J. Azéma

Marc Yor

En guise d'introduction

Astérisque, tome 52-53 (1978), p. 3-16

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__52-53__3_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 52-53 (1978) p.3-16

EN GUISE D'INTRODUCTION

J. AZEMA et M. YOR

0 - **Dans ce court** chapitre introductif, nous avons choisi d'étudier un problème très simple : construire le temps local d'une martingale continue, c'est à dire une mesure aléatoire portée par les zéros de cette martingale. Dans ce cas, la construction est très facile, puisqu'il suffit de considérer le processus croissant associé au module de la martingale et qu'il est possible d'éviter de recourir à tout l'arsenal du calcul différentiel stochastique et de la théorie générale des processus.

Nous montrons donc directement quelques uns des principaux résultats relatifs au temps local, en particulier la formule de Tanaka, avec des méthodes qui ne sont pas sans rappeler celles que l'on utilise pour l'étude du temps local d'un processus de Markov. Nous en déduisons une caractérisation du processus croissant $\langle M,M \rangle$ associé à une martingale de carré intégrable qui permet à la fois de donner une nouvelle démonstration de la formule d'Ito et d'établir de façon particulièrement rapide les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy. Tout cela peut passer pour un divertissement mathématique, mais nous espérons ainsi convaincre le lecteur que la notion de temps local, loin d'être une simple curiosité, peut être reliée de manière naturelle aux théorèmes centraux de la théorie des martingales.

Tous les résultats de ce chapitre peuvent être considérés comme nouveaux, à l'exception de ceux qui sont importants. On a repris certaines des idées figurant dans (1) en simplifiant beaucoup les démonstrations.

1 - LES ZÉROS D'UNE MARTINGALE CONTINUE

$(\Omega, \underline{\underline{F}}_t, P)$ est un espace filtré satisfaisant aux conditions habituelles, et (M_t) une martingale continue par rapport à la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$. On désigne par H l'ensemble aléatoire $\{(\omega,t) | M_t(\omega) = 0\}$. Puisque les trajectoires de (M_t) sont continues, H est fermé et prévisible. Nous allons montrer que H est parfait (i.e : pour presque tout ω, la coupe H_ω de H en ω définie par $H_\omega = \{t \ ; \ M_t(\omega) = 0\}$ n'a pas de points isolés). Rappelons tout d'abord quelques notations usuelles relatives aux ensembles aléatoires :

H_ω^c est ouvert dans $\mathbb{R}_+$ et s'écrit comme une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints $]a_i;b_i[$; l'ensemble des a_i se note $\overset{\rightarrow}{H_\omega}$ et s'appelle ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus à H_ω ; de même l'ensemble des b_i se note $\overset{\leftarrow}{H_\omega}$ et s'appelle ensemble des extrémités droites des intervalles contigus à H_ω. On notera $\vec{H}$ (resp $\overset{\leftarrow}{H}$) l'ensemble aléatoire dont la coupe en chaque ω est $\overset{\rightarrow}{H_\omega}$ (resp $\overset{\leftarrow}{H_\omega}$).

Se pose alors un problème de mesurabilité pour $\overset{\leftarrow}{H}$ et $\vec{H}$; en utilisant le fait que le début d'un ensemble aléatoire fermé prévisible est un temps d'arrêt prévisible, il n'y a aucune difficulté à montrer que $\overset{\leftarrow}{H}$ est réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêts prévisibles. L'ensemble $\vec{H}$, quant à lui, présente une pathologie bien connue (tout au moins quand il s'agit du mouvement brownien) : il est progressif mais ne contient aucun graphe de temps d'arrêt. Nous allons démontrer ce dernier fait en introduisant une famille de martingales liées au module de M_t.

(1) PROPOSITION

Soit h un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$; on pose

$$Y_t^h = |M_{h+t}| \ 1_{[\![h,D_h[\![}(t+h) \ ; \ \underline{\underline{F}}_t^h = \underline{\underline{F}}_{h+t} \ ; \ D_h(\omega) = \inf\{s > h(\omega); (\omega,s) \in H\}$$

Alors, si (M_t) est uniformément intégrable, (Y_t^h) est une martingale par rapport à la filtration $(\underline{\underline{F}}_t^h)$.

Démonstration : considérons les événements $A_h = \overline{\lim_{t \downarrow\downarrow 0}} \{M_{h+t} > 0\} \cap \{h < \infty\}$, $B_h = \overline{\lim_{t \downarrow\downarrow 0}} \{M_{h+t} < 0\} \cap \{h < \infty\}$, qui sont dans $\underline{\underline{F}}_h$. On peut écrire $Y_t^h = (1_{A_h} - 1_{B_h})\, M_{h+t}\, 1_{[\![h,D_h[\![}(t+h)$. Raisonnons alors dans la filtration $(\underline{\underline{F}}_t^h)$: (Y_t^h) apparaît comme étant la martingale $((1_{A_h} - 1_{B_h})M_{h+t})$ arrêtée au temps d'arrêt $D_h - h$ (avec la convention $\infty - \infty = \infty$).

On a alors le théorème suivant

(2) THÉORÈME

1). $\overleftarrow{H}$ est réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêts prévisibles

2). Si S est un temps d'arrêt, $[\![S]\!] \cap \overrightarrow{H}$ est évanescent

3). H n'a pas de points isolés.

Démonstration : pour montrer 2), on appelle S' le temps d'arrêt admettant pour graphe $[\![S]\!] \cap \overrightarrow{H}$. D'après la proposition précédente, $(Y_t^{S'})$ est une martingale positive, nulle à l'origine. En vertu d'une propriété bien connue des martingales positives, $(Y_t^{S'})$ est nulle, ce qui n'est possible que si $[\![S']\!]$ est évanescent. L'ensemble des points isolés de H, qui s'écrit $\overleftarrow{H} \cap \overrightarrow{H}$, est évanescent puisque les propriétés 1) et 2) seraient contradictoires dans le cas contraire.

2 - TEMPS LOCAL D'UNE MARTINGALE CONTINUE

Puisque H est parfait, il est naturel de chercher à construire une mesure aléatoire diffuse portée par H ; nous allons voir que le processus croissant continu adapté associé à la sous-martingale $(|M_t|)$ définit une telle mesure.

(3) DÉFINITION

On appelle temps local en a et on note (L_t^a) le processus croissant continu adapté associé, d'après le théorème de Doob-Meyer, à la sous-martingale $(|M_t - a|)$.

M étant une martingale, $(\frac{1}{2} L_t^a)$ est associé de la même façon à chacune des sous-martingales $(M_t-a)^+$ et $(M_t-a)^-$.

Dans la suite on notera simplement (L_t) le temps local en 0 de (M_t), et l'on peut tout de suite énoncer.

(4) PROPOSITION

La mesure (dL_t) est portée par H.

Démonstration : quitte à arrêter (M_t), on peut la supposer bornée, et on peut écrire, en reprenant les notations de la proposition (1), si h est un nombre ≥ 0, $E[Y_0^h] = E[Y_\infty^h]$, c'est à dire

$$E[|M_h|] = E[|M_\infty| \, 1_{\{D_h=\infty\}}] = E[|M_{D_h}|]$$

Il en résulte que $L_h = L_{D_h}$ p.s ; le résultat découle alors du fait que $H^c = \bigcup_{h \in \mathbb{Q}_+}]\!]h, D_h[\![$.

Appelons (N_t) la martingale $|M_t| - L_t$; nous aurons besoin du résultat intermédiaire suivant

(5) PROPOSITION

On pose $\tau_t(\omega) = \sup\{s \; ; \; s < t$ et $(\omega,s) \in H\}$ (*) ; on a l'égalité suivante pour tout processus (Z_t) prévisible borné :

$$(6) \qquad \int_0^t Z_s \, dL_s - |M_t| \, Z_{\tau_t} = -\int_0^t Z_{\tau_s} \, dN_s .$$

Démonstration : il suffit de considérer le cas où (Z_t) est l'indicateur de l'intervalle stochastique prévisible $]\!]0,S]\!]$, auquel cas (Z_{τ_t}) est l'indicateur de $]\!]0,D_S]\!]$. Le membre de gauche, compte tenu de (4), s'écrit alors $L_{t\wedge D_S} - |M_t| \, 1_{]\!]0,D_S]\!]}(t)$, soit encore $N_{t\wedge D_S}$, d'où le résultat. En voici deux conséquences simples

---

(*) On fait la convention $\sup \phi = 0$; d'autre part on conviendra qu'une intégrale stochastique $\int_0^t Z_s \, dM_s$ est une martingale dont la valeur à l'origine est $Z_0 M_0$

(7) COROLLAIRES

1) Si f est une fonction de classe C^1

$f(L_t) - |M_t|\, f'(L_t)$ est une martingale locale

2) Quelque soit $p \geq 1$ on a $||L_t||_p \leq p||M_t||_p$.

Démonstration : on applique la formule (6) au processus $Z_t = f'(L_t)$, et on remarque que, dans ce cas, $Z_{\gamma_t} = Z_t$ en vertu de (4). La formule (6) s'écrit donc $f(L_t)-|M_t|f'(L_t) = \int_0^t f'(L_s)dN_s$, et le premier membre est une martingale locale. En particulier $U_t = L_t^p - p|M_t|\, L_t^{p-1}$ est une martingale locale et l'on en déduit facilement le corollaire 2 : supposant (M_t) et (L_t) bornés, de sorte que U_t est une vraie martingale, on a :

$$||L_t||_p^p = E[L_t^p] = pE\left[|M_t|\,|L_t^{p-1}|\right] \leq p||M_t||_p\ ||L_t||_p^{p-1}$$

Divisant par $||L_t||_p^{p-1}$ qui est supposé fini, on obtient le résultat. Dans le cas général, il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt telle que la martingale $(M_t^{T_n})$ satisfasse aux hypothèses ci-dessus ; on écrit $||L_{t\wedge T_n}||_p \leq p||M_{t\wedge T_n}||_p \leq p||M_t||_p$, et l'on fait tendre n vers l'infini.

Nous énoncerons enfin une autre conséquence de (5), qui est intéressante parce qu'elle caractèrise le temps local (L_t) d'une manière analogue à ce qui se fait dans la théorie des processus de Markov, où le temps local en un point est défini par une fonctionnelle additive liée au dernier temps de passage en ce point. On posera dans ce qui suit

$$\tau = \tau_\infty = \sup\{s\ ;\ (\omega,s) \in H\} = \sup\{s\ ;\ M_s = 0\}$$

(8) PROPOSITION : supposons (M_t) uniformément intégrable.

On a, quelque soit le processus (Z_t) prévisible borné,

$$E\left[\int_0^\infty Z_s\, dL_s\right] = E\left[Z_\tau\ |M_\infty|\ ;\ \{\tau > 0\}\right] \tag{9}$$

Dans le langage de la théorie générale des processus, ce résultat peut s'énoncer ainsi : (L_t) est la projection duale prévisible du processus croissant non adapté $\lambda_t = |M_\infty| \, 1_{\{0 < \tau \leq t\}}$.

Démonstration : il suffit de vérifier (9) dans le cas où (Z_t) est nul à l'origine. Posons $\mu_t = \int_0^t Z_s \, dL_s - |M_t| \, Z_{\tau_t}$; c'est une martingale uniformément intégrable, nulle à l'origine d'après (6). On a donc $E[\mu_\infty] = 0$, c'est à dire $E \int_0^\infty Z_s \, dL_s = E\left[|M_\infty| Z_\tau\right]$, C.Q.F.D.

Avant de poursuivre, nous faisons une petite digression qui nous rendra de précieux services par la suite : compte-tenu de la remarque qui suit la définition (3), nous aurions pu établir les propositions précédentes en remplaçant $|M|$ par M^+ (ou M^-). Voici alors la version des résultats obtenus ci-dessus : notons $({}^+N_t)$ la martingale $(M_t^+ - \frac{1}{2} L_t)$

- si Z est un processus prévisible borné, on a :

$$(6^+) \qquad \frac{1}{2} \int_0^t Z_s \, dL_s - M_t^+ \, Z_{\tau_t} = -\int_0^t Z_{\tau_s} \, d\, {}^+N_s$$

et

$$(9^+) \qquad \frac{1}{2} E\left(\int_0^\infty Z_s \, dL_s\right) = E\left[Z_\tau \, M_\infty^+ \; ; \; (\tau > 0)\right].$$

- si f est une fonction de classe C^1,

$$(7^+) \qquad \frac{1}{2} f(L_t) - M_t^+ \, f'(L_t) \quad \text{est une martingale locale.}$$

En appliquant la proposition (8) aux martingales $(M_t - a)$, puis en intégrant en a, nous allons trouver des théorèmes analogues caractérisant les processus à variation finie continus associés à des semi-martingales de la forme $f(M_t)$. Nous allons ainsi donner en particulier une caractérisation du processus croissant $\langle M,M\rangle_t$ associé à la sous martingale (M_t^2).

3 - UNE CARACTÉRISATION DE $\langle M,M\rangle$.

On pose $I_t = \sup_{s \geq t} M_s$, $J_t = \inf_{s \geq t} M_s$; (I_t) et (J_t) sont monotones continus (non **adaptés**) et tendent vers M_∞ quand t tend vers l'infini. On leur associe les deux processus croissants nuls à l'origine :

$$\alpha_t = (I_o - M_\infty)^2 - (I_t - M_\infty)^2 \, , \; \beta_t = (J_o - M_\infty)^2 - (J_t - M_\infty)^2$$

D'après l'inégalité de Doob, (α_t) et (β_t) sont intégrables si (M_t) est bornée dans L^2. Remarquons aussi que le processus α, relatif à M, est égal au processus β, relatif à $(-M)$.

(10) THÉORÈME

Si (M_t) est bornée dans L^2, $(\langle M,M\rangle_t)$ est la projection duale prévisible de chacun des processus croissants (α_t) et (β_t).

Démonstration : elle repose sur le lemme suivant ; soit f une fonction de classe C^2 à support compact et (A_t) le processus à variation intégrable, continu, adapté, tel que $f(M_t) - A_t$ soit une martingale. Alors

(11) LEMME

(A_t) est la projection prévisible duale du processus croissant brut (K_t) défini par $dK_t = \frac{1}{2} f''(M_t) \, d\beta_t$.

Démonstration du lemme : posons $\tau^a = \sup\{s \; ; \; M_s = a\}$; la formule (9^+) appliquée à la martingale $(M_t - a)$ montre que si (Z_t) est prévisible nul à l'origine, on a

$$\frac{1}{2} E\left[\int_o^\infty Z_s \, dL_s^a\right] = E\left[Z_{\tau^a} \, (M_\infty - a)^+\right] \tag{12}$$

Nous voudrions intégrer les deux membres de (12) par rapport à la mesure $f''(a)da$ et appliquer le théorème de Fubini ; il se pose un problème de mesurabilité, l'application $(\omega,a) \to 1_{[t \geq \tau^a(\omega)]} (M_\infty(\omega) - a)^+$ est mesurable de $\underline{\underline{F}} \otimes B(\mathbb{R})$

dans $\mathbb{R}$ (en effet $a \to \tau^a(\omega)$ est continue à gauche sur $]M_\infty(\omega),\infty[$ et continue à droite sur $]-\infty,M_\infty[$). Cette mesurabilité se conserve par projection duale prévisible (cf [5], proposition 4[(1)], de sorte que $(\omega,a) \to L_t^a(\omega)$ est encore mesurable. Puisque (L_t^a) est continu en t, on obtient même la mesurabilité de l'application $(\omega,a,t) \to L_t^a(\omega)$, ce qui nous autorise à appliquer le théorème de Fubini. Rappelons la formule élémentaire $\int_{\mathbb{R}} f''(a)(x-a)^+ da = f(x)$, et intégrons les deux membres de (12). A gauche, $\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^a f''(a)da$ est le processus à variation intégrable associé à $\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |M_t-a|\ f''(a)da = f(M_t)$ de sorte que le premier membre s'écrit $E[\int_0^\infty Z_s\ dA_s]$. Quant au second, il devient $E[\int_{\mathbb{R}} Z_{\tau^a}(M_\infty-a)^+ f''(a)da]$, expression que l'on peut transformer si l'on a remarqué l'équivalence suivante

$$(\tau_a=u) \Longleftrightarrow (a=J_u) \quad \text{si} \quad a < M_\infty$$

sauf peut être sur un ensemble de points a dénombrable. On peut alors écrire

$$E[\int_0^\infty Z_s\ dA_s] = E[\int_0^\infty Z_u(M_\infty-J_u)\ f''(J_u)dJ_u]$$

et l'on peut remplacer $f''(J_u)$ par $f''(M_u)$ puisque, sur le support de dJ_u, on a $M_u=J_u$, de sorte que l'égalité précédente devient

$$E[\int_0^\infty Z_s\ dA_s] = \frac{1}{2}\ E[\int_0^\infty Z_u\ f''(M_u)\ d\beta_u] \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Passons à la démonstration du théorème : supposons tout d'abord (M_t) bornée par K et appelons f une fonction de classe C^2 à support compact telle que $f(x) = x^2$ si $|x| \leq K$. On applique le lemme à $f(M_t)$, ce qui montre le théorème pour β, et donc pour α, si l'on change (M_t) en $(-M_t)$.

Si (M_t) n'est pas bornée, on applique le résultat à une suite M^{T_n} de

---

(1) L'application de cette proposition nécessite que $L^1(\Omega,\underline{\underline{F}}_\infty,P)$ soit séparable. Ceci n'est pas gênant, car on peut raisonner ici avec la filtration engendrée par M, en vertu du théorème (16) (formule de Tanaka). Mais, nous ne détaillons pas...

martingales bornées de la manière habituelle, et le passage à la limite ne pose aucun problème.

Le théorème (10) permet de donner une nouvelle caractérisation de l'espace BMO, tout au moins pour les martingales continues :

(13) COROLLAIRE

Soit (M_t) *une martingale continue, bornée dans* L^2. *Alors,* $M \in \mathrm{BMO}$ *si, et seulement si, il existe une constante* C *telle que, pour tout t.a* T :

$$E\left[\sup_{s \geq T} |M_s - M_\infty|^2 \mid \mathcal{F}_T\right] \leq C \quad P \text{ ps.} \tag{14}$$

Démonstration : si (14) est vérifiée, on a, a fortiori :

$$E\left[(M_T - M_\infty)^2 \mid \mathcal{F}_T\right] \leq C \quad P \text{ ps, et donc : } M \in \mathrm{BMO}.$$

Inversement, si $M \in \mathrm{BMO}$, on a, pour tout t.a T :

$$E[\langle M,M\rangle_\infty - \langle M,M\rangle_T \mid \mathcal{F}_T] \leq C \quad P \text{ ps,}$$

où $C = ||M||^2_{\mathrm{BMO}}$.

Donc, d'après le théorème (10), on a :

$$E\left[(\alpha+\beta)_\infty - (\alpha+\beta)_T \mid \mathcal{F}_T\right] \leq 2C \quad P \text{ ps.}$$

Or, $\sup_{s \geq T} |M_s - M_\infty|^2 \leq (\alpha+\beta)_\infty - (\alpha+\beta)_T$, d'où le résultat.

Comme autre conséquence de (10) et (11), on obtient une bonne moitié de la formule de Ito :

(15) COROLLAIRE

On a $dA_t = \frac{1}{2} f''(M_t)\, d\langle M,M\rangle_t$ *si* M *est une martingale locale continue et* f *de classe* C^2.

On se ramène comme d'habitude au cas où M est bornée et f à support compact. On sait d'après (11) que $dA_t = \frac{1}{2} f''(M_t)\, d\beta_t$. Projévisidualons : il vient $dA_t = \frac{1}{2} f''(M_t)\, d\langle M,M\rangle_t$ d'après (10). ∎

Nous allons d'ailleurs compléter la formule d'Ito dans le paragraphe qui suit en la déduisant de la formule de Tanaka sur le temps local.

4 - FORMULE DE TANAKA ET FORMULE D'ITO

(16) THÉORÈME (Tanaka)

Si (M_t) est une martingale locale continue, on peut écrire

$$|M_t| = \int_0^t \text{signe}\,(M_s)dM_s + L_t. = |M_0| + \int_{]0,t]} \text{sgne}(M_s)dM_s + L_t$$

La formule présente une ambiguité puisque signe(0) n'est pas défini, nous allons voir tout de suite que ça n'a pas d'importance puisque $(d\langle M,M\rangle_t)$ ne charge pas l'ensemble des 0 de M; néanmoins pour la bonne forme posons signe(0) = 0. En se reportant à la démonstration du théorème (10) on démontre que $\langle M,M\rangle_t = \int_{\mathbb{R}} L_t^a\, da$. Mais,pour presque tout a, (en fait pour $a \neq 0$), dL_t^a ne charge pas H ; il en résulte que $d\langle M\, M\rangle_t$ ne charge pas H. Avec les notations adoptées plus haut nous avons à montrer que $N_t = \int_0^t \text{signe}(M_s)dM_s$. Appelons N'_t le second membre et montrons dans une première étape que $\langle N,N\rangle = \langle N',N'\rangle = \langle M,M\rangle$. En se reportant à (7), on sait en effet que $(L_t^2 - 2|M_t|L_t) = (N_t^2 - M_t^2)$ est une martingale locale, et donc que les sous martingales (N_t^2) et (M_t^2) admettent même processus croissant. Ecrivons alors si $h \geq 0$ et $t > h$

$$\int_h^{D_h \wedge t} dN'_s = \int_h^{D_h \wedge t} \text{signe}(M_s)dM_s = |M_{D_h \wedge t}| - |M_h| = N_{D_h \wedge t} - N_h = \int_h^{D_h \wedge t} dN_s.$$

On écrit cette égalité pour tout h rationnel et, en utilisant le fait que $\bigcup_{h \in \mathbb{Q}^+}]\!]h,D_h[\![= H^c$ ainsi que les propriétés de convergence dans L^2 de l'intégrale stochastique, on arrive à l'égalité $\int_0^t 1_{H^c}(\omega,s)dN'_s = \int_0^t 1_{H^c}(\omega,s)dN_s$, ce qui est l'égalité demandée puisque $\langle N',N'\rangle$ et $\langle N,N\rangle$ ne chargent pas H.

(17) THÉORÈME (Ito)

Si (M_t) est une martingale locale continue et f une fonction de classe C^2, on a la formule

$$f(M_t) = f(M_o) + \int_{o+}^{t} f'(M_s)dM_s + \frac{1}{2}\int_o^t f''(M_s)\, d<M,M>_s .$$

Démonstration : on se ramène comme d'habitude au cas où (M_t) est bornée et f à support compact. Intégrons alors l'égalité

$$|M_t-a| = |M_o-a| + \int_{o+}^{t} \text{signe}(M_s-a)dM_s + L_t^a$$

par rapport à la mesure $f''(a)da$ (on justifie ceci en établissant, par un argument de classe monotone, un théorème de Fubini portant sur les intégrales $\int_{-K}^{+K} da \int_o^t dM_s\, \phi(s,\omega,a)$, où ϕ est un processus borné $\mathcal{P}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable, $\mathcal{P}$ désignant la tribu prévisible) ; il vient :

(18) $$f(M_t) = f(M_o) + \int_{o+}^{t} f'(M_s)dM_s + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} L_t^a\, f''(a)da,$$

ce qui permet d'identifier la partie martingale de $f(M_t)$. La formule d'Ito est ainsi démontrée, compte tenu de (13). Il reste une remarque à faire : si f est convexe (non nécessairement de classe C^2) ou, plus généralement, différence de deux fonctions convexes, sa dérivée seconde au sens des distributions est une mesure μ , et l'on obtient, au lieu de (18), en utilisant la même méthode :

(19) $$f(M_t) = f(M_o) + \int_{o+}^{t} f'(M_s)dM_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^a\, \mu(da).$$

5 - TEMPS LOCAL ET DENSITÉ DU TEMPS D'OCCUPATION DE L'ENSEMBLE DES ZÉROS

Comparons (18) et la formule d'Ito et identifions les processus à variation finie ; il vient, après avoir posé $f''=\phi$

$$\int_o^t \phi(M_s)\, d<M,M>_s = \int_{\mathbb{R}} \phi(a)\, L_t^a\, da$$

Cette relation est valable pour toute fonction ϕ continue, mais cela se prolonge sans difficulté à toute fonction mesurable positive. La formule (20) peut alors s'interpréter de la façon suivante : si l'on appelle $V_t(\omega,da)$ la mesure image (quand ω et t sont fixés) de la mesure $d\langle M\, M\rangle_s(\omega)\ 1_{]0,t]}(s)$ par l'application $s \to M_s(\omega)$, V_t est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et admet la densité $a \to L_t^a(\omega)$. Appliquant alors le théorème de dérivation de Lebesgue, on obtient le résultat suivant.

(20) PROPOSITION

Il existe Ω_o avec $P(\Omega_o) = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega_o$ et pour tout $t \geq 0$

$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_o^t 1_{\{M_s \in [a,a+\varepsilon]\}} d\langle M,M\rangle_s$ existe pour presque tout a, et est égale à L_t^a

Si l'on veut obtenir un résultat pour tout a, et en particulier pouvoir dire quelque chose pour $a=0$, il faut se fatiguer un peu plus et montrer par exemple que $a \to L_t^a(\omega)$ est continue. Ce genre de théorème n'est pas très facile ; disons tout de suite qu'il est vrai dans le cas des martingales continues (voir [3] et l'exposé [6] du présent volume), et l'on peut énoncer

(22) $$L_t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_o^t 1_{\{M_s \in [0,\varepsilon]\}} d\langle M,M\rangle_s$$

6 - LES INÉGALITES DE BURKHOLDER-DAVIS-GUNDY

Rappelons que l'on appelle M^* la variable aléatoire $\sup_t |M_t|$. Les inégalités de B.D.G. indiquent que $\|M^*\|_p$ et $\|\langle M,M\rangle_\infty^{1/2}\|_p$ induisent des normes équivalentes sur l'espace des martingales.

(23) THÉORÈME (B.D.G.)

Il existe des constantes universelles c_p et C_p telles que l'on ait pour tout $0 < p < \infty$

$$c_p\, E[\langle M,M\rangle_\infty^{p/2}] \leq E[M^{*p}] \leq C_p\, E[\langle M,M\rangle_\infty^{p/2}]$$

quelque soit la martingale continue M.

Démonstration :

1) Occupons nous d'abord de l'inégalité de droite ; il existe une démonstration de cette inégalité quand $p \geq 2$ (cf [2]) qui est une application simple de la formule d'Ito. Le théorème (10) permet alors, nous allons le voir, d'établir cette inégalité pour $0 < p < 2$.

Nous rappellerons tout d'abord une inégalité de couvexité, dûe à M. Pratelli concernant la projection duale prévisible d'un processus croissant (cf[4]).

(24) LEMME

Soit Φ une fonction concave croissante positive définie sur $\mathbb{R}_+$, (B_t) un processus croissant intégrable, (A_t) la projection duale prévisible de (B_t). On a l'inégalité $E[\Phi(B_\infty)] \leq 2E[\Phi(A_\infty)]$

Nous renvoyons à Pratelli pour la démonstration (qui est très simple) de ce lemme (Pratelli suppose (B_t) adapté mais sa démonstration n'en fait pas usage). Appliquons alors (24) à $(B_t) = \frac{1}{2}(\alpha_t+\beta_t)$ et à $\Phi(x) = x^{p/2}$ $(p \leq 2)$, (on se limite, ce qui suffit largement, au cas où (M_t) est bornée dans L^2) ; il vient, compte tenu de ce que

$$M^* = I_o \vee |J_o| \leq 2\sqrt{(I_o-M_\infty)^2 + (J_o-M_\infty)^2}$$

$$E\left[M^{*\,p}\right] \leq 2^p\, E\left[\{(I_o-M_\infty)^2+(J_o-M_\infty)^2\}^{p/2}\right] = 2^{3p/2}\, E\left[\Phi(B_\infty)\right] \leq 2^{\frac{3p+2}{2}}\, E\left[<M,M>_\infty^{\,p/2}\right]$$

ce qui montre la première moitié de l'inégalité de B.D.G.

2) De l'inégalité $(a+b)^p \leq C_p(a^p+b^p)$ (prendre $C_p=1$ si $p \leq 1$) valable si a et b sont positifs, on tire l'inégalité

$$E\left[<M,M>_\infty^{\,p/2}\right] \leq C_p\, E\left[|M_\infty|^p + 2^{p/2}\left|\int_o^\infty M_s\, dM_s\right|^{p/2}\right]$$

$$\leq C_p(E[M^{*\,p}]) + C'_p\left(E\left[\left(\int_o^\infty M_s^2\, d<M\,M>_s\right)^{p/4}\right]\right)$$

(on a utilisé la première moitié des inégalités de B.D.G. pour écrire la dernière inégalité). Cette dernière quantité est encore majorée par

$$C_p\left[E\left[M^{*p}\right] + C'_p\, E\left[(M^*)^{p/2}\,(\langle M,M\rangle_\infty^{p/4})\right]\right]$$

Appliquons l'inégalité de Schwarz ; il vient :

$$E\left[\langle M,M\rangle_\infty^{p/2}\right] \le C_p\left[E\left[M^{*p}\right] + C'_p\left(E\left[M^{*p}\right]\right)^{1/2}\left(E\left[\langle M,M\rangle_\infty^{p/2}\right]\right)^{1/2}\right]$$

Posons alors $X=E\left[\langle M,M\rangle_\infty^{p/2}\right]$, $A=E\left[M^{*p}\right]$. L'inégalité précédente s'écrit $X-C_pC'_p\sqrt{X}\,\sqrt{A} - C_p A \le 0$, d'où l'on tire aisément $X \le C''_p A$, ce qui termine la démonstration.

RÉFÉRENCES

(1) J. AZEMA : Représentation multiplicative d'une surmartingale bornée (à paraître, 1978).

(2) R. GETOOR & M. SHARPE : Conformal martingales. Invent. Math. 16, 271-308 (1972).

(3) H.P. McKEAN : Stochastic integrals. Academic Press (1969)

(4) M. PRATELLI : Sur certains espaces de martingales localement de carré intégrable. Séminaire Proba. X, Lect. Notes in Math. n° 511, Springer (1976).

(5) C. STRICKER et M. YOR : Calcul stochastique dépendant d'un paramètre. (à paraître, 1978).

(6) M. YOR : Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales (dans ce volume).