PAULO RIBENBOIM

Quelques développements récents du 17e problème de Hilbert

Astérisque, tome 24-25 (1975), p. 237-241
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__237_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 24-25 (1975)

QUELQUES DEVELOPPEMENTS RECENTS DU 17e PROBLÈME DE HILBERT

par

Paulo RIBENBOIM

Le 17e problème de Hilbert était le suivant :

Si $f \in \mathbb{Q}(X_1,\dots,X_n)$ est une fonction positive définie sur $\mathbb{Q}$ est-ce que f est somme de carrés d'éléments de $\mathbb{Q}(X_1,\dots,X_n)$?

Au moyen de la théorie des corps ordonnés, Artin a montré que ce problème a une réponse affirmative, même sous la forme plus générale suivante :

Si K est un corps ordonné qui est dense dans sa clôture réelle $\bar{K}$, si $f \in K(X_1,\dots,X_n)$ est positive définie sur $\bar{K}$ alors il existe des éléments p_i, $0 < p_i \in K$, $g_i \in K(X_1,\dots,X_n)$ tels que $f = \sum p_i g_i^2$.

Dans le cas où $K = \mathbb{R}$ on peut démontrer ce résultat à l'aide de la logique, plus précisément, de la théorie des modèles.

Le théorème des zéros de Hilbert a été généralisé par Dubois et Risler pour les variétés réelles : Soit K un corps ordonné maximal, I un idéal de $K[X_1,\dots,X_n]$,

$$V(I) = \{x \in K^n \mid f(x) = 0 \ \forall f \in I\}$$

$$Id(V(I)) = \{f \in K[X_1,\dots,X_n] \mid f(x) = 0 \ \forall x \in V(I)\}$$

Alors $Id(V(I))$ est égal au radical réel $\sqrt[R]{I}$ de l'idéal I, c'est-à-dire, l'idéal formé des polynômes $f \in K[X_1,\dots,X_n]$ tels qu'il existe un entier $m \geq 1$ et des éléments $u_1,\dots,u_r \in K[X_1,\dots,X_n]$ tels que :

$$f^m(1 + \sum u_i^2) \in I$$

La démonstration du théorème de Dubois-Risler fait usage du théorème d'Artin.

Un idéal I de K est réel lorsque $I = \sqrt[R]{I}$. C'est équivalent à dire que l'anneau quotient $K[X_1,\dots,X_n]/I$ est produit d'un nombre fini d'anneaux intègres dont les corps des fractions sont des extensions ordonnables de K. En particulier les anneaux de coordonnées des variétés réelles irréductibles V sont du type $K[V] = K[X_1,\dots,X_n]/P$, où P est un idéal premier réel ; le corps des fractions $K(V)$ est une extension ordonnable de K.

Le 17e problème de Hilbert pour les variétés réelles est le suivant : si $f \in K(V)$ est positive définie sur V, est-ce que f est somme de carrés de $K(V)$?

Danielle Gondard et moi avons répondu à cette question par l'affirmative en utilisant la théorie des modèles (voir [1]).

En outre, il résulte d'un lemme de Pfister que si V a pour dimension d , alors toute somme de carrés dans K(V) est une somme de 2^ carrés.

D'autre part, nous conjecturons qu'il y a une somme de d+1 carrés qui n'est pas une somme de d carrés. Cette conjecture est prouvée dans les cas suivants :

1) lorsque d = 1 ,

2) lorsque V est une variété rationnelle, c'est-a-dire K(V) est une extension transcendante pure de K (résultat de Cassels),

3') lorsqu'il existe une base de transcendance . . . , de K(V)|K telle que le degré de K(V) sur K(|^, . . . , soit impaire.

Un autre développement du 17e problème de Hilbert concerne les matrices symétriques.

Soit K un corps ordonné, R une clôture réelle de K , A = (A..) une matrice symétrique $n_x n$ à coefficients dans K . Si la forme quadratique sur R associée à A est positive, on dit que A est positive : V u = (u^, . . . , u) ç R^n on a $S A_{ij}, u_i u_J >0$. Cette définition est indépendante du choix de la clôture réelle R de K . Une matrice symétrique A sur un corps quelconque K est dite naturellement positive lorsque A est positive, quel que soit l'ordre donné sur K . (Si K n'est pas ordonné, toute matrice symétrique A est naturellement positive").

Dans un autre article, Danielle Gondard et moi-même ([2]") avons généralisé un théorème de Rita Ciampi :

Si K est un corps de caractéristique différente de 2 , une matrice symétrique à coefficients dans K est naturellement positive si et seulement si elle est somme de carrés de matrices symétriques à coefficients dans K .

Maintenant soit F = une matrice symétrique dont chaque F_ appartient à K(X^, . . . , X^") . On dit que F est définie au point x = (x^ >... , $^x{}_m$) € K^m lorsque chaque F_{ij} s'écrit $F_{ij} = G_{ij} / H_{ij}$ avec G_{ij}, H_{ij} É [X_1 , . . . , X_m], et H_(x~) ^ 0 . On dit que F est définie positive sur K^m lorsque la matrice F(x") = (F_(x)) est positive en tout point x où elle est définie.

Au moyen de la théorie des modèles, nous prouvons :

Une matrice symétrique à coefficients dans K(X^, ... X J (K corps ordonné maximal) est définie positive si et seulement si elle est somme de carrés de matrices symétriques à coefficients dans K(X^, ... X ^) .

On peut alors considérer les questions quantitatives correspondantes. Soit Pf(n, m) la constante de Ffister pour les matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans K(X_1 , . . . ,X_m) , c'est le plus petit entier q tel que toute somme de carrés de matrices comme ci-dessus soit la somme de q carrés.

Nous démontrons que :

m+1 < Pf(n, m) S 2^m

La minoration résulte immédiatement d'un lemme de Cassels ; pour la majoration, nous utilisons les résultats correspondants pour les variétés réelles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. GONDARD et P. RIBENBOIM. - Fonctions définies positives sur les variétés réelles. Bull. Sci. Math. , 2e série, 98, 1974, 39-47.

[2] D. GONDARD et P. RIBENBOIM. - Le 17e problème de Hilbert pour les matrices. Bull. Sci. Math. , 2e série, 98, 1974, 49-56.

(Dans ces articles, on peut trouver des références plus complètes).

Paulo RIBENBOIM
Queen's University-
Department of Mathematics
Kingston
ONTARIO
Canada