Astérisque

RENÉE ELKIK

Le théorème de Manin-Drinfeld

Astérisque, tome 183 (1990), p. 59-67
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__183__59_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 183 (1990)

Le Théorème de Manin–Drinfeld

R. ELKIK

Si N est un entier positif on désigne par $\Gamma(N)$ le sous–groupe de $SL(2,\mathbb{Z})$ formé des matrices congrues à l'identité modulo N. Un sous–groupe Γ de $SL(2,\mathbb{Z})$ est appelé sous–groupe de congruence s'il existe N tel que $\Gamma \supset \Gamma(N)$. On désigne alors par X^{o}_{Γ} (resp. X_{Γ}) la surface de Riemann quotient du demi–plan de Poincaré par Γ (resp. sa complétion projective lisse). On appelle "pointes" les points de $X_{\Gamma}-X^{\mathrm{o}}_{\Gamma}$. Le théorème de Manin–Drinfeld s'énonce ainsi :

THÉORÈME. ***Si*** Γ ***est un sous-groupe de congruence, la classe de tout diviseur de degré*** 0 ***de*** X_{Γ} ***à support dans les pointes, est un élément de torsion de*** $\mathrm{Pic}^{\mathrm{o}}(X_{\Gamma})$.

La démonstration originelle de ce théorème est due à Manin [Ma] complétée par Drinfeld [Dr].

Dans le cas du groupe $\Gamma_{\mathrm{o}}(p)$, p premier, la courbe modulaire correspondante n'a que deux pointes P_{o} et P_{∞}. Si l'on pose

$$\Delta(2) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24} \quad , \text{où } \ q = e^{2i\pi\tau}$$

et $\Delta_p(\tau) = \Delta(p\tau)$ le quotient Δ/Δ_p définit une fonction rationnelle sur $X_{\Gamma_{\mathrm{o}}(p)}$ dont le diviseur est $(p-1)(P_{\mathrm{o}}-P_{\infty})$. On peut montrer que pour $p>3$ la classe de $(P_{\mathrm{o}}-P_{\infty})$ est d'ordre exactement $\frac{p-1}{d}$, où $d = \frac{12}{(p-1,12)}$.
[pour plus de détails voir Ogg [0]).

Nous avons choisi d'exposer en détail la démonstration proposée par Deligne [De 1]. Le principe est le suivant :

a) Le théorème de Manin–Drinfeld est équivalent à l'énoncé suivant :
La structure de Hodge–mixte sur $H^1(X^o_\Gamma,\mathbb{Q})$ est scindée.

La démonstration de cette équivalence est l'objet du §1.

b) Il suffit d'établir le théorème pour les groupes $\Gamma(N)$: c'est clair.

c) L'entier N étant fixé on considère une correspondance de Hecke sur la courbe $X_{\Gamma(N)}$ qui définit un endomorphisme de $H^1(X^o_{\Gamma(N)},\mathbb{Z})$ muni de sa structure de Hodge mixte. L'ensemble des valeurs propres de cet opérateur agissant sur la composante de poids 1, c'est–à–dire essentiellement sur les formes modulaires cuspidales est disjoint de l'ensemble des valeurs propres pour l'action sur la partie de poids 2, qui correspond aux formes non cuspidales. Ceci permet de scinder la structure de Hodge sur $\mathbb{Q}$.

I – THÉORÈME.

Soient X ***une courbe projective lisse sur*** $\mathbb{C}$, S ***un ensemble fini de points de*** X ***et*** $j: X^o = X-S \hookrightarrow X$ ***l'inclusion du complémentaire de*** S ***dans*** X. ***Les conditions suivantes sont équivalentes*** :

a) ***la classe de tout diviseur de degré*** 0 ***à support dans*** S ***est un élément de torsion de*** $\mathrm{Pic}^o(X)$.

b) ***La structure de Hodge mixte sur*** $H^1(X^o,\mathbb{Q})$ ***est scindée*** (*i.e.* ***somme directe de structures pures).***

Cet énoncé résulte aisément de [De 3 §10–3] auquel réfère [De 1]. Le principe de la démonstration est alors le suivant : on considère le 1–motif formé de :

– la variété abélienne $\mathrm{Pic}^o(X)$
– le groupe D^o_S des diviseurs de degré 0 sur X portés par S
– l'homomorphisme classe de D^o_S dans $\mathrm{Pic}^o(X)$.

Il est clair sur sa définition que le H^1 de Hodge mixte de ce motif se scinde sur $\mathbb{Q}$ ssi la condition a) est remplie. On montre que ce H^1 motivique et $H^1(X^o,\mathbb{Z})$ sont isomorphes (comme structure de Hodge) à torsion par $\mathbb{Z}(1)$ près.

Lors de l'exposé oral nous avons suivi [De 3]. Nous donnons ici une démonstration un peu différente.

Rappelons d'abord la description de $H^1(X^o,\mathbb{Z})$. Si $\varphi : A \longrightarrow B$ est un homomorphisme de faisceaux abéliens sur un espace topologique on note $[A \xrightarrow{\varphi} B]$ le complexe dont les seuls termes non nuls sont A en degré 0, B en degré 1 et qui a φ pour différentielle.

On a les isomorphismes suivants [De 2] :

$$\begin{aligned} H^1(X^o,\mathbb{C}) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^1(X^o_o,[0_{X^o} \xrightarrow{d} \Omega^1_{X^o}]) \\ &\xleftarrow{\sim} \mathbb{H}^1(X,[j_*0_{X^o} \xrightarrow{d} j_*\Omega^1_{X^o}) \\ &\xleftarrow{\sim} \mathbb{H}^1(X,0_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X<S>) \end{aligned}$$

où $\Omega^1_X<S>$ désigne le faisceau des formes différentielles méromorphes sur X, holomorphes en restriction à X^o et admettant des pôles d'ordre ≤ 1, aux points de S. La filtration par le poids sur $H^1(X^o,\mathbb{Z})$ est définie par : $W_{0,\mathbb{Z}} = 0$, $W_{1,\mathbb{Z}} = j^*H^1(X,\mathbb{Z})$ $(= H^1(X,\mathbb{Z}))$, $W_{2,\mathbb{Z}} = H^1(X^o,\mathbb{Z})$.

Si A désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$ on note $W_{i,A}$, le sous-module $W_{i,\mathbb{Z}} \otimes A$ de $H^1(X^o,A)$. On a $W_{1,\mathbb{C}} = \operatorname{Im}(\mathbb{H}^1(X,O_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X) \longrightarrow \mathbb{H}^1(X,O_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X<S>))$.

Si s est un point de X on note $\mathbb{C}_s$ le faisceau sur X de fibre $\mathbb{C}$ en s et nul ailleurs. On a alors une suite exacte :

$$(\Sigma) \qquad 0 \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_X<S> \xrightarrow{r} \bigoplus_{s\in\mathbb{C}} \mathbb{C}_s \longrightarrow 0$$

$$w \longrightarrow r(w) = \oplus\, 2i\pi \operatorname{res}_s(w).$$

Notons encore $\bigoplus_{s\in S} \mathbb{C}_s$, l'espace des sections globales de ce faisceau et $\mathcal{U}$ le noyau de la forme linéaire sur $\bigoplus_{s\in S} \mathbb{C}_s : \bigoplus_s a_s \longrightarrow \sum_s a_s$. L'ensemble des points entiers de $\mathcal{U}$ s'identifie naturellement au groupe $D^o_S : \sum_s n_s.s \longrightarrow \bigoplus_s n_s$.

On vérifie aisément qu'on a le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(X,\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^1(X^o,\mathbb{C}) & \longrightarrow & Gr^W_2(H^1(X^o,\mathbb{C})) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \varphi_1 & & \uparrow \varphi & & \varphi_2 \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^0(X,\Omega^1_X) & \longrightarrow & H^0(X,\Omega^1_X<S>) & \longrightarrow & U & \longrightarrow & 0\,. \end{array}$$

La 1ère (resp. 2ème) ligne est déduite de la suite de cohomologie associée à l'inclusion $[O_X \to \Omega^1_X] \longrightarrow [O_X \to \Omega^1_X<S>]$ (resp. à Σ). Les flèches verticales sont induites par l'inclusion $\Omega^1_X<S>[-1] \longrightarrow [O_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X<S>]$. En outre la flèche r a été définie de sorte que φ_2 soit compatible aux structures entières et identifie donc $\operatorname{Gr}^W_2(H^1(X^o,\mathbb{Z}))$ à D^o_S.

La filtration de Hodge sur $H^1(X^o,\mathbb{C})$ est définie par $F^o = H^1(X^o,\mathbb{C})$, $F^1 = \operatorname{Im}\varphi$, $F^2 = 0$. Comme l'application $F^1 \longrightarrow \operatorname{Gr}^W_2$ est surjective celui–ci est muni d'une structure pure de type (1,1). En outre $\mathrm{Gr}^W_1 = H^1(X,\mathbb{C})$ est muni de sa structure pure "usuelle" de type $((0,1)(1,0))$.

Une structure de Hodge mixte, extension de 2 structures pures de poids consécutifs est toujours scindée sur $\mathbb{R}$ [G,S]. Et il facile d'exhiber ici le scindage de cette structure sur $\mathbb{R}$: en effet $F_1^1 \cap \overline{F^1}$ est un supplémentaire de $H^1(X,\mathbb{C})$ dans $H^1(X^o,\mathbb{C})$. Le supplémentaire cherché de $H^1(X,\mathbb{R})$ dans $H^1(X^o,\mathbb{R})$ est donc $F_1^1 \cap H^1(X^o,\mathbb{R})$.

La démonstration du théorème repose sur le lemme suivant :

LEMME. ***Pour qu'une forme*** $w \in H^o(X,\Omega^1_X\langle S\rangle)$ ***définisse une classe de cohomologie entière de*** X^o ***il faut et il suffit qu'il existe une fonction méromorphe*** f ***sur*** X ***(automatiquement holomorphe non nulle sur*** X^o***) telle que*** $w = \frac{1}{2i\pi}\frac{df}{f}$.

La condition est clairement suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Soient $\pi : \tilde{X}^o \longrightarrow X^o$ le revêtement universel de X^o et Γ son groupe d'automorphismes. Il existe une fonction holomorphe h sur $\tilde{X}^o$ telle que $\pi^*w = dh$. L'hypothèse faite sur w signifie que pour tout γ dans Γ, on a $h\circ\gamma - h \in \mathbb{Z}$. Il existe donc une fonction holomorphe f sur X^o telle que $f\circ\pi = e^{2\pi i h}$, et l'on a sur X^o $\frac{df}{f} = 2\pi i w$. La méromorphie de f sur X résulte de l'hypothèse $w \in H^o(X,\Omega^1_X\langle S\rangle)$.

Considérons donc $w = \frac{1}{2\pi i}\frac{df}{f} \in H^o(X,\Omega^1_X\langle S\rangle)$.

On a alors $\sum_S \mathrm{res}_s(w)s = \mathrm{Div}(f)$.

Le lemme signifie donc que pour qu'un élément de D^o_S se relève dans $F^1 \cap H^o(X^o,\mathbb{Z})$, il faut et il suffit qu'il soit principal, ce qui est un énoncé légèrement plus précis que celui du théorème.

II – ACTION DES CORRESPONDANCES SUR LA COHOMOLOGIE.

Considérons un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y^o & \hookrightarrow & Y \\ p^o\downarrow & & \downarrow p \\ X^o & \hookrightarrow & X \end{array}$$

dans lequel p^o est un morphisme fini de courbes lisses sur $\mathbb{C}$, étendu en p entre leurs complétions projectives lisses. On désigne par S (resp. $\tilde{S}$) l'ensemble des points de $X - X^o$ (resp. $Y - Y^o$).

On peut définir des homomorphismes $p^{o*} : H^1(X^o,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(Y^o,\mathbb{Z})$ et $p^o_* : H^1(Y^o,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X^o,\mathbb{Z})$, le premier par contravariance de la cohomologie, le second grâce à la dualité de Poincaré et la covariance de l'homologie localement finie pour les morphismes propres. On vérifie que ce sont des homomorphismes de structure de Hodge.

Notons d'abord que l'injection $p^*\,\Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_Y$ se prolonge en un isomorphisme de faisceaux sur Y : $p^*\,\Omega^1_X<S> \xrightarrow{\sim} \Omega^1_Y<\tilde{S}>$ (car $\frac{dz^n}{z^n} = n\,\frac{dz}{z}$).

a) <u>La montée</u> : on en déduit des homomorphismes de faisceaux sur X : $\Omega^1_X \longrightarrow p_*\,\Omega^1_Y$, $\Omega^1_X<S> \xrightarrow{\sim} p_*\,\Omega^1_Y<\tilde{S}>$, et un diagramme commutatif de complexes

$$\text{(D)}\qquad \begin{array}{ccc} [O_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X] & \longrightarrow & [O_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X<S>] \\ \downarrow\varphi & & \downarrow\varphi^o \\ [p_*O_Y \xrightarrow{d} p_*\Omega^1_Y] & \longrightarrow & [p_*O_Y \xrightarrow{d} p_*\Omega^1_Y<\tilde{S}>] \,. \end{array}$$

L'homomorphisme p^{o*} est le composé de $H^o(\varphi^o)$ avec l'isomorphisme :
$\mathbb{H}^o(X,[p_*O_Y \xrightarrow{d} p_*\Omega^1_Y<\tilde{S}>]) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^o(Y,[O_Y \xrightarrow{d} \Omega^1_Y<\tilde{S}>])$.

La compatibilité de φ^{o*} à la filtration par le poids se lit sur (D) dont la colonne de gauche correspond à W_1 . Le morphisme de complexes φ^o induit des morphismes entre les tronqués bêtes et ceci fournit la compatibilité à F .

b) <u>La descente</u> : on dispose d'un morphisme trace : $p_*O_Y \xrightarrow{\mathrm{Tr}} O_X$ et d'un morphisme Trace $p_*\Omega^1_Y \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \Omega^1_X$ qui prolonge

$$p_*p^*\Omega^1_X \xrightarrow{\sim} \Omega^1_X \otimes_{O_X} p_*O_Y \xrightarrow{1\otimes\mathrm{Tr}} \Omega^1_X$$

et s'étend en $\mathrm{Tr} : p_*\Omega^1_Y<\tilde{S}> \longrightarrow \Omega^1_X<S>$. De plus $\mathrm{Tr}\circ d = d\circ\mathrm{Tr}$.

On a donc un diagramme commutatif de complexes sur X :

$$\begin{array}{ccc} [p_*O_Y \xrightarrow{d} p_*\Omega^1_Y] & \longrightarrow & [p_*O_Y \xrightarrow{d} p_*\Omega^1_Y<\tilde{S}>] \\ \downarrow\mathrm{Tr} & & \downarrow\mathrm{Tr}^o \\ [O_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X] & \longrightarrow & [O_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X<S>] \,. \end{array}$$

On définit p^o_* comme le composé de

$$\mathbb{H}^o(Y,[O_Y \longrightarrow \Omega^1_Y<\tilde{S}>] \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^o(X,[p_*O_Y \xrightarrow{d} p_*\Omega^1_Y<\tilde{S}>])$$

avec $\mathbb{H}^o(\mathrm{Tr}^o)$ et on vérifie que c'est un endomorphisme de structures de Hodge comme en a).

III – LE SCINDAGE DE LA COHOMOLOGIE DE $X^o_{\Gamma(N)}$.

On rappelle que si f est une forme modulaire de poids 2 pour un sous–groupe d'indice fini Γ de $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ et $\alpha = \binom{a\ b}{c\ d}$ est une matrice à coefficients entiers de déterminant > 0 , on définit $f/[\alpha]$ par

$$f/_{[\alpha]}(z) = \mathrm{Det}(\alpha).(cz+d)^{-2}f(\frac{az+b}{cz+d}) .$$

En outre si f et g sont modulaires cuspidales pour Γ leur produit scalaire de Peterson est défini ainsi

$$<f,g> = \frac{1}{\mu}\int_D f(z)\overline{g(z)}\,\frac{dxdy}{y^2}$$

où μ est le degré du revêtement $X_\Gamma \longrightarrow X_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})}$ et D un domaine fondamental pour Γ .

On pose $\|f\| = <f,f>^{\frac{1}{2}}$. On a alors pour tout α comme plus haut

$$(1) \qquad \|f\| = \|f/[\alpha]\|$$

(cf. par exemple [L] chap. III ou [Sh] chap.III).

On fixe dans la suite un entier N et on écrit X (resp. X^o, resp. S) pour $X_{\Gamma(N)}$ (resp. $X^o_{\Gamma(N)}$, resp. l'ensemble des pointes). On désigne par $\mathscr{S}$ (resp. $\mathscr{S}^o$) l'espace des formes modulaires (resp. cuspidales) de poids 2 pour $\Gamma(N)$. On rappelle que $\mathscr{S}$ (resp. $\mathscr{S}^o$) s'identifie à $H^o(X,\Omega^1_X<S>)$ (resp. $H^o(X,\Omega^1_X)$).

On choisit maintenant un nombre premier p congru à 1 modulo N . Posons $\alpha_p = \binom{p\ 0}{0\ 1}$ et $\Gamma' = \Gamma(N) \cap \alpha_p^{-1}\Gamma(N)\alpha_p = \left\{\binom{a\ b}{c\ d} \in \Gamma(N)\ ,\ c \equiv 0(p)\right\}$. La double classe $M = \Gamma(N)\alpha_p\Gamma(N)$ est égale à l'ensemble des matrices entières congrues à Id mod N et de déterminant p . Si on pose $\alpha_j = \binom{1\ Nj}{0\ p}$, $\forall j\,[0,p-1]$ on a une décomposition de M en classes à gauche sous $\Gamma(N)$

$M = \bigcup_{j=0}^{p} \Gamma(N)\alpha_j$, d'où on déduit une décomposition de $\Gamma(N)$ en classes sous Γ' : $\Gamma(N) = \bigcup_{j=0}^{p} \Gamma'\beta_j$, $\beta_j = \alpha_p^{-1}.\alpha_j$.

On dispose en outre de 2 morphismes finis $p^{o}, q^{o} : X^{o}_{\Gamma'} \longrightarrow X^{o}$ définis ainsi. Si pour tout $\Gamma \in SL(2,\mathbb{Z})$ on note p_Γ l'application quotient : $\mathfrak{h} \longrightarrow X^{o}_{\Gamma}$ on a

$p \circ p_{\Gamma'} = p_{\Gamma(N)}$; $q \circ p_{\Gamma'} = p_{\Gamma(N)} \circ \alpha_p$. Le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & X^{o}_{\Gamma'} & \\ {\scriptstyle q}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle p} \\ X^{o} & & X^{o} \end{array}$$

définit un endomorphisme $T = p_* \circ q^*$ de la cohomologie de X^{o} . Si on identifie $H^{o}(X,\Omega^1_X\langle S\rangle)$ à f l'action de T se décrit ainsi :

$$T(f) = \sum_{j=0}^{p} f/[\alpha_p][\beta_j] = \sum_{j=0}^{p} f/[\alpha_j]$$

[pour plus de détails cf. [Sh] §7.3).

Pour $f \in \mathscr{S}$ nous écrirons son développement de Fourier en $i\infty$: $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n q^n$, $q = e^{2i\pi z/N}$. On a alors :

$$f/[\alpha_p] = p \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, q^{np} .$$

En particulier :

(2) $$(f/[\alpha_p])_o = pf_o$$

(3) $$\forall f \in \mathscr{S}, \lambda \in \mathbb{C} , f/_{[\alpha_p]} = \lambda f \Rightarrow f = 0 .$$

On vérifie d'autre part aisément que

(4) $$(f/_{[\alpha_j]})_o = \frac{1}{p} f_o \qquad \forall j \in [0,p-1]$$

et donc

$$(5) \qquad T(f)_0 = (p+1)f_0 \,.$$

Comme $\Gamma(N)$ et M sont stables sous l'action de $SL(2,\mathbb{Z})$ par conjugaison on étend (5) à toutes les pointes.

(6) Pour toute pointe s on a $T(f)(s) = (p+1)f(s)$.

Il résulte de (6) que la seule valeur propre de T agissant sur $\mathscr{S}/\mathscr{S}^0$, donc sur $\mathrm{Gr}^2_W(H^1(X^0_0,\mathbb{Z}))$ est $p+1$.

Soient maintenant $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathscr{S}^0 - \{0\}$ tels que $T(f) = \lambda . f$. On a d'après (1) :

$$|\lambda| \|f\| \leq \sum_j \|f/[\alpha_j]\| \leq (p+1)\|f\|$$

avec égalité ssi tous les $f/[\alpha_j]$ sont égaux entre eux et colinéaires à f, ce qui est interdit par (3) et donc $|\lambda| < p+1$.

Cette majoration des valeurs propres de T agissant sur $\mathscr{S}^0$ est mauvaise, mais suffisante pour notre propos.

Soit $P(\Lambda) \in \mathbb{Z}[\Lambda]$ le polynôme caractéristique de T agissant sur $H^1(X,\mathbb{Z})$.

L'endomorphisme $P(T)$ de $H^1(X^0,\mathbb{Q})$ a pour image un supplémentaire de $H^1(X,\mathbb{Q})$ contenu dans F^1, ce qui montre que la structure de Hodge sur $H^1(X^0,\mathbb{Q})$ est scindée.

Bibliographie

[De 1] P. DELIGNE. *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales.* Proc. Symp. Pure Math., Vol. 33 (1979), AMS, 313–346.

[De 2] P. DELIGNE. *Théorie de Hodge* 2. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. (1972) 5–57.

[De 3] P. DELIGNE. *Théorie de Hodge* 3. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 44 (1974) 5–77.

[G.S] P. GRIFFITHS and W. SCHMID. *Recent Developments in Hodge Theory.* Proceedings of the International colloquium on Discrete Subgroups, Bombay (1973) 31–127.

[Dr] V.G. DRINFEL'D. *Two Theorems on Modular curves.* Functional analysis and its application, Vol. 7 n° 2, Translated from Russian 1973, 155–156.

[L] S. LANG. *Introduction to Modular forms.* Springer–Verlag (1976).

[Ma] J. MANIN. *Parabolic Points and Zeta functions of Modular curves.* Izv. Akad. Nauk SSSR., Vol. 6 n° 1 (1972) AMS Translation 19–64.

[O] A. OGG. *Rational Points on certain elliptic curves.* Proc. Symp. Pure Maths, Vol. 24, (1973), AMS, 221–231.

ELKIK Renée
Université de Paris–Sud
Mathématique, bât. 425
91405 ORSAY (France)