

# *Astérisque*

ROLF BERNDT

**Formes de Jacobi et quelques éléments de la théorie  
des représentations du groupe de Jacobi**

*Astérisque*, tome 147-148 (1987), p. 265-269

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1987\\_\\_147-148\\_265\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__147-148_265_0)

© Société mathématique de France, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FORMES DE JACOBI ET QUELQUES ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE  
 DES REPRÉSENTATIONS DU GROUPE DE JACOBI

Par Rolf Berndt

Il s'agit de traiter un exemple pour la théorie des formes automorphes pour un groupe non réductif, d'étudier un peu les séries discrètes pour cet exemple et d'indiquer que plusieurs théorèmes de la théorie générale peuvent aussi être prouvés dans ce cadre: c'est à dire le théorème de reductibilité complète, la caractérisation des formes automorphes comme fonctions sur le groupe et un théorème de dualité.

1. Le groupe de Jacobi

Le groupe de Jacobi  $G^J$  est le produit semidirect d'un groupe de Heisenberg  $H_{\mathbb{R}}$  de dimension trois et de  $SL_2(\mathbb{R})$

$$G^J = H_{\mathbb{R}} \rtimes SL_2(\mathbb{R})$$

$$= \{g = [X; \zeta; M]; X \in \mathbb{R}^2, \zeta \in S^1, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})\}$$

avec la loi de composition

$$gg' = [X' + XM; \zeta \zeta' e(\det \begin{pmatrix} X' \\ XM \end{pmatrix}); MM'] (e(z) = \exp 2\pi iz).$$

$G^J$  opère sur  $\mathbb{C} \times \mathcal{H} = \{(v, \omega); v, \omega \in \mathbb{C}, \text{Im } \omega > 0\}$  de la façon suivante ( $g = [\lambda, \mu; \zeta; M]$ )

$$(v, \omega) \mapsto g(v, \omega) = \left( \frac{v + \lambda\omega + \mu}{c\omega + d}, \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \right)$$

et fait de  $\mathbb{C} \times \mathcal{H}$  un espace homogène non symétrique

$$G^J \longrightarrow G^J/K^J = \mathbb{C} \times \mathcal{H}$$

$$g \longmapsto g(0, i) = (v, \omega)$$

avec  $v = p\omega + q, \omega = x + iy$ , si on prend pour  $G^J$  les coordonnées

$$g = (p, q; \zeta | M) = [\lambda, \mu; \zeta; M], \quad (p, q) = (\lambda, \mu) M^{-1}, \quad M = n(x) t(y) r(\psi)$$

$$n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t(y) = \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad r(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}.$$

2. Le théorème de réductibilité complète

Dans  $G^J$  on a les sousgroupes suivants

$$\Gamma^J = \mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$$

$$N^J = \{(0, q, 1 | n(x)); q, x \in \mathbb{R}\}$$

$$A^J = \{(p, 0, 1 | t(y)); p \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*\}$$

$$K^J = S^1 \times SO(2) = \{(0, 0, \zeta | r(\psi)) = r(\zeta, \psi)\}.$$

Avec ces groupes, on a une sorte de décomposition d'Iwasawa

$$G^J = N^J A^J K^J$$

et on distingue dans  $L^2(\Gamma^J \backslash G^J)$  le sous-espace  $L^2_0(\Gamma^J \backslash G^J)$  des fonctions  $\Phi$ , qui remplissent une condition cuspidale:

$$\int_{N^J \cap \Gamma^J \backslash N^J} \Phi(g \dot{n}) d\dot{n} = 0 \text{ pour } g \in G^J.$$

Si en plus,  $R$  désigne la représentation régulière donnée par

$$R(g')\Phi(g) = \Phi(gg') \text{ pour } g, g' \in G^J$$

on peut démontrer comme dans la théorie de  $SL_2$  le résultat suivant

Théorème:  $L^2_0(\Gamma^J \backslash G^J)$  se décompose en une somme directe dénombrable de sousespaces irréductibles invariants sous la représentation régulière  $R$ .

3. Séries discrètes

Pour dire plus des représentations intervenant dans la décomposition de  $L^2_0$ , il faut étudier la théorie des représentation de  $G^J$ . Elle est en principe bien connue par la méthode de Mackey[5]

pour les produits semidirects. Alors on sait qu'on a deux séries discrètes  $T_{k,m}^{\pm}$  ( $k, m \in \mathbb{Z}$ ) avec poids minimal respectivement maximal, qui sont caractérisées par des vecteurs  $f$  de poids minimal resp. maximal avec

$$T_{k,m}^{\pm}(r(\zeta, \mathfrak{J}))f^{\pm} = \zeta^m e^{ik\mathfrak{J}} f^{\pm} .$$

Une réalisation d'un tel vecteur comme fonction sur  $\mathbb{C} \times \mathfrak{G}$  est donné en utilisant un résultat de Satake[6] par

$$f^+(v, \omega) = e^{-2\pi i m \frac{v^2}{\omega+i}} (\omega+i)^{-k} .$$

Comme d'habitude, on a aussi des réalisations infinitésimales de  $T_{k,m}^{\pm}$  en partant de la structure de l'algèbre de Lie de  $G^{\mathfrak{J}}$  et son complexifié  $\mathfrak{G}$ . Il y a deux façons de procéder.

- i) Avec la méthode de Mackey en [2] on obtient une représentation de  $\mathfrak{G}$  sur un espace vectoriel

$$V_{k,m} = V^{1/2} \otimes W^{k-1/2} ,$$

où  $V_m^{1/2}$  est l'espace d'une représentation de Shale-Weil de  $\mathfrak{G}$  et  $W^{k-1/2}$  l'espace d'une représentation de poids  $k-1/2$  de  $\mathfrak{sl}_2$ .

- ii) En partant d'un isomorphisme non canonique des algèbres enveloppantes (voir par exemple Borho[3])

$$U(\mathfrak{G})' \simeq U(\mathfrak{u})' \otimes U(\mathfrak{sl}_2)$$

( $\mathfrak{u} = \text{Lie } H_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ , ' dénotant une certaine localisation), on a aussi

$$V_{k,m} = U_m \otimes W^{k-1/2}$$

où  $U_m$  est l'espace d'une représentation de poids  $m$  de  $\mathfrak{u}$ .

#### 4. Les formes de Jacobi et le théorème de dualité.

Comme dans la théorie de  $SL_2(\mathbb{R})$  on peut aussi interpréter la multiplicité  $m_{k,m}^+$  de  $T_{k,m}^+$  dans la représentation  $R$  de  $G^{\mathfrak{J}}$  sur  $L^2(\Gamma^{\mathfrak{J}} \backslash G^{\mathfrak{J}})$  comme dimension d'un espace de formes modulaires: Pour

l'action de  $G^J$  sur  $\mathbb{C} \times \mathbb{H}^J$  on a un facteur d'automorphie canonique, déterminé déjà par Satake [6] mais donné par la formule

$$j_{k,m}(g; (v, \omega)) = \zeta^m(c\omega+d)^{-k} e^m \left( -\frac{c(v+\lambda\omega+\mu)^2}{c\omega+d} + \lambda^2 \omega + 2\lambda v + \lambda\mu \right)$$

dans Eichler et Zagier [4], où les auteurs suivant les lignes de la théorie classique développent une théorie extensive des formes correspondants en partant de la

Définition: Une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{C} \times \mathbb{H}^J$  à valeurs complexes est appelée forme de Jacobi de poids  $k$  et index  $m$  si les conditions suivantes sont remplies

- i)  $f(\gamma(v, \omega)) j_{k,m}(\gamma; (v, \omega)) = f(v, \omega)$  pour tout  $\gamma \in \Gamma^J$
- ii)  $f$  est holomorphe
- iii)  $f$  possède à l'infini un développement de Fourier de la forme

$$\sum c(n, r) q^n \varepsilon^r \quad q = e(\omega), \varepsilon = e(v)$$

avec

$$c(n, r) = 0 \text{ pour } 4mn < r^2.$$

$f$  est dite parabolique si on a en plus

$$\text{iii}') \quad c(n, r) = 0 \text{ pour } 4mn \leq r^2.$$

Les espaces de ces formes sont nommés  $J_{k,m}$  resp.  $J_{k,m}^{\text{cusp}}$ .

Et comme dans la théorie générale, on peut aussi caractériser ces formes comme fonctions sur  $G^J$ ; plus précisément, les relèvements

$$\varphi_{k,m} : f \mapsto \Phi_f \text{ avec } \Phi_f(g) = f(g(O, i)) j_{k,m}(g_i(O, i))$$

donnent isomorphisme entre  $J_{k,m}$  resp.  $J_{k,m}^{\text{cusp}}$  et les espaces  $A_{k,m}$  resp.  $A_{k,m}^{\text{O}}$  des fonctions complexes sur  $G^J$  avec

- 1.)  $\Phi(\gamma g) = \Phi(g)$  pour tout  $\gamma \in \Gamma^J$   
 $\Phi(g r(\zeta, \mathfrak{J})) = \zeta^m e^{ik\mathfrak{J}} \Phi(g)$  pour tout  $r(\zeta, \mathfrak{J}) \in K^J$ ,
- 2.)  $\mathcal{L}_{X_-} \Phi = \mathcal{L}_{Y_-} \Phi = 0$ , où  $\mathcal{L}_{X_-}$  et  $\mathcal{L}_{Y_-}$  sont certains opérateurs différentiels, qui s'expliquent par  $\mathfrak{Q}$ ,

3.)  $|\xi(g)| \leq M y^{k/2} e^{-2\pi m p^2 y}$  pour  $y \rightarrow \infty$  resp.

3')  $\int_{\Gamma^J \backslash \mathbb{H}^J} \xi(g \dot{h}) d\dot{h} = 0$  pour tout  $g \in G^J$ .

Alors on a pour la multiplicité  $m_{k,m}^+$  le

Théorème de dualité:  $m_{k,m}^+ = \dim J_{k,m}^{\text{cusp}}$ .

5. Un modèle projectif de la courbe elliptique universelle de niveau N.

Pour donner une sorte d'application de ce formalisme on indique encore une observation contenue dans la thèse de Bartsch[1].

Les fonctions  $f_\alpha(v, \omega) = e^{-\frac{N\mu(1, \omega)v^2}{2}} \sigma(v, \omega) \prod_{\mu=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\wp(v - \frac{\alpha}{N}, \omega) - \wp(\frac{\mu}{N}, \omega)}{\wp'(\frac{\mu}{N}, \omega)} \cdot \frac{\wp(v, \omega) - \wp(\frac{\mu}{N}, \omega)}{\wp(v - \frac{\alpha}{N}, \omega) - \wp(\frac{\mu}{N}, \omega)}$

$$\alpha = 1, 2, \dots, N, N \text{ premier } \geq 5,$$

qui sont essentiellement celles que Klein a utilisées pour ses "courbes elliptiques normales" peuvent être identifiées comme formes de Jacobi non holomorphes de niveau  $-\frac{3N-1}{2}$  et index  $\frac{N}{2}$ , et donnent un modèle de la courbe elliptique universelle de niveau N, parfois aussi nommée surface de Shioda, c'est à dire le compactifié de

$$\mathbb{Z}^2 \times \Gamma(N) \backslash \mathbb{H} \times \mathcal{Y}.$$

Références

[1] Bartsch, R.: Meromorphe Funktionen auf der universellen elliptischen Kurve mit Niveau N-Struktur. Dissertation Hamburg 1985  
 [2] Berndt, R.: Die Jacobigruppe und die Wärmeleitungsgleichung. Math.Z., 191 (1986), 351-361.  
 [3] Borho, W.: Primitive und vollprimitive Ideale in der Einhüllenden von  $sl(5, \mathbb{C})$  J.of Algebra 43 (1976) 619-654  
 [4] Eichler, M., Zagier, D.: The Theory of Jacobi Forms Birkhäuser, Progr. in Math., vol. 55, Basel 1985  
 [5] Mackey, W.: Unitary representations of group extensions I. Acta Math. 99 (1958) 265-311  
 [6] Satake, I.: Fock Representations and Thetafunctions. In: Ann. Math. Studies 66 (1971) 393-405

Rolf Berndt  
 Mathematisches Seminar der Universität Hamburg  
 Bundesstr. 55  
 D 2000 - HAMBURG 13