Astérisque

DANIEL TANRÉ

Fibrations et classifiants

Astérisque, tome 113-114 (1984), p. 132-147
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__113-114__132_0>

FIBRATIONS ET CLASSIFIANTS

Daniel TANRÉ

L'objet principal de cet exposé est la présentation de plusieurs modèles algébriques de fibrations en termes d'algèbres de Lie différentielles. Avant cela, nous situerons brièvement les classifiants dans leur cadre topologique d'origine (I) et rappellerons les modèles connus en algèbres différentielles graduées commutatives (II). Les résultats énoncés en (III) et (IV) sont démontrés dans [TD].

I. Classifiant topologique des fibrations.
II. Classifiant et algèbres différentielles graduées commutatives (Sullivan ; Schlessinger-Stasheff).
III. Classifiant et algèbres de Lie différentielles graduées.
IV. Suite spectrale d'Eilenberg-Moore et algèbres de Lie différentielles graduées.

Notations : Le corps de base est celui des rationnels. Si V est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, de base $(x_1,\dots,x_n)$, on désigne par : $\Lambda V = \Lambda(x_1,\dots,x_n)$ l'algèbre graduée commutative libre, $\mathbb{L}(V) = \mathbb{L}(x_1,\dots,x_n)$ l'algèbre de Lie graduée libre. engendrées par V. L'espace vectoriel suspension est noté sV : $(sV)_n = V_{n-1}$. Plus généralement, les notations et conventions utilisées sont celles de [TD].

I - CLASSIFIANT TOPOLOGIQUE DES FIBRATIONS.

1. Historique :

Une fibration (de Hurewicz) $p : E \to X$ est une application ayant la propriété de relèvement des homotopies pour tout espace.

La notion de classifiant des fibrations est le fruit d'une longue évolution :

- Milnor ([MJ], 1956) fournit une première construction fonctorielle d'un G-fibré principal universel $E_G \to B_G$, pour un groupe topologique G donné ;
- Dold et Lashoff ([D-L], 1959) la reformulent afin de l'appliquer à un monoïde topologique et obtiennent une classification des "fiber bundles" à équivalence d'homotopie fibrée ;
- La construction de Milnor est également généralisée par M. Sugawara ([SM], 1957) pour les espaces à loi homotopiquement associative et J. Stasheff ([SJ2], 1963) pour les lois homotopiquement associatives "d'ordre supérieur".

C'est dans ([SJ1], 1963) qu'apparaît pour la première fois un classifiant pour les fibrations (de Hurewicz) :

THÉORÈME (J. Stasheff) : Si F est un CW-complexe compact, il existe une fibration universelle p_∞ : EF $\to$ BF, de base un CW-complexe BF, de fibre ayant même type d'homotopie que F, telle que toute fibration, de base un CW-complexe connexe X, de fibre ayant même type d'homotopie que F, soit reliée par une équivalence d'homotopie fibrée, à une fibration de base X, image réciproque de p_∞.
De plus, les classes d'homotopie d'applications de X vers BF sont en bijection avec les classes d'équivalence d'homotopie fibrée des fibrations de base X, de fibre ayant même type d'homotopie que F.

Ensuite, à partir d'un résultat de E. Brown ([BEH], 1962) sur la réalisabilité de foncteurs homotopiques, le théorème de Stasheff est étendu à un CW-complexe F par Allaud ([AG], 1966) et à un espace F quelconque par Dold ([DA], 1966).

Notons également une reformulation de la construction de Dold et Lashoff pour un monoïde G par Milgram ([MR], 1966) , Steenrod ([SN], 1968) avec, par exemple : B_G est l'analogue algébrique de la bar construction ; plus précisément, le groupe des chaînes $C(B_G)$ est isomorphe à la bar résolution de $C(G)$, (Milgram,Stasheff); si G est abélien, G est un sous-monoïde de E_G et B_G est l'espace quotient E_G/G, (Steenrod).

2. Construction du classifiant.

Soit F un CW-complexe connexe pointé, on note :
aut F le monoïde des self-équivalences d'homotopie de F (pointé par l'identité sur F) ; aut F le sous-monoïde de aut F formé des self-équivalences pointées.

Dans ([GDH 2], 1973), Gottlieb précise le type d'homotopie de l'espace EF et montre que la fibration universelle est, à homotopie près :

$$F \longrightarrow \mathrm{Baut}^{\bullet}F \xrightarrow{p_\infty} \mathrm{Baut}\, F,$$

où B est le classifiant de Dold-Lashoff d'un monoïde.

L'application classifiante $\ell : X \to \mathrm{Baut}\, F$, d'une fibration $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} X$ entre CW-complexes, provient de l'application de monoïdes $\Omega X \xrightarrow{k} \mathrm{aut}\, F$. Plus précisément, ([D-Z]), en notant e l'application d'évaluation sur le point de base de F,

$\mathrm{aut}^{\bullet}F \longrightarrow \mathrm{aut}\, F \xrightarrow{e} F$ est une fibration.

Soit ∂ le connectant de la suite duale de Puppe de e, le carré inférieur commute :

$$\begin{tikzcd}
\Omega E \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{aut}^{\bullet}F \arrow[d] \\
\Omega X \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\partial"] & \mathrm{aut}\, F \arrow[d, "e"] \\
F \arrow[r, equal] & F
\end{tikzcd}$$

$F \longrightarrow E \xrightarrow{p} X$ est alors obtenue comme image réciproque de la fibration universelle, après application du foncteur B au carré supérieur.

3. Nilpotence et rationalité :

L'étude des classifiants par la théorie du modèle minimal amène naturellement la question de nilpotence des espaces obtenus.

Si $G \subset \pi_1 \mathrm{Baut}\, F \cong \pi_0(\mathrm{aut}\, F\ ;\ \mathrm{id})$, on note $\mathrm{Baut}_G F$ le revêtement de $\mathrm{Baut}\, F$ associé à G et $\mathrm{Baut}_G^{\bullet}F \to \mathrm{Baut}_G F$ la fibration image réciproque de p_∞.

Dans ([D-Z], 1979), Dror et Zabrodsky étudient les conditions sur G rendant $\mathrm{Baut}_G F$ nilpotent. L'intérêt de ces revêtements provient de :

$$F \longrightarrow \mathrm{Baut}_G^{\bullet}F \longrightarrow \mathrm{Baut}_G F$$

est universelle pour les fibrations $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} X$ dont la part discrète du groupe structural peut être réduite à G ; c'est-à-dire, avec les notations de I-2, $\ell_{\#}\pi_1(X) \subset G$.

Soit AUT F le groupe discret des classes d'homotopie de self équivalences, notons O le noyau de l'homomorphisme naturel de AUT F dans le groupe aut $H^*(F;\mathbb{Q})$. W. Meier ([MW]), à partir des résultats de [D-Z], obtient une fibration universelle $F \to \mathrm{Baut}_O^{\bullet}F \to \mathrm{Baut}_O F$ pour les fibrations orientables de fibre ayant même type d'homotopie que F. De plus, si F est un CW-complexe rationnel fini, $\mathrm{Baut}_O F$ est rationnel.

Dans le paragraphe III, nous étudierons un modèle algébrique du revêtement universel de Baut F.

II - <u>CLASSIFIANT ET ALGÈBRES DIFFÉRENTIELLES GRADUÉES COMMUTATIVES</u> : (<u>Sullivan</u> ; <u>Schlessinger - Stasheff</u>) :

1. <u>Construction du classifiant de Sullivan</u> :

Soit $(B,d_B) \to (B \otimes \Lambda X,d) \to (\Lambda X,\bar{d})$ une KS-extension minimale ([SD], [HS1]) avec $(\Lambda X,\bar{d})$ de type fini. (X est un espace vectoriel de dimension finie en chaque degré). Si $(b_i)_{i\in I}$ est une base de l'espace vectoriel B, la différentielle d d'un élément de X s'exprime par :

$$\boxed{dx = \bar{d}x + \sum_{i\in I} b_i \otimes \theta_i(x)} \ .$$

On voit ainsi apparaître des dérivations θ_i de l'algèbre ΛX, de degré $1 - |b_i|$, vérifiant une condition de nilpotence (par définition d'une KS-extension). Plus généralement :

DÉFINITION ([HS1]) : <u>Une dérivation</u> θ <u>de</u> $(\Lambda X,\bar{d})$ <u>est localement nilpotente s'il existe une base bien ordonnée</u> $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ <u>de</u> X <u>telle que</u> $\theta(x_\alpha)$ <u>s'exprime en fonction des</u> x_β, <u>avec</u> $\beta < \alpha$.

Soit $(\mathrm{Der}\,\Lambda X,D)$ l'algèbre de Lie différentielle définie par :

- en degré $k > 0$, $(\mathrm{Der}\,\Lambda X)_k$ est formée des dérivations de ΛX baissant la graduation de k : $\theta(X^p) \subset (\Lambda X)^{p-k}$;
- en degré 0, on ne garde que les dérivations localement nilpotentes commutant à $\bar{d}$, conservant la graduation.

La différentielle D est le crochet avec $\bar{d}$:

$$D\theta = [\bar{d},\theta] = \bar{d}\theta - (-1)^{|\theta|}\theta\bar{d}.$$

THÉORÈME (Sullivan, [S D]) : L'algèbre différentielle graduée des cochaînes sur $(\mathrm{Der}\ \Lambda X, D)$ est la base de la fibration algébrique universelle.

REMARQUE : Bien que les dérivations soient de degré négatif ou nul, si X a une infinité de générateurs, $\mathrm{Der}\ \Lambda X$ ne sera pas de type fini ; il faudrait pour cela imposer X fini.

Si (L,∂) est une algèbre de Lie différentielle graduée, rappelons brièvement le complexe de Koszul $(C^*(L,\partial))$: $C^r(L) = \sum_{p+q=r} C^{p,q}(L)$, $C^{p,q}(L)$ est le sous-espace de $\mathrm{Hom}^{p+q}(\overset{p}{\otimes}\, sL;\mathbb{Q})$ formé des fonctions symétriques graduées, où $(sL)_p = L_{p-1}$. La différentielle et le produit, dans le cas gradué, sont précisés, par exemple, dans [F-H-T].

2. Fibration universelle et application classifiante :

La fibration algébrique universelle pour les fibrations à fibre $(\Lambda X,\bar{d})$ est la KS-extension :

$$C^*(\mathrm{Der}\ \Lambda X, D) \longrightarrow (C^*(\mathrm{Der}\ \Lambda X)\otimes \Lambda X,\hat{\delta}) \longrightarrow (\Lambda X,\bar{d}).$$

Si $x \in X$ est un élément de degré n, on note $J_x \subset \mathrm{Der}\ \Lambda X$ le sous-espace des dérivations s'annulant sur $X^{>n}$. Soient $(\theta_\alpha)_{\alpha\in\nu_x}$ une base de J_x et $(\theta^*_\alpha)_{\alpha\in\nu_x}$ la base duale : $\theta^*_\alpha \in C^{1,q}(\mathrm{Der}\ \Lambda X)$; $\theta^*_\alpha(\theta_\beta) = 1$ si $\alpha=\beta$, 0 ailleurs.

La différentielle $\hat{\delta}$ est donnée par :

$$\boxed{\hat{\delta}x = \bar{d}x + \sum_{\alpha\in\nu_x} \theta^*_\alpha \otimes \theta_\alpha(x)} \quad .$$

Reprenons la KS-extension de départ, son application classifiante est ([F-H-T]) :

$$\Phi : C^*(\mathrm{Der}\ \Lambda X, D) \longrightarrow (B,d_B),$$

si $f \in C^{p,q}(\mathrm{Der}\ \Lambda X)$, $\quad \Phi(f) = \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_p} b_{\alpha_1}\cdots b_{\alpha_p} f(s\theta_{\alpha_1},\dots,s\theta_{\alpha_p}).$

(Rappelons : $(b_i)_{i\in I}$ est une base de B, θ_i est définie à partir de d en II.1.).

3. Justification de Sullivan de l'appellation "classifiant universel".

Sullivan calcule ensuite l'homotopie de $C^*(\mathrm{Der}\,\Lambda X, D)$, c'est-à-dire l'homologie de $(\mathrm{Der}\,\Lambda X, D)$.

a) en degré 1 : ce sont les dérivations localement nilpotentes de degré 0, de ΛX, commutant à $\bar{d}$, modulo celles de la forme $\bar{d}i + i\bar{d}$, avec une dérivation i de degré -1.

Or, Sullivan a précédemment étudié les automorphismes d'une algèbre différentielle. Un automorphisme σ, localement unipotent ($\sigma = \mathrm{Id}+\nu$, ν localement nilpotent) s'écrit de façon unique comme $\exp \mu$, où μ est une dérivation de degré 0, localement nilpotente, commutant à $\bar{d}$, ($\mu = \mathrm{Log}\,\sigma = \mathrm{Log}\,(\mathrm{Id}+\nu)$). De plus, σ est homotope à l'identité ssi il existe une dérivation i telle que $\mu = \bar{d}i+i\bar{d}$ (cf. aussi [HS1]).

Soit Nil le groupe des classes d'homotopie d'automorphismes localement unipotents de $(\Lambda X,\bar{d})$; avec les notations de Dror-Zabrodsky rappelées en I-3, le résultat précédent se traduit en topologie par : $\pi_1 \mathrm{Baut}_{\mathrm{Nil}} F \cong \mathrm{Nil}$.

b) en degré $k > 1$: ce sont les dérivations θ de ΛX, de degré $k-1$, commutant à $\bar{d}$, modulo celles de la forme $\bar{d}\varphi - (-1)^{|\varphi|}\varphi\bar{d}$.

Les dérivations θ commutant à $\bar{d}$ correspondent bijectivement aux homomorphismes d'algèbres différentielles :

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda X,\bar{d}) & \xrightarrow{f_\theta} & (\Lambda\xi/\xi^2, 0) \otimes (\Lambda X,\bar{d}) \\ x & \longmapsto & 1 \otimes x + \xi \otimes \theta(x) \end{array}$$

avec ξ de degré $k-1$;
donc aux applications $S^{k-1} \times F \to F$ induisant l'identité sur $* \times F$.

Cette association est compatible avec les relations :

- modulo $\bar{d}\varphi - (-1)^{|\varphi|}\varphi\bar{d}$ sur les dérivations,
- d'homotopie sur les homomorphismes.

On trouve à nouveau l'analogue algébrique de $\pi_k \mathrm{Baut}\, F \cong \pi_{k-1} \mathrm{aut}\, F$.

La réalisation de la KS-extension obtenue est universelle pour les fibrations à action nilpotente.

REMARQUES : 1) En fait, Sullivan ne se limite pas aux dérivations localement nilpotentes en degré zéro ; nous nous sommes placés ici dans le cadre du théorème fondamental de Steve Halperin sur les KS-extensions : "La fibre du modèle est le modèle de la fibre" (Théorème 20.3. de [HS1]).

2) L'existence d'une fibration algébrique universelle pour les fibrations à type d'homotopie de la fibre donné est également démontrée dans [GPP] où l'auteur la déduit d'un analogue algébrique de Dold-Lashoff pour les algèbres différentielles munies d'une algèbre de Lie d'opérateurs.

4. <u>Classifiant de Schlessinger-Stasheff</u> :

<u>On ne considère désormais que le cadre</u> 1-<u>connexe</u>.

Si $(\mathbb{L}(V),\partial)$ est le modèle de Quillen ([B-L] d'un espace 1-connexe, le classifiant est fourni par l'algèbre de Lie différentielle $(s\mathbb{L}(V) \underset{\sim}{\oplus} \mathrm{Der}(\mathbb{L}(V)),D)$:

. $(\mathrm{Der}\,\mathbb{L}(V))_p$ est formé des dérivations de $\mathbb{L}(V)$ de degré $+p$, $\theta(V_n) \subset \mathbb{L}(V)_{n+p}$;

. l'espace vectoriel sous-jacent est la somme directe :

$$s\mathbb{L}(V) \oplus \mathrm{Der}\,\mathbb{L}(V) \quad ;$$

. l'inclusion naturelle fait de $(\mathrm{Der}\,\mathbb{L}(V),D)$ une sous-algèbre de Lie différentielle pour le crochet et la différentielle usuels [TD] ;

. $s\mathbb{L}(V)$ est une algèbre de Lie abélienne ;

. si $\theta \in \mathrm{Der}\,\mathbb{L}(V)$ et $x \in \mathbb{L}(V)$, on a $[\theta, sx] = (-1)^{|\theta|} s\theta(x)$;

. $Dsx = -s\partial x + \mathrm{ad}\, x$.

DÉFINITION : <u>Le classifiant de Schlessinger-Stasheff de</u> $(\mathbb{L}(V),\partial)$ <u>est le revêtement universel</u> $cl(\mathbb{L}(V),\partial)$:

$cl(\mathbb{L}(V),\partial)_p = (s\mathbb{L}(V) \underset{\sim}{\oplus} \mathrm{Der}\,\mathbb{L}(V))_p$, si $p \geqslant 2$;

$cl(\mathbb{L}(V),\partial)_1 = (\mathrm{Ker}\, D)_1$.

La démarche adoptée par Schlessinger et Stasheff est différente de celle de Sullivan. Au lieu de montrer que l'homotopie du classifiant algébrique se comporte avec $C^*(\mathbb{L}(V),\partial)$ comme celle de Baut F avec F, ils définissent la notion d'équivalence d'homotopie fibrée dans la catégorie des algèbres différentielles commutatives graduées et démontrent un analogue algébrique du théorème de classification :

THÉORÈME ([S-S]) : <u>Il existe une correspondance bijective entre les classes d'équivalence d'homotopie fibrée des fibrations, de base</u> (B,d_B) 1-<u>connexe, de type fini et les classes d'homotopie de</u> $C^*cl(\mathbb{L}(V),\partial)$ <u>dans</u> (B,d_B).

Nous allons maintenant étudier les fibrations dans la catégorie LDG des algèbres de Lie différentielles graduées, où ce classifiant va apparaître naturellement.

III - CLASSIFIANTS ET ALGÈBRES DE LIE DIFFÉRENTIELLES GRADUÉES.

Soit $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} X$ une fibration entre espaces 1-connexes. Dans la catégorie des algèbres différentielles commutatives, un modèle de fibration est obtenu en déformant le produit d'un modèle de la base et de la fibre : c'est la KS-extension (Sullivan [SD], Halperin [HS1,2]). Nous allons procéder de même dans la catégorie LDG.

Pour la suite, soient $(\mathbb{L}(A),\partial)$ et $(\mathbb{L}(V'),\partial')$ des modèles minimaux de F et X respectivement.

1. Modèles du produit $F \times X$:

① non libre : c'est le produit dans la catégorie LDG $(\mathbb{L}(A),\partial) \times (\mathbb{L}(V'),\partial')$.

② minimal : ses générateurs et sa différentielle sont précisés par :

$$(\mathbb{L}(A \oplus V' \oplus s(A \otimes V')),\delta) \xrightarrow{\Psi} (\mathbb{L}(A),\partial) \times (\mathbb{L}(V'),\partial')$$

$$\Psi(a) = a \ ; \quad \Psi(v') = v' \quad ; \quad \Psi(s(a \otimes v')) = 0 \quad ;$$

$$\delta a = \partial a \quad ; \quad \delta v' = \partial' v' \quad ; \quad \delta s(a \otimes v') = [a,v'] + \beta(a,v'),$$ où $\beta(a,v')$ est un élément décomposable dans l'algèbre de Lie libre noyau de Ψ.

2. Modèles d'une fibration :

Il existe deux modèles de la fibration $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} X$, obtenus en déformant les modèles du produit :

① non libre : le produit tordu.

$$(\mathbb{L}(A),\partial) \longrightarrow (\mathbb{L}(A) \underset{\phi}{\times} \mathbb{L}(V'),\partial \underset{\phi}{\times} \partial') \longrightarrow (\mathbb{L}(V'),\partial'),$$

on déforme à la fois le crochet et la différentielle du produit non libre :

$[a,v']_\phi$ n'est plus nul mais appartient à $\mathbb{L}(A)$;

$(\partial \underset{\phi}{\times} \partial')v' - \partial' v' \in \mathbb{L}(A)$.

② libre mais non nécessairement minimal :

$$(\mathbb{L}(A),\partial) \longrightarrow (\mathbb{L}(A \oplus V' \oplus s(A \otimes V')),\delta+\tau) \longrightarrow (\mathbb{L}(V'),\partial')$$

③ produit tordu et classifiant de Schlessinger-Stasheff :

Soit $(\mathbb{L}(A) \underset{\phi}{\times} \mathbb{L}(V'), \partial \underset{\phi}{\times} \partial')$ le modèle non libre de la fibration p, on lui associe un homomorphisme de LDG :

$$(\mathbb{L}(V'),\partial') \xrightarrow{\phi} \mathrm{cl}(\mathbb{L}(A),\partial) = (s\mathbb{L}(A) \underset{\sim}{\oplus} \mathrm{Der}\,\mathbb{L}(A), D)$$

$$\phi(v') = \phi_1(v') + \phi_2(v') \in s\mathbb{L}(A) \oplus \mathrm{Der}\,\mathbb{L}(A),$$

$$\phi_1(v') = (\partial \underset{\phi}{\times} \partial')(v') - \partial' v' \quad ;$$

$$\phi_2(v')(a) = [a, v']_\phi .$$

Réciproquement, une telle application fournit un produit tordu. Cette correspondance se prolonge en théorème de classification mais auparavant précisons les :

3. Equivalences de fibrations dans LDG :

a) Définition : Une fibration dans LDG est un morphisme surjectif $(L,\partial) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{L}(V'),\partial')$, de but un modèle minimal.

b) Définition : Une fibration dans LDG, à fibre $(\mathbb{L}(A),\partial)$ donnée est une suite :
$(\mathbb{L}(A),\partial) \xrightarrow{i} (L,\partial) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{L}(V'),\partial')$ telle que π soit surjective,
$i : (\mathbb{L}(A),\partial) \to \mathrm{Ker}\,\pi$ induise un isomorphisme en homologie, $(\mathbb{L}(A),\partial)$ et $(\mathbb{L}(V'),\partial')$ soient minimales.

c) Définition : Deux fibrations $(L,\partial) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{L}(V'),\partial')$ et $(L',\partial') \xrightarrow{\pi'} (\mathbb{L}(V'),\partial')$ sont élémentairement équivalentes s'il existe un morphisme σ induisant un isomorphisme en homologie et faisant commuter exactement le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(L,\partial) \arrow[d, "\sigma"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
(L',\partial') \arrow[r, "\pi'"'] & (\mathbb{L}(V'),\partial') .
\end{tikzcd}$$

d) Définition : Deux fibrations à fibre $(\mathbb{L}(A),\partial)$ donnée
$(\mathbb{L}(A),\partial) \xrightarrow{i} (L,\partial) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{L}(V'),\partial')$ et
$(\mathbb{L}(A),\partial) \xrightarrow{i'} (L',\partial') \xrightarrow{\pi'} (\mathbb{L}(V'),\partial')$ sont élémentairement équivalentes s'il

existe un morphisme σ induisant un isomorphisme en homologie et faisant commuter exactement le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & (L,\partial) \arrow[dd, "\sigma"] \arrow[dr, "\pi"] & \\
(\mathbb{L}(A),\partial) \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & & (\mathbb{L}(V'),\partial') \\
 & (L',\partial') \arrow[ur, "\pi'"'] &
\end{tikzcd}$$

On considère les relations d'équivalence engendrées.

Les analogues topologiques de ces définitions sont :

a') les fibrations à type d'homotopie de la fibre donné ;

b') les fibrations à fibre au-dessus du point de base identifiée à F, c'est-à-dire les suites $F \xrightarrow{g} E \xrightarrow{p} X$ telles que p soit une fibration et $g : F \to p^{-1}(*)$ une équivalence d'homotopie ;

c') les classes d'équivalence d'homotopie fibrée ;

d') deux fibrations à fibre donnée sont équivalentes [AG] ssi il existe α tel que

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & E_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & X \arrow[d, equal] \\
F \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

II commute et I commute à homotopie près.

c') est le cadre de [SJ1], d') celui de [AG]. Le premier fournit un théorème de classification avec les homotopies libres de but le classifiant, le deuxième avec les homotopies pointées. Au niveau du revêtement universel, ces notions se traduisent par :

4. Théorèmes de classification :

La correspondance précédente entre application classifiante et produit tordu définit une bijection entre :

(1) les classes d'équivalence de fibrations à fibre $(\mathbb{L}(A),\partial)$ donnée et à base $(\mathbb{L}(V'),\partial')$ d'une part ;

(2) les classes d'homotopie d'applications de $(\mathbb{L}(V'),\partial')$ dans $cl(\mathbb{L}(A),\partial)$ d'autre part.

Elle définit également une bijection entre :

① les classes d'équivalence de fibrations à base $(\mathbb{L}(V'),\partial')$ et à fibre ayant pour modèle minimal $(\mathbb{L}(A),\partial)$;

② les classes d'équivalence d'applications de $(\mathbb{L}(V'),\partial')$ dans $cl(\mathbb{L}(A),\partial)$ pour la relation :

$\phi \underset{a}{\sim} \phi'$ ssi il existe un automorphisme μ de $(\mathbb{L}(A),\partial)$ tel que $(cl\ \mu) \circ \phi$ soit homotope à ϕ', avec $cl\mu(sx,\theta) = (s\mu(x),\mu\theta\mu^{-1})$.

5. Exemples.

① Fibration de Hopf $S^3 \to S^7 \to S^4$.

produit tordu : $(\mathbb{L}(x_2),0) \underset{\phi}{\times} (\mathbb{L}(y_3),0)$

$\tilde{\delta}y_3 = x_2$; $\tilde{\delta}x_2 = 0$; $[x_2,y_3]_\phi = 0$.

modèle libre : $(\mathbb{L}(x_2,y_3,z_6),\delta)$

$\delta x_2 = 0$; $\delta y_3 = x_2$; $\delta z_6 = [x_2,y_3]$.

② $P_2(\mathbb{C}) \to E \to S^6$.

. Le modèle du produit $P_2(\mathbb{C}) \times S^6$ est

$(\mathbb{L}(y_1,y_3) \times \mathbb{L}(x_5),\delta)$; $\delta y_1 = 0$; $\delta y_3 = [y_1,y_1]$; $\delta x_5 = 0$;
on le déforme en $\tilde{\delta}x_5 = [y_1,y_3]$; $[y_1,x_5]_\phi = [y_3,y_3]$; $[y_3,x_5]_\phi = 0$.

L'application classifiante est caractérisée par :

$$\phi : (\mathbb{L}(x_5),0) \longrightarrow (s\mathbb{L}(y_1,y_3) \underset{\sim}{\oplus} \operatorname{Der} \mathbb{L}(y_1,y_3),D)$$

$$x_5 \longrightarrow -s[y_1,y_3] + \theta_5$$

avec $\theta_5(y_3) = 0$; $\theta_5(y_1) = [y_3,y_3]$.

. Le modèle minimal de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C}) \times S^6$:

$(\mathbb{L}(y_1,y_3,x_5,z_7,z_9),\hat{\delta})$

$\hat{\delta}y_1 = 0$, $\hat{\delta}y_3 = [y_1,y_1]$, $\hat{\delta}x_5 = 0$

$\hat{\delta}z_7 = [y_1,x_5]$; $\hat{\delta}z_9 = [y_3,x_5] + 2[y_1,z_7]$

se déforme pour donner un modèle de E :

$\tau x_5 = [y_1, y_3]$; $\tau z_7 = [y_3, y_3]$.

. La déformation τ du modèle libre nous renseigne sur le degré de non-trivialité de la fibration ; illustrons-le sur cet exemple.

L'espace total a le type d'homotopie rationnelle de $P_5(\mathbb{C})$; la fibration a évidemment une suite spectrale de Serre stabilisée au niveau 2, ce qui correspond à l'absence de partie linéaire dans τ. Par contre, la fibration n'est pas cohomologiquement triviale ($F \longrightarrow E \xrightarrow{p} X$, avec $H^*(E)$ isomorphe à $H^*(F) \otimes H^*(X)$ en tant qu'algèbre) ; la déformation τ présente d'ailleurs une partie quadratique.

Plus généralement, l'existence d'une différentielle $\delta+\tau$ telle que τ s'exprime avec des crochets de longueur supérieure ou égale à n $(n \geqslant 3)$, est équivalente à la n-réalisabilité [H-S] de l'isomorphisme entre $H^*(E)$ et $H^*(F) \otimes H^*(X)$.

REMARQUE : Il n'existe pas de fibration

$$P_2(\mathbb{C}) \longrightarrow P_5(\mathbb{C}) \longrightarrow S^6$$

car la suite exacte longue d'homotopie comporterait :

$$\pi_{10}(S^6) = 0 \longrightarrow \pi_9(P_2(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \longrightarrow \pi_9(P_5(\mathbb{C})) = 0.$$

6. Fibration universelle.

Soit F un espace topologique 1-connexe, de modèle de Quillen $(\mathbb{L}(A),\partial)$, distinct d'une sphère.

$$(\mathbb{L}(A),\partial) \xrightarrow{ad} (\mathrm{Der}\,\mathbb{L}(A),D) \longrightarrow \mathrm{cl}(\mathbb{L}(A),\partial)$$

est un modèle de la fibration universelle pour les fibrations à base 1-connexe, de fibre F.

COROLLAIRE : Le groupe de Gottlieb [GDH 1] de F est le noyau de l'application induite en homologie par

$$(\mathbb{L}(A),\partial) \xrightarrow{ad} (\mathrm{Der}\,\mathbb{L}(A),D).$$

IV - SUITE SPECTRALE D'EILENBERG-MOORE ET ALGÈBRESDE LIE DIFFÉRENTIELLES GRADUEES.

La suite spectrale d'Eilenberg-Moore (ssEM) d'un espace peut être obtenue à partir de la filtration en crochets du modèle de Quillen ; le but de ce paragraphe est d'exhiber une version relative de ce résultat.

1. ssEM d'une fibration :

THÉORÈME [E-M] : Soit $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} X$ une fibration avec X 1-connexe ; il existe une suite spectrale d'algèbres commutatives (E_r, d_r) telle que :

$$E_2 = \mathrm{Tor}_{H^*(X)}(k\ ;\ H^*(E;k)) \Longrightarrow H^*(F;k)$$

où k est un corps commutatif.

Les termes de cette suite spectrale s'obtiennent avec une résolution projective propre [SL] ; la théorie du modèle minimal a fourni de nouveaux procédés de calcul (M. Vigué [VPM] ; J.C. Thomas [TJC]) en algèbres différentielles graduées commutatives.

2. EM-filtration et ssEM :

Le noyau d'un modèle surjectif de p fournit un modèle de la fibre F. Une telle surjection se construit à partir du modèle minimal

$$(\mathbb{L}(V), \partial) \xrightarrow{\psi} (\mathbb{L}(V'), \partial')$$

en ajoutant des générateurs :

$$(\mathbb{L}(V \oplus \tilde{V}' \oplus s^{-1}\tilde{V}'), D) \xrightarrow{\Psi} (\mathbb{L}(V'), \partial').$$

Appelons EM-filtration la filtration (décroissante) induite par :

V et $\tilde{V}'$ sont en degré 1 ; $s^{-1}\tilde{V}'$ en degré 2 ; le degré de $[a,b]$ est la somme des degrés de a et de b.

THEOREME : La ssEM de la fibration p coïncide à partir du terme E_2 avec la suite spectrale obtenue en filtrant $C^*(\mathrm{Ker}\ \Psi)$ par la EM-filtration.

La ssEM peut être lue directement dans LDG ; le noyau $\mathrm{Ker}\ \Psi$ est une algèbre de Lie libre $(\mathbb{L}(A), D)$. Notons D_ℓ la partie linéaire de D.

Si on filtre $(s \# A,\ s \# D_\ell)$ par la EM-filtration induite, on obtient une suite spectrale d'espaces vectoriels. Celle-ci est isomorphe à la suite spectrale d'espaces vectoriels sous-jacente à la ssEM.

3. Exemple.

Soit $g : S^2 \times S^5 \to S^4$ définie par son modèle de Quillen :

$$(\mathbb{L}(x_4, x_1, x_6), \partial) \xrightarrow{f} (\mathbb{L}(x_3), 0)$$

$$\partial x_1 = \partial x_4 = 0 \quad ; \quad \partial x_6 = [x_1, x_4].$$

$$f(x_1) = f(x_4) = 0 \quad ; \quad f(x_6) = [x_3, x_3].$$

Un modèle surjectif est :

$$(\mathbb{L}(x_4,x_1,x_6,y_3,y_2),D) \xrightarrow{\Psi} (\mathbb{L}(x_3),0)$$

$\Psi(x_i) = f(x_i)$; $\Psi(y_3) = x_3$; $\Psi(y_2) = 0$; $Dy_3 = y_2$.

Le noyau $\operatorname{Ker}\Psi$ est l'idéal engendré par

$$x_4, x_1, y_2, x = x_6 - [y_3,y_3] \ ;$$
$$Dx = [x_1,x_4] - 2[y_2,y_3].$$

x (resp. $[x_1,x_4]$, resp. $[y_2,y_3]$) est de EM-filtration 1 (resp. 2, resp. 3).

La différentielle n'est pas homogène cependant la suite spectrale sur le noyau tout entier se stabilise au niveau 2. Par contre, en se restreignant aux générateurs (du noyau !), on obtient :

$$D_{\ell}x = -2[y_2,y_3]$$

et la ssEM ne se stabilise pas au niveau 2.

REMARQUE : Le modèle de la fibre permettant le calcul de la ssEM en algèbres commutatives est une algèbre libre et une dualité apparaît avec la situation en algèbres de Lie :

. La suite spectrale sur l'algèbre de Lie noyau tout entier correspond à la restriction aux générateurs en algèbres commutatives ;

. La suite spectrale sur la restriction aux générateurs de l'algèbre de Lie noyau (ssEM) correspond à la suite spectrale sur l'algèbre commutative tout entière.

BIBLIOGRAPHIE

[AG] Guy ALLAUD - On the classification of Fiber Spaces, Math. Zeitschr. 92, (1966), 110-125.

[B-L] Hans J. BAUES, Jean-Michel LEMAIRE - Minimal models in homotopy theory, Math. Ann. 225, (1977), 219-242.

[BEH] Edgar H. BROWN - Cohomology theories - Ann. of Math. 75, (1962), 467-484.

[DA] Albrecht DOLD - Halbexacte Homotopiefunktoren, Lecture notes in Mathematics, v. 12, Springer-Verlag, (1966).

[D-L] A. DOLD, R. LASHOFF - Principal quasi-fibrations and fibre homotopy equivalence of bundles, Illinois J. Math. 3, (1959), 285-305.

[D-Z] E. DROR, A. ZABRODSKY - Unipotency and nilpotency in homotopy equivalences, Topology 18, (1979), 187-197.

[E-M] S. EILENBERG, J.C. MOORE - Homology and Fibrations I, Comment. Math. Helv. 40, (1966), 199-236.

[FY] Yves FELIX - Modèles et comodèles d'une application, Rapport. Sem. Math. Pures n° 88, Louvain-la-Neuve, (1979).

[F-H-T] Y. FELIX, S. HALPERIN, J.C. THOMAS - Sur certaines algèbres de Lie de dérivations, Ann. Inst. Fourier, 32, (1982), 143-150.

[GDH1] D.H. GOTTLIEB - On fibre spaces and the evaluation map, Ann. of Math. 87-1, (1968), 42-55.

[GDH2] D.H. GOTTLIEB - The total space of universal fibrations, Pacif. J. 46-2, (1973), 415-417.

[GPP] Pierre-Paul GRIVEL - Sur les fibrés principaux associés aux fibrés algébriques, Preprint (1981).

[HS1] Steve HALPERIN - Lectures on minimal models, (à paraître Mémoires SMF, nouvelle série).

[HS2] Steve HALPERIN - Rational fibration, minimal models and fibrings of homogeneous spaces, T.A.M.S. 244, (1978), 199-224.

[H-S] S. HALPERIN, J. STASHEFF - Obstructions to homotopy equivalences, Advances in Math., 32, (1979), 233-279.

[H-M-R] P. HILTON, G. MISLIN, J. ROITBERG - Localization of Nilpotent Groups and Spaces, North. Holland 15, (1975).

[MW] W. MEIER - Rational universal fibrations and Flag manifolds. Math. Ann. 258, (1982), 329-340.

[MR] R. MILGRAM - The bar construction and abelian H-spaces, Illinois J. Math. 11, (1967), 242-250.

[MJ] J. MILNOR - Construction of universal bundles II, Ann. of Math. 63 n° 2, (1956), 430-436.

[S-S] M. SCHLESSINGER, J. STASHEFF - Deformation theory and rational homotopy type. à paraître dans Publ. Sci. I.H.E.S.

[SJP] Jean-Pierre SERRE - Homologie singulière des espaces fibrés, Ann. of Math. 54, n° 3, (1951), 425-505.

[SL] Larry SMITH - Homological Algebra and the EMss, T.A.M.S. 129, (1967), 58-93.

[SJ1] James STASHEFF - A classification theorem for fibre spaces, Topology 2, (1963), 239-246.

[SJ2] James STASHEFF - Homotopy associativity of H-spaces I, II. T.A.M.S. 108, (1963), 275-292, 293-312.

[SNE] N.E. STEENROD - Milgram's classifying space of a topological group, Topology 7, (1968), 349-368.

[SM] M. SUGAWARA - A condition that a space is group like, Math. J. Okayama. Univ. 7, (1957), 123-149.

[SD] Denis SULLIVAN - Infinitesimal computations in Topology, Publ. I.H.E.S. 47, (1977), 269-331.

[TD] Daniel TANRÉ - Modèles de Chen, Quillen, Sullivan, Lecture Notesin Mathematics, v. 1025, Springer Verlag, (1983).

[TJC] Jean-Claude THOMAS - Eilenberg-Moore models for fibrations, T.A.M.S. 274, (1982), 203-225.

[VPM] Micheline VIGUE-POIRRIER - Réalisation de morphismes donnés en cohomologie et ssEM., T.A.M.S. 265, (1981), 447-484.