LAURENT MORET-BAILLY

Hauteurs et classes de Chern sur les surfaces arithmétiques

Astérisque, tome 183 (1990), p. 37-58

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__183__37_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 183 (1990)

Hauteurs et classes de Chern sur les surfaces arithmétiques

Laurent Moret-Bailly

0. Introduction.

On présente dans cet exposé les idées de Parshin [P] sur le thème : "un analogue arithmétique de l'inégalité de Bogomolov-Miyaoka $c_1^2 \leq 3\, c_2$ pour les surfaces complexes impliquerait, entre autres, la conjecture de Szpiro sur le discriminant des courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$".

Après le rappel de l'inégalité de Bogomolov-Miyaoka au § 1, puis des généralités sur les familles de courbes au § 2, notamment sur la "mesure de la mauvaise réduction", on énonce au § 3 l'"hypothèse BM", qui est un analogue arithmétique de Bogomolov-Miyaoka, assez affaibli par rapport à [P] ; on montre ensuite que BM équivaut à une variante de la "conjecture des petits points" de Szpiro.

Au § 4 on introduit l'hypothèse ME ("Mordell effectif") qui est une majoration de la hauteur d'un point d'une courbe de genre ≥2 sur un corps de nombres, en termes du corps de rationalité de ce point : à degré (sur $\mathbb{Q}$) fixé, la borne est *linéaire* par rapport au logarithme du discriminant. Pour plus de commodité, on étend cette hypothèse à des variétés (propres) arbitraires munies d'une hauteur quelconque, de sorte qu'elle est évidemment fausse avec cette généralité ; toutefois, on montre au § 5 que BM implique une telle généralisation de ME, valable pour des variétés qui paramètrent une famille de courbes lisses de genre ≥2. La "construction de Kodaira" montre que les courbes de genre ≥2 tombent elles-mêmes sous le coup de cet énoncé.

Le § 6 est consacré à la conjecture du discriminant de Szpiro pour les courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$; on montre que celle-ci est conséquence de ME appliquée à une courbe modulaire. De même, au § 7, on déduit de ME une version de la "conjecture *abc*", en appliquant ME à un revêtement ramifié convenable de $\mathbb{P}^1$. Enfin, on fait au § 8 quelques commentaires sur l'effectivité des méthodes et des résultats.

1. Inégalité de Bogomolov-Miyaoka.

1.1. Soit X une surface projective irréductible lisse complexe de type général. On a alors l'inégalité ([M], [Y])

(1.1.1) $$c_1^2(X) \leq 3\, c_2(X)$$

entre les classes de Chern de X ; des inégalités plus faibles avaient été obtenues auparavant par Bogomolov ([B], avec 4 au lieu de 3) et Van de Ven ([V], avec 8).

1.2. On énoncera au § 3 un analogue de (1.1.1) pour les "surfaces arithmétiques". Celles-ci sont des courbes sur des anneaux d'entiers algébriques, il faut donc d'abord reformuler (1.1.1) en termes de fibrations en courbes. Soit $f : X \to B$ un morphisme surjectif de la surface X sur une courbe B lisse de genre q. On suppose que f fait de X une B-courbe semi-stable (voir les rappels au § 2) ; la fibre générique est alors de genre $g \geq 2$ puisque X est de type général.

La première classe de Chern $c_1(X)$ est la classe dans $\mathrm{Pic}(X)$ du faisceau dualisant

(1.2.1) $$\omega_X = \omega_{X/B} \otimes f^* \omega_B$$

de sorte que

(1.2.2) $$c_1^2(X) = (\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B}) + 2(2g-2)(2q-2).$$

On sait par ailleurs que

(1.2.3) $$c_2(X) = \sum_{b \in B} \delta_b(X) + (2g-2)(2q-2)$$

où $\delta_b(X)$ désigne le nombre de points singuliers de la fibre $f^{-1}(b) = X_b$. Il en résulte que l'avatar relatif de (1.1.1) est

(1.2.4) $$(\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B}) \leq (2g-2)(2q-2) + 3 \sum_{b \in B} \delta_b(X).$$

Plus généralement, $c_1^2(X) \leq \lambda\, c_2(X)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ équivaut à

(1.2.5) $$(\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B}) \leq \lambda \sum_{b \in B} \delta_b(X) + (\lambda-2)(2g-2)(2q-2).$$

1.3. Le lecteur pourra consulter [P] pour des variantes de ces inégalités, notamment sans hypothèse sur le genre des fibres ou celui de B. Mentionnons celle-ci : l'inégalité (1.2.4) reste vraie si l'on remplace X par son *modèle stable* X_0 sur B ; ceci ne change pas le membre de gauche et diminue les δ_b. En fait on a, pour tout $b \in B$, $\delta_b(X_0) \leq 3g-3$, de sorte que l'on obtient une majoration de $(\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B})$ uniquement en termes des genres et du nombre de fibres singulières.

2. Familles de courbes à singularités ordinaires.

2.1. Soit B un schéma. On appelle *B-courbe nodale* un morphisme $f : X \to B$ propre, surjectif et plat, dont les fibres géométriques sont des courbes n'ayant comme singularités que des points doubles ordinaires. Le $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\Omega_{X/B}$ des différentielles relatives de f admet alors une stratification de Fitting du type

$$\mathrm{Sing}(X/B) \subset X$$

où $\mathrm{Sing}(X/B)$ est le plus grand sous-schéma fermé Y de X tel que $\Omega_{X/B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y$ soit localement libre de rang 2 sur Y.

2.2. *Description locale.* Avec les notations de 2.1, si $B = \mathrm{Spec}\, R$ où R est local complet de corps résiduel k, et si $x \in X$ est un point singulier k-rationnel de la fibre fermée de f, le complété $A = \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$ est R-isomorphe à $R[[u,v]]/(uv-t)$ où $t \in R$, d'où une présentation

$$A \xrightarrow{\binom{v}{u}} A \times A \xrightarrow{(du,dv)} \Omega_{X/B} \otimes_{\mathcal{O}_X} A \longrightarrow 0$$

qui montre que $\mathrm{Sing}(X/B) \times_X \mathrm{Spec}\, A$ est défini par l'idéal (u,v) donc isomorphe comme R-schéma à $\mathrm{Spec}(R/tR)$.

2.3. On déduit de 2.2 que $\mathrm{Sing}(X/B)$ (dont la formation, par construction, commute à tout changement de base) est *fini et non ramifié* sur B ; si l'on pose

$$\Sigma(X/B) = f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Sing}(X/B)} \tag{2.3.1}$$

alors $\Sigma(X/B)$ est un $\mathcal{O}_B$-module cohérent, isomorphe localement pour la topologie étale sur B à $\bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{O}_B/t_i\mathcal{O}_B$ pour $s \in \mathbb{N}$ et $t_i \in \mathcal{O}_B$ convenables. En particulier on a pour tout $b \in B$

$$\mathrm{rg}_b\, \Sigma(X/B) = \delta_b(X) \tag{2.3.2}$$

où, par définition $\mathrm{rg}_b\,\Sigma(X/B) = \dim_{\kappa(b)}(\Sigma(X/B)\otimes_{\mathcal{O}_B}\kappa(b))$, et où $\delta_b(X)$ désigne le nombre géométrique sur $\kappa(b)$ de points singuliers de la fibre X_b.

Enfin, comme $\mathrm{Sing}(X/B)$ est fini sur B, la formation de $\Sigma(X/B)$ commute à tout changement de base.

Proposition 2.4. *Soit $f : X \to B$ une B-courbe nodale. On suppose que $B = \mathrm{Spec}\,\Lambda$ est un trait de point fermé b et de point générique η, et que $f_\eta : X_\eta \to \eta$ est lisse, de sorte que $\Sigma(X/B)$ est un Λ-module de longueur finie.*

Soit $p : X' \to X$ une résolution minimale des singularités de X. Alors la longueur du Λ-module $\Sigma(X/B)$ est égale au nombre géométrique $\delta_b(X')$ de points singuliers de X'_b.

Preuve. On obtient X' à partir de X en éclatant le sous-schéma *réduit* $\mathrm{Sing}\,X$ formé des points singuliers de X, et en répétant le processus jusqu'à obtenir un schéma régulier. Or il résulte de la non-ramification de $\mathrm{Sing}(X/B)$ (qui contient $\mathrm{Sing}\,X$) que les corps résiduels des points de $\mathrm{Sing}\,X$ sont des extensions séparables de $\kappa(b)$, de sorte que la formation du sous-schéma $\mathrm{Sing}\,X$ commute au changement de base $\Lambda \to \Lambda'$ où Λ' est un anneau de valuation discrète complet, non ramifié sur Λ et de corps résiduel une clôture algébrique de $\kappa(b)$. On peut donc supposer Λ complet à corps résiduel algébriquement clos (on rappelle que l'éclatement commute au changement de base plat).

Soient $x_1,\dots,x_s$ les points singuliers de X_b : on a pour $1 \le i \le s$

$$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i} \simeq \Lambda[[x,y]]\,/\,(xy-t_i)$$

avec $t_i = \pi^{e_i}$ où π est une uniformisante de Λ, et dans ces conditions

$$\Sigma(X/B) \simeq \bigoplus_{i=1}^{s} \Lambda\,/\,t_i\,\Lambda$$

de sorte que la longueur de $\Sigma(X/B)$ est la somme des e_i. L'assertion de la proposition est donc claire si X est régulier : dans ce cas les e_i sont égaux à 1, et $s = \delta_b(X) = \delta_b(X')$. Il suffit donc de voir que la somme des e_i ne change pas par éclatement d'un point singulier (i.e. d'un point x_i tel que $e_i \ge 2$). Le calcul est fait notamment dans [SPC], I, proposition 2.2 : si $e_i \ge 2$ et si $p_i : X_i \to X$ est l'éclaté de x_i dans X, alors $(X_i)_b$ contient, au-dessus de x_i, deux points doubles réguliers dans X_i, et de plus, si $e_i \ge 2$, un point double du type $\Lambda[[x,y]]\,/(xy-\pi^{e_i-2})$. ■

2.5. On suppose maintenant que B est un schéma régulier de dimension 1, et que pour tout point maximal η de B la fibre X_η de $f : X \to B$ est lisse. On peut alors mesurer la "mauvaise réduction" de f par le diviseur effectif $\underline{\delta}(X/B)$ sur B, défini par

$$\begin{aligned}(2.5.1)\qquad \underline{\delta}(X/B) &= \sum \mathrm{lg}_b \ \Sigma(X/B)_b \,[b] \\ &= \sum \ \delta_b(X')\,[b]\end{aligned}$$

où la somme est prise sur les points fermés b de B, X' est une résolution minimale des singularités de X, et lg_b est la longueur comme $\mathcal{O}_{B,b}$-module. L'équivalence des deux formules résulte évidemment de 2.4. La connaissance de $\underline{\delta}(X/B)$ équivaut à celle de la classe de $\Sigma(X/B)$ dans le groupe de Grothendieck des $\mathcal{O}_B$-modules cohérents de longueur finie. Bien entendu on peut considérer $\underline{\delta}(X/B)$ comme un idéal inversible de $\mathcal{O}_B$; sa formation commute à tout changement de base $B' \to B$ où B' est un schéma régulier de dimension 1, plat sur B.

Remarque 2.5.2. Supposons de plus que X soit une B-courbe stable de genre $g \geq 2$ (voir rappels ci-dessous). Alors X s'interprète comme un 1-morphisme φ_X de B vers le champ $\overline{\mathcal{M}}_g$ des courbes stables de genre g [D-M]. Celui-ci est un champ algébrique lisse sur Spec $\mathbb{Z}$ et contient un diviseur à croisements normaux E paramétrant les courbes singulières. Dans ces conditions on peut vérifier, en utilisant la description locale de $\overline{\mathcal{M}}_g$ et E donnée dans [D-M], que $\underline{\delta}(X/B) = \varphi_X^*(E)$.

2.6. *Rappels sur les courbes stables et semi-stables.* Si k est un corps algébriquement clos, on appelle *courbe semi-stable* (resp. *stable*) sur k une k-courbe nodale et connexe C, de genre arithmétique ≥ 1 (resp. ≥ 2), telle que toute composante irréductible de C isomorphe à $\mathbb{P}^1_k$ contienne au moins deux (resp. trois) points singuliers de C. Il revient au même d'exiger que le faisceau dualisant $\omega_{C/k}$ soit de degré ≥ 0 (resp. > 0) sur chaque composante de C.

Si B est un schéma, une B-courbe *semi-stable* (resp. *stable*) est par définition une B-courbe nodale dont les fibres géométriques sont semi-stables (resp. stables).

Soit B un schéma noethérien régulier intègre de dimension 1, de point générique $\eta = \operatorname{Spec} K$, et soit X_η une courbe sur K. On dit que X_η a *réduction semi-stable* sur B s'il existe un modèle semi-stable de X_η sur B, c'est-à-dire une B-courbe semi-stable de fibre générique X_η. Le *théorème de réduction semi-stable* de Grothendieck affirme que si X_η est propre, lisse, géométriquement connexe de genre ≥ 1 sur K, alors il existe une extension finie K' de K telle que $X_\eta \otimes_K K'$ ait réduction semi-stable sur le normalisé de B dans K'. Plus précisément ([SPC], I, cor. 5.18) si n est un entier ≥ 3, inversible sur B, tel que les points d'ordre n de la jacobienne $J = \underline{\mathrm{Pic}}^0_{X_K/K}$ soient rationnels sur K, alors X_η a réduction semi-stable sur B. En particulier (sans restriction sur les caractéristiques) X_η a réduction semi-stable dès que les points d'ordre 12 de J sont K-rationnels.

Soit X un modèle semi-stable de X_η (supposée lisse de genre $g \geq 1$). Par résolution des singularités de X on obtient le *modèle régulier minimal* X_1 de X_η, qui est encore semi-stable. Si de plus $g \geq 2$, on peut contracter dans X (ou dans X_1) les $\mathbb{P}^1$ de self-intersection -2 contenus dans les fibres, pour obtenir l'unique *modèle stable* X_0 de X_η (contrairement au modèle stable, le modèle régulier minimal ne "commute" pas en général au changement de base $B' \to B$ où B' est ramifié sur B). Il résulte de 2.4 que le diviseur $\underline{\delta}(X/B)$ de (2.5.1) *ne dépend que de* X_η (supposée à réduction semi-stable) et non du modèle semi-stable X choisi.

2.7. On suppose maintenant que $B = \operatorname{Spec} R$ où R est l'anneau des entiers d'un corps de nombres K. Si X est une B-courbe semi-stable (avec X_K lisse de genre $g \geq 1$), on "compactifie" $\underline{\delta}(X/B)$, au sens d'Arakelov, en posant

(2.7.1) $$\underline{\delta}_c(X/B) = \underline{\delta}(X/B) + \sum_{\sigma : K \to \mathbb{C}} \delta_\sigma(X)[\sigma]$$

où $\delta_\sigma(X)$ est défini comme suit : on pose $X_\sigma = X_K \otimes_K \mathbb{C}$ (où K est plongé dans $\mathbb{C}$ au moyen de σ) et $\delta_\sigma(X) = \delta(X_\sigma)$ où δ est l'invariant de Faltings [F] ; il nous suffira ici de savoir que δ est une fonction continue à valeurs réelles sur $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ où $\mathcal{M}_g$ est l'espace des modules des courbes de genre g.

(On aurait pu, comme le font certains auteurs, sommer sur les places archimédiennes de K plutôt que sur les plongements complexes, la fonction $\sigma \longmapsto \delta_\sigma(X)$ étant invariante par conjugaison ; dans ce cas, il faut modifier, dans la suite, les définitions de $\underline{\Delta}(X_K)$ et du degré d'un diviseur en affectant les places complexes du poids 2).

Le diviseur $\underline{\delta}_c(X/B)$ commute (en un sens évident) au changement de corps de base, et ne dépend que de X_K. Notons cependant que si $\underline{\delta}(X/B)$ est ≥ 0 par construction, il n'en est pas de même a priori des $\delta_\sigma(X)$. Pour "borner la mauvaise réduction" de X, nous utiliserons plutôt

(2.7.2) $$|\underline{\delta}_c(X/B)| = \underline{\delta}(X/B) + \sum_\sigma |\delta_\sigma(X)|\,[\sigma]$$

$$\underline{\Delta}(X_K) = \underline{\Delta}(X/B) = N_{R/\mathbb{Z}}\,|\underline{\delta}_c(X/B)|$$

de sorte que $\underline{\Delta}(X_K)$ est un élément du monoïde $\mathrm{Div}_{c+}(\mathbb{Z})$ décrit comme suit : $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers, $\overline{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \cup \{\infty\}$, $\mathrm{Div}_c(\mathbb{Z})$ est le groupe des applications $v \to n_v : \overline{\mathbb{P}} \to \mathbb{R}$, à support fini, telles que $n_v \in \mathbb{Z}$ si $v \in \mathbb{P}$, et $\mathrm{Div}_{c+}(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{Div}_c(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des applications à valeurs ≥ 0. La norme intervenant dans la formule est définie par linéarité à partir des cas suivants : si $b \in B$ est un point fermé de caractéristique p, la norme de $[b]$ est $[\kappa(b):\mathbb{F}_p][p]$, et si σ est un plongement complexe de K, la norme de $[\sigma]$ est $[\infty]$.

Si K' est une extension finie de K, et $X = X \otimes_K K'$, on a

$$\underline{\Delta}(X_{K'}) = [K':K]\, \underline{\Delta}(X_K)\,. \tag{2.7.3}$$

3. Hypothèse BM et petits points.

3.1. Soit R l'anneau des entiers d'un corps de nombres K, et soit $B = \mathrm{Spec}\, R$. Soit

$$f : X \longrightarrow B$$

une B–courbe semi-stable à fibre générique lisse de genre $g \geq 2$. On suppose de plus que X est un schéma régulier.

Arakelov [A] a défini une théorie des intersections (à valeurs réelles) pour les faisceaux inversibles sur X munis de métriques aux places archimédiennes de B, vérifiant certaines conditions. En particulier le faisceau dualisant relatif $\omega_{X/B}$ est muni de telles "métriques à l'infini" canoniques, et le membre de gauche de (1.2.5) a donc un sens (cf. [A], [SPA]). D'autre part le substitut le plus naturel du terme $2q-2$ est $\log |D_K|$, où D_K désigne le discriminant de K sur $\mathbb{Q}$ (le lecteur peut préférer par exemple $\log(2^{-2r_2}|D_K|)$ où r_2 est le nombre de places complexes de K; ceci n'a guère d'importance pour la suite).

L'analogue non archimédien de la somme au membre de droite de (1.2.5) est alors

$$\sum_{\substack{b \text{ point} \\ \text{fermé de } B}} \delta_b(X) \log \mathbf{N}(b)$$

où $\mathbf{N}(b) = \mathrm{Card}\, \kappa(b)$ est la norme de b. Il suffit bien entendu de restreindre cette somme à $b \in S = \{$places de mauvaise réduction de $f\}$.

Il est vraisemblable que l'on doive aussi introduire une contribution archimédienne, comme expliqué en 2.7, de sorte que le terme en question de (1.2.5) "doit" être remplacé par

$$\deg_R \underline{\delta}_c(X/B) = \sum_{b\in B} \delta_b(X) \log \mathbf{N}(b) + \sum_{\sigma : K\to\mathbf{C}} \delta_\sigma(X) .$$

On dispose donc d'un analogue arithmétique de l'inégalité (1.2.5) , à savoir

(3.1.1) $$(\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B}) \leq \lambda \deg_B \underline{\delta}_c(X/B) + (\lambda-2)(2g-2) \log |D_K|$$

où λ serait une constante absolue, disons ≥ 3. A propos de la valeur de λ, remarquons que si l'on étend le corps de base de K à K', les deux premiers termes de (3.1.1) sont multipliés par $[K':K]$; comme on peut trouver K' avec $\log |D_{K'}|/[K':K]$ arbitrairement grand, la moindre des choses est que le coefficient de $\log |D_K|$ dans (3.1.1) soit ≥ 0.

Des calculs de Bost, Mestre et l'auteur, pour certaines courbes de genre 2 sur $\mathbf{Q}$, mettent cependant en défaut une telle formule, cf. 3.2.3 ci-dessous et l'exposé 6 de ce séminaire. On sera donc plus prudent dans la formulation de l'hypothèse ci-dessous :

Hypothèse BM. *Il existe des applications*

$$A_{\mathrm{BM}}, B_{\mathrm{BM}} : \mathbb{N}_{\geq 2} \times \mathrm{Div}_{c+}(\mathbb{Z}) \times \mathbb{N}_{\geq 1} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(g, \underline{\Delta}, d) \longmapsto A_{\mathrm{BM}}(g, \underline{\Delta}, d) , B_{\mathrm{BM}}(g, \underline{\Delta}, d)$$

telles que pour K, R, X comme en 3.1 *avec* $[K:\mathbf{Q}] \leq d$ *et* $\underline{\Delta}(X/B) \leq \underline{\Delta}$ *, on ait* :

(3.1.2) $$(\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B}) \leq A_{\mathrm{BM}}(g, \underline{\Delta}, d) \log|D_K| + B_{\mathrm{BM}}(g, \underline{\Delta}, d) .$$

(voir (2.7.2) pour la définition de $\underline{\Delta}(X/B)$) .

Remarque 3.2.1. L'inégalité (3.1.1) implique (3.1.2) avec

$$A_{\mathrm{BM}}(g, \underline{\Delta}, d) = (\lambda-2)(2g-2)$$
$$B_{\mathrm{BM}}(g, \underline{\Delta}, d) = \lambda \deg_{\mathbb{Z}} \underline{\Delta} = \lambda \,(\sum_{p\in\mathbb{P}} \underline{\Delta}(p) \log p + \underline{\Delta}(\infty)) ;$$

on passe de (3.1.1) à (3.1.2) en majorant δ_σ par $|\delta_\sigma|$ pour $\sigma : K \to \mathbf{C}$.

Remarque 3.2.2. Soit X_0 le modèle stable de X sur B ; on obtient une variante plus forte de BM en remplaçant, pour $b \in B$, $\delta_b(X)$ par $\delta_b(X_0)$, cf. remarque 1.3. Compte tenu de la majoration uniforme $\delta_b(X_0) \leq 3g-3$, la partie non archimédienne de $\underline{\delta}_c(X/B)$ n'intervient plus alors que par son support S (ensemble des places de mauvaise réduction). Si l'on pousse jusqu'au bout l'analogie entre places archimédiennes et non archimédiennes, il n'y a alors pas lieu d'introduire les termes archimédiens $\delta_\sigma(X)$, et la variante envisagée revient simplement à postuler (3.1.2) où A_{BM} et B_{BM} ne dépendent que de g, d et S.

Remarque 3.2.3. L'inégalité (3.1.1) peut se reformuler sans faire intervenir $\underline{\delta}_c(X/B)$. Le R-module localement libre $f_*\omega_{X/B}$ est muni de métriques naturelles aux places archimédiennes de K (cf. par exemple l'exposé 6 de ce séminaire, formule (1)) de sorte qu'il a un degré. La formule de Noether, démontrée dans [MB], donne :

(3.2.3.1) $$12 \deg_B f_*\omega_{X/B} = (\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B}) + \deg_B \underline{\delta}_c(X/B) - 4g\,[K:\mathbb{Q}] \log 2\pi$$

de sorte que (3.1.1) est équivalente à

(3.2.3.2)
$$(\lambda+1)\,(\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B}) \le 12\lambda \deg_B f_*\omega_{X/B} + 4\lambda g\,[K:\mathbb{Q}] \log 2\pi + (\lambda-2)(2g-2) \log |D_K|.$$

C'est sous cette forme que (3.1.1) sera invalidée dans l'exposé 6 (pour une courbe particulière de genre 2 sur $\mathbb{Q}$, et tout $\lambda>0$).

3.3. Nous allons, dans le reste de ce §, expliquer le lien entre BM et la "conjecture des petits points" de Szpiro ([SPA], XI, 3.1).

Pour X comme en 3.1, on définit la hauteur

(3.3.1) $$h_\omega : X(\overline{K}) \to \mathbb{R}$$

où $\overline{K}$ désigne une clôture algébrique de K, comme la hauteur associée au $\mathcal{O}_X$-module $\omega_{X/B}$ muni de ses métriques d'Arakelov. Ainsi, si K' est une extension finie de K, d'anneau des entiers R', et si $P \in X(K')$ se prolonge en $\widetilde{P} \in X(R')$ par propreté, on a par définition

(3.3.2) $$[K':\mathbb{Q}]\; h_\omega(P) = \deg_{R'} \widetilde{P}^* \omega_{X/B}\,.$$

Si X' désigne le modèle régulier minimal de $X \otimes_R R'$, alors $\widetilde{P}$ définit une section de X' sur Spec R' ; si E désigne l'image de cette section, vue comme diviseur sur X', alors on a la *formule d'adjonction* ([SPA], II, théorème 6.11)

(3.3.3) $$[K':\mathbb{Q}]\; h_\omega(P) = -(E.E)$$

que nous n'utiliserons pas mais que nous rappelons pour faire le lien avec [SPA], XI, §3.

Comme $\omega_{X/B}$ est ample sur la fibre générique X_K, $h_\omega(P)$ est minoré (en fait par 0, voir plus bas) indépendamment de P. On peut donc poser

(3.3.4) $$\mathrm{hmin}(X) = \inf_{P \in X(\overline{K})} h_\omega(P).$$

On pose d'autre part

(3.3.5) $$e(X) = (\omega_{X/B} . \omega_{X/B}) / [K:\mathbf{Q}].$$

Si K' et X' sont comme ci-dessus, alors $e(X')=e(X)$; ceci résulte par exemple de (5.4.2) plus bas.

La proposition ci-dessous et son corollaire sont, sauf la première inégalité, dus à Szpiro :

Proposition 3.4. *Avec les hypothèses et notations de* 3.3, *on a les inégalités*

$$0 \leq e(X) \leq 2g(2g-2)\,\mathrm{hmin}(X) \leq g\, e(X).$$

Preuve. L'inégalité $e(X) \geq 0$ est un théorème de Faltings ([F], ou [SPA], III, théorème 5, *a)*). La seconde inégalité est prouvée dans [SPA], III, théorème 5, *b)* (ou II, 6.17) comme conséquence du théorème de l'indice.

Prouvons la troisième, c'est-à-dire $\mathrm{hmin}(X) \leq e(X)/(4g-4)$. Posons $\omega = \omega_{X/B}$, et pour tout réel α notons $\omega(\alpha)$ le faisceau ω où l'on a multiplié les métriques par $e^{-\alpha}$; en d'autres termes $\omega(\alpha) = \omega \otimes \mathcal{O}_X(\alpha X_\infty)$ où X_∞ est le diviseur d'Arakelov somme des fibres archimédiennes. Le degré de $\omega(\alpha)$ est $2g-2>0$ et sa self-intersection est $(\omega.\omega) + 2\alpha(2g-2)[K:\mathbf{Q}]$; choisissons α tel que $(\omega(\alpha).\omega(\alpha))>0$, c'est-à-dire

(3.4.1) $$\alpha > -e(X)/(4g-4).$$

On peut alors appliquer à $\omega(\alpha)$ le théorème d'existence de Faltings ([SPA], III, théorème 4) : il existe un entier $n>0$ et un diviseur d'Arakelov *effectif* D tels que $\mathcal{O}_X(D) \simeq \omega(\alpha)^{\otimes n}$. Quitte à changer le corps de base et à remplacer X par le modèle minimal idoine (ce qui ne change pas $\mathrm{hmin}(X)$ ni $e(X)$) on peut supposer que D est de la forme

(3.4.2) $$D = V + \textstyle\sum_{i=1}^{N} E_i$$

où les E_i sont des sections de $X \to B$ (donc $N=n(2g-2)$) et où V est *vertical*. Intersectant avec ω, on a d'une part, par définition de $\omega(\alpha)$:

$$(3.4.3) \qquad (\omega(\alpha).\omega)= (\omega.\omega)+ \alpha(2g-2)[K:\mathbb{Q}]$$

et d'autre part, d'après (3.4.2) :

$$(3.4.4) \qquad n\ (\omega(\alpha).\omega)=((V+ \textstyle\sum_{i=1}^{N} E_i).\omega)\geq \sum_{i=1}^{N} (E_i.\omega)=[K:\mathbb{Q}]\sum_{i=1}^{N} h_\omega(P_i)$$

où P_i est le point générique de E_i : l'inégalité du milieu provient du fait que V est effectif et que ω est de degré ≥ 0 sur chaque composante d'une fibre. D'où

$$\inf_{i=1,\dots,N} h_\omega(P_i) \leq \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{i=1}^{N} h_\omega(P_i) \leq (\omega(\alpha).\omega)/(2g-2)[K:\mathbb{Q}] = \alpha+(e(X)/(2g-2))$$

où la première inégalité est triviale, la seconde résulte de (3.4.4), et l'égalité de (3.4.3) (on rappelle que $N=n(2g-2)$).

A fortiori, on a $\mathrm{hmin}(X) \leq \alpha+(e(X)/(2g-2))$ pour tout α vérifiant (3.4.1), d'où le résultat. ■

Corollaire 3.5 *L'hypothèse* BM *équivaut à la variante suivante de la "conjecture des petits points"* ([SPA], XI, 3.1) *: il existe des applications*

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{PP}}, B_{\mathrm{PP}}:\ \mathbb{N}_{\geq 2}\times \mathrm{Div}_{c+}(\mathbb{Z})\times \mathbb{N}_{\geq 1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (g,\underline{\Delta},d) &\longmapsto A_{\mathrm{PP}}(g,\underline{\Delta},d)\,,\ B_{\mathrm{PP}}(g,\underline{\Delta},d) \end{aligned}$$

telles que pour K, R, X comme en 3.1 *avec* $[K:\mathbb{Q}]\leq d$ *et* $\underline{\Delta}(X/B)\leq\underline{\Delta}$ *, il existe un point $P\in X(\overline{K})$ vérifiant*

$$h_\omega(P) \leq A_{\mathrm{PP}}(g,\underline{\Delta},d)\log|D_K| + B_{\mathrm{PP}}(g,\underline{\Delta},d)\ .\ ■$$

4. Variations sur Mordell effectif.

4.1. L'hypothèse ME qui va suivre (voir 4.4) est un raffinement de la conjecture de Mordell; on va commencer par la formuler de manière plus générale. Soient K un corps de nombres, X un K-schéma propre (que l'on peut sans dommage supposer réduit). Soit L un faisceau inversible sur X. On fixe une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, et on se donne une hauteur (logarithmique) $h : X(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ associée à L.

Hypothèse ME(X,L). *Pour tout entier $d\geq 1$ il existe des réels $A_{\mathrm{ME}}(X,h,d)$ et $B_{\mathrm{ME}}(X,h,d)$ tels que, pour toute extension finie K' de K avec* $[K':\mathbb{Q}]\leq d$ *et tout*

$P \in X(K')$, on ait

(4.1.1) $$h(P) \leq \frac{1}{d}\, A_{\mathrm{ME}}(X,h,d)\, \log|D_{K'}| + B_{\mathrm{ME}}(X,h,d).$$

Remarques.

4.1.2. Une variante optimiste de ME consisterait à imposer à A_{ME} et B_{ME} d'être *indépendants* de d.

4.1.3. La validité de ME(X,L) ne dépend pas du choix de h (d'où la notation), car si h' est une autre hauteur associée à L la différence $h-h'$ est bornée sur $X(\overline{K})$. Pour la même raison la "constante" A_{ME} de (4.1..1) (mais non B_{ME}) ne dépend, elle aussi, que de X et L: on la notera souvent $A_{\mathrm{ME}}(X,L,d)$.

4.1.4. Si L' est un autre faisceau inversible sur X, alors "ME(X,L) et ME(X,L')" implique ME$(X,L\otimes L')$ avec
$$A_{\mathrm{ME}}(X,L\otimes L',d) = A_{\mathrm{ME}}(X,L,d) + A_{\mathrm{ME}}(X,L',d)$$
$$B_{\mathrm{ME}}(X,h+h',d) = B_{\mathrm{ME}}(X,h,d) + B_{\mathrm{ME}}(X,h',d)$$
où h' est une hauteur associée à L'. En particulier ME(X,L) implique ME$(X,L^{\otimes n})$ pour tout $n>0$.

4.1.5. Si L^{-1} est engendré par ses sections globales sur X, alors h est majorée et par suite ME(X,L) est vraie avec $A_{\mathrm{ME}}=0$.

4.1.6. La validité de ME(X, L) ne dépend que du schéma X et non de K, en ce sens que si K_0 est un sous-corps de K et si X_0 désigne X vu comme K_0-schéma, alors ME(X,L) équivaut à ME(X_0,L) avec les mêmes fonctions A_{ME} et B_{ME} (autrement dit, on peut toujours supposer que $K=\mathbb{Q}$).

Proposition 4.2. *Soient $\pi : X_1 \to X$ un K-morphisme propre, $L_1=\pi^*L$. Soit h_1 la hauteur $h\circ\pi$ sur $X_1(\overline{K})$* (qui est associée à L_1).

(i) *Si* ME(X,L) *est vérifiée, alors* ME(X_1,L_1) *est vérifiée avec $A_{\mathrm{ME}}(X_1,h_1,d) = A_{\mathrm{ME}}(X,h,d)$, et de même pour B_{ME}.*

(ii) *Si* ME(X_1,L_1) *est vérifiée et si π est* surjectif et non ramifié *(donc* fini*), alors* ME(X,L) *est vérifiée avec $A_{\mathrm{ME}}(X,h,d) = A_{\mathrm{ME}}(X_1,h_1,md)$ pour un choix convenable de $B_{\mathrm{ME}}(X,h,d)$, où l'on a posé*

$$m = \max_{x\in X_1} [\kappa(x) : \kappa(\pi(x))].$$

Preuve. L'assertion (i) est immédiate puisque π envoie $X_1(K')$ dans $X(K')$ pour toute extension K' de K. Prouvons (ii). Il existe un ensemble fini S de places de K tel que si U est le spectre de l'anneau des S-entiers de K , π se prolonge en un morphisme fini, surjectif et non ramifié $\pi_U : X_{1,U} \to X_U$ de U-schémas propres. Si K' est une extension finie de K, tout $P \in X(K')$ se relève en $P_1 \in X_1(K'')$, où K'' est une extension de K' de degré $\le m$, et *non ramifiée en-dehors de* S. Il résulte alors de [S], 1.3, proposition 4, que, posant $d' = [K':\mathbf{Q}]$ et $d'' = [K'':\mathbf{Q}]$:

$$(4.2.1) \qquad \frac{d''}{d'} \log |D_{K''/K'}| \le C := \sum_{p \in S_0} \log p + (\text{Card } S) \log m$$

où S_0 désigne l'ensemble des caractéristiques résiduelles des places de S, d'où

$$(4.2.2) \qquad \frac{1}{d''} \log |D_{K''}| \le \frac{1}{d'} \log |D_{K'}| + \frac{C}{d'} \cdot$$

D'autre part, $\mathrm{ME}(X_1, L_1)$ donne puisque $d'' \le md'$:

$$(4.2.3) \qquad h(P) = h_1(P_1) \le \frac{1}{d''} A_{\mathrm{ME}}(X_1, h_1, md') \log |D_{K''}| + B_{\mathrm{ME}}(X_1, h_1, md')$$

d'où le résultat en reportant (4.2.2). ■

Corollaire 4.3. (i) $\mathrm{ME}(X,L)$ *est vérifiée si et seulement si* $\mathrm{ME}(Y, L_{|Y})$ *est vérifiée pour toute composante irréductible Y de X.*

(ii) *Si K_1 est une extension finie de K, alors* $\mathrm{ME}(X,L)$ *équivaut à* $\mathrm{ME}(X_1, L_1)$ *où (X_1, L_1) est déduit de (X,L) par extension des scalaires de K à K_1.*

Il suffit en effet d'appliquer 4.2 à la projection naturelle $X_1 \to X$ où, dans la partie (i), X_1 désigne le schéma somme des composantes irréductibles de X. ■

Remarque 4.3.1. Le corollaire ci-dessus permet de se ramener, pour prouver $\mathrm{ME}(X,L)$, au cas où X est *géométriquement irréductible* sur K.

4.4. On notera $\mathrm{ME}(X)$ la propriété "$\mathrm{ME}(X,L)$ est vraie pour tout L". Si X est projectif sur K et L *ample* sur X , alors $\mathrm{ME}(X,L)$ équivaut à $\mathrm{ME}(X)$.

$\mathrm{ME}(X)$ implique que $X(K')$ est fini pour toute extension finie K' de K. En particulier $\mathrm{ME}(X)$ est trivialement fausse si X est une courbe de genre ≤ 1. On s'intéressera surtout dans la suite à l'hypothèse suivante :

Hypothèse ME. $\mathrm{ME}(X)$ *est vérifiée pour toute courbe X propre et lisse sur* $\mathbf{Q}$ (ou sur un corps de nombres quelconque, cf. 4.1.6) *à composantes géométriques de genre* ≥ 2.

Observer que ME équivaut à "ME(X,ω_X) est vérifiée pour toute courbe X propre et lisse sur un corps de nombres", le cas du genre 0 ou 1 étant trivial d'après 4.1.5. On pourrait donc se demander si, en dimension quelconque, ME(X,ω_X) serait toujours vraie pour X propre et lisse sur K (avec $\omega_X=\Omega^d_{X/K}$, $d=\dim X$). Il n'en est rien, comme me l'a fait remarquer E. Viehweg : on peut en effet construire une surface lisse X contenant une courbe de genre ≤ 1 et telle que ω_X soit ample (par exemple une surface lisse de degré 5 dans $\mathbb{P}^3$ contenant une droite).

5. De Bogomolov-Miyaoka à Mordell effectif.

Théorème 5.1. *Soit X un schéma propre sur $\mathbb{Q}$, et soit $f\colon Y\to X$ une X-courbe propre et lisse, à fibres géométriquement connexes de genre $\gamma\geq 2$. Soit L le faisceau inversible $\langle\omega_{Y/X},\omega_{Y/X}\rangle$ sur X, où $\langle\,,\rangle$ désigne l'accouplement de Deligne* (cf. rappels en 4.1).

Alors BM *implique* ME(X,L) *avec*

$$A_{\mathrm{ME}}(X,L,d)=A_{\mathrm{BM}}(\gamma,Nd\underline{v},Nd)$$

pour $\underline{v}\in\mathrm{Div}_{c+}(\mathbb{Z})$ *convenable et* $N=4\,\mathrm{Card}\,\mathrm{Sp}_{2\gamma}(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$.

Théorème 5.2. BM *implique* ME.

5.3. Montrons que 5.2 est une conséquence facile de 5.1, grâce à la "construction de Kodaira". Supposant BM, il suffit de prouver ME(X), où X est une courbe projective, lisse et géométriquement connexe de genre $g\geq 2$ sur un corps de nombres K. On peut de plus étendre K, et remplacer X par un revêtement fini étale (4.2). Ceci permet de supposer ([K] ; [SPA], exposé X) qu'il existe une X-courbe projective et lisse $f\colon Y\to X$, à fibres géométriquement connexes de genre $\gamma\geq 2$, et *non isotriviale* (i.e. "à modules variables"). Le degré, sur la courbe X, de $L=\langle\omega_{Y/X},\ \omega_{Y/X}\rangle$ est la self-intersection de $\omega_{Y/X}$ sur la surface Y donc est >0 : c'est un théorème général d'Arakelov mais dans le cas de la construction de Kodaira on peut calculer ce degré directement. Donc L est *ample* sur X , de sorte que, d'après 4.4, ME(X) équivaut à ME(X,L), elle-même conséquence de BM si l'on en croit le théorème 5.1. ■

Remarque 5.3.1. Dans l'argument ci-dessus on peut en fait calculer explicitement

L en termes de ω_X (du moins à torsion près dans Pic(X)) de sorte que l'on obtient $A_{\mathrm{ME}}(X, \omega_X, d)$ de façon effective en termes de A_{BM} .

Le reste du § 5 est consacré à la preuve du théorème 5.1.

5.4. *Rappels sur l'accouplement de Deligne* ([SGA 4], exposé XVIII ; [SPA], exposé II ; [D]). Si $f : X \to B$ est une courbe propre et plate sur un schéma B, à fibres de Cohen-Macaulay, et L, M deux faisceaux inversibles sur X, on construit un faisceau inversible $<L,M>_f$ sur B, bilinéaire en L et M et commutant à tout changement de base $B' \to B$; on le notera aussi $<L,M>_{X/B}$, ou simplement $<L,M>$ si aucune confusion n'est à craindre. On le calcule ainsi : si $D \subset X$ est un diviseur de Cartier effectif et plat sur B, on a un isomorphisme canonique de $\mathcal{O}_B$-modules inversibles

$$(5.4.1) \qquad <L,\mathcal{O}_X(D)> \simeq N_{D/B}(L_{|D}) .$$

De plus ([D], § 6) si B est un $\mathbb{C}$-schéma lisse avec X lisse sur B, et si L et M sont munis de métriques hermitiennes C^∞ (ou même parfois de "métriques singulières") on définit de façon naturelle une métrique hermitienne sur $<L,M>$; voir aussi [SPA], exposé II pour le cas particulier des métriques permises au sens d'Arakelov.

Si $L = M$ on notera $<L,L> = L^2_{X/B}$ ou L^2 ; c'est donc un $\mathcal{O}_B$-module inversible que l'on ne confondra pas avec le $\mathcal{O}_X$-module $L^{\otimes 2}$. Si les fibres de f sont de Gorenstein (par exemple nodales) et si $L = M = \omega_{X/B}$ on obtient un $\mathcal{O}_B$-module $\omega^2_{X/B}$.

Si B est le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres K, avec X_K lisse géométriquement connexe sur K de genre ≥ 1, et si L et M sont munis de métriques d'Arakelov aux places archimédiennes, alors $<L,M>$ a un degré (puisqu'il est muni de normes aux places archimédiennes) ; ce degré, lorsque X est régulier et f semi-stable, n'est autre que l'intersection d'Arakelov $(L.M)$ [SPA]. Si f est semi-stable et si $\pi : X' \to X$ est l'éclaté d'un point singulier de X, on a un isomorphisme canonique

$$(5.4.2) \qquad <L,M>_{X/B} \simeq <\pi^*L, \pi^*M>_{X'/B}$$

(représenter M par un diviseur ne passant pas par le point éclaté, et appliquer (5.4.1)) et un isomorphisme non moins canonique $\pi^*\omega_{X/B} \simeq \omega_{X'/B}$ (comme le diviseur exceptionnel E est un $\mathbb{P}^1$ de self-intersection -2, le faisceau $\omega_{X'/B}$ est trivial sur E), de sorte que $\omega^2_{X/B}$ ne dépend que de X_K (supposée lisse) et non du choix du modèle semi-stable X ; de plus son degré, dans la situation de 3.1 (où X est supposé régulier) est égal à $(\omega_{X/B}.\ \omega_{X/B})$.

5.5. Plaçons-nous maintenant dans la situation du théorème 5.1 : X est un schéma propre sur $\mathbb{Q}$ et $f : Y \to X$ une X-courbe lisse à fibres géométriquement connexes de genre $\gamma \geq 2$. On veut montrer que $\mathrm{ME}(X, \omega^2_{X/B})$ est conséquence de BM. *Pour cela nous supposerons d'abord que* :

(5.5.1) le noyau de la multiplication par 12 dans $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{Y/X}$ est constant, i.e. X-isomorphe à $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^{2\gamma}_X$.

Dans ces conditions, soit K une extension finie de $\mathbb{Q}$, d'anneau des entiers R, et soit $P \in X(K)$. Vu l'hypothèse (5.5.1), le modèle régulier minimal $\mathcal{Y}_P \to \operatorname{Spec} R$ de la fibre Y_P de f en P est semi-stable (cf. 2.6). Posons alors $d = [K:\mathbb{Q}]$ et

$$(5.5.2) \qquad \begin{aligned} h(P) &= \frac{1}{d} \deg_R \omega^2_{\mathcal{Y}_P/R} = e(\mathcal{Y}_P) \in \mathbb{R} \qquad \text{(cf. (3.3.5))} \\ \underline{v}(P) &= \frac{1}{d}\, \underline{\Delta}(\mathcal{Y}_P) \in \mathrm{Div}_{c+}(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\,. \end{aligned}$$

Dans la première formule $\omega^2_{\mathcal{Y}_P/R}$ est bien entendu muni de sa structure hermitienne canonique. Notons que $h(P)$ et $\underline{v}(P)$ ne dépendent que de l'image de P dans $X(\overline{\mathbb{Q}})$, et non de K. De plus ils se calculent par les mêmes formules si l'on remplace $\mathcal{Y}_P$ par le modèle *stable* de Y_P sur R : ceci résulte de 2.4 pour $\underline{v}(P)$, et de 5.4 pour $h(P)$.

Les lemmes 5.6 et 5.7 qui suivent n'utilisent pas l'hypothèse BM et seront démontrés un peu plus loin (5.10).

Lemme 5.6. $h : X(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$ *est une hauteur associée au faisceau* $\omega^2_{Y/X}$.

Lemme 5.7. *Il existe* $\underline{v} \in \mathrm{Div}_{c+}(\mathbb{Z})$ *tel que pour tout* $P \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ *on ait* $\underline{v}(P) \leq \underline{v}$.

Corollaire 5.8. *Sous l'hypothèse* (5.5.1), BM *implique* $\mathrm{ME}\,(X, \omega^2_{Y/X})$ *avec* $A_{\mathrm{ME}}\,(X, \omega^2_{Y/X}, d) = A_{\mathrm{BM}}\,(\gamma, d\underline{v}, d)$ *où* $\underline{v}$ *est comme en* 5.7.

Preuve du corollaire : gardant les notations K, P, d ci-dessus, le lemme 5.7 donne $\underline{\delta}(\mathcal{Y}_P) \leq d\underline{v}$; appliquant BM à $\mathcal{Y}_P$, on trouve l'inégalité

$$h(P) \leq \frac{1}{d}\, A_{\mathrm{BM}}\,(\gamma,\, d\underline{v}\,, d) \log|D_K| + B_{\mathrm{BM}}(\gamma,\, d\underline{v}\,, d)\,.$$

On obtient bien ME $(X, \omega^2_{Y/X})$ compte tenu du lemme 5.6. ■

5.9. *Preuve du théorème* 5.1. Ne supposant plus (5.5.1), soit K_1 l'extension de $\mathbb{Q}$ (de degré 4) engendrée par les racines douzièmes de l'unité ; posons $X_1 = X \otimes_{\mathbb{Q}} K_1$, et $Y_1 = Y \times_X X_1$. Le X_1-schéma en groupes noyau de la multiplication par 12 dans $\underline{\mathrm{Pic}}_{Y_1/X_1}$ est alors muni d'une dualité alternée à valeurs dans $(\mu_{12})_{X_1} \simeq (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})_{X_1}$, et à ce titre il est trivialisé par un revêtement étale X_2 de X_1, de groupe $\mathrm{Sp}_{2\gamma}(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$ et donc de degré N sur X. On applique alors 5.8 sur X_2, puis 4.2 pour redescendre à X. ■

5.10. Il reste à démontrer 5.6 et 5.7. On peut pour cela remplacer X par X_1 et Y par $Y_1 = Y \times_X X_1$, où $\pi : X_1 \to X$ est *propre et surjectif* : en effet, pour $P \in X(\overline{\mathbb{Q}})$, $h(P)$ et $\underline{v}(P)$ ne dépendent que de la courbe Y_P sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Or il existe un tel X_1 et un diagramme

$$(5.10.1) \qquad \mathcal{Y} \to \mathcal{X} \to B = \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}$$

induisant sur $\mathbb{Q}$ le diagramme $Y_1 \to X_1 \to \mathrm{Spec}\, \mathbb{Q}$, et où $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}$ sont propres et plats sur B et $\mathcal{Y}$ une $\mathcal{X}$-courbe *stable* : en effet on commence par prolonger X et Y au-dessus d'un ouvert de Spec $\mathbb{Z}$, et l'on applique alors [SPA], V, lemme 1.6 (conséquence de la propreté sur $\mathbb{Z}$ du champ des courbes stables de genre γ).

Pour prouver 5.6 et 5.7 nous supposerons donc (remplaçant X par X_1) l'existence d'un diagramme (5.10.1) induisant $Y \to X \to \mathrm{Spec}\, \mathbb{Q}$ sur la fibre générique.

Dans ces conditions, et avec les notations de 4.2, si $\widetilde{P}: \mathrm{Spec}\, R \to \mathcal{X}$ prolonge P (puisque $\mathcal{X}$ est propre sur $\mathbb{Z}$) alors la surface arithmétique $\mathcal{Y}_{\widetilde{P}}$ déduite de $\mathcal{Y}$ par le changement de base $\widetilde{P}$ n'est autre que le modèle stable de Y_P sur Spec R. Il est alors clair par définition que h est la hauteur sur $X(\overline{\mathbb{Q}})$ déduite du modèle propre $\mathcal{X} \to B$ de X muni du faisceau inversible $\omega^2_{\mathcal{Y}/\mathcal{X}}$, lui-même équipé de ses métriques canoniques aux places archimédiennes. Ceci prouve le lemme 5.6.

Montrons 5.7 en commençant par la partie archimédienne $\underline{v}(P)(\infty)$. Si $P \in X(K)$ avec $[K:\mathbb{Q}] = d < \infty$, et si l'on note σ_i $(i=1,\ldots,d)$ les plongements de K dans $\mathbb{C}$, on a par définition (cf. 2.7) $\underline{v}(P)(\infty) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} |\delta(Y_{\sigma_i P})|$ où δ est l'invariant de Faltings. Comme $X(\mathbb{C})$ est une variété compacte, l'application $x \in X(\mathbb{C}) \longmapsto \delta(Y_x)$ est bornée. La formule ci-dessus implique que $\underline{v}(P)(\infty)$ est bornée par la même constante.

Pour borner la "partie finie" de $\underline{v}(P)$, on considère comme il se doit le

$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-module cohérent $\Sigma(\mathcal{Y}/\mathcal{X})$ défini en 2.3. Comme $\mathcal{Y}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ est lisse, ce faisceau est nul sur $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ donc à support dans un nombre fini de fibres de $\mathcal{X} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Il est en particulier annulé par un entier non nul n ; d'autre part son rang en chaque point de $\mathcal{X}$ est borné par un entier r indépendant du point (par exemple $r = 3\gamma-3$, comme on l'a dit en 1.3). Si $P \in X(K)$ avec $[K:\mathbb{Q}] = d$, et si on prolonge P en $\tilde{P} \in \mathcal{X}(R)$ où R est l'anneau des entiers de K, alors $\Sigma(\mathcal{Y}_{\tilde{P}} / \operatorname{Spec} R)$ est donc un R-module de longueur finie, annulé par n et partout de rang $\leq 3\gamma-3$, de sorte que le diviseur $\underline{\delta}(\mathcal{Y}_{\tilde{P}} / \operatorname{Spec} R)$ de (2.5.1) est $\leq (3\gamma-3)\operatorname{div}_R(n)$ d'où

$$\underline{\Delta}(Y_P) = N_{\operatorname{Spec} R/\operatorname{Spec} \mathbb{Z}}\ \underline{\delta}(\mathcal{Y}_{\tilde{P}} / \operatorname{Spec} R) \ \leq\ [K:\mathbb{Q}]\,(3\gamma-3)\operatorname{div}(n)$$

et enfin $\underline{v}(P) \leq (3\gamma-3)\operatorname{div}(n)$ d'où le lemme. ■

Remarque 5.11. Si l'on admet la version renforcée de BM mentionnée en 3.2.2, le lemme 5.7 devient inutile : on remarque simplement que les courbes $\mathcal{Y}_P$ ont toutes bonne réduction en-dehors d'un ensemble fini, indépendant de P, de nombres premiers. On retrouve essentiellement l'argument utilisé dans [SPA], XI, §3 pour déduire un "Mordell effectif" de la conjecture des petits points.

6. De Mordell effectif à la conjecture du discriminant.

6.1. L'hypothèse CD ci-dessous implique, comme on sait (ce séminaire, exposé 1), le "grand théorème de Fermat en degré assez grand" (effectif en fonction des constantes A_{CD} et B_{CD}) :

Hypothèse CD (conjecture de Szpiro). *Il existe des constantes A_{CD} et B_{CD} telles que pour toute courbe elliptique E sur $\mathbb{Q}$, à réduction semi-stable sur $\mathbb{Z}$, on ait*

$$\log|\Delta_{\min}(E)| \leq A_{\mathrm{CD}} \log N(E) + B_{\mathrm{CD}}$$

où $\Delta_{\min}(E)$ (resp. $N(E)$) désigne le discriminant minimal (resp. le conducteur) de E.

Théorème 6.2. ME *implique* CD.

6.3. Fixons une fois pour toutes une courbe modulaire X sur $\mathbb{Q}$, de genre ≥ 2. L'invariant modulaire j se prolonge en un morphisme fini, encore noté j : $X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$; notons n son degré.

On notera h la hauteur naïve sur $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ (de sorte que si $a,b \in \mathbb{Z}$ sont premiers entre eux, $h(a/b) = \log \max \{|a|, |b|\}$). Si E désigne une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$, on utilisera les faits suivants :

(6.3.1) (a) $j(E)$ se relève en un point $\tilde{j} \in X(K)$ où K est un corps de nombres de degré $[K:\mathbf{Q}] \leq n$, non ramifié en dehors des places divisant $vN(E)$ où v est le "niveau" de X (indépendant de E) ;

(b) si E a réduction semi-stable sur $\mathbb{Z}$ alors $|\Delta_{\min}(E)|$ est le dénominateur de $j(E)$ (écrit sous forme irréductible). En particulier $\log|\Delta_{\min}(E)| \leq h(j(E))$.

Notons enfin h_1 la hauteur $h \circ j$ sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$. Dans ces conditions on a une version plus précise du théorème 6.2 :

Théorème 6.4. *On suppose vérifiée* ME(X,h_1). *Alors* CD *est vérifiée avec les constantes*

$$A_{\mathrm{CD}} = (1+\log n)\, A_{\mathrm{ME}}(X,h_1,n)$$
$$B_{\mathrm{CD}} = B_{\mathrm{ME}}(X,h_1,n) + (\log n + \log n \log v_0 + \log v_0)\, A_{\mathrm{ME}}(X,h_1,n)$$

où v_0 est le produit des nombres premiers divisant v.

Preuve. Soit E une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$, à réduction semi-stable sur $\mathbb{Z}$. Il suffit d'après (6.3.1) (b) de majorer $h(j(E)) = h_1(\tilde{j})$ où $\tilde{j}$ est comme en (6.3.1) (a). Appliquant ME, on a, puisque $[K:\mathbf{Q}] \leq n$:

(6.4.1) $$\log |\Delta_{\min}(E)| \leq h_1(\tilde{j}) \leq \frac{1}{n} A_{\mathrm{ME}}(X,h_1,n) \log|D_{K/\mathbf{Q}}| + B_{\mathrm{ME}}(X,h_1,n)\,.$$

D'après [S], proposition 6, on a (compte tenu de (6.3.1) (a)) :

$$\frac{1}{n} \log|D_K| \leq \log(v_0N(E)) + (1+\log(v_0N(E))) \log n$$
$$= (1+\log n) \log N(E) + (1+\log n) \log v_0 + \log n$$

où l'on a majoré le nombre de nombres premiers divisant $vN(E)$ par $1+\log(v_0N(E))$. Reportant dans (6.4.1) on en déduit le théorème. ■

7. De Mordell effectif à la "conjecture *abc*".

7.1. Soit X le modèle projectif lisse sur $\mathbf{Q}$ de la courbe d'équation affine $y^2+y=x^5$. C'est une courbe de genre 2, et la fonction y définit un revêtement $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$ de degré 5, totalement ramifié aux points 0, -1 et ∞. Soit $y=b/a$ un point de $\mathbb{P}^1(\mathbf{Q})$, avec a et b entiers premiers entre eux. Posons $c=a+b$, $m=y^2+y=bc/a^2$, et $K=\mathbf{Q}(\sqrt[5]{m})$. Alors les coordonnées y et $x=\sqrt[5]{m}$ définissent un point $P\in X(K)$ tel que $\pi(P)=y$. Si l'on note h la hauteur naïve sur $\mathbb{P}^1_{\mathbf{Q}}$ et $h_1=h\circ\pi$, l'hypothèse ME appliquée à P donne

$$\log\max(|a|,|b|)\leq \tfrac{1}{5}A_{\mathrm{ME}}(X,h_1,5)\log|D_{K/\mathbf{Q}}| + B_{\mathrm{ME}}(X,h_1,5).$$

Les nombres premiers ramifiés dans K sont parmi ceux qui divisent abc, dont le produit sera noté rad(abc). Pour un tel nombre premier p, la p-composante de $D_{K/\mathbf{Q}}$ est au plus p^4 si $p\neq 5$, et au plus 5^5 si $p=5$, d'où $|D_{K/\mathbf{Q}}|\leq 5\ \mathrm{rad}(abc)^4$ et finalement

Théorème 7.2. *On suppose vérifiée* ME(X), *où X est la courbe définie ci-dessus. Alors, si a et b sont deux entiers premiers entre eux et $c=a+b$, on a*

$$\log\max(|a|,|b|)\leq \tfrac{4}{5}A_{\mathrm{ME}}(X,h_1,5)\log\mathrm{rad}(abc) + B_{\mathrm{ME}}(X,h_1,5)+\tfrac{1}{5}\log 5.\blacksquare$$

Les liens directs entre la conjecture du discriminant et la "conjecture *abc*" sont étudiés notamment dans l'exposé 1 de ce séminaire.

8. Questions d'effectivité.

8.1. Chacune des hypothèses envisagées dans ce qui précède fait intervenir une "constante A" et une "constante B". Le lecteur aura remarqué que, dans les énoncés du type "l'hypothèse X implique l'hypothèse Y", il est possible de calculer A_{Y} en fonction de A_{X} mais qu'il n'en va pas de même en général pour les constantes B. La résistance de ces dernières provient toujours de la contribution des mauvaises places lorsque l'on passe d'un objet défini sur un corps de nombres (morphisme non ramifié dans 4.2 (ii), famille de courbes dans 5.10) à un modèle entier. Bien entendu ces mauvaises places comprennent les places archimédiennes, lorsqu'il s'agit de comparer des métriques sur des fibrés ; un des points les plus difficiles semble être la majoration de la fonction δ de Faltings, obtenue en 5.9 par un argument de compacité.

8.2. Disons quelques mots du passage de BM à CD. Soit X la courbe modulaire utilisée au § 6 (celle-ci est d'ailleurs à peu près quelconque; le "bon" cadre pour ME serait plutôt celui des champs algébriques, en l'occurrence le champ sur Spec ($\mathbb{Z}$) des courbes elliptiques, convenablement compactifié). Lorsque l'on déduit

ME(X) de BM (supposé effectif), nous avons vu en 5.3.1 que l'on obtient une valeur effective pour $A_{\mathrm{ME}}(X,\omega_X)$; or, le théorème 6.4 donne A_{CD} en termes de $A_{\mathrm{ME}}(X,h_1)$, où h_1 est déduite via le morphisme j de la hauteur naïve sur $\mathbb{P}^1$, donc est associée à $\mathcal{O}_X(D)$ où D est le diviseur des pointes sur X. Calculer A_{CD} revient donc à comparer, à $O(1)$ près, les hauteurs h_ω et h_1 associées respectivement à ω_X et $\mathcal{O}_X(D)$. Or on déduit sans peine du théorème de Manin-Drinfeld (ce séminaire, exposé 7) que, pour M et $N>0$ convenables, on a $\omega_X^{\otimes M} \simeq \mathcal{O}_X(ND)$, et par conséquent la différence $(\deg D)h_\omega - (\deg \omega_X)h_1$ est bornée.

Références.

[A] S. Ju. ARAKELOV, *Intersection theory of divisors on an arithmetic surface,* Math. USSR. Izv. 8 (1974) n° 6, 1167-1180.

[B] F.A. BOGOMOLOV, *Holomorphic tensors and vector bundles on projective varieties,* Izvestija AN SSSR, ser. math., 42 (1978), 1227-1287 ; trad. anglaise Math. USSR Izv. vol. 13 n° 3 (1979), 499-555.

[D] P. DELIGNE, *Le déterminant de la cohomologie*, Contemporary Math. 67 (1987), 93-177.

[D-M] P. DELIGNE et D. MUMFORD, *The irreducibility of the space of curves of given genus,* Pub. Math. IHES vol. 36.

[F] G. FALTINGS, *Calculus on arithmetic surfaces*, Ann. of Math. 119 (1984), 387-424.

[K] K. KODAIRA, *A certain type of irregular algebraic surface,* Journal d'Analyse Mathématique, 19 (1967).

[M] Y. MIYAOKA, *On the Chern numbers of surfaces of general type,* Invent. Math. 42 (1977), 225-237.

[MB] L. MORET-BAILLY, *La formule de Noether pour les surfaces arithmétiques,* preprint.

[P] A.N. PARSHIN, *The Bogomolov-Miyaoka-Yau inequality for arithmetical surfaces and its applications*, Séminaire de théorie des nombres de Paris 1986-87, Progress in Math. (Birkhäuser) vol. 75.

[S] J.-P. SERRE, *Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev,* Pub. Math. IHES vol. 54, 123-201.

[SGA 4] M. ARTIN, A.GROTHENDIECK, J.-L. VERDIER et al., *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie* 1963/64, tome 3, Springer LNM 305.

[SPA] L. SZPIRO et al., *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell,* Astérisque vol. 127.

[SPC] L. SZPIRO et al., *Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux*, Astérisque vol. 86.

[V] A. VAN DE VEN, *On the Chern numbers of certain complex and almost-complex manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 55 (1966), 1624-1627.

[Y] S.-T. YAU, *Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 74 (1977), 1789-1799.

Laurent Moret-Bailly
IRMAR, Université de Rennes-I
Campus de Beaulieu
F-35042 Rennes Cedex
EARN : moret@FRCICB81