JEAN-MICHEL LEMAIRE

Sur le type d'homotopie rationnelle des espaces de Ganéa

Astérisque, tome 113-114 (1984), p. 238-247
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__113-114__238_0>

SUR LE TYPE D'HOMOTOPIE RATIONNELLE DES ESPACES DE GANÉA

PAR

JEAN-MICHEL LEMAIRE

1. INTRODUCTION.

Soit X un espace simplement connexe, pointé, ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe de type fini. Rappelons la définition de Ganéa de la catégorie de Lusternik Schnirelmann d'un espace : soit

$$F(n) \longrightarrow X(n) \xrightarrow{p_n} X$$

la suite de fibrations définie par récurrence comme suit : p_o est la fibration de l'espace des chemins

$$\Omega X \longrightarrow EX \xrightarrow{p_o} X$$

et si p_n est définie pour $n \geq 0$, soit

$$\tilde{p}_{n+1} : X(n) \cup CF(n) \longrightarrow X$$

l'extension de p_n au cône de l'inclusion de la fibre qui envoie ce cône sur le point de base. Alors p_{n+1} s'obtient en convertissant $\tilde{p}_{n+1}$ en une fibration par la méthode habituelle.

On a les résultats suivants ([4] , [5])

PROPOSITION 1.1. a) la fibre F(n) de p_n a le type d'homotopie du joint itéré n-fois

$$\Omega X * \Omega X * \ldots * \Omega X = \Omega X^{*(n+1)}$$

b) on a un carré homotopiquement cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X(n) & \xrightarrow{p_n} & X \\ \downarrow & & \downarrow \Delta \\ T_n^1 X & \longrightarrow & X^{n+1} \end{array}.$$

où $T_n^1 X$ est le sous-espace de X^{n+1} formé des (n+1)-uples dont une coordonnée au moins égale au point de base.

PROPOSITION 1.2. cat $X \leq n \Leftrightarrow p_n$ admet une section

Cette approche de cat X se laisse "localiser" à tout ensemble de nombres premiers (cf [12]); en particulier on peut définir

$$\mathrm{cat}_o X = \mathrm{cat}\, X_o$$

où X_o désigne le type d'homotopie de X localisé à tous les nombres premiers. Il est clair que $\mathrm{cat}_o X$ est un invariant du type d'homotopie rationnelle de X et que $\mathrm{cat}_o X \leq \mathrm{cat}\, X$.

Etant donné que l'homotopie rationnelle simplement connexe admet une traduction fidèle en termes d'algèbres différentielles graduées (ADGC) ou d'algèbres de Lie différentielles graduées (LDG), il doit donc être possible de définir - et même de calculer ! - le nombre $\mathrm{cat}_o X$ en termes d'ADGC ou de LDG.

Ce programme a été rempli pour les ADGC par Y. Félix et S. Halperin [2] . L'un des résultats fondamentaux de leur travail est le suivant :

PROPOSITION 1.3. a) Soit $\mathcal{M}_X = (\Lambda V, d)$ le modèle minimal de Sullivan (ADGC) de l'espace X, et soit $X[n]$ l'espace - ou plutôt le type d'homotopie rationnelle - dont le modèle est quasi-isomorphe à

$$\mathcal{M}_X / \overline{\mathcal{M}}_X^{n+1}$$

où $\overline{\mathcal{M}}_X^{n+1}$ désigne la (n+1)-ième puissance de l'idéal d'augmentation de $\mathcal{M}_X$. Pour tout $n \geq 0$, il existe un bouquet de sphères $S[n]$ et une équivalence d'homotopie rationnelle

$$X(u) \sim X[n] \vee S[n] .$$

b) Le morphisme d'ADGC (unique à homotopie près)

$$X \xrightarrow{p_n'} \mathcal{M}_{X[n]}$$

qui relève le quotient $\mathcal{M}_X \to \mathcal{M}_X / \overline{\mathcal{M}}_X^{n+1}$ admet une rétraction si et seulement si $\mathrm{cat}_o X \leq n$.

L'objet de cette note est de montrer qu'en général on peut encore extraire un bouquet de sphères "parasites" du type d'homotopie rationnelle de $X[n]$; ce faisant, nous formulerons une interprétation de $\mathrm{cat}_o X$ dans le cadre des algèbres de Lie graduées.

2. Le cas $n \leq 2$.

Nous traitons ce cas à part, car le point de vue des LDG permet de donner une autre démonstration de 1.3 dans ce cas.

Le cas n=0 est trivial. Pour n=1, on a : $X(1) = \Sigma\Omega X$ et p_1 est l'évaluation $\Sigma\Omega X \longrightarrow X$.

Rationnellement, la suspension $\Sigma\Omega X$ a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères : ce bouquet est déterminé par son homologie réduite $\overline{H}_*(\Sigma\Omega X) = s\,\overline{H}_*(\Omega X)$.

Rappelons que $\pi(X) = \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ est une algèbre de Lie graduée pour le produit de Samelson, et que $H_*(\Omega X)$ est l'algèbre enveloppante de $\pi(X)$ d'après Milnor et Moore [7] . Posant pour abréger $\pi = \pi(X)$, il vient donc

$$\overline{H}_*(X(1)) = s\,\overline{U\pi}$$

D'autre part $\mathcal{M}_X = (\Lambda V, d)$, V s'identifie à $\mathrm{Hom}(\pi_*(X), \mathbb{Q}) = \mathrm{Hom}(s\pi, \mathbb{Q})$ et $\mathcal{M}_{X[1]} \sim \mathcal{M}_X / \overline{\mathcal{M}}_X^2 = \mathbb{Q} \oplus V$ où $\mathbb{Q} \oplus V$ est muni du produit trivial $(V.V=0)$ et de la différentielle nulle.

Ainsi $X[1]$ est un bouquet de sphères et $\overline{H}_*(X[1]) = s\,\pi$ de sorte que la différence entre $X[1]$ et $X(1)$ est mesurée par un supplémentaire de l'algèbre de Lie π dans son algèbre enveloppante.

Pour n=2, rappelons que $X(2)$ est le cône de l'inclusion de la fibre de p_1

$$\Omega X * \Omega X \sim F(1) \longrightarrow \Sigma\Omega X$$

(qui est homotope à l'application de Hopf pour le H-espace ΩX). Notons que la suite exacte d'homotopie de la fibration fournit la suite exacte courte d'algèbres de Lie :

$$(2.1) \qquad 0 \longrightarrow \pi(\Omega X * \Omega X) \longrightarrow \pi(\Sigma\Omega X) \longrightarrow \pi(X) \longrightarrow 0$$

car $\pi(p_1)$ est surjective : pour le voir, il suffit de remarquer que

$$\Omega p_1 : \Omega\Sigma\Omega X \longrightarrow \Omega X$$

admet une section, à savoir l'adjointe de l'identité $\alpha_{\Omega X} = \Omega X \longrightarrow \Omega\Sigma(\Omega X)$ de sorte que le morphisme d'algèbres de Hopf

$$H_*(\Omega_{p_1}) : H_*(\Omega\Sigma X) \longrightarrow H_*(\Omega X)$$

est surjectif. De plus, les algèbres de Lie

$$\pi(\Omega X * \Omega X) = \pi(\Sigma(\Omega X \wedge \Omega X) \text{ et } \pi(\Sigma\Omega X)$$

sont libres : d'après Bott-Samelson et Milnor-Moore, on a

$$\pi(\Sigma\Omega X) = L(\overline{H}_*(\Omega X)) = L(\overline{U\pi})$$

et $\pi(\Omega X * \Omega X) = L(\bar{H}_*(\Omega X) \otimes \bar{H}_*(\Omega X)) = L(\overline{U\pi} \otimes \overline{U\pi})$

La suite exacte (2. 1) est donc en particulier une présentation de l'algèbre de Lie $\pi(X)$, et l'espace $X(2)$ est un CW-complexe associé à cette présentation au sens de [6] , 3.3.4.

Notons en passant que si A est une algèbre de Lie graduée connexe quelconque, en prenant pour X l'espace coformel d'homotopie A on obtient par (1.2) une présentation exacte naturelle de A :

$$0 \longrightarrow L(\overline{UA} \otimes \overline{UA}) \longrightarrow L(\overline{UA}) \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

dont il serait intéressant de préciser les flèches.

Regardons à présent l'espace $X[2]$. Son modèle de Sullivan est quasi-isomorphe à $\mathcal{M}_X/\bar{\mathcal{M}}_X^3$. Si l'on fixe un espace vectoriel générateur $V = \mathrm{Hom}(s\pi, \mathbb{Q})$ de $\mathcal{M}_X$, on peut écrire

$$\mathcal{M}_X/\bar{\mathcal{M}}_X^3 = \mathbb{Q} \oplus V \oplus \Lambda^2 V$$

Rappelons que si $T : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$ désigne "le signe de Koszul", défini par $T(a\otimes b) = (-1)^{\mathrm{deg}a.\mathrm{deg}b}\, b \otimes a$, et s l'isomorphisme de suspension, on a

$$(S \otimes S) \circ T = -T \circ (S \otimes S)$$

de sorte que le dual de $\Lambda^2(s\pi) = s\pi \otimes s\pi / \mathrm{Im}(id-T)$ est isomorphe via $S \otimes S$ à la composante homogène de degré (de Lie) deux de l'algèbre de Lie libre sur π , c'est-à-dire :

$$\mathbb{L}^2(\pi) = \mathrm{Ker}\ (id + T) \subset \pi \otimes \pi$$

Dans ces conditions, la différentielle

$$d : V \longrightarrow \Lambda^2 V$$

de $\mathcal{M}_X/\bar{\mathcal{M}}_X^3$ s'identifie via les isomorphismes de suspension s et $s \otimes s$ à la transposée du crochet de π :

$$[\ ,\ ] : L^2(\pi) \longrightarrow \pi$$

Ceci posé, un modèle LDG non minimal en général, de $X[2]$ est

$$\mathcal{L}\,\mathrm{Hom}(\mathcal{M}_X, \mathbb{Q})$$

où $\mathcal{L} = P\Omega$ est l'algèbre deLie des primitifs de la cobar-construction sur la coalgèbre $\mathrm{Hom}(\mathcal{M}_X, \mathbb{Q})$ (cf [10] , App. B). On a donc, en posant $\pi = \pi(X)$,

$$\mathcal{L}\,\mathrm{Hom}(\mathcal{M}_X, \mathbb{Q}) = \mathbb{L}\,(\pi \oplus s\,\mathbb{L}^2(\pi))$$

et la différentielle (de degré -1) de cette LDG est nulle sur π et définie sur $s\,\mathbb{L}^2(\pi)$ comme suit : notons $[[a,b]]$ le crochet des éléments a,b de π dans $\mathbb{L}(\pi)$, à ne pas confondre avec leur crochet dans $\underline{\underline{\pi}}$ noté $[a,b]$; alors

$$\forall\ s\,[[a,b]] \in s\,\mathbb{L}^2(\pi),\ ds\,[[a,b]] = -[a,b] + [[a,b]] \in \mathbb{L}(\pi)$$

Ainsi $X[2]$ apparait comme le cw-complexe associé à la présentation "canonique" de $\underline{\underline{\pi}}$

$$(2.2) \qquad \mathbb{L}(\mathbb{L}^2(\underline{\underline{\pi}})) \longrightarrow \mathbb{L}(\underline{\underline{\pi}}) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}} \longrightarrow 0$$

qui consiste à identifier π au quotient de $\mathbb{L}(\pi)$ par l'idéal engendré par les éléments de la forme $[[a,b]] - [a,b]$.

L'inclusion $\pi \longrightarrow \bar{U}\pi$ définit un morphisme de présentations

$$\begin{array}{lcccccccc}
(2.2) & & \mathbb{L}(\mathbb{L}^2\pi) & \longrightarrow & \mathbb{L}(\pi) & \longrightarrow & \pi & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
(2.1) & 0 \longrightarrow & \mathbb{L}(\bar{U}\pi \otimes \bar{U}\pi) & \longrightarrow & \mathbb{L}(\bar{U}\pi) & \longrightarrow & \pi & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

qui induit une application $X[2] \longrightarrow X(2)$ des cw-complexes associés. On voit alors comme dans [6] , 2.5.2 que cette application est l'inclusion d'un facteur d'un bouquet dont l'autre facteur est un bouquet de sphères, qui correspondent bijectivement aux relations redondantes de (2.1) par rapport à (2.2).

Observons à présent que la présentation (2.2) n'est pas minimale en général : en fait, elle l'est si et seulement si π est une algèbre de Lie abélienne, ce qui équivaut également à la minimalité du modèle $\mathscr{L}\mathrm{Hom}(\mathscr{M}_X;\mathbb{Q})$.

Par suite, si $X\langle 2\rangle$ désigne un cw-complexe associé à une présentation minimale de π, on aura une équivalence d'homotopie rationnelle

$$X[2] \sim X\langle 2\rangle \vee S'\langle 2\rangle$$

où $S'\langle 2\rangle$ est un bouquet de sphères correspondant aux relations de (2.2) redondantes par rapport au système minimal de relations choisis.

En vue de généraliser cette dernière observation à $n > 2$, rappelons d'abord que le dual algébrique de l'algèbre $\mathscr{M}_X/\bar{\mathscr{M}}_X^{n+1}$ est la coalgèbre $P_n\mathrm{Hom}(\mathscr{M}_X,\mathbb{Q})$, où P_* désigne la filtration primitive. Un modèle LDG de $X[n]$ est donc

$$\mathscr{L}P_n\ \mathrm{Hom}(\mathscr{M}_X,\mathbb{Q})$$

qui n'est autre que le modèle "bifiltré" LDG de Y. Félix [1] .

Le passage du modèle "bifiltré" au modèle "filtré" est ce qui généralise le passage de la présentation (2.2) à une présentation minimale.

3. Modèles filtrés de LDG.

La notion de modèle filtré a été introduite dans le contexte ADGC par J. Stasheff et S. Halperin ([3]), en vue d'étudier les types d'homotopie rationnelle dont l'algèbre de cohomologie est donnée. L'idée de [3] consiste à construire le modèle minimal de l'algèbre de cohomologie, considérée comme algèbre différentielle à différentielle nulle, et à observer que l'ensemble des types d'homotopie rationnelle admettant cette cohomologie est paramétré par certaines modifications de la différentielle du modèle de la cohomologie. L'approche symétrique dans le cadre LDG a été développée dans [9]. Pour la commodité du lecteur, nous indiquons une méthode rapide de construction du modèle filtré LDG (voir également [1], [11]).

Rappelons d'abord qu'on peut définir, comme dans le cas classique non gradué, l'algèbre $\mathscr{C}^*(\pi_*)$ des cochaînes sur une algèbre de Lie graduée π_* : c'est l'algèbre commutative libre bigraduée sur le dual algèbrique de π_*, placé en bidegrés (en haut) $(1,*)$; la différentielle est de bidegré $(1,0)$ et induite par le crochet de π_*. Si X est un espace (1-connexe, etc...), son modèle minimal de Sullivan $\mathscr{M}_X$ est isomorphe en tant qu'algèbre à $\mathscr{C}^*(\pi(X))$: plus précisément, si l'on filtre $\mathscr{M}_X$ par les puissances de l'idéal d'augmentation $\bar{\mathscr{M}}_X$, la suite spectrale correspondante vérifie :

$$E_0^{p,*} = E_1^{p,*} = \mathscr{C}^{p,*}(\pi(X))$$

et ce dernier isomorphisme est un isomorphisme d'algèbres différentielles bigraduées. En particulier

$$E_2^{p,*} = \mathrm{Ext}^p_{U\,\pi(X)}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$$

et la suite spectrale converge vers $H(\mathscr{M}_X) = H^*(X)$.

Il s'agit là de la suite spectrale "de Milnor-Moore", décrite sous forme duale dans [8] et sous la présente forme dans ([2], § 9).

Soit $\mathscr{M}'_X = \mathrm{Hom}(\mathscr{M}_X,\mathbb{Q})$ le dual algebrique de $\mathscr{M}_X$: comme X est supposé de type fini, $\mathscr{M}'_X$ est une coalgèbre différentielle graduée et nous pouvons considérer comme ci-dessus l'algèbre de Lie DG $\mathscr{L}\mathscr{M}'_X = P\Omega\mathscr{M}'_X$. Si l'on oublie la différentielle on a $\mathscr{L}\mathscr{M}'_X = \mathbb{L}(s^{-1}\bar{\mathscr{M}}'_X)$ et l'on peut définir une filtration croissante $(F_p\mathscr{L}\mathscr{M}'_X)$ de l'algèbre de Lie $\mathscr{L}\mathscr{M}'_X$ en filtrant les générateurs par la filtration primitive diminuée d'une unité. On vérifie sans peine que $E^0 = E^1$ dans la suite spectrale correspondante, et que $E^1 = \mathscr{L}\mathscr{C}_*\,\pi(X)$ comme algèbres de Lie différentielles bigraduées, et enfin que $E^2_{p,*} = 0$ si $p > 0$, $E^2_{0,*} = \pi(X)$.

Ceci fait apparaître $\mathscr{L}\mathscr{M}'_X$ comme le résultat d'une modification de la différentielle de $\mathscr{L}\mathscr{C}_* \pi(X)$ qui ne change pas l'homologie. Néanmoins, $\mathscr{L}\mathscr{C}_* \pi(X)$ est un modèle non minimal de $\pi(X)$, considérée comme LDG à différentielle nulle. Pour obtenir un modèle filtré analogue au modèle de Halperin et Stasheff, il faut quotienter $\mathscr{L}\mathscr{M}'_X$ par un idéal acyclique convenable. Un tel idéal peut se construire comme suit. Considérons le quotient canonique

$$\mathscr{L}\mathscr{M}'_X \longrightarrow s^{-1}\mathscr{M}'_X = Q\mathscr{L}\mathscr{M}'_X$$

c'est un morphisme d'espaces vectoriels différentiels filtrés, vérifiant $E^o=E^1$. En choisissant des bases appropriées, on voit sans trop de peine qu'on peut choisir un supplémentaire C de l'homologie de $Q\mathscr{L}\mathscr{M}'_X$ qui soit filtré, et vérifie $E^oC= E^1C$ et $E^2C = 0$, et qu'on peut relever C en un sous-complexe filtré C' de $\mathscr{L}\mathscr{M}'_X$ ayant les mêmes propriétés. Soit $\mathscr{L}_X$ le quotient de $\mathscr{L}\mathscr{M}'_X$ par l'idéal engendré par C'. L'algèbre de Lie $\mathscr{L}_X$ est libre et le quotient $\mathscr{L}\mathscr{M}'_X \twoheadrightarrow \mathscr{L}_X$ est un quasi-isomorphisme sur les indécomposables, c'est donc un quasi-isomorphisme. De plus, $\mathscr{L}_X$ est muni de la filtration induite par celle de $\mathscr{L}\mathscr{M}'_X$ et l'on a

(3.1)
(a) $E^o\,\mathscr{L}_X = E^1\,\mathscr{L}_X$ est minimale
(b) $E^2_{o,*}\,\mathscr{L}_X = \pi(X)$
(c) $E^2_{p,*}\,\mathscr{L}_X = 0 \quad p\neq 0$

D'autre part, pour la filtration induite sur les indécomposables :

$$(3.2) \quad \forall_{p,q}\ ,\ E^o_{p,q}Q\,\mathscr{L}_X = E^1_{p,q}\,Q\,\mathscr{L}_X = E^2_{p,q}\,Q\,\mathscr{L}_X = \mathrm{Tor}^{U\,\pi(X)}_{p+1,q}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$$

et cette suite spectrale est isomorphe à partir du niveau E^2 au dual de la suite "de Milnor-Moore" ci-dessus. En particulier

$$E^\infty\,Q\,\mathscr{L}_X = E^o\,H_*(X\,;\mathbb{Q})$$

où la filtration de $H_*(X)$ est induite par la filtration primitive de $\mathscr{M}'_X$.

L'algèbre de Lie différentielle filtrée $\mathscr{L}_X$ est donc l'analogue LDG du modèle filtré ADGC de Halperin et Stasheff.

4. MODÈLES FILTRE LDG ET FILTRATION DE GANÉA.

Introduisons deux notations. Soit $\mathscr{L}^{(n)}_X$ la sous-algèbre de Lie de $\mathscr{L}_X$ engendrée par les éléments de filtration $\leq n$. On notera que $F_n\,\mathscr{L}_X \subset \mathscr{L}^{(n)}_X$ mais que l'inclusion est stricte pour $n > 0$ en général (i.e si X n'est pas un bouquet de sphères). Notons d'autre part $X\langle n\rangle$ le type d'homotopie dont un modèle (non minimal) LDG est $\mathscr{L}^{(n)}_X$.

THÉORÈME 4.1.

a) Il existe un bouquet de sphères $S'\langle n\rangle$ et une équivalence d'homotopie rationnelle

$$X[n] \sim_{\mathbb{Q}} X\langle n\rangle \vee S'\langle n\rangle$$

b) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{cat}_o X \leq n$

(ii) X est un rétracte de $X\langle n\rangle$

(iii) Le modèle minimal de Quillen L_X de X est un rétracte dé $\mathscr{L}_X^{(n)}$

Avant de démontrer 4.1, observons que si gl.dim $\underline{\underline{\pi}}(X) \leq n$, alors $\mathscr{L}_X^{(p)} = \mathscr{L}_X$ pour $p \geq n$ d'après 3.2. Par suite

COROLLAIRE 4.2.

Si gl. dim $\pi(X) \leq n$, on a les propriétés suivantes

(i) $\mathrm{cat}_o X \leq n$

(ii) Pour $p \geq n$, l'espace de Ganéa $X(n)$ a le type d'homotopie rationnelle d'un bouquet de X et de sphères. En particulier $\mathrm{cat}_o\, X(n) = \mathrm{cat}_o X$ pour $p \geq n$.

REMARQUE 4.3.

On peut se demander si la suite des entiers $\mathrm{cat}_o\, X(n)$ est toujours croissante et stationnaire pour $n \geq \mathrm{cat}_o X$. C'est par exemple le cas pour $\mathbb{C}\,\mathbb{P}(k)$ bien que gl. dim $\pi(\mathbb{C}\,\mathbb{P}(k)) = +\infty$.

DÉMONSTRATION DE 4.1.

Par construction de $\mathscr{L}_X$, la surjection canonique

$$\varpi : \mathscr{L}\mathscr{M}'_X \longrightarrow \mathscr{L}_X = \mathscr{L}\mathscr{M}'_X/C'$$

est un quasi-isomorphisme filtré qui induit un isomorphisme au niveau $E^2 = E^\infty$:

$$E^2_{p,*}\mathscr{L}\mathscr{M}'_X \xrightarrow{=} E^2_{p,*}\mathscr{L}_X = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 0 \\ \pi(X) & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

Considérons la restriction de ϖ à $\mathscr{L}P_n\mathscr{M}'_X$:

$$\varpi : \mathscr{L}P_n\mathscr{M}'_X \longrightarrow \mathscr{L}_X^{(n)} = \mathscr{L}P_n\mathscr{M}'_X/(F_nC')$$

Comme C' vérifie $E^0C' = E^1C'$ et $E^2C' = 0$, on peut choisir un relèvement W dans $d\,F_n\,C'$ de $d^1\,E^1_{n+1}C' \subset E^1_nC' = E^0_nC'$, et un sous espace V de $F_{n+1}C'$ que d envoie isomorphiquement sur W.

La sous-algèbre de $\mathscr{L}\mathscr{M}'_X$ engendrée par $P_n\mathscr{M}'_X$ et V est isomorphe à $\mathscr{L}P_n\mathscr{M}'_X \amalg \mathbb{L}(V)$ comme algèbre de Lie et l'idéal engendré par F_nC et V est acyclique par construction.

Par suite le quotient

$$\mathscr{L}P_n\mathscr{M}'_X \amalg \mathbb{L}(V) \longrightarrow \mathscr{L}^{(n)}(X) = \mathscr{L}P_n\mathscr{M}'_X \amalg \mathbb{L}(V)/(F_nC+V)$$

est un quasi-isomorphisme. Choisissons à présent un sous-espace $U \subset \mathscr{L}P_n\mathscr{M}'_X$ tel que $U \oplus W$ soit un système minimal de générateurs de l'algèbre libre $\mathscr{L}P_n\mathscr{M}'_X$. Comme W est de filtration n exactement, la sous-algèbre engendrée par U est stable pour la différentielle. Soit $\mathscr{L}$ cette sous-algèbre. On a

$$\mathscr{L}P_n\mathscr{M}'_X = \mathscr{L}\amalg\mathbb{L}(W)$$

avec $dW=0$, comme algèbres différentielles, et $\varpi|\mathscr{L}: \mathscr{L} \to \mathscr{L}_X^{(n)}$ est un quasi-isomorphisme, d'où le résultat en prenant pour $S'\langle n\rangle$ un bouquet de sphères tel que

$$H_*(S'\langle n\rangle;\mathbb{Q}) = sW$$

La vérification de b) est laissée au lecteur.

Concluons par quelques remarques :

(4.4) Le résultat de (4.1) est le meilleur possible, en ce sens qu'en général $X\langle n\rangle$ n'est pas un bouquet. Ainsi, pour $X = \mathbb{C}\mathbb{P}(k)$, on a, en posant $r = \inf(n,k)$ et $s = \sup(n,k)$:

$$\mathbb{C}\mathbb{P}(k)\ [n] = \mathbb{C}\mathbb{P}(k)\langle n\rangle = \mathbb{C}\mathbb{P}(r-1) \times S^{2s+1} \vee \mathbb{C}\mathbb{P}(r) \times *$$

(4.5) Soit X un espace formel de cohomologie H. L'exemple précédent montre qu'en général $X\langle n\rangle$ est différent, même à un bouquet de sphères près, de l'espace formel de cohomologie $H/\bar{H}^{n+1}$. C'est cependant le cas si X est de plus faiblement π-formel, c'est-à-dire si le modèle filtré $\mathscr{L}_X$ de X est minimal, ou en d'autres termes si la suite spectrale de Milnor-Moore vérifie $E^2=E^\infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. FELIX — Modèles bifiltrés : Une plaque tournante en homotopie rationnelle, Can. J. Math. (1982).

[2] Y. FELIX, S. HALPERIN — Rational L.S. category and its applications, Trans. A.M.S., 273 (1982) 1-37.

[3] S. HALPERIN, J. STASHEFF — Obstructions to homotopy equivalences, Advances in Math. 32 (1979) 233-279.

[4] T. GANEA — Lusternik-Schnirelmann - Category and cocategory. Proc. London Math. Soc. 10 (1960), 623-639.

[5] W. GILBERT — Some examples for weak category and conilpotency, Ill. J. Math. 12 (1968) 421-431.

[6] J.M. LEMAIRE — Algèbres connexes et homologie des espaces de lacets. Lect. Notes in Math. 422, Springer 1974.

[7] J. MILNOR, J.C. MOORE — On the structure of Hopf algebras, Ann. of Math. 81 (1965) 211-264.

[8] J.C. MOORE — Differential homological algebra, Actes du congrès Intern. des Math. (1970) 335-336.

[9] A. OUKILI — Thèse de 3ème cycle, Nice 1978.

[10] D. QUILLEN — Rational Homotopy theory, Ann. of Math. 90 (1964), 205-295.

[11] D. TANRE — Thèse, Lille 1982.

[12] G. TOOMER — Lusternik-Schnirelmann - Category and the Moore spectral sequence, Math. Z. 138 (1974), 123-143.