Z. MEBKHOUT

Sur le théorème de semi-continuité de l'irrégularité des équations différentielles

Astérisque, tome 130 (1985), p. 365-419

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__130__365_0>

SUR LE THÉORÈME DE SEMI-CONTINUITÉ DE L'IRRÉGULARITÉ DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Z. MEBKHOUT (*)

SOMMAIRE

(*) UER DE MATHEMATIQUES
Laboratoire Associé LA 212
U.E.R. de Mathématiques
Université de Paris VII
2, Place Jussieu
FRANCE 75 251 - PARIS

0 - INTRODUCTION.

Dans cet exposé nous commençons l'étude de l'analogie remarquéepar P. Deligne [B] [D1] entre le conducteur de Swan des faisceaux ℓ-adiques sur une courbe sur un corps de caractéristique positive et l'irrégularité au sens de B. Malgrange [M1] et Gérard-Levelt [G.L] des systèmes différentiels d'une variable complexe.

Par exemple à la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič [G] [R] exprimant la caractéristique d'Euler-Poincaré globale d'un faisceau ℓ-adique sur une courbe propre correspond une formule analogue exprimant la caractéristique d'Euler-Poincaré des solutions holomorphes globales d'un système holonome sur une surface de Riemann compacte (cf. [D2] et 2.3).

Si $f : X \to S$ est un morphisme séparé lisse de dimension relative 1 entre schémas de type fini sur un corps de caractéristique $p > 0$, Y un sous schéma de X fermé fini et plat sur S et $\mathcal{F}$ un faisceau ℓ-adique constructible nul sur Y et localement constant de rang r sur $U = X \setminus Y$ le théorème de semi-continuité de Deligne [L] affirme que la fonction sur S $s \to \Phi(s)$ attachée à cette situation (cf. le §.1) est constructible semi-continue inférieurement et que si elle est localement constante le triplet $(X,f,\mathcal{F})$ est localement universellement acyclique.

Si on part d'un morphisme $f : X \to S$ lisse de dimension relative 1 entre variétés complexes lisses, d'un diviseur Y de X fini et plat sur S et d'un $\mathcal{D}_X$-module holonome $\mathcal{M}$ égal à son localisé le long de Y et dont la restriction à $U = X \setminus Y$ est un fibré vectoriel de rang r on peut attacherà cette situation une fonction sur S : $s \to \Phi(s)$ construite à partir de l'irrégularité des restrictions de $\mathcal{M}$ aux fibres de f et on peut se demander si l'analogue du théorème de Deligne à lieu. C'est ce que proposent Katz et Laumon dans [K.L] comme conjectures (cf. [K.L], 7.3.2). D'un autre coté, si $\mathcal{M}$ est supposé régulier le long de Y (cf. [Me 1]) on détermine dans [L.M] la variété caractéristique $Ch(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ en utilisant la théorie des cycles evanescents et des variétés polaires. On peut aussi se demander comment étendre ce résultat dans le cas irrégulier.

Le point clef de la démonstration du théorème de Deligne consiste à démontrer que si S est un trait le saut de la fonction entre le point générique et le point spécial est égale à la dimension de l'unique espace de cycles évanescents $R^1\Phi_f(\mathcal{F})$ non nul (cf. [L]). Si maintenant S est un petit disque complexe et que Y est lisse l'exemple du système attaché à l'exponentielle $e^{\frac{x}{y^m}}$ (cf. l'exemple 5.4.1) laissait espérer que le saut de l'irrégularité est égale à la dimension de l'unique espace de cycles évanescents non nul $R^1\Phi_f(\mathcal{F})$ étant le complexe des solutions holomorphes de $\mathcal{M}$ (cf. [K.L], conjecture 7.3.2 (ii)). Les exemples 5.4.2 et 5.4.3

montrent qu'il n'est rien en général. La différence entre ces deux nombres est égal à la somme des dimensions des $\mathcal{E}xt^2_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}[*X_0], \mathcal{O}_X)_{,y_0}$ X_0 étant la fibre spéciale et y_0 parcourant les points de Y au dessus du point spécial (cf. le §5). Par conséquent le schéma de la démonstration de Deligne ne s'applique pas sur cette forme là. Pour le rétablir une théorie des cycles évanescents pour les $\mathcal{D}_X$-modules holonomes en général irréguliers est nécéssaire (1). Cette théorie n'existe pas pour l'instant. On a vérifié, en attendant, la conjecture 7.3.2.1. de [K.L] dans un certain nombre de cas, en particulier dans le cas d'un système holonome attaché à un fibré de rang 1 (cf. Proposition 3.2). Cependant une théorie des cycles évanescents semble vraiment nécessaire pour parvenir aux démonstrations les plus naturelles : semi-continuité de la fonction Φ ; changement de base,... . Ceci est la conclusion principale de ce travail. Ils nous reste à remercier Gérard Laumon d'avoir attiré notre attention sur le problème, K. Saïto de nous avoir aidé à construire l'exemple 5.4.2, J.L. Brylinski, D.T. Lê et D. Barlet des discussions que nous avons eues avec eux pendant la conférence de Luminy.

(1) Nous avons reçu, après avoir rédigé cet exposé, une lettre de B. Malgrange qui montre comment éviter la théorie générale des cycles evanescents dans cette situation géométrique simple pour donner une réponse satisfaisante à la question étudiée ici. C'est l'objet du paragraphe 7 qui précise donc l'analogie entre les faisceaux (pervers) ℓ-adiques et les $\mathcal{D}_X$-modules holonomes.

§.1 - CONDUCTEUR DE SWAN.

1.1 - La Formule de Grothenieck-Ogg-Šafarevič [G] [R].

Soit X une courbe connexe propre et lisse sur un corps k de caractéristique $p > 0$ et $\mathfrak{F}$ un faisceau ℓ-adique ($\ell \neq p$) constructible sur X dont la restriction à son ensemble de ramification Y est nulle. Si U est le complémentaire de Y et j l'inclusion canonique on a

$$\mathfrak{F} = j_! j^{-1} \mathfrak{F} .$$

Pour tout $y \in Y$ on définit le conducteur de Swan $Sw_y(\mathfrak{F})$ de $\mathfrak{F}$ en y qui est un entier positif ou nul [R] [G] [S]. On dit que $\mathfrak{F}$ est modérement ramifié en y si $Sw_y(\mathfrak{F}) = 0$. La formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič s'écrit [G] [R]

$$\chi(X; \mathfrak{F}) \overset{\text{déf}}{:=} \sum_{i=0}^{2} \dim_{F_\ell} H^i(X; \mathfrak{F}) = r\, \chi(U) - \sum_{y \in Y} Sw_y(\mathfrak{F})$$

où r est le rang du système local $\mathfrak{F}|_U$.

1.2 - Le théorème de semi-continuité de Deligne [L].

Soient $f : X \to S$ un morphisme séparé lisse de dimension relative 1 entre schémas de type fini sur un corps de caractéristique $p > 0$, Y un sous schéma fermé X que l'on suppose fini et plat sur S et $\mathfrak{F}$ un faisceau constructible de $\mathbb{F}_\ell$-modules ($\ell \neq p$) lisse de rang r sur $U = X \setminus Y$ et nul sur Y. On attache à cette situation la fonction

$$\phi : S \to \mathbb{N} \text{ en posant } \phi(s) = \sum_{y \in Y_{\bar{s}}} (Sw_y(\mathfrak{F}_{X_{\bar{s}}}) + r)$$

où $\bar{s}$ est un point géométrique localisé en s et $X_{\bar{s}}$ et $Y_{\bar{s}}$ étant les fibres de $X \to S$ et de $Y \to S$ en $\bar{s}$. La fonction $\phi(s)$ ne dépend pas de $\bar{s}$.

Théorème 1.2.1 [L]. *Avec les notations et les hypothèses précédentes on a les résultats suivants :*

i) la fonction $s \to \phi(s)$ *est constructible semi-continue inférieurement.*

ii) Si la fonction $s \to \phi(s)$ *est localement constante le triplet* $(X,\mathcal{F},f)$ *est universellement localement acyclique.*

En particulier la partie (ii) du théorème précédent entraîne que la constante de la fonction ϕ sur S implique que les faisceaux $R^i f_* \mathcal{F}$ sont lisses sur S pour tout $i \geq 0$.

Si S est un trait strictement local de point fermé s et de point générique η on sait alors définir le complexe des cycles évanescents $\mathbb{R}\,\Phi_f(\mathcal{F})$ [D3]. On a le résultat plus précis suivant :

Théorème 1.2.2 [L]. *Sous les hypothèses précédentes on a la formule*

$$\phi(\eta) - \phi(s) = -\chi(\mathbb{R}\Phi_f(\mathcal{F})_{,o}) = \dim_{\mathbb{F}_\ell} R^1\Phi_f(\mathcal{F})_{,o}.$$

On a supposé, pour simplifier, dans le théorème 1.2.2 que Y a un seul point o en fibre spéciale.

§.2 - IRRÉGULARITÉ.

2.1 - Définition.

Soit $(X,\mathcal{O}_X)$ une surface de Riemann connexe, $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels holomorphes d'ordre fini sur X et $T^*X \xrightarrow{\pi} X$ le fibré cotangent de X. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module à gauche cohérent on note $\check{S}S(\mathcal{M})$ ou $Ch(\mathcal{M})$ sa variété caractéristique et on dit que $\mathcal{M}$ est holonome si $\dim Ch(\mathcal{M}) = \dim X$. Si $\mathcal{M}$ est un système holonome on note Y sur ensemble singulier c'est-à-dire la projection de $Ch(\mathcal{M})$ sur X en dehors de la section nulle de T^*X. La restriction de $\mathcal{M}$ à $U = X \setminus Y$ est donc un fibré vectoriel de rang r muni d'une connexion intégrable. Pour tout $y \in X$ on note $\mathcal{O}_y$ l'anneau des germes des fonctions holomorphes au voisinage de y, $\mathfrak{m}_y$ son Idéal maximal et $\hat{\mathcal{O}}_y = \varprojlim_k \mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^k$ son complété formel le long de y. Les anneaux $\mathcal{O}_y$ et $\hat{\mathcal{O}}_y$ sont des $\mathcal{D}_y$-modules à gauche. On a le théorème suivant :

Théorème 2.1.1 [M1].

i) Les espaces de cohomologie des complexes $\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_y}(\mathcal{M}_y, \mathcal{O}_y)$ $\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_y}(\mathcal{M}_y, \hat{\mathcal{O}}_y)$ *sont des espaces vectoriels complexes de dimension finie.*

ii) le nombre $\mathrm{Irr}_y(\mathcal{M}) \overset{\text{déf}}{:=} \chi(\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_y}(\mathcal{M}_y, \hat{\mathcal{O}}_y)) - \chi(\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_y}(\mathcal{M}_y, \mathcal{O}_y))$ *est positif ou nul.*

iii) $\mathrm{Irr}_y(\mathcal{M}) = 0$ *si et seulement si* $\mathcal{M}$ *est régulier en* y *au sens de Fuchs.*

<u>Définition 2.3.2</u>. *On appelle irrégularité de Malgrange en* y *de* $\mathcal{M}$ *le nombre* $\mathrm{Irr}_y(\mathcal{M})$ *défini par le théorème 2.1.1.*

2.2 - <u>Quelques rappels</u>.

2.2.1 - Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ une variété analytique complexe de dimension n et Y sur un sous-espace analytique fermé défini par un Idéal $\mathcal{J}_Y$. Pour tout complexe $\mathcal{M}$ de $\mathcal{D}_X$-modules à gauche on pose

$$\mathcal{M}[*Y] \overset{\text{déf}}{:=} \mathbb{R}\,\varinjlim_k \mathrm{hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_Y^k, \mathcal{M})$$

$$\mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}) \overset{\text{déf}}{:=} \mathbb{R}\,\varinjlim_k \mathrm{hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^k, \mathcal{M}).$$

On a un triangle dans $D(\mathcal{D}_X)$ (catégorie dérivée de la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules à gauche) :

$$0 \to \mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}[*Y] \overset{+1}{\to} \mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}) \to 0.$$

De plus si $\mathcal{M}$ est borné et à cohomologie holonome les complexes précédents sont bornés à cohomologie holonome [K3].

2.2.2 - Notons $\mathcal{O}_{X\hat{|}Y}$ le complété formel de $\mathcal{O}_X$ le long de Y qui est un $\mathcal{D}_X$-module à gauche. Pour tout $\mathcal{D}_X$-module à gauche cohérent $\mathcal{M}$ on a un isomorphe canonique :

$$\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}), \mathcal{O}_X) \simeq \mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{X\hat{|}Y}).$$

En effet il suffit de remarquer que l'on a les isomorphismes canoniques

$$\mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}) \simeq \mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X) \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} \mathcal{M}$$

$$\mathcal{O}_{X\hat{|}Y} \simeq \mathbb{R}\, hom_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X)$$

et d'appliquer la formule d'adjonction

$$\mathbb{R}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X) \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} \mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \simeq \mathbb{R}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathbb{R}\, hom_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X)).$$

2.2.3 - Supposons que X est une surface de Riemann et que Y est un point y singulier d'un $\mathcal{D}_X$-module holonome $\mathcal{M}$. De la formule du 2.2.2 on déduit que

$$Irr_y(\mathcal{M}) = Irr_y(\mathcal{M}[*y]).$$

D'autre part

$$\mathbb{R}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}[*y], \hat{\mathcal{O}}_y) \simeq \mathbb{R}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathbb{R}\Gamma_{[y]}(\mathcal{M}[*y]), \mathcal{O}_X) = 0.$$

Donc on a :

$$Irr_y(\mathcal{M}[*y]) = -\chi(\mathbb{R}\, hom_{\mathcal{D}_y}(\mathcal{M}[*y], \mathcal{O}_y)).$$

Définition 2.2.4. *On appelle connexion méromorphe un $\mathcal{D}_X$ module à gauche $\mathcal{M}$ égal à son localisé $\mathcal{M}[*Y]$ le long de son ensemble singulier* Y.

Par conséquent l'irrégularité en un point singulier y d'une connexion méromorphe $\mathcal{M}$ est égale à moins l'indice analytique $\chi(\mathbb{R}\, hom_{\mathcal{D}_y}(\mathcal{M}_y, \mathcal{O}_y))$.

Remarque 2.2.5. Dans [G.L] Gérard et Levelt définissent l'irrégularité ρ_1 d'une connexion méromorphe et démontrent qu'elle est égale à l'irrégularité de Malgrange.

2.3 - Analogue de la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič.

Supposons maintenant que X soit une surface de Riemann connexe et compacte et soit $\mathcal{M}$ un système holonome sur X. Le complexe des solutions holomorphes $\mathcal{F} = \mathbb{R}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ est constructible. De plus $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) = 0$ si $i \geq 2$ et et $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ est concentré sur l'ensemble singulier Y de $\mathcal{M}$. Par conséquent les espaces des solutions globales $\mathbb{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(X;\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ sont nuls si $i \geq 3$.

Posons

$$\chi(X;\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \overset{\text{déf}}{:=} \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(X;\mathcal{M}, \mathcal{O}_X).$$

Pour tout $y \in Y$ notons D_y un petit voisinage de y dans X homeomorphe à un petit disque du plan complexe et $\bar{D} = \bigcup_{y \in Y} \bar{D}_y$ la réunion des adhérences $\bar{D}_y$ de D_y. On a un triangle

$$0 \to \mathbb{R}\Gamma_{\bar{D}}(X;\mathcal{F}) \to \mathbb{R}\Gamma(X;\mathcal{F}) \to \mathbb{R}\Gamma(X \setminus \bar{D};\mathcal{F}) \to 0$$

et $\chi(X;\mathcal{F}) = \chi(\mathbb{R}\Gamma_{\bar{D}}(X;\mathcal{F})) + \chi(\mathbb{R}\Gamma(X\setminus\bar{D};\mathcal{F}))$.

Mais $\chi(\mathbb{R}\Gamma(X \setminus \bar{D};\mathcal{F})) = r.\chi(U)$.

D'autre part on peut supposer que $\bar{D}_y \cap \bar{D}_{y'} = \{\emptyset\}$ si $y \neq y'$ et

$$\chi(\mathbb{R}\Gamma_{\bar{D}}(X;\mathcal{F})) = \sum_{y \in Y} \chi(\mathbb{R}\Gamma_{\bar{D}_y}(X;\mathcal{F})).$$

Calculons $\chi(\mathbb{R}\Gamma_{\bar{D}_y}(X;\mathcal{F})$. On a le triangle

$$0 \to \mathbb{R}\Gamma_{\partial D_y}(X;\mathcal{F}) \to \mathbb{R}\Gamma_{\bar{D}_y}(X;\mathcal{F}) \to \mathbb{R}\Gamma(D_y;\mathcal{F}) \to 0.$$

Mais $\mathcal{F}$ est constructible et $\chi(\mathbb{R}\Gamma(D_y;\mathcal{F}))$ est égal à $\chi(\mathbb{R}\, hom_{\mathcal{D}_y}(\mathcal{M}_y, \mathcal{O}_y))$ si D_y est suffisamment petit.

D'autre part

$$\mathbb{R}\Gamma_{\partial D_y}(X;\mathcal{F}) = \mathbb{R}\Gamma(X;\mathbb{R}\Gamma_{\partial D_y}(\mathcal{F})) = \mathbb{R}\Gamma(X;H^1_{\partial D_y}(hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))[-1] = 0$$

parce que $H^1_{\partial D_y}(hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))$ est localement constant sur ∂D_y et $\chi(\partial D_y) = 0$.

En conclusion on trouve

$$\chi(X;\mathcal{M},\mathcal{O}_X) = r\,\chi(U) + \sum_{y\in Y} \chi(\mathbb{R}\,hom_{\mathcal{D}_y}(\mathcal{M}_y,\mathcal{O}_y)).$$

Supposons maintenant que $\mathcal{M}$ soit une connexion méromorphe, donc que

$$Irr_y(\mathcal{M}) = -\ \chi(\mathbb{R}\,hom_{\mathcal{D}_y}(\mathcal{M}_y,\mathcal{O}_y)).$$

La formule précédente prend la forme

$$\chi(X;\mathcal{M},\mathcal{O}_X) = r\,\chi(U) - \sum_{y\in Y} Irr_y(\mathcal{M})$$

qui est donc l'analogue pour les connexions méromorphes de la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič. Cette formule à été aussi démontréepar Deligne [D.2; 6.2.0.1].

2.4 - Constructibilité.

Soient $f : X \to S$ un morphisme lisse de dimension relative un entre variétés analytiques complexes, Y un diviseur de X fini et plat sur S et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome dont la restriction à $U = X \setminus Y$ est un fibré vectoriel de rang r et égal à son localisé $\mathcal{M}[*Y]$ le long de Y. Le complexe $\mathcal{F} = \mathbb{R}\,hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X)$ des solutions holomorphes de $\mathcal{M}$ est constructible [K2]. Pour s un point de S notons X_s, Y_s les fibres des morphismes $X \to S$, $Y \to S$, $\mathcal{F}_s$ la restriction de $\mathcal{F}$ à X_s et $\mathcal{M}_s \overset{\text{déf}}{:=} \mathcal{O}_{X_s} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ le complexe induit sur X_s par $\mathcal{M}$ qui est donc à cohomologie $\mathcal{D}_{X_s}$-holonome [cf.K3]. Rappelons la proposition suivante [cf. Me 2] :

Proposition 2.4.1. *Le morphisme* $(\mathcal{M}[*Y])_s \to \mathcal{M}_s[*Y_s]$ *est un isomorphisme.*

En vertu de la proposition 2.4.1. puisque $\mathcal{M} = \mathcal{M}[*Y]$ on a $\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_s[*Y_s]$ et $\mathcal{M}_s$ est un système holonome à une variable dont Y_s est l'ensemble singulier. C'est donc une connexion méromorphe et $Irr_y(\mathcal{M}_s) = -\ \chi(\mathbb{R}\,hom_{\mathcal{D}_{X_s}}(\mathcal{M}_s,\mathcal{O}_{X_s})_{,y}$ pour $y \in Y_s$.

Posons :

$$\phi(s) \overset{\text{déf}}{:=} \sum_{y\in Y_s} (\mathrm{Irr}_y(\mathcal{M}_s)+r) \quad \text{et}$$

$$\psi(s) \overset{\text{déf}}{:=} \sum_{y\in Y_s} (\mathrm{Irr}_y(\mathcal{M}_s)).$$

Proposition 2.4.2. *Les fonctions* $\phi(s)$ *et* $\psi(s)$ *sont constructibles sur* S.

Preuve : Soit Z le fermé analytique de Y contenant le lieu de ramification de $f_{|Y}$ et tel que

$$\mathrm{Ch}(\mathcal{M}) \subset T^*_X X \cup \overline{T^*_W X} \bigcup_i \overline{T^*_{Z_i} X}$$

ou $W = Y \setminus Z$ et $Z_i \subset Z$. La restriction de $\mathcal{F}$ à W est à cohomologie localement constante. D'autre part pour tout $s \in W$ la fibre X_s est non caractéristique pour $\mathcal{M}$ c'est-à-dire $\mathrm{Ch}(\mathcal{M}) \cap T^*_{X_s} X \subset T^*_X X$.

Donc en vertu du théorème de Cauchy-Kavaleskaïa [cf.[Kl]] le morphisme

$$\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{|X_s} \to \mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_{X_s}}(\mathcal{M}_s, \mathcal{O}_{X_s})$$

est un isomorphisme. Donc pour $s \in S^o = f(W)$

$$\phi(s) = \sum_{y\in Y_s} (-\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{,y} + r)$$

$$\psi(s) = \sum_{y\in Y_s} (-\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{,y}).$$

Comme $f_{|W}$ est étale, les fonctions $\phi(s)$ et $\psi(s)$ sont localement constantes sur $S^o = f(W)$. Le complémentaire S^o dans S est un fermé analytique. Soit S_1 son ouvert des points lisses. En faisant le changement de base $S_1 \to S$ on trouve une situation

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[r, hook] \arrow[dr] & X_1 \arrow[d] \\ & S_1 \end{tikzcd} \qquad \mathcal{M}_1 = \mathcal{O}_{X_s} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$$

analogue à la précédente. D'autre part pour $s \in S_1$

$$\phi(s) = \sum_{y \in Y_{1s}} (-\chi\, (\mathbb{R}\, hom_{\mathcal{D}_{X_1}} (\mathcal{M}_1, \mathcal{O}_{X_1})_{,y} + r)$$

$$\psi(s) = \sum_{y \in Y_{1s}} -\chi\, (\mathbb{R}\, hom_{\mathcal{D}_{X_1}} (\mathcal{M}_1, \mathcal{O}_{X_1})_{,y}).$$

Comme précédemment, il existe un ouvert S_1^o de S_1 de complémentaire un fermé analytique an dessus duquel les fonctions $\phi(s)$ et $\psi(s)$ sont localement constantes. De proche en proche on établit ainsi la constructibilité des fonctions $\phi(s)$ et $\psi(s)$.

2.5 - Semi-continuité.

Reprenons les données précédentes : $f : X \to S$, Y, $\mathcal{M} = \mathcal{M}[*Y]$ ... . La fonction $\phi(s)$ est constructible. Donc pour montrer sa semi-continuité il suffit de montrer que ses restrictions aux courbes de S sont semi-continues inférieurement. Dans ce cas on invoque la démonstration de Deligne [D1] qui utilise l'irrégularité de Gérard-Levelt. Cependant nous allons voir, dans un certain nombre de cas particuliers qui nous permettrons de construire des exemples, comment déduire la semi-continuité inférieure d'une propriété de l'irrégularité qui se trouve dans [M1].

2.5.1 - Soit un $\mathcal{D}_D$-module holonome $\mathcal{M}_D$ sur un petit disque D voisinage de l'origine dans le plan complexe dont l'ensemble singulier est réduit à l'origine et qui est une connexion méromorphe. Notant K le corps des fonctions méromorphes en o et $\mathcal{M}_{D,o}$ la fibre de $\mathcal{M}_D$ à l'origine qui est donc un K-espace vectoriel de dimension finie munid'une connexion. Rappelons que l'on a un isomorphisme canonique [Me 1]

$$DR(\mathcal{M}_D) \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{R}\, hom_{\mathcal{D}_D}(\mathcal{O}_D, \mathcal{M}_D) \tilde{\to} \mathbb{R}\, hom_{\mathbb{C}_D}(\mathbb{R}\, hom_{\mathcal{D}_D}(\mathcal{M}_D, \mathcal{O}_D), \mathbb{C}_D).$$

$$\text{Donc } Irr_o(\mathcal{M}_D) = - \ (\mathbb{R}\, hom_{\mathcal{D}_D}(\mathcal{M}_D, \mathcal{O}_D)_{,o}) = -\chi(DR(\mathcal{M}_D)_{,o}).$$

En choisissant une coordonnée x sur D et un isomorphisme

$$\mathcal{M}_{D,o} \simeq K^r$$

$DR(\mathcal{M}_D)_{,0}$ se représente par le complexe

$$0 \to K^r \xrightarrow{P} K^r \to 0$$

où la différentielle P s'identifie à l'opérateur

$$g \to P(g) = \frac{d}{dx} g + \frac{1}{x} Mg$$

où $M \in End(r,K)$. Soit $k \geq 0$ le pôle de M qui s'écrit donc

$$M = \frac{1}{x^k} M_{-k} + \frac{1}{x^{k-1}} M_{-k+1} + \ldots \text{ où } M_i \in End(r,\mathbb{C}),\ M_{-k} \neq 0.$$

Proposition 2.5.1.1. [M 1]. *On a* $Irr_0(\mathcal{M}_D) \leq kr$ *et* $Irr_0(\mathcal{M}_D) = kr$ *si et seulement si* $\det(M_{-k}) \neq 0$.

La démonstration est algébrique et consiste à passer au formalisé de $\mathcal{M}_{D,0}$. Nous allons la reprendre pour la commodité du lecteur.

L'irrégularité $Irr_0(\mathcal{M}_D) = -\chi(DR(\mathcal{M}_D)_{,0})$ est donc égal à l'indice de l'opérateur $P : K^r \to K^r$ que nous noterons $\chi(P;K^r)$. L'opérateur P opère sur $\hat{K}^r$ où $\hat{K}$ est le corps des fractions de $\hat{\mathcal{O}}_0 = \hat{\mathcal{O}}$. On interprête $Irr_0(\mathcal{M}_D)$ comme l'irrégularité de l'opérateur $P : \hat{K}^r \to \hat{K}^r$ qu'on commence par définir. Rappelons que l'on appelle réseau dans $\hat{K}^r$ un sous $\hat{\mathcal{O}}$-module E tel que $\hat{K} \otimes_{\hat{\mathcal{O}}} E \simeq \hat{K}^r$. Un réseau est automatique libre sur $\hat{\mathcal{O}}$ de rang r. Si l'on a deux réseaux E et E_1 tels que $E \subset E_1$ il existe un entier m tel que $x^m E_1 \subset E$. On en déduit que $\dim_{\mathbb{C}}(E_1 / E)$ est finie.

Proposition 2.5.1.2. *Soient* E *et* E_1 *deux réseaux de* K^r *vérifiant* $E \subset E_1$ *et* $\hat{P}E \subset E_1$ *pour un opérateur* $\hat{P}$ *formel de* $\hat{K}^r$. *Alors l'opérateur* $\hat{P} : E \to E_1$ *est à indice. De plus pour tout couple* (E,E_1) *de réseaux vérifiant les hypothèses précédentes le nombre* $\chi(\hat{P};E,E_1) + \dim_{\mathbb{C}}(E_1/E)$ *est indépendant du couple* (E,E_1) . *En outre il existe un tel couple.*

Le nombre $Irr(\hat{P};K^r) \overset{déf}{:=} \chi(\hat{P};E,E_1) + \dim_{\mathbb{C}} E_1/E$ défini par la proposition 2.5.1.2 est par définition l'irrégularité de l'opérateur formel $\hat{P}$. La démonstration de la proposition 2.5.1.2 repose sur le théorème 2.5.1.3 ci-dessous [cf. M. 1].

Théorème 2.5.1.3. ([D.2] ;[B]). *Soit* P *un opérateur* $R^r \to R^r$ *de la forme* $\frac{d}{dx}+M$ *où* R *est égal* K *ou à* $\hat{K}$ *et* $M \in End(r,R)$. *Il existe une matrice* $A \in GL(r,R)$ *telle que la* *transformation* $g \to Ag$ *transforme l'opérateur* P *en l'opérateur* $g \to \frac{d}{dx}g + Ng$ *où* $N \in \mathrm{End}(r,R)$ *est de la forme :*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \lambda_0, & \cdots & \cdots & \cdots & ,\lambda_{r-1} \end{bmatrix} .$$

Si maintenant l'opérateur $P : R^r \to R^r$ est la forme $g \to \frac{d}{dx} g + Ng$ où $N \in \mathrm{End}(r,R)$ a la forme du théorème 2.5.1.3. on vérifie directement que

$$\mathrm{Irr}(P,R^r) = \operatorname{Sup}_i(0,-v(\lambda_i)-1).$$

où v est la valuation naturelle de R.

Donc si l'on part d'un opérateur analytique $P : K^r \to K^r$ on a $\chi(P,K^r) = \mathrm{Irr}(P,\hat{K}^r)$. Pour montrer la proposition 2.5.1.1. il suffit donc de se restreindre au cas formel. Soit donc $\hat{P} : \hat{K}^r \to \hat{K}^r$ un opérateur de la forme $g \to \frac{d}{dx} g + \frac{M}{x} g$ où $M \in \mathrm{End}(r,\hat{K})$. Ecrivons $M = \frac{M_{-k}}{x^k} + \ldots$ où $M_i \in \mathrm{End}(r,\mathbb{C})$ et $M_{-k} \neq 0$.

L'irrégularité de $\hat{P}$ est égale à l'irrégularité de $x\hat{P}$. Prenons $E = \hat{\theta}^r$ et $E_1 = x^{-k}\hat{\theta}^r$. Donc

$$\mathrm{Irr}(\hat{P},K^r) = \chi(x\hat{P};E,E_1) + kr = \chi(x^{k+1}\hat{P};\hat{\theta}^r,\hat{\theta}^r) + kr.$$

La proposition 2.5.1.1. est équivalente à l'assertion suivante : $\chi(x^{k+1}\hat{P};\hat{\theta}^r,\hat{\theta}^r)$ est négatif ou nul ; et il est nul si et seulement si M_{-k} est inversible. Supposons d'abord M_{-k} inversible. Pour tout monome Ax^q $A \in \mathbb{C}^r$

$$x^{k+1}\hat{P}(Ax^q) = M_{-k}Ax^q + (\text{termes d'ordre} \geq q+1).$$

De proche en proche on voit que $x^{k+1}\hat{P} : \hat{\theta} \to \hat{\theta}$ est bijectif. Donc d'indice nul. Pour tout $q \geq 0$ $\chi(x^{k+1}\hat{P};\hat{\theta}^r,\hat{\theta}^r) = \chi(x^{k+1}\hat{P};(\hat{m}^q)^r,(\hat{m}^q)^r)$ où $\hat{m}$ est l'idéal maximal de $\hat{\theta}$

Mais $x^{k+1}\hat{P}$: $(\hat{\mathcal{M}}^q)^r \to (\hat{\mathcal{M}}^q)^r$ est injective pour q assez grand, puisque $\ker(x^{k+1}\hat{P}, \hat{\mathcal{O}}^r)$ est de dimension finie [cf. M1] sur $\mathbb{C}$. Donc l'indice en question est ≤ 0. Il est nul si et seulement si $x^{k+1}\hat{P}$: $(\hat{\mathcal{M}}^q)^r \to (\hat{\mathcal{M}}^q)^r$ est surjectif. Par passage au quotient l'application $x^{k+1}\hat{P}$: $(\hat{\mathcal{M}}^q/\hat{\mathcal{M}}^{q+1})^r \to (\hat{\mathcal{M}}^q/\hat{\mathcal{M}}^{q+1})^r$ sera aussi surjective ; or dans la base évidente la matrice de cette application est M_{-k}. Donc M_{-k} devient surjective et donc inversible. D'où la proposition 2.5.1.1.

2.5.2. Revenons à la situation initiale et supposons que le système $\mathcal{M}$ soit de la forme $\mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est un fibré vectoriel sur X de rang r. Soient s_0 un point de S et y_0 un point de Y_{s_0}. On peut trouver un voisinage de s_0 avec $x = (x_1,\ldots,x_{n-1})$ un système de coordonnés au dessus duquel on peut trouver un voisinage de y_0 V avec un système de coordonnés de la forme (x,t) tel que $f(x,t) = x$ et une trivialisation de $\mathcal{L}_V \simeq \mathcal{O}_V^r$. On a donc

$\mathcal{M}_V \simeq (\mathcal{O}_V[*Y])^r$ et la structure de $\mathcal{D}_V$-module est déterminée par

$$g \in (\mathcal{O}_V[*Y])^r \to \begin{cases} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(g) = \dfrac{\partial}{\partial x_i} g + A_i g \quad i=1,\ldots,n-1 \\[2ex] \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(g) = \dfrac{\partial}{\partial t} g + Bg \end{cases}$$

où A_i (i=1,...n-1) et B sont des matrices carré d'ordre r à coefficients dans $\mathcal{O}_V[*Y]$ satisfaisant aux conditions d'intégrabilité usuelles.

Si la matrice B est identiquement nulle les conditions d'intégrabilités montrent que les matrices A_i (i=1, n-1) sont holomorphes et le système $\mathcal{M}_V$ est régulier le long de Y. En particulier si on suppose que y_0 est le seul point de Y_{s_0} alors la fonction $s \to \phi(s)$ est semi-continue inférieure et elle est constante si et seulement si Y est lisse au voisinage de y_0 et au dessus de V on a $Ch(\mathcal{M}_V) = T_V^*V \cup T_Y^*V$.

Supposons que la matrice B n'est pas identiquement nulle. Supposons de plus que y_0 est le seul point de Y_{s_0} et que Y est irréductible au voisinage de V. Soit h une équation locale réduite de Y au voisinage de y_0 de la forme de Weierstrass $(x,t) = t^q + a_{q-1}(x)\, t^{q-1} + \ldots\, a(x)$ où $a_i(x)$ (i=q-1,...,0) sont des fonctions holomorphes au voisinage de s_0. Soit k le plus petit entier tel que $h^k B$ soit holomorphe. Ecrivons B sous la forme

$$B = \frac{B_{-k}}{h^k} + \frac{B_{-k+1}}{h^{k-1}} + \ldots$$

(avec $qk \geq 2$) et les matrices $B_{-k}, B_{-k+1}, \ldots$ holomorphes, B_{-k} étant non identiquement nulle. Considérons l'ensemble C défini par $\det B_{-k} = 0$ et $\Delta = f(C \cap Y)$. Faisons l'hypothèse que $\Delta \neq S$ ce qui implique en particulier que la fonction $\det B_{-k}$ n'est pas identiquement nulle. En vertu de la proposition 2.5.1.1.

$$\phi(\eta) = q((k-1)r+r) = qkr \text{ si } \eta \notin \Delta$$

et

$$\phi(s) \leqslant qkr \text{ si } s \in \Delta.$$

Ceci montre en particulier, sous les hypothèses précédentes, que la fonction $s \to \phi(s)$ est semi-continue inférieurement au voisinage de s_0 et qu'elle constante au voisinage de s_0 si et seulement si $s_0 \notin \Delta$ est donc $\det(B_{-k}(0,0)) \neq 0$. En particulier si $r = 1$ la fonction $\det B_{-k}$ ne s'annule pas identiquement sur Y et les hypothèses précédentes sont satisfaites. Dans ce cas là, la fonction $s \to \phi(s)$ est constante au voisinage de s_0 si et seulement si $B_{-k}(0,0) \neq 0$.

Remarque 2.5.2.1. Les hypothèses Y n'a seul point un fibre spéciale et est irréductible au voisinage de ce point ne sont pas restrictives pas entre l'hypothèse $\Delta \neq S$ est très restrictive. On ignore si par changement de base du fibré $\mathcal{V}_V$ on peut s'y ramener.

Remarque 2.5.2.2. Dans le cas où Y est lisse on peut aussi démontrer la semi-continuité de la fonction ϕ en utilisant la construction de D. Bertrand [B] d'un vecteur cyclique qui peut être rendu uniforme par rapport au paramètre x (cf. [B]).

§.3 - ÉNONCÉS.

Soient $f : X \to S$ un morphisme lisse de dimension relative 1 entre deux variétés analytiques complexes, Y un diviseur de X fini et plat sur S et $\mathcal{M}$ un système holonome égal à son localisé le long de Y tel que sa restriction à $U = X \setminus Y$ soit un fibré vectoriel de rang r. Supposons que $\dim S = 1$ et $Ch(\mathcal{M}) \subset T^*_X X \cup \overline{T^*_Y X} \cup T^*_{y_0} X$ pour un point $y_0 \in Y$, seul au dessus du point $s_0 = f(y_0)$: Notons $m_{T^*_{y_0} X}$ la multiplicité de $\mathcal{M}$ le long de $T^*_{y_0} X$ et $\mathcal{F} = \mathbb{R}\,hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ son complexe de solutions holomorphes. Supposons enfin que $(y_0, df(y_0)) \notin \overline{T^*_Y X}$.

Théorème 3.1. *Sur les hypothèses précédents on a les égalités*

$$m_{T^*_{y_0} X} = - \chi(\mathbb{R}\, \Phi_f(\mathcal{F})_{,y_0}) = \dim_{\mathbb{C}} R^1\Phi_f(\mathcal{F})_{,y_0}$$

$$= \phi(\eta) - \phi(s_0) + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E}xt^2_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}[*X_{s_0}], \mathcal{O}_X)_{,y_0}$$

où η *est un point voisin de* s_0.

Supposons que dim $S \geq 1$ mais que le système $\mathcal{M}$ soit la forme $\mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est un fibré de rang un.

Proposition 3.2. *Sous les hypothèses précédentes si la fonction* $s \to \phi(s)$ *est localement constante alors* $Ch(\mathcal{M}) = T^*_X X \cup \overline{T^*_Y X}$.

Remarque 3.3. La proposition 3.2 prouve la conjecture 7.3.2.1. de [K.L] dans le cas d'un fibré de rang un. Par contre nous verrons des exemples dans la situation du théorème 3.1 où $\mathcal{E}xt^2_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}[*X_{s_0}], \mathcal{O}_X)_{,y_0} \neq 0$ et donc la conjecture 7.3.2.2. (ii) de [K.L] n'est pas vraie sous cette forme. Il faudra la modifier (cf. l'introduction et le § 7).

§.4 - MICRO FONCTIONS ET CYCLES ÉVANESCENTS.

Afin de démontrer le théorème 3.1 nous allons rappeler les relations entre les solutions micro-fonctions d'un système holonome et les cycles évanescents de ses solutions holomorphes.

4.1. - Solutions micro-fonctions.

Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ une variété analytique complexe et $T^*X \xrightarrow{\pi} X$ son fibré cotangent sur T^*X on dispose du faisceau $\mathcal{E}_X$ (respectivement $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X$) des opérateurs micro-différentiels holomorphes d'ordre fini (respectivement holomorphes réels d'ordre infini) [cf. S.K.K]. Soit $Y \subset X$ une sous-variété lisse de X et $\Lambda = T^*_Y X$ son fibré conormal. Sur Λ on a le faisceau $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X}$ des micro-fonctions

$$\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X} \overset{\text{déf}}{:=} \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X \underset{\pi^{-1}\mathcal{D}_X}{\otimes} \pi^{-1} \mathcal{B}_{Y|X}$$

où $\mathcal{B}_{Y|X} \overset{\text{déf}}{=} H^{\operatorname{codim} Y}_{[Y]}(\mathcal{O}_X)$. Soit enfin un $\mathcal{E}_X$-module à gauche cohérent $\check{\mathcal{M}}$ de support contenu dans Λ. On a le théorème suivant :

Théorème 4.1.1 [K.4]. *Sous les hypothèses précédentes on a*

i) $\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{E}_X}(\check{\mathcal{M}}, \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X}) = \mathrm{hom}_{\mathcal{E}_X}(\check{\mathcal{M}}, \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X})$

ii) $\mathcal{F} = \mathrm{hom}_{\mathcal{E}_X}(\check{\mathcal{M}}, \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X})$ *est un système local de vectoriels complexes de rang égal à la multiplicité de* $\check{\mathcal{M}}$ *le long de* Λ.

iii) le $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X$*-module* $\check{\mathcal{M}}^{\mathbb{R}} \overset{\text{déf}}{:=} \mathcal{E}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{E}_X} \check{\mathcal{M}}$ *est isomorphe à* $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X} \otimes_{\mathbb{C}} \check{\mathcal{F}}$ *où*

$\mathcal{F}^{\vee} = \mathrm{hom}_{\mathbb{C}_\Lambda}(\mathcal{F}, \mathbb{C}_\Lambda)$.

Exemple 4.1.2. Si $Y = X$, $\Lambda = T^*_X X$ et $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{X|X} = \mathcal{O}_X$. Le théorème précédent se réduit au théorème d'existence et d'unicité de Cauchy.

4.2 - Cycle évanescents.

Soit $Y \subset X$ une hypersurface lisse définie par une équation $f : X \to \mathbb{C}$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome et $\mathcal{F} = \mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ son complexe de ses solutions holomorphes. On dispose alors du complexe $\mathbb{R}\Phi_f(\mathcal{F})$ des cycles évanescents de $\mathcal{F}$ [cf. D3] qui est porté par Y. D'autre part on peut considérer le complexe $\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{E}_X}(\check{\mathcal{M}}, \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X})$ noté aussi $\mu_Y(\mathcal{F})$ [codim Y] des solutions micro functions de $\check{\mathcal{M}} = \mathcal{E}_X \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \pi^{-1}\mathcal{M}$. L'équation f définit une section $Y \xrightarrow[\sigma]{} T^*_Y X$ de la projection $T^*_Y X \to Y$.

Proposition 4.2.1. *Soit les hypothèses précédentes on a l'isomorphisme*

$$\mathbb{R}\Phi_f(\mathcal{F}) \simeq \mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{E}_X}(\check{\mathcal{M}}, \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X})_{|\sigma(Y)}$$

On trouvera une démonstration de cette proposition dans [L.M]. Dans la proposition 4.2.1 il n'y a aucune relation entre Y et la variété caractéristique de $\mathcal{M}$ contrairement au théorème 4.1.1.

Un cas particulier de cette proposition se trouve déjà dans [M.R] ($X=\mathbb{C}$, $Y = \{0\}$ et $\mathcal{M}$ le système de Gauss-Manin (cf. [P]) d'une singularité isolée).

4.3. Revenons à la situation du théorème 3.1. Soient $f : X \to S$ (dim $S=1$) un morphisme lisse de dimension relative 1 entre variétés analytiques complexes, Y un diviseur de X fini et plat sur S et $\mathcal{M}$ un système holonome sur X tel que $Ch(\mathcal{M}) \subset T^*_X X \cup \overline{T^*_Y X} \cup T^*_{y_0} X$ pour un point $y_0 \in Y$. On suppose que y_0 est l'unique point de Y au dessus de $s_0 = f(y_0)$ et que $X_0 = f^{-1}(s_0)$ n'est pas tangent au y_0 à Y. Si $\mathcal{F} = \mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ en vertu de la proposition 4.2.1 on a

$$\mathbb{R}\Phi_f(\mathcal{F})_{,y_0} \simeq \mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{E}_X}(\check{\mathcal{M}}, \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{X_0|X})_{,y_0^*}$$

$$\simeq \mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X}(\check{\mathcal{M}}^{\mathbb{R}}, \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{X_0|X})_{,y_0^*}$$

$$\simeq \mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{X,y_0}}(\check{\mathcal{M}}^{\mathbb{R}}_{y_0^*}, \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{X_0|X;y_0^*})$$

où $y_0^* = (y_0, df(y_0))$.

Mais $y_0^* \notin T^*_X X \cup \overline{T^*_Y X}$ donc y_0^* est un point lisse de $Ch(\mathcal{M})$ et en vertu du théorème 4.1.1 on a

$$\check{\mathcal{M}}^{\mathbb{R}}_{y_0^*} \simeq (\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{X_0|X})^m_{,y_0^*}$$

où m est la multiplicité de $\mathcal{M}$ le long de $T^*_{y_0} X$.

Soit $\mathbb{R}\Phi_f(\mathcal{F})_{,y_0} \simeq \mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X}((\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{X_0|X})^m, \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{X_0|X})_{,y_0^*}$

$$\simeq \mathbb{R}\Phi_f(\mathbb{C}^m_{y_0}[-2])_{,y_0}$$

où $\mathbb{C}_{y_0}$ est le faisceau caractéristique de y_0.

On obtient finalement que

$R^i\Phi_f(\mathcal{F})_{,y_0} = 0$ si $i \neq 1$.

$R^1\Phi_f(\mathcal{F})_{,y_0} = \mathbb{C}^m$ et

$m = -\chi(\mathbb{R}\Phi_f(\mathcal{F})_{,y_0}) = \dim_{\mathbb{C}} R^1\Phi_f(\mathcal{F})_{,y_0}$

d'où la première partie de la formule du théorème 3.1.

§.5 - PROBLÈME DE CAUCHY KOWALESWSKAÏA.

5.1 - Soit Z une sous-variété fermée d'une variété analytique complexe X et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome. Le complexe induit

$$\mathcal{M}_Z \overset{\text{déf}}{:=} \mathcal{O}_Z \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} \mathcal{M}$$

est toujours un complexe de $\mathcal{D}_Z$-modules à cohomologie holonome [K3]. On dispose d'un morphisme

$$\mathbb{R}\, \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{|Z} \to \mathbb{R}\, \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_Z}(\mathcal{M}_Z, \mathcal{O}_Z)$$

et on dit que le problème de Cauchy est bien posé pour $\mathcal{M}$ le long de Z si le morphisme précédent est un isomorphisme. C'est le cas dans les deux situations suivantes

- Z est non-caractéristique pour $\mathcal{M}$ $(T^*_Z X \cap Ch(\mathcal{M}) \subset T^*_X X)$ [K1]

- $\mathcal{M}$ est régulier le long de Z [Me 2].

Notons $j : Z \to X$ l'inclusion canonique.

Lemme 5.1.1. *On a un isomorphisme canonique*

$$j_* \ \mathbb{R}\, \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_Z}^{\cdot}(\mathcal{M}_Z, \mathcal{O}_Z) \simeq \mathbb{R}\, \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathbb{R}\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M}), \mathcal{O}_X).$$

Preuve. On a l'isomorphisme [cf. Me 2]

$$\mathbb{R} j_* \ \mathbb{R}\, \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_Z}(\mathcal{M}_Z, \mathcal{O}_Z) \simeq \mathbb{R}\, \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X \leftarrow Z} \otimes_{\mathcal{D}_Z} \mathcal{M}_Z, \mathcal{O}_X) \quad [\mathrm{codim}_X Z] .$$

Mais $\mathcal{D}_{X \leftarrow Z} \otimes_{\mathcal{D}_Z} \mathcal{M}_Z \simeq \mathbb{R}\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M})$ $[\mathrm{codim}_X Z]$ [cf. Me 2]. D'où le lemme 5.1.1.

5.2 - Nous allons montrer la deuxième partie de la formule du théorème 3.1. Soient $f : X \to S$ (dim S=1) un morphisme lisse de variétés analytiques de dimension relative un, $Y \subset X$ un diviseur fini et plat sur S et $\mathcal{M}$ un système holonome tel que

$Ch(\mathcal{M}) \subset T^*_X X \cup \overline{T^*_Y X} \cup T^*_{y_0} X$ pour un point y_0 de Y et tel que $\mathcal{M} = \mathcal{M}[*Y]$. Notons $j : X \setminus Y = U \hookrightarrow X$ l'inclusion canonique et $\mathcal{F} = \mathbb{R}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$. On a le triangle

$$0 \to j_!\mathcal{F}_U \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{|Y} \to 0 \text{ et}$$

$$\chi(\mathbb{R}\Phi_f(\mathcal{F})_{,y_0}) = \chi(\mathbb{R}\Phi_f(\mathcal{F}_{|Y})_{,y_0}) + \chi(\mathbb{R}\Phi_f(j_!\mathcal{F}_U)_{,y_0}).$$

Mais si r est le rang du fibré $\mathcal{M}_U$ on a (cf. [L.M])

$$\chi(\mathbb{R}\Phi_f(j_!\mathcal{F}_U)_{,y_0}) = r\,\chi(\mathbb{R}\Phi_f(j_!\mathbb{C}_U)_{,y_0}) = -\,r\,\chi(\mathbb{R}\Phi_f(\mathbb{C}_Y)_{,y_0})$$

Soit

$$\chi(\mathbb{R}\Phi_f(\mathcal{F})_{,y_0}) = \chi(\mathbb{R}\Phi_f(\mathcal{F}_{|Y})_{,y_0}) - r\,\chi(\mathbb{R}\Phi_f(\mathbb{C}_Y)_{,y_0}) \;.$$

Supposons que y_0 soit l'unique point au dessus de $s_0 = f(y_0)$. On a alors

$$\chi(\mathbb{R}\Phi_f(\mathcal{F}_{|Y}),y_0) = \sum_{y \in Y_s} \chi(\mathcal{F}_y) - \chi(\mathcal{F}_{y_0})$$

$$\chi(\mathbb{R}\Phi_f(\mathbb{C}_Y),y_0) = \sum_{y \in Y_s} \chi(\mathbb{C}_y) - \chi(\mathbb{C}_{y_0})$$

pour un point s voisin distinct de s_0.

Mais pour $s \neq s_0$ Y_s est non caractéristique pour $\mathcal{M}$ et

$$\mathcal{F}_{X_s} \simeq \mathbb{R}\, hom_{\mathcal{D}_{X_s}}(\mathcal{M}_{X_s}, \mathcal{O}_{X_s})$$

$$\chi(\mathcal{F}_{,y}) = \chi(\mathbb{R}\, hom_{\mathcal{D}_{X_s}}(\mathcal{M}_{X_s}, \mathcal{O}_{X_s})_{,y}) = -Irr_y(\mathcal{M}_s).$$

D'autre part on a un triangle

$$0 \to \mathbb{R}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}[*X_0], \mathcal{O}_X) \to \mathbb{R}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \to \mathbb{R}\, hom_{\mathcal{D}_X}(\mathbb{R}_{[X_0]}(\mathcal{M}), \mathcal{O}_X) \to 0.$$

En vertu du lemme 5.1 on a

$$\mathrm{Irr}_{y_0}(\mathcal{M}_{s_0}) = -\chi(\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_{X_0}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{O}_{X_0}),y_0) = -\chi(\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathrm{R}\Gamma_{[X_0]}(\mathcal{M}),\mathcal{O}_X),y_0)$$

$$= -\chi(\mathcal{F}_{y_0}) + \chi(\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(M[*X_0], \mathcal{O}_X),y_0).$$

D'oũ

$$\mathbb{R}\Phi_f(\mathcal{F}),y_0 = -\sum_{y\in X_s} \mathrm{Irr}_y(\mathcal{M}_s) - r\sum_{y\in X_s}\chi(\mathbb{C}_y) + \mathrm{Irr}_{y_0}(\mathcal{M}_{s_0})$$

$$+ r - \chi(\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}[*X_0], \mathcal{O}_S),y_0)$$

$$= \phi(s_0) - \phi(s\ ) - \chi(\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}[*X_0], \mathcal{O}_X),y_0).$$

Lemme 5.2.1.

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}[*X_0], \mathcal{O}_X),y_0 = 0 \text{ si } i\neq 2.$$

En tenant compte du lemme 5.2.1 on obtient la deuxième partie de la formule du théorème 3.1 :

$$m = -\chi(\mathbb{R}\Phi_f(\mathcal{F}),y_0) = \phi(s) - \phi(s_0) + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E}xt^2_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}[X_{s_0}], \mathcal{O}_X),y_0.$$

Preuve du lemme 5.2.1. Notons $\mathcal{O}_{X\hat{|}X_0} = \varprojlim_k \mathcal{O}_X/\mathcal{J}^k_{X_0}$ le complété formel de $\mathcal{O}_X$ le long de X_0. On a une suite exacte de $\mathcal{D}_X$-module

$$0 \to \mathcal{O}_{X|X_{s_0}} \to \mathcal{O}_{X\hat{|}X_{s_0}} \to Q_{X_{s_0}} \to 0$$

où $Q_{X_{s_0}}$ est le quotient défini par cette suite exacte. On en déduit un triangle

$$(*) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{R}\ \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X)|X_{s_0} \to \mathbb{R}\ \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_{X}\hat{|}X_{s_0}) \to \mathbb{R}\ \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},Q_{X_{s_0}}) \to 0.$$

D'autre part on a des isomorphismes [Cf. le §2] :

$$\mathbb{R}\ \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathbb{R}\Gamma_{[X_{s_0}]}(\mathcal{M}),\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\ \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_{X}\hat{|}X_{s_0})$$

$$\mathbb{R}\ \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X)|X_{s_0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\ \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X|X_{s_0}) \quad .$$

En comparant le triangle $(*)$ au triangle :

$$(**) \quad \mathbb{R}\ \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}[*X_{s_0}],\mathcal{O}_X)|X_{s_0} \to \mathbb{R}\ \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X)|X_{s_0} \to \mathbb{R}\ \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathbb{R}\Gamma_{[X_{s_0}]}(\mathcal{M}),\mathcal{O}_X)$$

on trouve l'isomorphisme

$$\mathbb{R}\ \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}[*X_{s_0}],\mathcal{O}_X)|X_0 \simeq \mathbb{R}\ \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},Q_{X_{s_0}})\ [-1]\ .$$

Soit

$$\mathcal{E}xt^0_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}[*X_{s_0}],\mathcal{O}_X)_{,y_0} = \mathcal{E}xt^{-1}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},Q_{X_{s_0}})_{,y_0} = 0$$

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}[*X_{s_0}],\mathcal{O}_X)_{,y_0} = \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},Q_{X_{s_0}})_{,y_0}\ .$$

Le faisceau $\mathcal{E}xt^1_X(\mathcal{M}[*X_{s_0}],\mathcal{O}_X)|X_{s_0}$ est concentré sur $\{y_0\} = Y_0$ puisque

$$Ch(\mathcal{M}) \subset T^*_X X \cup \overline{T^*_Y X} \cup T^*_{Y^0} X$$

Donc

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}[*X_{s_0}],\mathcal{O}_X)_{,y_0} \simeq \Gamma_{y_0}(\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},Q_{X_{s_0}}))$$

$$= \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\Gamma_{y_0}(Q_{X_{s_0}}))$$

Mais le faisceau $Q_{X_{s_0}}$ n'a pas de section ponctuelle $(\Gamma_{y_0}(Q_{X_{s_0}}) = 0)$ d'où le lemme 5.2.1. parce que

$$\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}[*X_{s_0}],\mathcal{O}_X) = 0 \quad \text{si} \quad i \geq 3$$

puisque la dimension homologique de $\mathcal{D}_X$ est égale à $\dim X = 2$.

En vertu du théorème 3.1. le saut de la fonction ϕ est égal à la multiplicité de le long de $T^*_{y_0}X$ si et seulement si $\mathcal{E}xt^2_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}[*X_{s_0}],\mathcal{O}_X) = 0$ c'est-à-dire si et seulement si le problème de Cauchy est bien posé le long de la fibre speciale X_{s_0} pour $\mathcal{M}$.

5.3. Dualité

Il faudrait disposer de plusieurs méthodes pour calculer $\mathcal{E}xt^2_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}[*X_{s_0}],\mathcal{O}_X)$. Rappelons que l'on a les isomorphismes canoniques pour toute sous variété $Z \subset X$ et tout système holonome $\mathcal{N}$ sur X (cf. [Me 1]) :

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\,hom_{\mathbb{C}_X}(S(\mathcal{N})\otimes_{\mathbb{C}_X}\mathbb{C}_Z,\mathbb{C}_X) &\simeq \mathbb{R}\Gamma_Z(\mathbb{R}\,hom_{\mathbb{C}_X}(S(\mathcal{N}),\mathbb{C}_X))\\ &\simeq \mathbb{R}\Gamma_Z(DR(\mathcal{N}))\\ &\simeq \mathbb{R}\,hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X,\mathbb{R}\Gamma_Z(\mathcal{N}))\ .\end{aligned}$$

Prenons $Z = y_0$ et $\mathcal{N} = \mathcal{M}[*X_{s_0}]$ on trouve

$$S(\mathcal{M}[*X_{s_0}])_{,y_0}[+2] = \mathcal{E}xt^2_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}[*X_{s_0}],\mathcal{O}_X)_{,y_0} = \left[hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, H^2_{y_0}(\mathcal{M}[*X_{s_0}])\right]^*$$

où $[E]^*$= dual algébrique de E.

Prenons $Z = X_{s_0}$ et $\mathcal{N} = \mathcal{M}[*X_{s_0}]$ on trouve que

$$\mathcal{E}xt^2_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}[*X_{s_0}],\mathcal{O}_X)_{,y_0} = \left[\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, H^1_{X_{s_0}}(\mathcal{M}[*X_{s_0}])_{,y_0}\right]^*.$$

5.4. Exemples

Exemple 5.4.1. Prenons $X = \mathbb{C}^2$, $S = \mathbb{C}$, $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ $(x,y) \to x$ et Y l'axe des x.
Considérons le système

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{D}_X/(P,Q)$$

où (P,Q) est l'idéal à gauche engendré par

$$P = y^{m+1}\frac{\partial}{\partial y} + mx$$

$$Q = y^m \frac{\partial}{\partial x} - 1$$

pour un entier $m \geq 1$. On a

$$(\mathcal{M}) \subset T^*_X X \cup T^*_Y X \cup T^*_{(o,o)}X .$$

D'autre part $\mathcal{M}$ est égal à son localisé le long de Y. En effet il suffit de vérifier que la multiplication à gauche par y est bijective. Mais $m \geqslant 1$ et la classe de 1 dans $\mathcal{M}_1$ est égal à y(classe de $y^{m-1}\frac{\partial}{\partial x}$) ce qui permet de voir que la multiplication à gauche dans $\mathcal{M}_1$ par y est surjective. D'autre part la multiplication à gauche par y est injective. En effet soit R un opérateur tel que

$$yR = R_1P + R_2Q$$

$$= R_1\, y^m \left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right] + (R_2 - R_1 mx)Q.$$

Alors R appartient à l'idéal engendré par P et Q. En effet $x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ appartient à cet idéal et donc par division par y il suffit de voir que si

$$yR = R_1\left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right] + R_2Q$$

avec R_1 et R_2 des opérateurs dans les coefficients ne dépendent pas de y alors $R_1 = R_2 = 0$. Donc $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1[*Y]$.

Lemme 5.4.1.1. $\mathcal{E}xt^2_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_1[*X_0], \mathcal{O}_{X_0})_{,(o,o)} = \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_1, \mathcal{O}_{X_0})_{,(o,o)} = 0$.

En vertu du théorème 3.1. le lemme 5.4.1.1. montre que le saut de la fonction ϕ en zéro est égal à la multplicité de $\mathcal{M}_1$ le long de $T^*_{(o,o)}\mathbb{C}^2$.

Preuve du lemme 5.4.1.1. Il suffit de montrer qu'il n'y a pas d'obstruction à résoudre le système

$$\begin{cases} Pf = g \\ Qf = h \end{cases}$$

dans l'espace $Q_{X_o,(o,o)}$ pour g et h satisfaisant les conditions de compatibilités. Mais le commutateur $[P,Q]$ est égal à $my^m Q$ d'où une relation

$$(P-my^m)Q - QP = 0.$$

Il suffit alors de montrer qu'il existe une solution f du système

$$\begin{cases} Pf = g \\ Qf = h \\ (P-my^m)h - Qg = 0\ . \end{cases}$$

dans l'espace $Q_{X_o,(o,o)}$ pour g et h dans cet espace. Soient $\sum\limits_{n\geq o} b_n(y)x^n$ et $\sum\limits_{n\geq o} c_n(y)x^n$ des représentants de g et h où $b_n(y)$ et $c_n(y)$ sont des fonctions holomorphes de la variable y dans le même voisinage de zéro pout tout n. Cherchons un représentant de la forme $\sum\limits_{n\geq o} a_n(y)x^n$ de f solution du système précédent. On a la relation

$$(P+xmQ)f = g+xmh$$

qui suggère de résoudre dans $\mathcal{O}_{\hat{X|X_o},(o,o)}$

$$(P+xmQ)(\sum_{n\geq o} a_n(y)x^n) = \sum_{n\geq o} b_n(y)x^n + xm \sum_{n\geq o} c_n(y)x^n$$

En identifiant les coefficients de x^n on trouve l'équation différentielle pour tout n

$$y^{m+1}\, a'_n(y) + mny^m\, a_n(y) = b_n(y) + mc_{n-1}(y)\ .$$

C'est une équation régulière et il existe une solution unique si et seulement si $b_n(y) + mc_{n-1}(y)$ est divisible par y^m pour tout n. Mais $(P-my^m)h - Qg$ est une série convergente et par conséquent on peut choisir les représentants de g et h de sorte que $b_n(y) + mc_{n-1}(g)$ soit divisible par y^m pour tout n. On trouve donc une solution unique $a_n(y)$ de l'équation différentielle précédente dans le rayon de convergence ne dépend pas de n. D'où un élément de $\mathcal{O}_{\widehat{X|X_0}}(o,o)$

$$\sum_{n\geq o} a_n(y)\, x^n$$

dont la classe f dans $Q_{X_0,(o,o)}$ est solution de

$$(P+mxQ)f = g+mxh \ ,$$

soit $g = (P+ma)f-mxh$. En remplaçant g par sa valeur dans la relation $(P-my^m)h - Qy = 0$ on trouve

$$(P-my^m)h - Q\,[(P+mxQ)f-mxh] =$$

$$(Ph-my^m)h - (PQ-my^m(Q)f + mQx(h-Qf) =$$

$$(P+Qx-my^m)(h-Qf) =$$

$$y^m\,(y\,\frac{\partial}{\partial y} + mx\,\frac{\partial}{\partial x})(h-Qf) = 0.$$

Donc $(y\,\frac{\partial}{\partial y} + mx\,\frac{\partial}{\partial x})(h-Qf)$ est une série convergente. On applique le fait élémentaire qu'une série formelle $F \in \mathbb{C}[[x,y]]$ est convergente si et seulement si $(mx\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y})F$ est une série convergente. On trouve que la série $Qf-h$ est convergente. Donc $Qf = h$ dans l'espace $Q_{X_0,(o,o)}$ et donc que f est solution du système

$$Pf = g$$

$$Qf = h$$

dans l'espace $Q_{X_0,(o,o)}$. D'où le lemme 5.4.1.1. On a donc pour le système $\mathcal{M}_1$

$$m_{T^*_{(o,o)}X} = \phi(x) - \phi(0) = \mathrm{Irr}_x(\mathcal{M}_{1,x}) - \mathrm{Irr}_o(\mathcal{M}_{1,o}).$$

Considérons le faisceau $\mathcal{O}_X[*Y]$ muni de la structure de $\mathcal{D}_X$-module définie par :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{y^m}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{mx}{y^{m+1}}$$

On dispose d'un morphisme de $\mathcal{D}_X$-module

$$\mathcal{M}_1 \to \mathcal{O}[*Y]$$

qui envoit la classe d'un opérateur

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}(x,y)\,\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta} \quad \text{dans} \quad \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}(x,y)\left(\frac{\nabla\partial}{\partial x}\right)^\alpha\left(\frac{\nabla\partial}{\partial y}\right)^\beta \quad (1)$$

Ce morphisme est surjectif et c'est un isomorphisme en dehors de Y. Donc son noyau est concentré sur Y. Comme $\mathcal{M}_1$ n'as pas de section à support Y il en résulte que $\mathcal{M}_1$ est isomorphe à $\mathcal{O}[*Y]$ muni de la structure de $\mathcal{D}_X$-module précédente. En vertu du paragraphe 2

$$\mathrm{Irr}_o(\mathcal{M}_{1,o}) = 0$$

$$\mathrm{Irr}_x(\mathcal{M}_{1,x}) = 1 \quad \text{pour} \quad x \neq 0$$

donc $\quad m_{T^*_{(o,o)}X} = 1.$

Exemple 5.4.2.

Reprenons la situation géométrique de l'exemple précédent : $f : X = \mathbb{C}^2 \to S = \mathbb{C}$, $f(x,y) = x$, $Y = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2;\ y = 0\}$. Soit $\mathcal{M}_2 = \mathcal{O}[*Y]$ le $\mathcal{D}_X$-module défini par

$$\frac{\nabla\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{2y^2}$$

$$\frac{\nabla\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{y^2-y-2x^2}{y^3} .$$

Le $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}_2$ est holonome. En effet il provient d'un module algébrique image directe par l'injection canonique $U = X \setminus Y \hookrightarrow X$ d'un fibré vectoriel algébrique de rang 1 muni d'une connection intégrable. On a

$$\mathrm{irr}_x(\mathcal{M}_{2,x}) = 2 \quad \text{si} \quad x \neq 0$$

$$\mathrm{irr}_o(\mathcal{M}_{2,o}) = 1$$

donc $\phi(x) - \phi(0) = 1.$

Lemme 5.4.2.1. $\mathcal{E}xt^2_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_2\,[*X_o]\,,\,\mathcal{O}_X)_{(o,o)} \neq 0$.

En vertu du lemme 5.4.2.1. on a donc :

$$\text{multiplicité de } \mathcal{M}_2 \text{ le long de } T^*_{(o,o)}X \neq \phi(x) - \phi(0) \quad .$$

Pour montrer le lemme 5.4.2.1. il suffit de montrer en vertu du paragraphe 5.3. que

$$E \overset{\text{déf}}{:=} \hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X,\, H^2_{(o,o)}(\mathcal{M}_2\,[*X_o]\,)) \neq 0 \;.$$

Mais

$$H^2_{(o,o)}(\mathcal{M}_2\,[X_o]) = \frac{\Gamma(X\backslash Y \cup X_o;\mathcal{O}_X)}{\Gamma(X\backslash Y;\mathcal{O}_X[*X_o]) + \Gamma(X\backslash X_o,\mathcal{O}_X[*Y])} \;.$$

Un élément de E est représenté par une fonction $F \in \Gamma(X\setminus Y \cup X_o;\mathcal{O}_X)$ telle que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}(F)$ et $\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}(F)$ appartiennent à l'espace $\Gamma(X\backslash Y,\mathcal{O}_X[*X_o]) + \Gamma(X\backslash X_o;\mathcal{O}_X[*Y])$.

Considérons la série

$$F(x,y) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(2n!)}{x^{2n+1}}\; \frac{y^{2n}}{n!}\; (e^{1/y} - a_n(y))$$

où $a_o = 0$

$$a_n(y) = \sum_{k=o}^{2n-1} \frac{1}{k!}\; \frac{1}{y^k}$$

La série $F(x,y)$ converge uniformément sur tout compact de $X\setminus Y \cup X_o$. En effet

$$F_n \overset{\text{déf}}{=} \left|\frac{2n!}{x^{2n+1}}\; \frac{y^{2n}}{n!}\,(e^{1/y}-a_n(y))\right| = \frac{1}{|x^{2n+1}|n!}\;\left|\sum_{k=o}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+k)!}\;\frac{1}{y^k}\right|$$

$$\leq \frac{1}{|x^{2n+1}|n!}\;\sum_{k=o}^{\infty}\frac{1}{k!}\;\frac{1}{|y^k|} = \frac{e^{1/|y|}}{|x|^{2n+1}\,n!} \;.$$

Donc $\sum_{n=o}^{\infty} F_n \leq \sum_{n=o}^{\infty} \frac{e^{1/|y|}}{|x|^{2n+1} 1!} \leq \frac{e^{1/|y|} \, e^{1/|x|^2}}{|x|}$.

Donc la série précédente définit un élément de $H^2_{(o,o)}(\mathcal{M}_2[*X_o])$ qui n'est pas nul.

D'autre part pour un calcul direct on trouve

$$\frac{\nabla_\partial}{\partial x} F = - \frac{1}{x^2 y} e^{1/x^2} - \frac{2}{x^4} e^{1/x^2} - \frac{e^{1/x^2}}{x^2} + \frac{1}{2y^2} e^{1/y}$$

$$\frac{\nabla_\partial}{y} F = (\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y}) \frac{1}{x} e^{1/x^2} - \frac{x}{2y^3} e^{1/y} \ .$$

Donc $\frac{\nabla_\partial}{x} F$ et $\frac{\nabla_\partial}{y} F$ sont des éléments de

$$\Gamma(X \backslash Y;\ \mathcal{O}_X[*X_o]) + \Gamma(X \backslash X_o ; \mathcal{O}_X\ [*Y]) \ .$$

Par conséquent F définit un élément non nul de E d'où le lemme 5.4.2.1.

Exemple 5.4.3.

Reprenons la situation géométrique précédente :

$$f : X = \mathbb{C}^2 \to S = \mathbb{C} \quad f(x,y) = x, \quad Y = \text{l'axe des } x.$$

Soit le $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}_3 = \mathcal{D}_X/(P,Q)$ où (P,Q) est l'idéal à gauche engendré par

$$P = (2x+y) \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$$

$$Q = y^2 \frac{\partial}{\partial x} + 1.$$

La variété caractéristique de $\mathcal{M}_3$ est contenue dans

$$T^*_X X \cup T^*_Y X \cup T^*_{(o,o)} X \ .$$

Lemme 5.4.3.1. $\mathcal{M}_3 \simeq \mathcal{M}_3\ [*Y]$.

Preuve. Il suffit de montrer que la multiplication à gauche par y est bijective. La classe de 1 dans $\mathcal{M}_3$ est égale à y (classe de $y \frac{\partial}{\partial x}$ dans $\mathcal{M}_3$) . Par

récurrence sur l'ordre d'un opérateur on voit immédiatement que la multiplication par y est surjective.
Voyons qu'elle est injective. Soit R un opérateur tel que $yR = R_1P + R_2Q$. Il faut montrer que R appartient à l'idéal engendré par P et Q.
Par division par y on peut supposer que

$$yR = R_1P + R_2Q$$

où les coefficients de R_1 et R_2 ne dépendent pas de y . Nous allons voir que dans ce cas $R_1 = R_2 = 0$. Il suffit de raisonner par récurrence sur

$$\mathrm{Sup}(\text{ordre } (R_1), \text{ ordre } R_2)$$

pour voir que $R_1 = R_2 = 0$.

Considérons le faisceau $\theta'_X[*Y]$ muni de la structure de $\mathcal{D}_X$-module définie par

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{y^2}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{(2x+y)}{y^3} .$$

On a un homomorphisme de $\mathcal{D}_X$-modules

$$T : \mathcal{M}_3 \to \theta_X[*Y]$$

qui envoit la classe $\overline{R}$ d'un opérateur

$$R = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta}$$

dans la fonction méromorphe

$$T(\overline{R}) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\right)^\alpha \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}\right)^\beta (1).$$

Cet homomorphisme est surjectif parce que

$$\frac{1}{y} = - T\left(y \frac{\partial}{\partial x}\right) .$$

C'est aussi un isomorphisme hors de Y les deux modules étant des fibrés vectoriels de rang un ayant même monodromie. Le noyau de T est concentré sur Y. En vertu du lemme 4.6.3.1. le module $\mathcal{M}_3$ n'a pas de sections à support dans Y. Donc T est un isomorphisme. Le paragraphe précédent nous donne une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_3, \mathcal{O}_X)_{,(o,o)} \to \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(H^1_{[X_o]}(\mathcal{M}_3), \mathcal{O}_X)_{,(o,o)} \to \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_3, Q_{X_o})_{,(o,o)}$$
$$\to \mathcal{E}xt^2_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_3, \mathcal{O}_X)_{,(o,o)} \to 0$$

et $\quad \mathrm{Irr}_o(\mathcal{M}_{3,o}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(H^1_{[X_o]}(\mathcal{M}_3), \mathcal{O}_X)_{,(o,o)} = 1$.

<u>Lemme 5.4.3.2.</u> $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_3, \mathcal{O}_X)_{,(o,o)} = \mathcal{E}xt^2_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_3, \mathcal{O}_X)_{,(o,o)} = 0$.

Il résulte du lemme précédent que

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_3, Q_{X_o})_{,(o,o)} = 1 \neq 0 .$$

Donc que le problème de Cauchy n'est pas bien posé pour $\mathcal{M}_3$ le long de X_o . On a donc pour $\mathcal{M}_3$

$$\phi(x) - \phi(0) = 2-1 = 1$$

$$m_{T^*_{(o,o)}X} = 1+1 = 2.$$

<u>Preuve du lemme 5.4.3.2.</u> En vertu du paragraphe précédent puisque $\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_3[*Y]$

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_3, \mathcal{O}_X) = \mathcal{E}xt^0_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_3, Q_Y)$$

$$\mathcal{E}xt^2_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_3, \mathcal{O}_X) = \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_3, Q_Y) .$$

Un élément de $\hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_3, Q_Y)_{,(o,o)}$ est représenté par un élément f de $Q_{Y,(o,o)}$ tel que

Pf converge

Qf converge.

Mais si Pf converge f converge parce que les petites boules centrées en (o,o) sont non caractéristiques pour P en vertu d'un résultat qui remonte à Poincaré :

$$(2x+y)\bar{x} + y\bar{y} = 0 \Rightarrow |x| = |y| = 0 .$$

Donc f est nul et $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_3,\mathcal{O}_X)_{,(o,o)} = 0$.

Pour montrer que $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_3,Q_Y)_{,(o,o)}$ il suffit de montrer qu'il n'a pas d'obstruction à résoudre dans $Q_{Y,(o,o)}$ la système

$$Pf = g$$

$$Qf = h$$

pour g et h satisfaisant les conditions de compatibilités. Mais $[P,Q] = PQ - QP = 0$. Donc g et h doivent satisfairent la relation

$$Ph = Qg.$$

Soit $\sum_{n\,o} b_n(x)y^n$ un représentant de g. Cherchons à résoudre

$$P(\sum_{n\geq o} a_n(x)y^n) = \sum_{n\geq o} b_n(x)y^n .$$

On trouve

$$2x\ a_o(x) = b_o$$

$$2x\ a_n'(x) + n\ a_n'(x) + a_{n-1}'(x) = b_n(x) .$$

On peut supposer $b_o(0) = 0$ ce qui permet de déterminer $a_n(x)$ de façon unique connaissant $a_{n-1}(x)$ en résolvant l'équation différentielle précédente. La classe f de $\sum_{n\,o} a_n(x)y^n$ est solution de

$$Pf = g.$$

D'où $QPf = Ph = PQf$. Soit

$$P(Qf-h) = 0 .$$

Donc en vertu du résultat rappelé précedemment $Qf-h$ converge. Donc f est solution de

$$Pf = g$$
$$Qf = h$$

et $\mathcal{E}xt^2_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_3, \mathcal{O}_X)_{,(o,o)} = \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_3, Q_Y)_{,(o,o)} = 0$.

Remarque 5.4.3.3. Si on cherche à résoudre le système suivant dans $Q_{X_o,(o,o)}$

$$Pf = g$$

$$Qf = h$$

$$Ph = Qf$$

comme dans l'exemple 5.4.1. on trouve en cherchant à résoudre

$$(yP-Q)f = yg-h$$

l'équation différentielle

$$y^2 a_n'(y) + (2ny-1)a_n(y) = b_{n-1}(y) - c_n(y)$$

pour des représentants $\sum\limits_{n\geq o} b_n(y)\, g^h$, $\sum\limits_{n\geq o} c_n(y)x^n$ de g et h . Cette équation est irrégulière d'irrégularité 1. Contrairement à l'équation analogue de l'exemple 5.4.1. qui était régulière. L'irrégularité de cette équation est égale à la dimension de l'espace

$\mathcal{E}xt^2_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_3[*X_o], \mathcal{O}_X)_{,(o,o)}$ qui semble mesurer l'irrégularité du module "évanesant" de $\mathcal{M}_3$. (cf. le paragraphe 7).

6) Démonstration de la proposition 3.2.

Soit $f : X \to S$ un morphisme lisse de dimension relative 1 entre variétés analytiques complexes, $Y \subset X$ un diviseur fini et plat sur S et $\mathcal{M}$ un système holonome de la forme $\mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est un fibré de rang un sur X.

6.1. Cas dim S = 1.

Dans ce cas dim X est une surface complexe et Y une courbe donc $Ch(\mathcal{M})$ est de la forme $T^*_X X \cup T^*_{Y_0} X \cup T^*_{Y_1} X$ où Y_0 est la partie lisse de Y et Y_1 un ensemble discret de points de Y . Soit y_0 un point de Y_1 et (x,y) un système de coordonnées de X au voisinage de y_0 tel que $f(x,y) = x$.

En choisissant une trivialisation de $\mathcal{L}$ au voisinage assez petit de y_0 la structure de $\mathcal{D}_X$-module de $\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_X[*Y]$ dans ce voisinage est définie par

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x} + A$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} = \frac{\partial}{\partial y} + B$$

où A et B sont des fonctions méromorphes ayant des poles sur Y telles que

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad .$$

Soit h une équation réduite de Y au voisinage de y_0 et $h = h_1 \ldots h_m$ sa décomposition en facteurs irréductibles. Ecrivons

$$A = \frac{a}{h_1^{p_1} \cdots h_m^{p_m}} \quad \text{et} \quad B = \frac{b}{h_1^{q_1} \cdots h_m^{q_m}}$$

où a et b sont des fonctions holomorphes non divisibles par $h_1, \ldots, h_m$.

Si $B = 0$ la constante de $\phi(s)$ au voisinage de $s_0 = f(y_0)$ entraine que Y est lisse en y_0 et $Ch(\mathcal{M}) \subset T^*_X X \cup T^*_Y X$ au voisinage de y_0 .

Si $B \neq 0$ la constance de la fonction $\phi(s)$ au voisinage de s_0 entraine nécessairement que $b(0,0) \neq 0$ comme on le voit en considérant des équations h_i sous formes de Weierstrass (cf. 2.4.). Considérons le $\mathcal{D}_X$-module cohérent

$$\mathcal{N} = \frac{\mathcal{D}_X}{\left(h_1^{p_1} \ldots h_1^{p_m} \frac{\partial}{\partial x} - a,\ h_1^{q_1} \ldots h_m^{q_m} \frac{\partial}{\partial y} - b\right)}$$

On a un morphisme $T : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ de $\mathcal{D}_X$-modules au voisinage de y_0 qui envoie la classe d'un opérateur $P = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} \frac{\partial^\alpha}{\partial x} \frac{\partial^\beta}{\partial y}$ dans la fonction méromorphe

$T(P) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}(\frac{\nabla_{\partial}}{\partial x})^{\alpha}(\frac{\nabla_{\partial}}{\partial y})^{\beta}$ (1). Ce morphisme est surjectif. En effet si on pose $\theta = h_1^{q_1} \ldots h_m^{q_m}$ les fonctions $\frac{1}{\theta^n}$, $n = 1,\ldots$ engendre $\mathcal{M}$ en tant que θ_X-module. Il suffit donc de voir que les fonctions $\frac{1}{\theta^n}$, $n = 1,\ldots$ sont dans l'image de T. Mais b est inversible au voisinage de y_0 et

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{b}\ \frac{\nabla_{\partial}}{\partial y}(1) = \frac{1}{b}\ T(\frac{\partial}{\partial y})$$

$$\frac{1}{\theta^{n+1}} = \frac{b^1}{b-n\frac{\partial\theta}{\partial y}}\ \frac{\nabla_{\partial}}{\partial y}(\frac{1}{\theta^n}).$$

La fonction $b-n\frac{\partial\theta}{\partial y}$ est inversible (sauf si $\frac{\partial\theta}{\partial y} \neq 0$ donc $\theta = y$ et on est dans le cas régulier $(Ch(\mathcal{M}) = T_X^* X U T_Y^*)$ ceci permet de voir par récurrence sur n que T est surjectif. Maintenant pour voir que $Ch(\mathcal{M}) \subset T_Y^* X U T_X^* X$ au voisinage de y_0 il suffit de voir que la fibre X_{s_0} est non caractéristique au voisinage de y_0 pour $\mathcal{M}$. Ceci entraine que ${}^0Ch(\mathcal{M}) \subset T_X^* X U T_Y^* X$ au voisinage de y_0 par holonomie. Mais T étant surjectif il suffit de voir que X_{s_0} est non caractéristique pour $\mathcal{M}$.

La condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

s'écrit

$$h_1^{q_1} \ldots h_m^{q_m} (h_1 \ldots h_m \frac{\partial a}{\partial y} - \sum_{i=1}^{m} a \frac{\partial h_i}{\partial y} \hat{h}_i \quad =$$

$$h_1^{p_1} \ldots h_m^{p_m} (h_1 \ldots h_m \frac{\partial b}{\partial x} - \sum_{i=1} b \frac{\partial h_i}{\partial x} \hat{h}_i)$$

où $\hat{h}_i$ désigne $\frac{h_1 \ldots h_m}{h_i}$. Mais h_i ne divise pas $\frac{\partial h_i}{\partial y}$ donc $h_i^{p_i}$ doit diviser $h_i^{q_i}$ et $q_i \geq p_i$ $(i = 1,\ldots,m)$. Posons $r_i = q_i - p_i \geq 0$ et considérons l'opérateur

$$R = h_1^{r_1} \dots h_m^{r_n} \frac{\partial}{\partial y} (h_1^{p_1} \dots h_m^{p_n} \frac{\partial}{\partial x} - a) - \frac{\partial}{\partial x} (h_1^{q_1} \dots h_m^{q_m} \frac{\partial}{\partial y} - b)$$

qui appartient à l'idéal qui définit $\mathcal{N}$. Le symbole principal $\sigma(R)$ prend la valeur

$$\sigma(R) \ (y_0;\xi, 0) = b(y_0)\xi$$

au point $(y_0;\xi,0)$. Puisque $b(y_0) \neq 0$ ceci montre de X_{s_0} est non caractéristique pour $\mathcal{N}$. D'où la proposition 3.2. si dim $S = 1$.

6.2. <u>Cas dim $S \geq 2$.</u>

On raisonne par récurrence sur dim $S = n-1$. La variété caractéristique de $\mathcal{M}$ est contenue dans

$$T_X X \cup \overline{T^*_{Y_0} X} \bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{T_{Y_i} X}$$

pour une stratification $\bigcup_{i=o}^{n} Y_i$ de Y la strate Y_i étant de codimension i dans Y. Soit y_0 un point de Y_{n-1} et y voisin de y_0 distinct de y_0 $(y \notin Y_{n-1})$. Par le point $s = f(y)$ il passe une hypersurface lisse S_1 de S tel que l'hypersurface $f^{-1}(S_1)$ est une caractéristique au voisinage de y pour $\mathcal{M}$. En faisant le changement de base $S_1 \to S$ on trouve une situation toute pareille à la situation initiale. En vertu de l'hypothèse de récurrence et du fait que le changement de base est non caractéristique la variété caractéristique de $\mathcal{M}$ est contenue dans

$$T^*_X X \cup \overline{T^*_{Y_0} X} \cup T^*_{Y_{n-1}} X$$

au voisinage de y_0.

Il reste à voir que $T^*_{Y_{n-1}} X$ n'est pas dans $Ch(\mathcal{M})$. Pour cela on reprend le raisonnement du cas dim $S = 1$ qui montre que X_{y_0} n'est pas caractéristique pour $\mathcal{M}$ au voisinage de y_0 et par holonomie $T^*_{Y_{n-1}} X^0$ n'est pas dans $Ch(\mathcal{M})$ au voisinage de y_0. D'où la proposition 3.2.

6.3. Remarques

Remarques 6.3.1. Si X est une surface algébrique et $\mathcal{M}_U$ est fibré algébrique de rang 1 muni d'une connexion intégrable sur U, l'image directe par l'injection $X \setminus Y = U \hookrightarrow X$ est un $\mathcal{D}_X$-module de la forme $\mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \overline{\mathcal{M}}_U$ où $\overline{\mathcal{M}}_U$ est un fibré vectoriel qui existe dans ce cas là et on peut donc lui appliquer la proposition 3.2. Mais si X est une variété algébrique complexe lisse de dimension ≥ 3 et $\mathcal{M}_U$ un fibré vectoriel sur $U = X \setminus Y$ s'il n'existe pas toujours de prolongement localement libre sur X. D'autre part on ne peut se ramener au cas $\dim X = 2$. par changement de base de disposer d'une théorie de "cycles evanescents" pour les $\mathcal{D}_X$-modules pour démontrer l'analogue du théorème 4.1.2. de [L] .

Remarque 6.3.2. Si $\mathcal{M}$ est de la forme $\mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}$ pour un fibré $\mathcal{L}$ de rang $r \geq 2$ et $\dim S = 1$ la structure de $\mathcal{D}_X$-module de $\mathcal{M}$ est définie

par $$\frac{\partial}{\partial x} - A .$$

$$\frac{\partial}{\partial y} - B$$

où A et B sont des matrices carrées de rang r à coefficients méromorphes ayant des pôles sur Y . La constance de la function ϕ au voisinage de s_0 n'implique pas que $\det b(y_0) \neq 0$ pour un point y_0 de Y_{s_0} si b est la matrice holomorphe tel que

$$B = \frac{b}{h_1^{q_1} \cdots h_m^{q_m}}$$

avec les notations analogues à celles du paragraphe 6.1. Mais si $\det b(y_0) \neq 0$ et que $p_i \leq q_i$ $(i = q_i \dots m)$ alors $Ch(\mathcal{M}) \subset T_X^* X \cup \overline{T_Y^* X}$.
La démonstration étant toute pareille à celle du 6.1.

§7 - MULTIPLICITÉ FORMELLE (d'après B. MALGRANGE).

Après avoir rédigé cet exposé, nous avons reçu une lettre de B. Malgrange qui montre dans la situation géométrique simple du §3 comment éviter la théorie générale des cycles évanescents irréguliers pour donner une réponse satisfaisante au problème étudié ici. On se propose dans ce paragraphe d'exposer ses résultats.

L'idée est que $\int_f^0 \mathcal{M}$ peut servir de substitut pour les cycles évanescents.

7.1. Soient D un petit disque voisinage de l'origine dans le plan complexe et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_D$-module holonome sur D dont le support singulier est réduit à l'origine. Notons m et v les multiplicités de $\mathcal{M}$ le long de $T^*_D D$ et de $T^*_0 D$ respectivement. Si a est un point de D notons $i_a : \{a\} \to D$ l'inclusion canonique. Alors le complexe

$$\mathbb{L}\, i_a^* \mathcal{M} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_{\{a\}} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{O}_a}{\otimes}} \mathcal{M}_a$$

est un complexe d'espaces vectoriels sur $\mathcal{O}_{\{a\}} \simeq \mathbb{C}$ dont la cohomologie est de dimension finie et est concentrée en degrés 0 et 1. Si $a \neq 0$ alors $\mathbb{L}\, i_a^* \mathcal{M}_a \simeq \mathbb{C}^m$. Posons

$$\hat{v}(\mathcal{M}) \overset{\text{déf}}{=} m - \chi(\mathbb{L}\, i_0^* \mathcal{M})$$

<u>Définition</u> 7.1.1. <u>On appelle multiplicité formelle le long de</u> $T^*_0 D$ <u>de</u> $\mathcal{M}$ <u>le nombre</u> $\hat{v}(\mathcal{M})$ <u>défini précédemment</u>.

L'idée de Malgrange est que le nombre $\hat{v}(\mathcal{M}_o)$ est égal à la dimension de l'espace des cycles évanescents irréguliers de $\mathcal{M}$ pour l'application identique de D dans D alors que $v = v(\mathcal{M})$ est égal à la dimension de l'espace des cycles évanescents réguliers. Le nombre $\hat{v}(\mathcal{M})$ ne dépend que du complété formelle de $\mathcal{M}$ le long de 0.

Rappelons que si $\mathcal{M}$ est une connexion, on définit son irrégularité de N. Katz $r(\mathcal{M})$, (cf. [D2], [Ka], [L.G], [B], [M2]. C'est un nombre rationnel et on a les inégalités

$$\mathrm{Irr}_0(\mathcal{M})/m \leq r(\mathcal{M}) \leq \mathrm{Irr}_0(\mathcal{M}).$$

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_D$-module holono me on pose

$$r(\mathcal{M}) \overset{\text{déf}}{=} r(\mathcal{M}[*0]).$$

Proposition 7.1.2. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_D$-module holono me sur D dont le support singulier est réduit à l'origine. On a

1) $\hat{v}(\mathcal{M}) = v(\mathcal{M}) - \mathrm{Irr}_0(\mathcal{M})$

2) $\dot{v}(\mathcal{M}) \leq (1 + r(\mathcal{M})\ \hat{v}(\mathcal{M})$.

Démonstration. Par construction

$$\hat{v}(\mathcal{M}) = m - \chi(\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}\{0\}}(\mathbb{L}\, i_0^*\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\{0\}}).$$

Mais en vertu du lemme 5.1.1.

$$\chi(\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_{\{0\}}}(\mathbb{L}\, i_0^*\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\{0\}})) \simeq \chi(\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_D}(\mathbb{R}\Gamma_{[0]}(\mathcal{M}), \mathcal{O}_D))$$

$$\simeq \chi(\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_0}(\mathcal{M}, \hat{\mathcal{O}}_0)).$$

Soit $\hat{v}(\mathcal{M}) = m - \chi(\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_0}(\mathcal{M}_0, \hat{\mathcal{O}}_0))$

$$= m - \mathrm{Irr}_0(\mathcal{M}) - \chi(\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_0}(\mathcal{M}_0, \mathcal{O}_0)).$$

En vertu du théorème de l'indice (cf. [M1], [K4]) on a

$$\chi(\mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_0}(\mathcal{M}_0, \mathcal{O}_0)) = m - v(\mathcal{M}).$$

D'où la première partie de la proposition 7.1.2.

Pour démontrer la deuxième partie remarquons que l'on peut écrire $\mathcal{M}$ sous la forme

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{D}_D/I$$

où I est un idéal à gauche de $\mathcal{D}_D$ qui contient un opérateur F_q [cf. B.M] dont la valuation $v(F_q)$ est égal à $v(\mathcal{M})$. Considérons la suite exacte

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{D}_D/_{F_q} \to \mathcal{M} \to 0.$$

Comme $\mathcal{M}$ et $\mathcal{D}_D/_{F_q}$ ont même multiplicité le long de T^*_0D il en résulte que $\mathcal{L}$ est fibré vectoriel à connexion au voisinage de 0 et en particulier

$$\mathrm{Irr}_0(\mathcal{L}) = 0.$$

Donc

$\mathrm{Irr}_0(\mathcal{M}) = \mathrm{Irr}_0(\mathcal{D}/_{F_q})$ et en vertu de la première partie de la proposition 7.1.2. on a

$$\hat{v}(\mathcal{M}) = \hat{v}({}^{\mathcal{D}}D/_{F_q}).$$

D'autre part on a (cf. [Ka]) :

$$r(\mathcal{M}) = \sup(r(\mathcal{L}), r({}^{\mathcal{D}}D/_{F_q}))$$

$$= r({}^{\mathcal{D}}D/_{F_q}).$$

Donc on a l'égalité

$$(1+r(\mathcal{M}))\ \hat{v}(\mathcal{M}) - v(\mathcal{M}) = (1+r({}^{\mathcal{D}}D/_{F_q}))\ \hat{v}({}^{\mathcal{D}}D/_{F_a}) - v({}^{\mathcal{D}}D/_{F_q}).$$

On est ramené à démontrer l'inégalité 2) pour un module holonome de la forme $\mathcal{D}_D/_P$ où P est un opérateur différentiel. On notera par $r(P)$, $v(P)$, $\hat{v}(P)$ est les nombres correspondants de $\mathcal{D}D/_P$.

Soit $P = \sum_{i=0}^{m} a_i(x) \frac{d^i}{dx^i}$. Si Pest régulier l'inégalité 2) est évidente sinon on sait que $v(P) = v(a_m)$,

$$r(P) = \sup_{0 \le i < m} \frac{-m + v(a_m) - v(a_i) + i}{m - i} = \frac{-m + v(a_m) - v(a_p) + p}{m - p}$$

$$\text{et } Irr_0(P) = \sup_{0 \le i < m} -m + v(a_m) - v(a_i) + i = -m + v(a_m) - v(q_q) + q$$

pour des nombres p et q strictement plus petit que m.

Mais

$$\hat{v}(P) = v(P) - Irr_0(P) = m - q + v(a_q) > 0.$$

On voit déjà que la nullité de $\hat{v}(P)$ entraine la nullité de $V(P)$.

Soit

$$(1+r(P))\hat{v}(P) - v(P) \geq \left(1 + \frac{-m + v(a_m) - v(a_q) + q}{m - q}\right)(m-q+v(a_q)) - v(a_m)$$

$$= v(a_q)\left[\frac{v(a_m)-v(a_q)}{m - q} - 1\right].$$

Ce dernier nombre est positif parce que

$q - v(a_q) > m - v(a_m)$. D'où l'inégalité cherchée.

Remarque 7.1.3. Si $\mathcal{M}$ est une connexion alors $\hat{v}(\mathcal{M}) = m$ et l'inégalité précédente se réduit à l'inégalité bien connue

$$\mathrm{Irr}_0(\mathcal{M}) \leq r(\mathcal{M})m.$$

7.2. Soient $X = \Delta \times S \xrightarrow{f} S$ le produit d'un petit disque Δ voisinage de l'origine dans le plan complexe (coordonnée y) par un autre petit disque S voisinage de l'origine dans le plan complexe (coordonnée x), $Y \subset X$ un fermé analytique fini et plat sur S n'ayant qu'un seul point $(0,0)$ au dessus de 0 et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome dont le support singulier est contenu dans Y. Notons $\mathcal{F} = \mathbb{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ son complexe de solutions holomorphes. On sait que $\mathbb{R}\Phi_f(\mathcal{F})$ (cf. [Br], [L.M]) est pervers et comme il est porté par l'origine il est concentré sur un seul degré. On a vu que si Y est lisse sur S

$$R^i\,\Phi_f(\mathcal{F}),_0 = 0 \text{ si } i \neq 1$$

et seul l'espace $R^1\Phi_f(\mathcal{F}),_0$ est non nul en général. Notons μ la dimension de l'espace vectoriel $R\Phi^1{}_f(\mathcal{F})$ qui est aussi égal au nombre d'intersection de $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ avec le graphe de df. Nous n'aurons pas besoin de ce fait là.

Théorème 7.2.1. Sous les hypothèses précédentes on a :

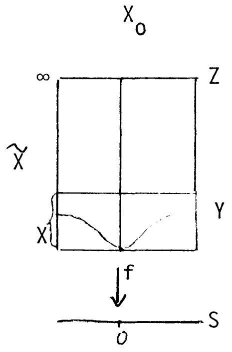
(a) les $\mathcal{D}_S$-modules $\int_f^i \mathcal{M}$ sont holonome et $\int_f^i \mathcal{M} = 0$ si $i \neq 0, -1$.

(b) $\int_f^{-1} \mathcal{M}$ est lisse au voisinage de 0 dans S

(c) si on pose $\mathcal{N} = \int_f^0 \mathcal{M}$ alors on a l'égalité

$$v(\mathcal{N}) = \mu.$$

Pour démontrer ce théorème on se ramène comme dans [L] à une situation propre:



(Dessin de Laumon).

En dehors de Y $\mathcal{M}$ est un fibré vectoriel à connexion et donc se prolonge à $\mathbb{C} \times S$ tout entier (cf. [M2]) en un fibré vectoriel à connexion. Notons Z le diviseur à l'infini de $\tilde{X} = \mathbb{P} \times S$ et $\tilde{\mathcal{M}}$ l'extension canonique de Deligne [D2] de ce prolongement le long du diviseur à l'infini Z , $\tilde{\mathcal{M}}$ est un $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$-module holonome sur $\tilde{X}$ régulier à l'infini.

D'autre part $\tilde{\mathcal{M}}$ est muni d'une bonne filtration globale. En effet si $(\mathcal{M}_k)$ est une bonne filtration de $\mathcal{M}$ sur $\Delta \times S$, elle prolonge en une bonne filtration sur $\mathbb{C} \times S$ $(\mathcal{M}_k)$, et si $(\tilde{\mathcal{M}}_\ell)$ est bonne filtration de $\tilde{\mathcal{M}}$ hors d'un voisinage de Y alors pour k et ℓ assez grands

$$\mathcal{M}_k \simeq \tilde{\mathcal{M}}_\ell = \tilde{\mathcal{M}}$$

dans l'intersection où ces deux bonnes filtrations sont définies. Quitte à décaler les filtrations on peut supposer

$$\mathcal{M}_k = \tilde{\mathcal{M}}_\ell = \tilde{\mathcal{M}}$$

pour tous k, ℓ et donc $\tilde{\mathcal{M}}$ est muni d'une bonne filtration sur $\tilde{X} = \mathbb{P} \times S$. Notons $\tilde{f}$ la projection $\tilde{X} \to S$. Alors en vertu d'un résultat classique (cf. [L2])

$$\int_{\tilde{f}} \tilde{\mathcal{M}}$$

est un complexe de $\mathcal{D}_S$-modules à cohomologie holonome.

Mais $\int_{\tilde{f}} \tilde{\mathcal{M}} = \mathbb{R}\, \tilde{f}_* \, DR_{\tilde{X}/S}(\tilde{\mathcal{M}})$ [+1]

Notons j l'inclusion de $\mathbb{C} \times S \to \mathbb{P} \times S$. On sait puisque $\tilde{\mathcal{M}}$ est régulier le long de Z que (cf. [D2]; 6.17, théorème de comparaison relatif) :

$$DR_{\tilde{X}/S}(\tilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\, j_* \, j^{-1} \, DR_{\tilde{X}/S}(\tilde{\mathcal{M}}).$$

Donc on a

$$\mathbb{R}\Gamma\ (X;\ DR_{\check{X}/S}(\check{\mathcal{M}})) = \mathbb{R}\Gamma(\mathbb{C}\times S;\ \ j^{-1}\ DR_{\tilde{X}/S}(\check{\mathcal{M}}))$$

$$= \mathbb{R}\Gamma(\Delta\times S;\ DR_{\Delta\times S/S}(\mathcal{M}))\ .$$

Par conséquent

$$\int_{\check{f}} \check{\mathcal{M}} \ \simeq\ \int_f \mathcal{M}\ .$$

Donc les $\int_f^i \mathcal{M}$ sont holoncmes. D'autre part $DR_{X/S}(\mathcal{M})$ est le complexe :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_{X/S} \to 0\ .$$

Comme f est de Stein pour $\mathcal{M}$; $Rf_*^i\mathcal{M} = 0$ si $i \neq 0$ et $\int_f \mathcal{M}$ se représente par le complexe :

$$0 \to f_*\mathcal{M} \xrightarrow{\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}} f_*\mathcal{M} \to 0$$

place en degrés -1 et 0. D'où la conclusion ⓐ du théorème 7.2.1.

Puisque $\int_f \mathcal{M}$ est holonome on sait alors que [cf. M2]

$$\mathbb{R}hom_{\mathcal{D}_S}\left(\int_f \mathcal{M},\ \mathcal{O}_S\right)\ [\dim S] \simeq \mathbb{R}f_*\ \mathbb{R}hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\ \mathcal{O}_X)\ [\dim X]$$

et que [cf. D3]

$$\mathbb{R}f_*\ \mathbb{R}\Phi_f(\mathcal{F}) \simeq \mathbb{R}\Phi_0\left(\mathbb{R}hom_{\mathcal{D}_S}\left(\int_f \mathcal{M},\mathcal{O}_S\right)\right)\ [\dim S\text{-}\dim X]\ .$$

Soit

$$R^1\ \Phi_f(\mathcal{F})_{,0} \simeq \mathbb{R}\Phi_0\left(\mathbb{R}hom_{\mathcal{D}_S}\left(\int_f \mathcal{M},\mathcal{O}_S\right)\right)\ .$$

Mais $\mathbb{R}\Phi_0(\mathbb{R}\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_S}(\int_f \mathcal{M}, \mathcal{O}_S)) = \mathbb{R}\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_0}((\int_f \mathcal{M}), \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{0|S})_{(o,1)}$

Comme le foncteur

$$\mathcal{N} \to \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_0}(\mathcal{N}, \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{0|S})_{(o,1)}$$

est exact sur la catégorie des holonormes (cf. Theoreme 4.1.1.) il en résulte que

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_0}(\int_f^i \mathcal{M}, \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{0|S})_{(o,1)} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq 0$$

et

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{hom}_{\mathcal{D}_0}(\int_f^0 \mathcal{M}, \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{0|S})_{(o,1)} = v\,(\int_f^0 \mathcal{M}) = \dim \mathbb{R}\Phi_f^1(\mathcal{F})_{,0} = \mu.$$

D'où les parties ⓑ et ⓒ du théorème 7.2.1.

7.3. Conservant les hypothèses précédentes et considérons le diagramme pour un point s de S

$$\begin{array}{ccc} X_s & \hookrightarrow & X \\ {\scriptstyle f_s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ s & \xhookrightarrow{i_s} & S \end{array}$$

Posons $\tilde{\phi}(s) = -\chi(\mathbb{R}\Gamma(X_s; \mathbb{R}\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_{X_s}}(\mathcal{M}_s, \mathcal{O}_{X_s})))$

où $\mathcal{M}_s \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_{X_s} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$.

On a de façon évidente l'isomorphisme de changement de base (f est une projection) :

$$\int_{f_s} \mathcal{M}_s \simeq \mathbb{L}i_s^* \int_f \mathcal{M}$$

Donc $\chi(\mathbf{L}i_s^* \int_f \mathcal{M}) = \chi(\int_{f_s} \mathcal{M}_s) = -\chi(\mathbb{R}\Gamma(X_s;DR(\mathcal{M}_s)) = \tilde{\phi}(s)$.

Mais $\chi(\mathbf{L}i_s^* \int_f \mathcal{M}) = -\chi(\mathbf{L}i_s^* \int_f^{-1} \mathcal{M}) + \chi(\mathbf{L}i_s^* \int_f^0 \mathcal{M})) = \tilde{\phi}(s)$

Mais en vertu de la partie ⓑ du théorème 7.2.1. $\chi(\mathbf{L}(i_s^* \int_f^{-1} \mathcal{M}))$ est indépendante de s et $\tilde{\phi}(s) - \tilde{\phi}(0) = m - \chi(\mathbf{L}i_0^* \mathcal{N}) = \hat{v}(\mathcal{N})$.

Supposons maintenant que $\mathcal{M}$ est égal à son localisé le long de Y alors la formule du 2.3 nous donne

$$\tilde{\phi}(s) = \sum_{y \to s} \mathrm{Irr}_y(\mathcal{M}_s) - r\,\chi(U_s)$$

où r est le rang générique de $\mathcal{M}$

$$U_s = X_s \setminus Y_s \quad \text{et} \quad U = X \setminus Y \overset{j}{\hookrightarrow} X .$$

$$\begin{aligned} \text{Soit} \quad \tilde{\phi}(s) - \tilde{\phi}(0) &= \sum_{y \to s} \mathrm{Irr}_y(\mathcal{M}_s) - \mathrm{Irr}_0(\mathcal{M}_0) + r(\chi(U_0) - \chi(U_s)) \\ &= \sum_{y \to s} \mathrm{Irr}_y(\mathcal{M}_s) - \mathrm{Irr}_0(\mathcal{M}_0) - r\,\chi(\mathbb{R}\Phi_f(j_!C_U) \\ &= \phi(s) - \phi(0) \end{aligned}$$

donc $\phi(s) - \phi(0) = \hat{v}(\mathcal{N}) = v(\mathcal{N}) - \mathrm{Irr}_0(\mathcal{N}) \geq 0$ d'où la semi-continuité inférieure de la fonction $s \to \phi(s)$.

Appliquons la proposition 7.1.2. à $\mathcal{N} = \int_f^0 \mathcal{M}$ on trouve

$$\mu = \dim \mathbb{R}\,\Phi_f(\mathcal{F})_{,0} = v(\mathcal{N}) \leq (1+r(\mathcal{N}))\,(\phi(s) - \phi(0)) \ ,$$

donc la constante de la fonction $s \to \phi(s)$ au voisinage de zéro entraîne que $\mathbb{R}\Phi_f^1(\mathcal{F}) = 0$ et donc que la fibre X_0 est non caractéristique pour $\mathcal{M}$. En particulier $Ch(\mathcal{M}) \subset \overline{T_X^* X \cup T_{Y^0}^* X}$.

On a donc l'analogue pour l'irrégularité des résultats de Deligne [cf. L] . De plus le terme correctif $\mathcal{E}xt^2_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}[*X_0], \mathcal{O}_X)_0$ est égal à l'irrégularité de $\mathcal{N} = \int_f^0 \mathcal{M}$ qui joue le rôle des cycles evanescents irréguliers!.

On peut donc distinguer les 3 situations suivantes :

1°/ $\int_f^0 \mathcal{M}$ est lisse : $\phi(s) - \phi(0) = 0$

2°/ $\int_f^0 \mathcal{M}$ a une singularité régulière $\phi(s) - \phi(0) = R^1_f(\mathcal{S})_{,0}$ (cf. exemple 5.4.1)

3°/ $\int_f^0 \mathcal{M}$ a une singularité irrégulière

$$\phi(s) - \phi(0) = \dim R\Phi^1_f(\mathcal{S})_{,0} - \mathrm{Irr}_0\left(\int_f^0 \mathcal{M}\right)$$

(cf. exemples 5.4.2. et 5.4.3) .

7.4. Traitons pour être complet le cas où $\dim S \geq 2$. Soient $f : X \to S$ un morphisme lisse entre variétés analytiques complexes de dimension relative un, Y un fermé analytique fini et plat sur S et $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{D}_X$-module holonorme de support singulier Y et égal à son localisé le long de Y. Comme en 2.4. attachons à cette situation la fonction

$$s \in S \longrightarrow \phi(s),$$

qui est donc constructible semi-continue inférieurement d'après ce qui précède.

<u>Théorème 7.4.1.</u> <u>Si la fonction $s \to \phi(s)$ est localement constante alors les fibres $X_s = f^{-1}(s)$ sont toutes non caracteristiques pour $\mathcal{M}$.</u> En particulier $Ch(\mathcal{M}) \subset T^*_X X \cup T^*_Y X$ ou encore le triplet $(X, \mathcal{N}, f)$ est localement acyclique.

Démonstration du théorème 7.4.1. On raisonne par récurrence sur $\dim S$. On peut supposer que $\dim S \geq 2$. En localisant sur X on peut supposer que $X = \Delta \times S$ où Δ est un petit disque voisinage de 0 dans le plan complexe, S un produit de tels petits disques, f la projection sur S et Y n'ayant qu'un seul point 0 au-dessus de l'origine 0

de S. En tout point suffisamment voisin et distinct de 0 dans S il passe un hyper plan S' tel que sur image réciproque X' par f est non caractéristique. En vertu de l'hypothèse de récurrence les fibres X_s $f^{-1}(s)(s \in S')$ sont non caractéristiques pour la restriction de $\mathcal{M}$ à X' donc sont non caractéristiques pour $\mathcal{M}$. Par conséquent pour $s \neq 0$ X_s sont non caractéristiques pour $\mathcal{M}$. En particulier

$$\mathrm{Ch}(\mathcal{M} \subset T^*_X X \cup \overline{T^*_{Y^0} X} \cup T^*_0 X \ .$$

On peut trouver une projection $S \xrightarrow{pr} \mathbb{C}$ telle que si $pr \circ f = g$ alors $(0,dg(0))$ est un point lisse de $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$. Le même calcul que 4.3. donne si $\mathcal{F} = \mathbb{R}\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X)$

$$R^i\ \Phi_g(\mathcal{F})_{,o} = 0 \qquad i \neq \dim X\text{-}1 = n\text{-}1$$

$$R^{n-1}\ \Phi_g(\mathcal{F})_{,o} = \text{multiplicité de } \mathcal{M} \text{ le long de } T^*_o X \ .$$

Etudions maintenant $\int_f^i \mathcal{M}$. Bien sûr le même raisonnement que précédemment montre qu'ils sont holonomes :

$$\int_f^i \mathcal{M} = 0 \qquad \text{si} \quad (i \neq -1,0)$$

$$\int_f^{-1} \mathcal{M} \quad \text{est lisse sur} \quad S$$

$$\mathrm{Ch}\left(\int_f^o \mathcal{M}\right) \subset T^*_S S \cup T^*_o S \quad \text{et la}$$

multiplicité de $\int_f^o \mathcal{M}$ le long de $T^*_0 S$ est égale à $\dim_{\mathbb{C}} R^{n-1}\ \Phi_g(\mathcal{F})_{,o}$.

Mais $\int_f^o \mathcal{M}$ étant un fibré vectoriel hors de 0 est donc <u>régulier</u> ($\dim S \geq 2$ cf. [D2]). Faisons passer une courbe lisse S' par l'origine dans S et effectuons le changement de base.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

en notant $\mathcal{M}'$ la restriction de $\mathcal{M}$ à X' on a bien sûr

$$\int_{f'}^{0} \mathcal{M}' = \left(\int_{f}^{0} \mathcal{M}\right)_{|S'}$$

et $\mathbb{R}\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_{S'}}\left(\int_{f'}^{0} \mathcal{M}', \mathcal{O}_{S'}\right) \simeq \mathbb{R}\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_{S}}\left(\int_{f}^{0} \mathcal{M}, \mathcal{O}_{S}\right)_{|S'}$

puisque $\int_{f}^{0} \mathcal{M}$ est régulier (cf. [Me 2]).

Donc la multiplicité de $\int_{f'}^{0} \mathcal{M}'$ le long de $T_{0}^{*} S'$ est égale à la multiplicité de $\int_{f}^{0} \mathcal{M}$ le long de $T_{0}^{*}S$. Donc

$$v\left(\int_{f'}^{0} \mathcal{M}'\right) = \text{multiplicité de } \mathcal{M} \text{ le long } T_{0}^{*}X = 0$$

en vertu du 7.1. et 7.3. Donc si $\phi(s) - \phi(0) = 0$ on a

$$\mathrm{Ch}(\mathcal{M}) \subset T_{X}^{*}X \cup \overline{T^{*}_{Y^{0}}X} \text{ .}$$

Maintenant il passe par l'origine de S une hypersurface tel que son image réciproque par f est non caractéristique pour $\mathcal{M}$. L'hypothèse de récurrence permet de conclure que les fibres X_s $(s \in S)$ sont toutes non caractéristiques pour $\mathcal{M}$. D'où le résultat.

RÉFÉRENCES

[B] Bertrand, D. - Travaux récents sur les points singuliers des équations différentielles linéaires - Séminaire Bourbaki n° 538, Juin 1979.

[B] Bertrand, D. - Systèmes différentiels et équations différentielles. Séminaire d'Arithmétique Mars 1983 - Saint Etienne.

[B.M] Briançon, J. - Maisonobe, P. - Idéaux de germes d'opérateurs différentiels à une variable. Enseignement Math, t. 30 (1984), p. 7-38

[Br1] Brylinski, J.L. - Co-homologie d'intersection et faisceaux pervers, Séminaire Bourbaki, 34ème année, n° 585, 1981-1982.

[Br2] Brylinski, J.L. - Transformations canoniques, dualité projective théorie de Lefschetz, transformations de Fourier et sommes trigonométriques (à paraître).

[D1] Deligne, P. - Lettre à Katz datée du 1/12/76.

[D2] Deligne, P. - Equations différentielles à points singuliers réguliers, Springer Lectures Notes n° 163, (1970).

[D3] Deligne, P. - Le formalisme des cycles evanescents S.6.A7 - Exposé n°XIII Springer Lectures Notes n° 340, (1973).

[G.L] Gérard, R. et Levelt, A. - Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier des systèmes d'équations différentielles linéaires Ann. de Inst. Fourier, Grenoble 23, 1 (1973) p. 157-195.

[G] Grothendieck, A. - Formule d'Euler-Poincaré en cohomologie étale, S.G.A.V, exposé X. Springer Lectures Notes n°589, (1977).

[K1] Kashiwara, M. - Al ebraic Study of systems of partial differential equations, Master thesis University of Kyoto (1971).

[K2] Kashiwara, M. - On the maximelly Overdetermined systems of Linear differential equations I, Publ. R.I.M.S. Univ. of Kyoto, 10, 1975, p. 563-579.

[K3] Kashiwara, M. - On holonomic systems of differential equations II - Inventiones math, 49, 1978, p. 121-135.

[K4] Kashiwara, M. - Systèmes d'équations micro-différentiables. Progress in Math 34. Bīrkhaüser Boston (1983).

[Ka] Katz N. Nilpotent connections and the mono dromy theorem. Applications of a result of Tunittin Publ I.H.E.S, 39, (1970), p. 176-232.

[K.L] Katz , N. et Laumon, G. - Transformation de Fourier et majorations de sommes exponentielles (a paraître).

[L] Laumon G. - Semi-continuité du conducteur de Swan (d'après Deligne) dans Caractéristique d'Euler Poincaré seminaire E.N.S. 1978-1979. Astérisque 82-83 (1981), p. 173-219.

[L2] Laumon G. - Sur la catégorie dérivée des $\mathcal{D}_X$-modules filtrés. Lectures Notes in Math, 1016, Springer Berlin-New-York (1983) 151, 237.

[L.M] Le. D.T. et Mebkhout, Z. - Variétés caractéristiques et variétés polaires C.R. Acad. Paris t. 296 (janv. 1983) et Article à paraître.

[M.R] Maisonobe, P. et Rombaldi, J.E. - Solutions du système de Gauss Marin d'un germe de fonction à point critique isolé. In progress in Math., 2, Birkhaüser Boston (1979).

[M1] Malgrange, B. - Sur les points singuliers des équations différentielles. Enseig. Math (20), (1976), 147-176.

[M2] Malgrange, B. - Modules microdifférentiels et classes de Gevrey-Advances in Math (1981) Vol 7B, 513-530.

[M3] Malgrange, B. - La classification des connections irrégulières . In progress in Math 37. Birkhaüser Boston (1983).

[M4] Malgrange, B. - Sur les déformations isomonodromiques, singularités irrégulières. In progress in Math Birkhaüser Boston 37(1983).

[Me 1] Mebkhout,Z - Théorèmes de bidualité pour les $\mathcal{D}_X$-modules holonomes. Arkiv for Mat, 20, (1982) p. 111-124.

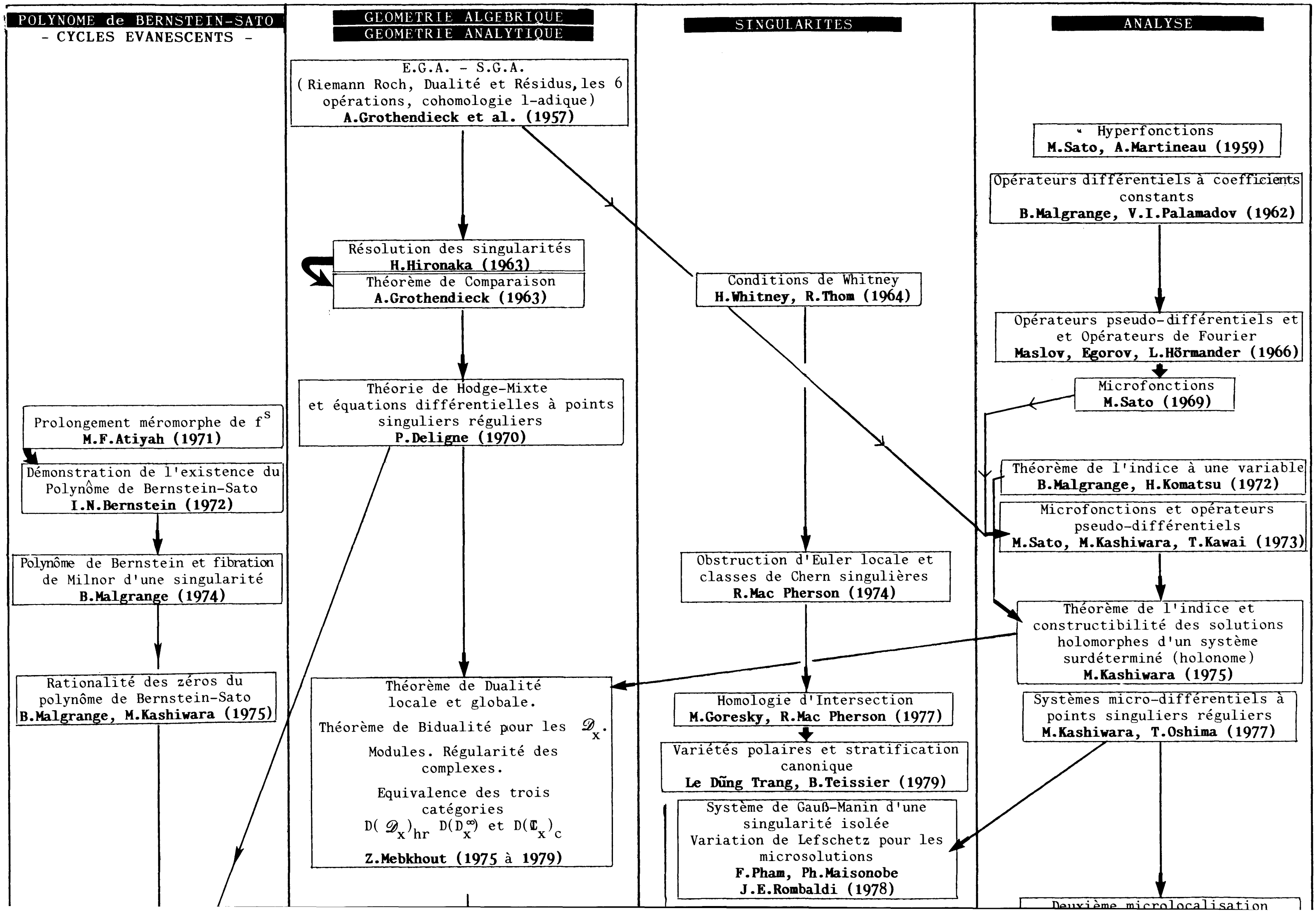
[Me 2] Mebkhout, Z - Une équivalence de catégories et une autre équivalence de catégories Compositio mathematica vol 51 n°1, pp. 55-62 et pp. 63-68. (1984).

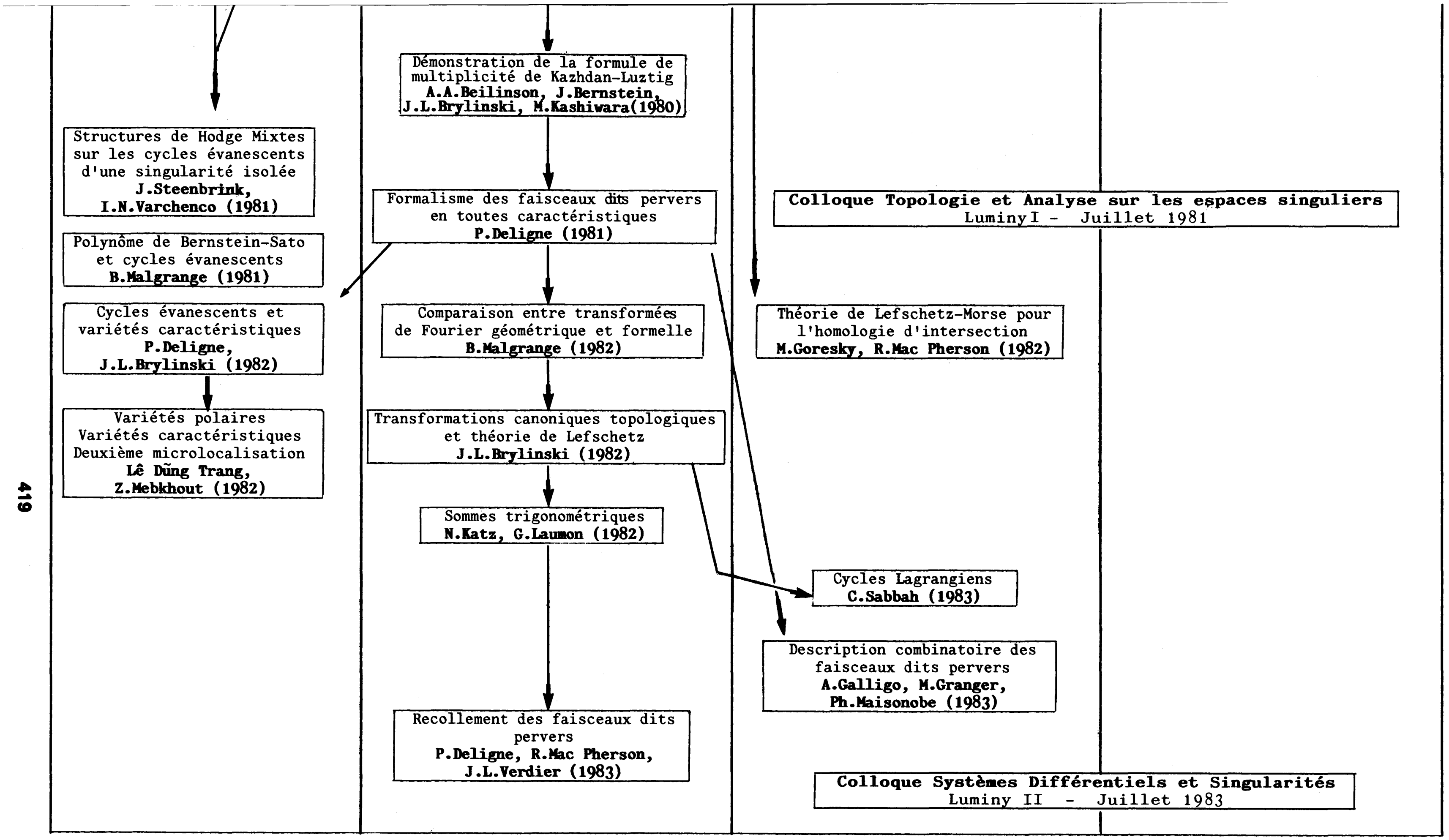
[P] Pham, F. - Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin Progress in Math 2, Birkhaüser Boston (1979).

[R] Raynaud, M. - Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes. Séminaires Bourbaki (1965) n° 286.

[S.K.K] Sato, M. - Kawaï, T; Kashiwara, M.microfunctions and speudo-differential equations Springer Lectures Notes n° 287, (1973).

[S] Serre,J.P. - Représentations linéaires des groupes finis, Collection Methodes Hermann, 1967.


POLYNOME de BERNSTEIN-SATO
- CYCLES EVANESCENTS -
Prolongement méromorphe de f^s
M.F.Atiyah (1971)
Démonstration de l'existence du Polynôme de Bernstein-Sato
I.N.Bernstein (1972)
Polynôme de Bernstein et fibration de Milnor d'une singularité
B.Malgrange (1974)
Rationalité des zéros du polynôme de Bernstein-Sato
B.Malgrange, M.Kashiwara (1975)
GEOMETRIE ALGEBRIQUE
GEOMETRIE ANALYTIQUE
E.G.A. - S.G.A.
(Riemann Roch, Dualité et Résidus, les 6 opérations, cohomologie l-adique)
A.Grothendieck et al. (1957)
Résolution des singularités
H.Hironaka (1963)
Théorème de Comparaison
A.Grothendieck (1963)
Théorie de Hodge-Mixte et équations différentielles à points singuliers réguliers
P.Deligne (1970)
Théorème de Dualité locale et globale.
Théorème de Bidualité pour les $\mathcal{D}_X$. Modules. Régularité des complexes.
Equivalence des trois catégories
$D(\mathcal{D}_X)_{hr}$ $D(D_X^\infty)$ et $D(\mathbb{C}_X)_c$
Z.Mebkhout (1975 à 1979)
SINGULARITES
Conditions de Whitney
H.Whitney, R.Thom (1964)
Obstruction d'Euler locale et classes de Chern singulières
R.Mac Pherson (1974)
Homologie d'Intersection
M.Goresky, R.Mac Pherson (1977)
Variétés polaires et stratification canonique
Le Dũng Trang, B.Teissier (1979)
Système de Gauß-Manin d'une singularité isolée
Variation de Lefschetz pour les microsolutions
F.Pham, Ph.Maisonobe
J.E.Rombaldi (1978)
ANALYSE
Hyperfonctions
M.Sato, A.Martineau (1959)
Opérateurs différentiels à coefficients constants
B.Malgrange, V.I.Palamadov (1962)
Opérateurs pseudo-différentiels et et Opérateurs de Fourier
Maslov, Egorov, L.Hörmander (1966)
Microfonctions
M.Sato (1969)
Théorème de l'indice à une variable
B.Malgrange, H.Komatsu (1972)
Microfonctions et opérateurs pseudo-différentiels
M.Sato, M.Kashiwara, T.Kawai (1973)
Théorème de l'indice et constructibilité des solutions holomorphes d'un système surdéterminé (holonome)
M.Kashiwara (1975)
Systèmes micro-différentiels à points singuliers réguliers
M.Kashiwara, T.Oshima (1977)
Deuxième microlocalisation



ANALYSE et TOPOLOGIE sur les ESPACES SINGULIERS
(Leitfaden)

– Nous proposons au lecteur le tableau suivant pour lui donner une idée de l'état de la question avant la conférence. Nous n'avons pas la prétention d'êtr complets. Cependant nous nous sommes efforcés d'être justes en indiquant les points qui nous semblent les plus importants pour le sujet. Le lecteur constater que le point le plus important de tous est l'introduction des Catégories Dérivées et des Foncteurs Dérivés aussi bien comme moyen d'expression que comm méthode de découverte.

le 29 octobre 1984
Z. Mebkhout