sum_{(\mathbf{L}',\lambda')} e^{\mathbf{M}^F}_{\ell,(\mathbf{L}',\lambda')}$$

où $(\mathbf{L}',\lambda')$ parcourt un ensemble de représentants des classes de $\mathbf{M}^F$-conjugaison de paires d-cuspidales de $\mathbf{M}^F$ qui sont $\mathbf{G}^F$-conjuguées à $(\mathbf{L},\lambda)$.

(2) *L'application :*

$$\mathbf{I}^{\mathbf{G}^F}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)} : \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(Z^\circ(\mathbf{L})^F_\ell \rtimes W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)) \to \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(\mathbf{G}^F, e^{\mathbf{G}^F}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)})$$

donnée par

$$\mathrm{Ind}^{Z^\circ(\mathbf{L})^F_\ell \rtimes W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)}_{Z^\circ(\mathbf{L})^F_\ell \rtimes W_{\mathbf{G}^F(\theta)}(\mathbf{L},\lambda)}(\theta.\tau) \mapsto R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{G}(\theta)}(\theta.I^{\mathbf{G}(\theta)}_{(\mathbf{L},\lambda)}(\tau))$$

réalise une isotypie entre $(Z^\circ(\mathbf{L})^F_\ell \rtimes W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda),1)$ et $(\mathbf{G}^F, e^{\mathbf{G}^F}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)})$.

Preuve.

L'assertion (1) est démontrée dans [BMM], 5.8, sous des hypothèses plus restrictives sur ℓ. Ces hypothèses n'ont pour but que d'assurer que $\mathbf{M}^F = C_{\mathbf{G}^F}(S)$, et que $e_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F}$ est bien un ℓ-idempotent. Mais ici le premier fait nous est assuré par 1.18, (1), et le second par les propriétés rappelées ci-dessus avant l'énoncé du théorème.

De même, pour démontrer l'assertion (2), on peut suivre à quelques détails près la démonstration de [BMM] dont nous esquissons les étapes.

On rappelle que, pour x un ℓ–élément de $\mathbf{G}^F$, on pose $\mathbf{G}(x) := C^\circ_{\mathbf{G}}(x)$ et $\mathbf{G}^F(x) := \mathbf{G}(x)^F$.

On montre d'abord que l'application $\mathbf{I}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F}$ commute aux applications de décomposition :

$$\text{(a)} \qquad \mathrm{dec}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{x,\mathbf{G}^F} \cdot \mathbf{I}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F} = \mathbf{I}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F(x)} \cdot \mathrm{dec}_\ell^{x,Z^\circ(\mathbf{L})_\ell^F \rtimes W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)} .$$

où

• Pour une fonction centrale ψ sur $\mathbf{G}^F$, la fonction centrale $\mathrm{dec}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{x,\mathbf{G}^F}(\psi)$ sur $\mathbf{G}^F(x)$ est la fonction qui s'annule hors des éléments ℓ-réguliers et qui vaut $\psi(xx'e_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F(x)})$ sur $x' \in \mathbf{G}^F(x)_{\ell'}$.

• De façon analogue, pour φ une fonction centrale sur $Z^\circ(\mathbf{L})_\ell^F \rtimes W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$, on note $\mathrm{dec}_\ell^{x,Z^\circ(\mathbf{L})_\ell^F \rtimes W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)}(\varphi)$ la fonction centrale sur $Z^\circ(\mathbf{L})_\ell^F \rtimes W_{\mathbf{G}^F(x)}(\mathbf{L},\lambda)$ qui s'annule hors de l'ensemble des éléments ℓ-réguliers et qui prend la valeur $\varphi(xx')$ sur $x' \in (Z^\circ(\mathbf{L})_\ell^F \rtimes W_{\mathbf{G}^F(x)}(\mathbf{L},\lambda))_{\ell'}$.

Pour démontrer (a), en utilisant la formule "de type de Curtis" et le théorème fondamental 3.2 de [BMM], on se ramène d'abord au cas où x est central dans $\mathbf{G}$, puis, en utilisant la formule du caractère pour l'induction de Deligne-Lusztig, au cas où $x = 1$ (voir [BMM] 5.17 et la suite). On est donc ramené à prouver

$$\text{(b)} \qquad \mathrm{dec}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{1,\mathbf{G}^F} \cdot \mathbf{I}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F} = \mathbf{I}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}^F} \cdot \mathrm{dec}_\ell^{1,Z^\circ(\mathbf{L})_\ell^F \rtimes W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)} .$$

On procède alors par récurrence sur $\dim(\mathbf{G}) - \dim(\mathbf{L})$. Pour $\mathbf{L} = \mathbf{G}$, on utilise le lemme suivant (ici nous différons de [BMM], en remplaçant la propriété "d-cuspidal" par "de défaut central") :

3.2. Lemme.

(1) *Soit λ un caractère de ℓ-défaut central de $\mathbf{L}^F$ et soit $\theta \in \mathrm{Ab}_\ell \,\mathrm{Irr}(\mathbf{L}^F)$. On a*

$$\mathrm{dec}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}^{1,\mathbf{L}^F}(\theta.\lambda) = \frac{1}{|Z^\circ(\mathbf{L})_\ell^F|} \mathrm{Ab}_\ell \,\mathrm{Reg}^{\mathbf{L}^F}.\lambda = \frac{1}{|Z^\circ(\mathbf{L})_\ell^F|} \sum_{\eta \in \mathrm{Irr}(Z^\circ(\mathbf{L})_\ell^F)} \eta\lambda .$$

(2) *Pour* $\theta \in \mathrm{Irr}(Z^\circ(\mathbf{L})^F_\ell)$, *on a*

$$\mathrm{dec}_\ell^{1,Z^\circ(\mathbf{L})^F_\ell}(\theta) = \frac{1}{|Z^\circ(\mathbf{L})^F_\ell|}\,\mathrm{Reg}^{Z^\circ(\mathbf{L})^F_\ell} = \frac{1}{|Z^\circ(\mathbf{L})^F_\ell|}\sum_{\eta \in \mathrm{Irr}(Z^\circ(\mathbf{L})^F_\ell)} \eta\,.$$

Contrairement à la situation dans [BMM], les deux assertions sont évidentes (la première reflète le fait qu'un caractère de ℓ-défaut central s'annule hors des éléments dont la ℓ-partie est centrale).

L'hypothèse de récurrence nous donne alors la propriété initiale (a) pour tout élément $x \in Z^\circ(\mathbf{L})^F_\ell$ qui n'est pas central dans $\mathbf{G}$. En utilisant le fait que n'importe quelle fonction centrale dans le bloc $e^{\mathbf{G}^F}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}$ est la somme de ses décompositions pour les divers $x \in Z^\circ(\mathbf{L})^F_\ell$, on en déduit (a) pour les éléments restants (voir [BMM] 5.20).

Pour démontrer l'assertion (2) du théorème, il reste à voir que $\mathbf{I}^{\mathbf{G}^F}_{\ell,(\mathbf{L},\lambda)}$ réalise une isométrie parfaite. On procède là encore par récurrence sur $\dim(\mathbf{G}) - \dim(\mathbf{L})$. Nous ne reproduisons pas les détails de la démonstration de [BMM], mais le lecteur vérifiera aisément que le seul argument qui y est utilisé qui nécessite d'être modifié est le lemme [BMM], 5.21, qui doit être remplacé par le lemme suivant.

3.3. Lemme. *Soit* γ *un caractère de* ℓ*-défaut central de* $\mathbf{G}^F$. *Alors pour tout* $g \in \mathbf{G}^F$, $|C_{\mathbf{G}^F}(g) : Z^\circ(\mathbf{G})^F_\ell|$ *divise* $\gamma(g)$.

Preuve de 3.3. Si on remplace dans l'énoncé $Z^\circ(\mathbf{G})^F$ par $Z(\mathbf{G})^F = Z(\mathbf{G}^F)$ (ce qui est légitime puisqu'on a supposé ℓ premier à l'ordre de $Z(\mathbf{G})^F/Z^\circ(\mathbf{G})^F$), on trouve une propriété bien connue des caractères de défaut central. □

□

M. B. ET J. M. : DMI–LMENS (CNRS–UA 762), 45 RUE D'ULM, F–75005, PARIS, FRANCE

E-mail address: broue@dmi.ens.fr — michel@mangue.ens.fr

BIBLIOGRAPHIE

[AlBr] J.L. Alperin et M. Broué, *Local methods in block theory*, Ann. of Math. **110** (1979), 143–157.

[Bou] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, chap. 4, 5 et 6*, Hermann, Paris, 1968.

[Br1] M. Broué, *Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées*, Astérisque **181–182** (1990), 61–92.

[Br2] M. Broué, *Les ℓ-blocs des groupes* $\mathrm{GL}(n,q)$ *et* $\mathrm{U}(n,q^2)$ *et leurs structures locales*, Astérisque **133–134** (1986), 159–188.

[BrMa] M. Broué et G. Malle, *Théorèmes de Sylow génériques pour les groupes réductifs sur les corps finis*, Math. Ann. **292** (1992), 241–262.

[BMM] M. Broué, G. Malle et J. Michel, *Generic blocks of finite reductive groups*, This issue (1993).

[BrMi] M. Broué et J. Michel, *Blocs et séries de Lusztig dans un groupe réductif fini*, J. reine angew. Math. **395** (1989), 56–67.

[CaEn] M. Cabanes et M. Enguehard, *On blocks and unipotent characters of reductive groups over a finite field, II.*, Publications du L.M.E.N.S. (1992).

[DeMi] D.I. Deriziotis et G.O. Michler, *Characters tables and blocks of finite simple triality groups* ${}^3D_4(q^3)$, Trans. Amer. Math. Soc. **303** (1987), 39–70.

[DiMi] F. Digne et J. Michel, *Representations of finite groups of Lie type*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[En] M. Enguehard, *Sur les groupes de Sylow dans les groupes réductifs finis* (1992), preprint.

[Ge] M. Geck, *On the classification of ℓ-blocks of finite groups of Lie type*, J. Algebra **149** (1992).

[GeHi] M. Geck et G. Hiß, *Basic sets of Brauer characters of finite groups of Lie type*, J. reine angew. Math. **418** (1991), 173–178.

[Hi] G. Hiß, *Regular and semi-simple blocks of finite reductive groups*, J. London Math. Soc. (2) **41** (1990), 63–68.