MOHAMMED SBAÏ

Cocatégorie rationnelle d'un espace topologique

Astérisque, tome 113-114 (1984), p. 288-291

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__113-114__288_0>

COCATÉGORIE RATIONNELLE D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE

SBAÏ Mohammed

Dans toute la suite S sera un espace topologique, pointé, 1-connexe, à cohomologie rationnelle de type fini $(\mathbb{L}(U),\partial)$ le modèle minimal de Quillen de S. $(\Lambda Z,D)$ le modèle filtré de S.

I - DÉFINITIONS.

En dualisant (au sens Eckmann-Hilton) les deux définitions de $\mathrm{Cat}_o(S)$ données par [F-H] et [L-S], nous obtenons deux définitions équivalentes de $\mathrm{Cocat}_o(S)$.

1ère définition : $\mathrm{Cocat}_o(S) \leqslant n$ <==> La projection canonique $\pi : \mathbb{L}(U) \to \mathbb{L}(U)/_{\mathbb{L}^{>n}(U)}$ admet une rétraction homotopique

(i.e.) α étant un modèle de π, il existe β homomorphisme d'a.l.d.g. tel que :

$$\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_{\mathbb{L}(U)} \qquad \begin{array}{ccc} (\mathbb{L}(U),\partial) & \xrightarrow{\ \pi\ } & (\mathbb{L}(U)/\mathbb{L}^{>n}(U),\bar{\partial}) \\ & \searrow^{\alpha} & \uparrow \simeq \\ & & (\mathbb{L}(W),\partial') \xrightarrow{\ \beta\ } (\mathbb{L}(U),\partial) \end{array}.$$

2ème définition : $\mathrm{Cocat}_o(S) \leqslant n$ <==> Il existe r homomorphisme d'a.d.g.c. tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda Z,D) & \xrightarrow{\ r\ } & (\Lambda Z_{<n},D) \\ & \searrow^{=} & \downarrow i \\ & & (\Lambda Z,D) \end{array} \qquad i_o r = \mathrm{Id}_{\Lambda Z}.$$

Exemples :

(1) $\mathrm{Cocat}_o(S) = 1 \iff H^*(S,\mathbb{Q})$ est une a.g.c. libre.

(2) $\mathrm{Cocat}_o(\mathbb{C}P^n) = \mathrm{Cocat}_o(S^{2n}) = 2$ et plus généralement si S est formel :

$\mathrm{Cocat}_o(S) = 2 \iff H^*(S,\mathbb{Q})$ est une intersection complète

$\iff \dim Z_2 = 0.$

(3) Dans l'exemple précédent l'hypothèse de formalité est nécessaire, en effet, l'espace coformel qui admet pour algèbre de Lie d'homotopie $\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{L}^{(\alpha,\beta)} / \mathbb{L}^{\geqslant 3}(\alpha,\beta)$ avec $|\alpha| = |\beta| = 2$, n'est pas formel il est de $\mathrm{Cocat}_o = 2$ bien que $\dim Z_2 \neq 0$.

II - $\mathrm{Cocat}_o(S)$ ET LES AUTRES INVARIANTS.

Comme dans le cas de $\mathrm{Cat}_o(S)$, on peut approcher $\mathrm{Cocat}_o(S)$ par des invariants en dualisant les invariants classiques : $e_o(S)$; "product lenght", dimension formelle de la cohomologie.

Définitions :

a) Soit une a.l.g. L et

$L = L^{(1)} \supset L^{(2)} \supset \dots \supset L^{(p)} \supset \dots$

sa suite centrale descendante, on définit :

$\mathrm{nil}(L) = \inf\{p / L^{(p+1)} = 0\}$.

b) N = dimension formelle de $\pi_*(S) \otimes Q$ si $\pi_N(S) \otimes \mathbb{Q} \neq 0$ et $\pi_i(S) \otimes \mathbb{Q} = 0$ pour $i > N$.

c) La filtration en longueur des crochets, sur le modèle de Quillen $(\mathbb{L}(U),\partial)$ engendre une suite spectrale de deuxième quadrant convergente, elle est de terme $E_2 = \pi_*(\Omega S_f) \otimes \mathbb{Q} \implies \pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}$.

S_f désigne l'espace formel associé à S.

Posons alors $\varepsilon_o(S) = \sup\{p \; ; \; E^{-p,*} \neq 0\}$.

Remarquons que l'algèbre enveloppante de cette suite spectrale est la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de l'espace S

$$E_2 = \mathrm{Tor}_{H_*(S)}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \implies H_*(\Omega S,\mathbb{Q}).$$

PROPOSITION :

$\mathrm{nil}\, \pi_*(\Omega S)\otimes\mathbb{Q} \leqslant \varepsilon_o(S) \leqslant \mathrm{Cocat}_o(S) \leqslant$ dimension formelle de $\pi_*(S) \otimes \mathbb{Q}$.

si en outre S est formel ou coformel, on a :

$$\mathrm{nil}\ \pi_*(\Omega S) \otimes Q = \varepsilon_o(S) = \mathrm{Cocat}_o(S).$$

III - LIMITE DE LA DUALITÉ.

Le "mapping theorem" de FÉLIX-HALPERIN :
"Etant donné $f : S \to S'$ application continue telle que

$f_* : \pi_*(S) \otimes \mathbb{Q} \to \pi_*(S') \otimes \mathbb{Q}$ soit injectif, alors

$$\mathrm{cat}_o(S) << \mathrm{cat}_o(S')."$$

n'admet aucun énoncé dual.

En effet, f^* étant l'homomorphisme induit en cohomologie rationnelle
$f^* : H^*(S',\mathbb{Q}) \to H^*(S,\mathbb{Q})$.

Nous avons les quatre situations suivantes :

f^* injectif	$\mathrm{Cocat}_o(S) \leqslant \mathrm{Cocat}_o(S')$	$P_1 : S^5 \times S^2 \twoheadrightarrow S^5$ $\mathrm{Cocat}_o = 2 \qquad \mathrm{Cocat}_o = 1$
	$\mathrm{Cocat}_o(S) \geqslant \mathrm{Cocat}_o(S)$	$S^3 \times S^3 \times S^3 \xrightarrow{f} S^6 \vee S^6$ $\mathrm{Cocat}_o = 1 \qquad \mathrm{Cocat}_o = \infty$ $\Lambda(x,y,z) \xleftarrow{f^*} [1,a,b]$ $x.y \longleftarrow a$ $y.z \longleftarrow b$
f^* surjectif	$\mathrm{Cocat}_o(S) \leqslant \mathrm{Cocat}_o(S')$	$S^3 \vee S^3 \hookrightarrow S^3 \times S^3$ $\mathrm{Cocat}_o = \qquad \mathrm{Cocat}_o = 1$
	$\mathrm{Cocat}_o(S) \geqslant \mathrm{Cocat}_o(S')$	$S^5 \xrightarrow{f} (S^3 \vee S^3) \times S^5_x$ $\mathrm{Cocat}_o = 1 \qquad \mathrm{Cocat}_o = \infty$ avec $[f] = [\alpha,\beta] + x$.

IV - PROBLÈMES OUVERTS.

1) montrer que $\mathrm{Cocat}_o(S) = \mathrm{Cocat}(S_{\mathbb{Q}}) \leqslant \mathrm{Cocat}(S)$ où $S_{\mathbb{Q}}$ et le $\mathbb{Q}$-localisé de S et Cocat définie par Ganéa [G].

2) Etudier le rapport entre $\mathrm{Cocat}_o(S)$ et le nombre d'étages dans la décomposition de Postnikov de $S_{\mathbb{Q}}$ (c.f. [L-S]).

RÉFÉRENCES

[F-H] Y. FÉLIX, S. HALPERIN - Rational L.S. categorie and its applications, (A paraître, Trans. of A.M.S.).

[G] T. GANÉA - Some problems on numerical homotopy invariants, Springer Lecture Notes N° 249.

[L-S] J.M. LEMAIRE et F. SIGRIST - Sur les invariants d'homotopie liés à la L.S. catégorie, Comment. Math. Helv. 56 (1981), 103-122.