C. Soulé

Théorie de Nevanlinna et théorie d'Arakelov

Astérisque, tome 183 (1990), p. 127-135

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__183__127_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 183 (1990)

THÉORIE DE NEVANLINNA ET THÉORIE D'ARAKELOV

Par C. Soulé*

P. Vojta s'inspire dans [7] de l'analogie entre la théorie des hauteurs et celle de Nevanlinna pour proposer des conjectures très générales sur les équations diophantiennes en dimension arbitraire. Or on constate que l'extension en dimension supérieure de la théorie d'Arakelov ([1][2]) s'appuie sur les mêmes notions fondamentales que la théorie de Nevanlinna [5], en particulier celle de courants de Green (voir la définition au paragraphe 3.1 ci-dessous). Le but de cet exposé est d'illustrer ce fait dans le cas de l'espace projectif. La théorie de Nevanlinna pour la distribution des valeurs des applications holomorphes d'un espace affine dans un espace projectif utilise des courants appelés "formes de Levine" [4] dont on montre qu'ils donnent les classes de Chern du fibré quotient universel en théorie d'Arakelov. Les résultats exposés ici sont repris de [5] et [2].

1. Forme de Levine [4]

Soient $X = \mathbb{P}^n$ l'espace projectif complexe de dimension, n, $X_0, \ldots, X_n$ des coordonnées homogènes sur X, $p \geq 1$ un entier, et Y la sous-variété de X d'équation

$$X_0 = X_1 = \ldots = X_{p-1} = 0 .$$

On pose

$$\tau = \log\left(|X_0|^2 + |X_1|^2 + \ldots + |X_n|^2\right)$$

et

$$\sigma = \log\left(|X_0|^2 + |X_1|^2 + \ldots + |X_{p-1}|^2\right).$$

* IHES, 35 Route de Chartres, 91440 BURES sur YVETTE

Si $d = \partial + \bar\partial$ est la décomposition standard de la différentielle sur X, on note $d^c = \dfrac{\partial - \bar\partial}{4\pi i}$. La forme $\alpha = dd^c\tau$ est lisse sur X, et $\beta = dd^c\sigma$ est lisse sur X - Y.

On appelle <u>forme de Levine</u> la forme différentielle

(1) $$\Lambda = (\tau - \sigma)\left(\sum_{\nu=0}^{p-1} \alpha^{\nu}\beta^{p-1-\nu}\right)$$

sur X - Y. Si $Z = \sum_i n_i Z_i$ est un cycle sur X, on désigne par $\delta_Z = \sum_i n_i \delta_{Z_i}$ le courant d'intégration sur Z.

<u>THÉORÈME 1</u> [4]
La forme Λ *est intégrable sur* X. *Le courant associé* $[\Lambda]$ *vérifie l'équation*

(2) $$dd^c[\Lambda] = \alpha^p - \delta_Y .$$

<u>PREUVE</u> ([2], Prop. 5.1) :

L'éclaté X' de X le long de Y est la sous-variété de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{p-1}$ formée des couples
$$(x\,;y) = (X_0,\ldots,X_n\,;Y_0,\ldots,Y_{p-1})$$
tels qu'il existe $t \in \mathbb{C}$ avec

(3) $$X_\alpha = t\,Y_\alpha \quad \text{pour tout } \alpha = 0,\ldots,p-1 .$$

Notons $f : X' \to X = \mathbb{P}^n$ et $g : X' \to Z = \mathbb{P}^{p-1}$ les projections évidentes. En dehors du diviseur $Y' = f^{-1}(Y)$ l'application f est un isomorphisme $X' - Y' \to X - Y$.

- Soit $\mathcal{L}_X$ (resp. $\mathcal{L}_Z$) le faisceau inversible canonique sur X (resp. Z). On peut définir sur X' un morphisme
$$\rho : f^*\mathcal{L}_X \to g^*\mathcal{L}_Z$$
de la façon suivante. Si s est une section de $f^*\mathcal{L}_X$ on a
$$s(x\,;y) = (X_0,\ldots,X_n) ,$$
où (X_i) est soit nul, soit un système de coordonées homogènes de x. On pose
$$\rho(s)(x\,;y) = (X_0,\ldots,X_{p-1}) .$$

L'équation (3) montre que $\rho(s)$ est une section de $g^*\mathcal{L}_Z$. On vérifie aisément que la section ρ du fibré inversible $g^*\mathcal{L}_Z \otimes f^*\mathcal{L}_X^{-1}$ a pour diviseur Y'.

Si on munit $\mathcal{L}_X$ et $\mathcal{L}_Z$ de leur métrique standard, la norme carrée de ρ est

$$\|\rho\|^2(x\,;y) = \left(|X_0|^2 + \ldots + |X_{p-1}|^2\right) / \left(|X_0|^2 + \ldots + |X_n|^2\right).$$

- Rappelons l'équation de Poincaré-Lelong [3].

Soit L un fibré holomorphe inversible sur une variété complexe X, h une métrique sur L et $s \neq 0$ une section méromorphe de L. Alors la fonction log h(s,s) est localement intégrable sur X et le courant associé [log h(s,s)] vérifie l'équation

(4) $$d\,d^c[\log h(s,s)] = \delta_{\mathrm{div}(s)} - \omega,$$

où $\omega = c_1(L,h)$ est la première forme de Chern de L associée au choix de la métrique h.

- On a donc

$$d\,d^c\left[\log\|\rho\|^2\right] = \delta_{Y'} + \beta' - \alpha',$$

où α' (resp. β') est la première forme de Chern de $f^*\mathcal{L}_X$ (resp. $g^*\mathcal{L}_Z$). Posons

$$\omega' = \sum_{v=0}^{p-1} (\alpha')^v (\beta')^{p-1-v}$$

et

$$\Lambda' = -\,\omega' \log\|\rho\|^2.$$

On a

$$\begin{aligned} -\,dd^c[\Lambda'] &= \delta_{Y'}\,.\,\omega' + (\beta' - \alpha')\,\omega' \\ &= \delta_{Y'}\,.\,\omega' + (\beta')^p - (\alpha')^p \\ &= \delta_{Y'}\,.\,\omega' - \alpha'^p \end{aligned}$$

puisque β' provient de Z et dim Z = p - 1.

Sur $X' - Y' = X - Y$ on a $\Lambda' = \Lambda$, donc Λ est intégrable et le courant $f_*[\Lambda']$ coincide avec $[\Lambda]$. De plus $\alpha' = f^*(\alpha)$ et $f_*(\alpha')^p = \alpha^p$. Donc $-\,dd^c[\Lambda] = f_*(\delta_{Y'}\,.\,\omega') - \alpha^p$

Comme $Y' = Y \times Z$ et

$$\int_Z \left(-\,c_1(\mathcal{L}_Z)\right)^k = \begin{cases} 1 \text{ si } k = p-1 \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

on obtient

$$f_*(\delta_{Y'}\,.\,\omega') = \delta_Y$$

d'où l'équation (2) .

2. Théorie de Nevanlinna [5] :

2.1 Soit $m \geq 1$ un entier et

$$f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{P}^n$$

une application holomorphe. On s'intéresse à la question suivante : $f(\mathbb{C}^m)$ rencontre-t-il Y ?

Si $z = (z_i) \in \mathbb{C}^m$ on pose

$$|z|^2 = \sum_{i=1}^{m} |z_i|^2$$

et, si $r > 0$ est un nombre réel,

$$B_r = \left\{ z \in \mathbb{C}^m \text{ tel que } |z| < r \right\}$$

et

$$S_r = \left\{ z \in \mathbb{C}^m \text{ tel que } |z| = r \right\}.$$

Soit $\omega = d\, d^c \log |z|^2$.

On fait l'hypothèse que $f(0)$ n'est pas dans Y et que $f^{-1}(Y)$ est soit vide, soit de codimension p dans $\mathbb{C}^m$. On introduit les fonctions suivantes :

$$T_f^k(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{B_t} f^*(\alpha)^k\, \omega^{m-k}, \quad k \geq 0,$$

$$N_f(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{f^{-1}(Y) \cap B_t} \omega^{m-p},$$

$$m_f(r) = \frac{1}{2} \int_{S_r} f^*(\Lambda)\, d^c \log |z|^2\, \omega^{m-p},$$

et

$$R_f(r) = \frac{1}{2} \int_{B_r} f^*(\Lambda)\, \omega^{m-p+1}.$$

On notera que $T_f^k(r)$ ne dépend pas de Y et que $R_f(r) = 0$ si $p = 1$ (car $\omega^m = 0$).

THÉORÈME 2 ("1er théorème principal") :

$$N_f(r) + m_f(r) = T_f^p(r) + R_f(r) + 0(1)$$

PREUVE [5] :

D'après le Théorème 1

$$d\, d^c [\Lambda] = \alpha^p - \delta_Y,$$

donc

$$\int_0^r \frac{dt}{t}\int_{B_t} d\,d^c f^*(\Lambda)\,\omega^{m-p} = T_f^p(r) - N_f(r).$$

Utilisant la formule de Stokes et l'égalité $\frac{dt}{t} = \frac{1}{2} d \log |z|^2$ sur S_t on trouve

$$\int_0^r \frac{dt}{t}\int_{B_t} d\,d^c f^*(\Lambda)\,\omega^{m-p}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^r d\log|z|^2 \int_{S_t} d^c f^*(\Lambda)\,\omega^{m-p}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{B_r} d^c f^*(\Lambda)\, d\log|z|^2\omega^{m-p} + 0(1)$$

(car $f(0) \notin Y$)

$$= m_f(r) - R_f(r) + 0(1).$$

<u>COROLLAIRE</u> :

$$N_f(r) \leq T_f^p(r) + R_f(r) + 0(1)$$

<u>PREUVE</u> : La forme Λ est positive d'après (1), car α et β sont positives et $\tau - \sigma \geq 0$. Donc $m_f(r) \geq 0$ et le corollaire résulte du Théorème 2.

2.2. Soient G la grassmannienne des sous-espaces projectifs Y de codimension p de $\mathbb{P}^n$, et μ la mesure sur G qui est invariante par l'action du groupe unitaire $U(n + 1)$ et de masse totale $\mu(G) = 1$. Posons

$$t_f(r) = \int_{B_r} f^*(\alpha)^{p-1}\,\omega^{m-p+1}.$$

On fait l'hypothèse que, pour μ-presque tout Y, $f^{-1}(Y)$ est vide ou de codimension p.

<u>THÉORÈME 3</u> : *Supposons que*

(H)
$$\liminf_{r \to \infty}\left(t_f(r) \,/\, T_f^p(r)\right) = 0.$$

Alors, pour μ *-presque tout* Y, $f(\mathbb{C}^m) \cap Y$ *est non vide.*

N.B. : Si p = 1 l'hypothèse H) est toujours vérifiée.

PREUVE [5] :

- Notons $N_f(Y,r)$, $m_f(Y,r)$ et $R_f(Y,r)$ les fonctions associées à f et Y comme dans 2.1.

On a

(5) $$\int_G N_f(r)\, d\mu(Y) = T_f^p(r).$$

En effet les formes harmoniques sur $\mathbb{P}^n$ sont les formes $U(n+1)$-invariantes. Donc le courant

$$\int_G \delta_Y d\mu(Y)$$

est la projection harmonique de δ_Y, c'est à dire la forme α^p.

- Si l'on applique (5) et le Théorème 2 on obtient

(6) $$\int_G m_f(Y,r)\, d\mu(Y) = \int_G R_f(Y,r)\, d\mu(Y) + 0(1).$$

- Soit E l'ensemble des $Y \in G$ tels que $f(\mathbb{C}^m) \cap Y$ soit non vide. Supposons par l'absurde que $\mu(E) = 1 - \varepsilon, \varepsilon > 0$. Si $Y \notin E$ on a $N_f(Y,r) = 0$ donc, d'après (5),

$$T_f^p(r) = \int_E N_f(Y,r)\, d\mu(Y)$$

Par le corollaire il vient

$$\begin{aligned} T_f^p(r) &\leq \int_E T_f^p(r)\, d\mu(Y) + \int_E R_f(Y,r)\, d\mu(Y) + 0(1) \\ &\leq (1-\varepsilon)\, T_f^p(r) + \int_G R_f(Y,r)\, d\mu(Y) + 0(1) \\ &= (1-\varepsilon)\, T_f^p(r) + \int_G m_f(Y,r)\, d\mu(Y) + 0(1) \end{aligned}$$

(grâce à (6)). Mais

$$\int_G m_f(Y,r)\, d\mu(Y) = \frac{1}{2}\int_{S_r} f^*\left(\int_G \Lambda(Y)\, d\mu(Y)\right) d^c \log|z|^2\, \omega^{m-p}$$

et la projection harmonique $\int_G \Lambda(Y)\, d\mu(Y)$ du courant Λ est nécessairement un multiple $c(n,p)\alpha^{p-1}$ de la forme α^{p-1}. On obtient ainsi

$$\int_G m_f(Y,r)\, d\mu(Y) = c(n,p)\, t_f(r)$$

et

$$T_f^p(r) \leq (1-\varepsilon)\, T_f^p(r) + c(n,p)\, t_f(r) + 0(1).$$

Ceci contredit l'hypothèse H).

2.3. La constante $c(n,p)$ qui apparaît dans la preuve ci-dessus a été calculée par W. Stoll.

THÉORÈME 4 [6] :

$$c(n,p) = \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{\mu=0}^{n-p} \frac{1}{\mu+\nu}$$

3. Théorie d'Arakelov [1] [2] :

3.1. Soient X un schéma régulier, projectif et plat sur $\mathbf{Z}$, X^p l'ensemble des points de codimension p de X et $Z^p(X)$ le groupe libre engendré par X^p (les cycles de codimension p sur X). Si $Z \in Z^p(X)$, on note δ_Z le courant d'intégration sur $Z(\mathbb{C}) \subset X(\mathbb{C})$. On appelle courant de Green pour Z la donnée d'un courant g réel de type $(p-1, p-1)$ sur $X(\mathbb{C})$ tel que

$$d\, d^c g = \delta_Z - \omega,$$

où ω est une forme C^∞ (de type (p,p)).

Les équations (2) et (4) donnent des exemples de tels courants. Le groupe de Chov artithmétique $\widehat{CH}^p(X)$ est le groupe engendré par les couples (Z,g), où $Z \in Z^p(X)$ et g est un courant de Green pour Z, soumis aux relations suivantes :

a) $(\mathrm{div}(f), -\log |f|^2) = 0$

pour toute fonction rationnelle $f \neq 0$ sur une sous-variété fermée irréductible $Y \subset X$ de codimension $p-1$ (le courant $\log |f|^2$ sur $X(\mathbb{C})$ étant donné par l'intégration sur $Y(\mathbb{C})$ contre la fonction intégrable $\log |f|^2$).

b) $(0, \partial u + \bar{\partial} v) = 0$

pour tous les courants u et v de type $(p-2, p-1)$ et $(p-1, p-2)$.

3.2. Si E est un fibré algébrique sur X, h une métrique hermitienne sur le fibré holomorphe sur $X(\mathbb{C})$ associé à E, et $p \geq 0$ un entier, on définit dans [2] une classe de Chern $\hat{c}_p(E,h) \in \widehat{CH}^p(X)$ caractérisée par les propriétés suivantes :

i) $\hat{c}_0 = 1$

ii) Si L est un fibré inversible, $\hat{c}_1(L, h)$ est la classe du couple $(\mathrm{div}(s), -\log h(s,s))$ pour toute section rationnelle non nulle de L (voir (4)).

iii) Si $E = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$ est une somme directe de fibrés inversibles, h_i une métrique sur L_i, $1 \leq i \leq n$, et h la somme directe orthogonale des h_i, on a

$$\hat{c}_p(E, h) = \sigma_p\left(\hat{c}_1(L_i, h_i)\right),$$

où σ_p est la p-ième fonction symétrique élémentaire.

iv) Si E (resp.L) est un fibré de rang n (resp.1) sur X et h (resp.h') une métrique hermitienne sur E (resp. L) on a

$$\hat{c}_p\left(E \otimes L,\ h \otimes h'\right) = \sum_{i=0}^{p} \binom{n-i}{p-i} \hat{c}_i(E)\,\hat{c}_1(L)^{p-i}\ .$$

v) Si $f : Y \to X$ est un morphisme algébrique on a

$$\hat{c}_p(f^* E, f^* h) = f^* \hat{c}_p\,(E, h).$$

On trouvera dans [1] la définition de

$$f^* : \widehat{CH}^p(X) \to \widehat{CH}^p\,(Y)$$

et celle du produit

$$\widehat{CH}^p(X) \otimes \widehat{CH}^1(X) \to \widehat{CH}^{p+1}\,(X).$$

3.3. Sur l'espace projectif $X = \mathbb{P}^n$ sur $\mathbb{Z}$ on désigne par Q le fibré canonique de rang n (quotient de $\mathcal{O}_X^{n+1}$ par $\mathcal{O}(1)$) et h la métrique induite sur Q par la métrique standard sur $\mathbb{C}^{n+1}$. Soit $Y \subset X$ la sous-variété d'équation

$$X_0 = X_1 = \ldots = X_{p-1} = 0$$

et Λ la forme de Levine.

THÉORÈME 5 ([2], Thm. 5.2.) :

La classe du couple (Y, Λ) *dans* $\widehat{CH}^p\left(\mathbb{P}^n\right)$ *est la p-ième classe de Chern* $\hat{c}_p(Q, h)$.

PREUVE : Notons $\delta_{n,p}$ la différence de ces deux éléments de $\widehat{CH}^p\left(\mathbb{P}^n\right)$. Du Théorème 1 et des propriétés i) à v) de $\hat{c}_p$ on déduit que l'image $\delta_{n,p}$ dans le groupe de Chow usuel CH^p et dans le groupe $A^{pp}(X)$ des formes de type (p,p) sur $X(\mathbb{C})$ (par l'application qui à (Z,g) associe $\omega = \delta_Z + dd^c g$) est nulle. Or le groupe

$$\mathrm{Ker}\left(\widehat{CH}^p(X) \to CH^p(X) \oplus A^{pp}(X)\right)$$

s'identifie au groupe de cohomologie

$$H^{p-1,p-1}\left(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}),\ \mathbb{R}\right) = \mathbb{R}$$

([1] et [2] loc-cit.). Si $\mathbb{P}^{p-1} \subset \mathbb{P}^n$ est le sous-espace défini par les équations $X_p = X_{p+1} = \ldots = X_n = 0$, on constate que le morphisme de corestriction

$$H^{p-1,p-1}\left(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}),\ \mathbb{R}\right) \to H^{p-1,p-1}\left(\mathbb{P}^{p-1}(\mathbb{C}),\ \mathbb{R}\right)$$

est un isomorphisme envoyant $\delta_{n,p}$ sur $\delta_{p-1,p-1}$. Mais si $n = p - 1$ la variété Y est vide et $\sigma = \tau$, donc $\Lambda = 0$. Par conséquent $\delta_{p-1,p-1} = 0$ et $\delta_{n,p} = 0$.

APPLICATION : Du Théorème 5 on déduit dans [2], Prop. 5.4, une nouvelle preuve du Théorème 4.

Références

[1] H. Gillet, C. Soulé : Arithmetic Intersection Theory (1988), Preprint IHES.

[2] H. Gillet, C. Soulé : Characteristic classes for algebraic vector bundles with hermitian metric (1988), à paraître dans Annals of Maths.

[3] P. Griffiths, J. Harris : Principles of Algebraic Geometry (1978), John Wiley and Sons.

[4] H. Levine : A theorem on holomorphic mappings into complex projective space, Annals of Maths. 71, n° 2 (1960), 529-535.

[5] B.V. Shabat : Distribution of values of holomorphic mappings, Translation AMS 61 (1985)

[6] W. Stoll : About the value distribution of holomorphic maps into projective space, Acta Math. 123 (1969), 83-114.

[7] P. Vojta : Diophantine Approximations and Value Distribution Theory, Lec Notes in Maths 1239 (1987), Springer-Verlag.