HEISUKE HIRONAKA
MONIQUE LEJEUNE-JALABERT
BERNARD TEISSIER

Platificateur local en géométrie analytique et aplatissement local

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 441-463
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__441_0>

PLATIFICATEUR LOCAL EN GEOMETRIE ANALYTIQUE ET APLATISSEMENT LOCAL

Heisuke HIRONAKA - Monique LEJEUNE-JALABERT - Bernard TEISSIER

<u>INTRODUCTION</u> . - Soient $f : X \to W$ un morphisme d'espaces analytiques réels ou complexes, où W est réduit, $w \in W$ et L un compact de $f^{-1}(w)$. Nous montrons ici qu'il existe un voisinage ouvert U de w dans W , une famille finie de morphismes $\pi_i : W_i \to W$ complète au-dessus de U en un sens convenable, chaque π_i étant le composé d'une suite finie d'éclatements locaux, et telle que le transformé strict $f_i : X_i \to W_i$ de f par π_i soit plat en tout point de X_i dont l'image dans X est dans L . De plus, la construction des π_i est faite d'une manière essentiellement canonique (voir § 3) ce qui est très utile dans les applications.

Une application de ce résultat est l' "épanouissement" de certains "coins" analytiques réels ou complexes par des éclatements de l'espace ambiant, jusqu'à ce qu'ils deviennent semi-analytiques. (Un sous-ensemble F d'un espace analytique réel (resp. complexe) W est appelé "coin" (analytique) réel (resp. complexe) s'il existe un morphisme analytique réel (resp. complexe) $f : X \to W$ et un ouvert relativement compact $\mathring{K}$ de X tel que $F = f(\mathring{K})$).

Voici un exemple typique :
Soient $f_i \in \mathbb{R}\{x, y\}$ m fonctions analytiquement indépendantes $(m \geq 3)$ i.e. telles que l'homomorphisme $\mathbb{C}\{t_1,\dots, t_m\} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}\{x, y\}$ défini par $\varphi(t_i) = f_i$ $(1 \leq i \leq m)$ soit injectif. On suppose, de plus, $f_i(0, 0) = 0$ $(1 \leq i \leq m)$. Soit $\mathbb{D}^2$ un polydisque de $\mathbb{R}^2$ centré à l'origine et assez petit pour que f_i converge dans un voisinage de $\overline{\mathbb{D}^2}$ $(1 \leq i \leq m)$. Soit $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{R}^m$ l'application définie par les f_i . $F = f(\mathbb{D}^2)$ est un coin analytique réel de $\mathbb{R}^m$, qui possède la propriété suivante : Pour tout voisinage ouvert connexe U de 0 dans $\mathbb{R}^m$, si une fonction analytique réelle G sur U s'annule en tout point de $U \cap F$, G est identiquement nulle sur U . Mais prenons, par exemple, $(f_1,\dots, f_m) = (y, y.e^x, y.e^{e^x},\dots)$ il est facile de vérifier par regroupement

des termes d'une identité analytique que les f_i sont analytiquement indépendantes, parce que $(1, e^x, e^{e^x} \ldots)$ sont algébriquement indépendantes dans $\mathbb{R}\{x\}$. Nous pouvons observer, par contre, que les fonctions $(f_{1/f_i}, f_{2/f_i}, .., f_i, \ldots, f_{m/f_i})$ ne sont pas analytiquement indépendantes (pour tout $1 \leq i \leq m$) .

Mais ces nouveaux systèmes nous décrivent la transformée de f par éclatement de l'origine dans $\mathbb{R}^m$: le nouveau coin obtenu après éclatement de l'origine dans $\mathbb{R}^m$ accepte donc d'être contenu localement dans une hypersurface.
En général, on peut chercher des équations pour l'image de $f : X \to W$ au voisinage de $f(x)$ $(x \in X)$ en analysant la $\mathcal{O}_{W,f(x)}$-torsion de $\mathcal{O}_{X,x}$, et c'est comme ceci qu'intervient le théorème d'aplatissement.

Nous utilisons, d'une part, la théorie des installations et de leur polygône de Newton ([4]) pour construire explicitement un sous-germe de (W, w) qui est un platificateur universel pour (f, L) , et en montrer certaines propriétés (ces méthodes sont essentiellement différentes de celles utilisées en géométrie algébrique ([5], [6]) ou dans le cas complexe en supposant f propre ([2], [3])) , et utilisons d'autre part, de façon essentielle, la propreté de la voûte étoilée au-dessus de W ([1]).

§ 1 . Existence du platificateur

On rappelle (cf. [4]) qu'une bonne installation est la donnée de deux sous-espaces analytiques complexes X et W d'un espace analytique complexe Z , et d'une rétraction lisse $r : Z \to W$. On utilisera ici les notations de [4] .

1.1. <u>THEOREME 1</u> . - Soient $\mathbb{A} = (X, Z, W; r)$ une bonne installation, et $x \in W \cap X$. Il existe un germe de sous-espace analytique $(\mathbb{P}, x) \subset (W, x)$ ayant la propriété suivante :
Pour tout morphisme $h : W' \to W$, et tout point $x' \in h^{-1}(x)$ si $\mathbb{A}^h = (X^h, Z^h, W^h; r^h) = (X \times_W W', Z \times_W W', W \times_W W'; r \times idW')$ désigne l'installation obtenue par changement de base, $r^h|X^h : X^h \to W^h$ est plat au point $x \times x'$ si et seulement si le germe de h en x' se factorise à travers $(\mathbb{P}, x)$.

<u>Démonstration</u> .

1.2. <u>LEMME</u> . Soit d_1 le plus petit tropisme critique non nul de $\mathbb{A}$ en x (cf. [4], § 2). Notons J l'idéal de $\mathcal{O}_{Z,x}$ définissant X dans Z en x , et $\bar{N} = (\bigoplus_{i \geq 1} gr_x^i W)$. (cf. [4], § 4).

Il existe un système $(f_1, \dots, f_m ; g_1, \dots, g_n)$ d'éléments de J tel que :

1) Pour $0 \leq \delta < d_1$ les $in(f_i, \delta)$, $in(g_j, \delta)$ $(1 \leq i \leq m \ , \ 1 \leq j \leq n)$ sont indépendants de δ (où l'on a noté $in(f, \delta)$ pour $in_x(f; \underline{\mathbb{A}}, \delta) \in gr_x \underline{\mathbb{A}}$; δ voir [4] , définition 1.6.)

De plus
$$\nu_{\bar{N}} (in(f_i, \delta)) = 0 \qquad 1 \leq i \leq m$$
$$\nu_{\bar{N}} (in(g_j, \delta)) > 0 \qquad 1 \leq i \leq n \ .$$

2) Pour $0 \leq \delta \leq d_1$, le système des $(in(f_i, \delta), in(g_j, \delta))$ est un système minimal de générateurs par $\mathfrak{In}_x(\mathbb{A}, \underline{\mathbb{A}}, \delta)$.

3) Notant $\lambda_i = in(f_i, 0) \in gr_x(r^{-1}(x)) \simeq \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_t]$, I l'idéal de $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_t]$ engendré par les λ_i , et $E = \exp I$ l'ensemble des exposants privilégiés de I par rapport à $(\mathbb{C} ; Z_1, \dots, Z_t)$ ([4], 5.9.)
si $g_j = \sum_A g_{j,A} z^A$ dans $\mathcal{O}_{Z,x} \simeq \mathcal{O}_{W,x}\{z_1, \dots, z_t\}$ (où $z^A = z_1^{a_1} \dots z_t^{a_t}$)

on a , pour $1 \leq j \leq n$ $g_{j,A} = 0$ si $A \in E$.

Démonstration . D'après 1.12 de [4] , il existe un système (f_i, g_j) vérifiant 1) et 2) . (La discrimination entre les f_i et les g_j étant faite par la seule condition de 1)). Nous allons modifier les g_j pour obtenir 3) . D'après 5.16 de [4] appliqué à $(f_1, \ldots, f_m)$ et g_j , il existe $h_1, \ldots, h_m$ dans $\mathcal{O}_{W,x}\{z_1, \ldots, z_t\}$ tels que pour $0 \leq \delta \leq d_1$

1) $\nu(h_i, \delta) \geq \nu(g_j, \delta) - \nu(f_i, \delta)$ $\qquad 1 \leq i \leq m$

2) si $\tilde{g}_j = g_j - \sum_i h_i f_i = \sum \tilde{g}_{j,A} z^A$

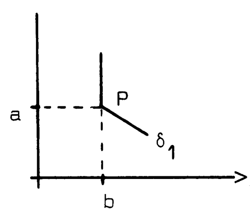
on a $\tilde{g}_{j,A} = 0$ si $A \in E$.
(on note $\nu(g, \delta)$ pour $\nu_x(g; \underline{A}, \delta)$).

Le système $(f_1, \ldots, f_m ; g_1, \ldots, g_n)$ satisfait maintenant 3) .
Il faut vérifier qu'il satisfait encore 1) et 2) :
Si nous notons $H_i(\delta)$ la classe de h_i modulo l'idéal $I^+(\delta; \nu(g_j, \delta) - \nu(f_i, \delta))$, où pour $\mu \in \mathbb{R}_+$, $I^+(\delta;\mu)$ désigne l'idéal de $\mathcal{O}_{W,x}\{z_1, \ldots, z_t\}$ engendré par les $f_A z^A$ tels que $|A| + \frac{\nu_x(f_A)}{\delta} > \mu$, nous avons pour $0 \leq \delta \leq d_1$

$$\mathrm{in}(\tilde{g}_j, \delta) = \mathrm{in}(g_j, \delta) - \Sigma\, H_i(\delta) \cdot \mathrm{in}(f_i, \delta)$$

puisque la condition 2) entraîne que le second membre ne peut être nul.

Ceci montre que 2) est encore vérifiée. Pour vérifier 1) remarquons que si δ_1 est la "pente" du premier côté du polygône de Newton d'un $\tilde{g}_j$, on doit avoir $\delta_1 \geq d_1$; en effet, d'après l'égalité précédente, $\nu(\tilde{g}_j, \delta) = \nu(g_j, \delta)$ et $\mathrm{in}_x(g_j, \delta)$ est bihomogène de bi-degré (a, b) .
Le polygône de Newton de g_j a la forme suivante :



de plus, $\nu_x(\tilde{g}_j, \delta) = \tilde{a} + \frac{\tilde{b}}{\delta} = \nu_x(g_j) = a + \frac{b}{\delta}$ et cette égalité a lieu pour $0 \leq \delta \leq d_1$. D'où $\tilde{a} = a$, $\tilde{b} = b$ et le polygône de Newton de $\tilde{g}_j$ doit être "au-dessus" de celui de g_j , au voisinage de P , i.e. $\delta_1 \geq d_1$, ce qui montre que 1) est encore vérifiée.

1.3. Remarquons que dans les conditions du lemme, le système $(f_1,\dots,f_m;g_1,\dots,g_n)$ engendre I , et que les $\{in(f_i \mid r^{-1}(x))\}_{1\leq i\leq m}$ forment un système minimal de générateurs de $In(X \cap r^{-1}(x), r^{-1}(x))$. Le premier point est classique, et pour voir le second, prenons $f \in J$, et posons $\bar{f} = f \mid r^{-1}(x)$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $in(f, \varepsilon) = in(f, 0) = in(\bar{f})$. D'après le point 2) du lemme, on peut écrire $in\ \bar{f} = in(f, \varepsilon) = \sum_i R_i \lambda_i + \sum_j S_j\ in(g_j, \varepsilon)$ et donc

$in\ \bar{f} = \sum_i (R_i \bmod \bar{N}) . \lambda_i$, ce qui montre que les $in\ \overline{f_i},\dots, in\ \overline{f_m}$ engendrent $In\ (X \cap r^{-1}(x), r^{-1}(x))$. La minimalité se déduit de 2) .

Passons maintenant à la démonstration du théorème 1 :
On choisit pour $\mathbb{A}$ un système (f_i, g_j) comme en 1.2.. Ecrivant $g_j = \sum_A g_{j,A} z^A$ dans $\mathcal{O}_{Z,x} \simeq \mathcal{O}_{W,x}\{z_1,\dots, z_t\}$ nous allons montrer que le sous-germe $(\mathbb{P}, x)$ de (W, x) défini par l'idéal K engendré par les $g_{j,A}$ $(1 \leq j \leq n$, $A \in \mathbb{N}^t)$ est le platificateur universel cherché.

1.4. On peut, bien sûr, tout localiser au voisinage de x , et remplacer W (resp. $\mathbb{P}$) par un représentant assez petit du germe (W, x) (resp. $(\mathbb{P}, x)$), et ainsi supposer que $\mathbb{P}$ est un sous-espace analytique fermé de W . Nous allons montrer que si $\mathbb{A}_{\mathbb{P}} = (X_{\mathbb{P}}, Z_{\mathbb{P}}, \mathbb{P}; r_{\mathbb{P}})$ est l'installation obtenue par le changement de base $\mathbb{P} \subset W$, $r_{\mathbb{P}} \mid X_{\mathbb{P}} : X_{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}$ est plat en x . Ceci montrera la partie "si" du théorème, puisque la platitude se conserve par changement de base .
Soit $\tilde{f}_i$ l'image de f_i dans $\mathcal{O}_{Z_{\mathbb{P}},x} = \mathcal{O}_{Z,x}/_{K.\mathcal{O}_{Z,x}}$ et soit $\overline{f_i}$ l'image de f_i dans $\mathcal{O}_{r^{-1}(x),x}$.

D'après ([4], 4.8.2.) il suffit de montrer que pour $0 < \delta < d_1$, $in_x(\mathbb{A}_{\mathbb{P}}, \underline{\mathbb{A}}_{\mathbb{P}}, \delta)$ est engendré par $(in(\tilde{f}_1, \delta),\dots, in(\tilde{f}_m, \delta))$ (la condition de 4.8.2. est satisfaite : cf. 1.3.).
Soit $\tilde{h} \in J + K.\mathcal{O}_{Z,x}/_{K.\mathcal{O}_{Z,x}}$, et soit $h \in J$ un élément relevant $\tilde{h}$.

D'après la condition 2) et 1.2., on a

$$\mathrm{in}(h,\ \delta) = \sum_i R_i \cdot \mathrm{in}(f_i,\ \delta) + \sum_j S_j\ \mathrm{in}(g_j,\ \delta)$$

avec certains R_i, S_j dans $\mathrm{gr}_x W[Z] = \mathrm{gr}_x W[Z_1, \dots, Z_t]$.

Notons $\pi : \mathrm{gr}_x W[Z] \to \mathrm{gr}_x \mathbb{P}[Z] = \mathrm{gr}_x W /_{\mathrm{in}(\mathbb{P}, W)} [Z]$

le morphisme canonique, et posons $\nu = \nu(h,\ \delta)$, $\tilde{\nu} = \nu(\tilde{h},\ \delta)$. (i.e. respectivement $\nu(h;\ \underline{\Delta},\ \delta)$ et $\nu(\tilde{h};\ \underline{\Delta}_{\mathbb{P}},\ \delta)$) ; on a $\tilde{\nu} \geq \nu$.

a) Si $\tilde{\nu} = \nu$, $\pi(\mathrm{in}(h,\ \delta)) = \mathrm{in}(\tilde{h},\ \delta)$. Puisque $\pi(\mathrm{in}(f_i,\ \delta)) = \mathrm{in}(\tilde{f}_i,\ \delta)$ et $\pi(\mathrm{in}(g_j,\ \delta)) = 0$ (par construction des $(f_i,\ g_j)$ et de $\mathbb{P}$), on obtient : $\mathrm{in}(\tilde{h},\ \delta) = \sum_i \pi(R_i)\ \mathrm{in}(\tilde{f}_i,\ \delta)$ c'est à dire que $\mathrm{in}(\tilde{h},\ \delta)$ est contenu dans l'idéal engendré par les $\mathrm{in}(\tilde{f}_i,\ \delta)$ $(0 < \delta < d_1)$.

b) Si $\tilde{\nu} > \nu$, nous allons changer le relèvement h de $\tilde{h}$. Or, dire que $\tilde{\nu} > \nu$ c'est dire que $\pi(\mathrm{in}(h,\ \delta)) = 0$ i.e. $\mathrm{in}(h,\ \delta) \in \mathrm{in}(\mathbb{P},\ W) \cdot \mathrm{gr}_x\ W[Z]$.
Soit $\mu_j = \nu(g_j,\ \delta)$, $1 \leq j \leq n$. On peut écrire dans $\mathrm{gr}_x W[Z]$: $S_j = \sum_A S_{j,A}\ Z^A$ où $|A| + \dfrac{\deg S_{j,A}}{\delta} = \nu - \mu_j$; relevons $S_{j,A}$ en $s_{j,A} \in \mathcal{O}_{W,x}$ tel que $\mathrm{in}(s_{j,A}) = S_{j,A}$ et posons

$$s_j = \sum_{|A| = \nu - \mu_j} s_{j,A}\ z^A$$

Soit

$$h_1 = h - \sum_{j=1}^{n} s_j \cdot g_j$$

$h \in J$, et $\tilde{h}_1 = h_1 \bmod K.\mathcal{O}_{Z,x}$ est égal à $\tilde{h}$ et $\nu(h_1,\ \delta) \geq \nu(h,\ \delta) = \nu$.
Ou bien $\nu(h_1,\ \delta) > \nu$, ou bien $\nu(h_1,\ \delta) = \nu$. Dans ce dernier cas,
$\mathrm{in}(h_1,\ \delta) = \mathrm{in}(h,\ \delta) - \sum_j S_j . \mathrm{in}(g_j,\ \delta) = \sum_i R_i\ \lambda_i(Z)$ $\quad (\lambda_i(Z) = \mathrm{in}(f_i,\ \delta))$.

puisque par construction de K , $\mathrm{in}(g_j,\ \delta) \in \mathrm{in}(\mathbb{P},\ W)\ \mathrm{gr}_x W[Z]$, on voit que :

$$\mathrm{in}(h_1,\ \delta) \in M \cap N$$

où $M = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)\ \mathrm{gr}_x W[Z]$, $\qquad N = \mathrm{in}(\mathbb{P},\ W)\ \mathrm{gr}_x W[Z]$.

Or, $M \cap N_{/M.N} = \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{gr}_x W[Z]}(\mathrm{gr}_x W[Z]_{/M},\ \mathrm{gr}_x W[Z]_{/N}) = \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{gr}_x W}(\mathrm{gr}_x W[Z]_{/M}, \mathrm{gr}_x W /_{\mathrm{in}(\mathbb{P}, W)})$

qui est nul puisque $\mathrm{gr}_x W[Z]_{/M}$ est plat sur $\mathrm{gr}_x W$. (Géométriquement, ceci correspond à la projection $C_{X \cap r^{-1}(x), x} \times C_{W,x} \to C_{W,x}$).

On peut donc écrire :

$$\mathrm{in}_x(h_1,\ \delta) = \sum_{i,\ell} Q_{i,\ell}\ \mathrm{in}(h_\ell).\lambda_i(Z) \qquad \text{avec} \quad Q_{i,\ell} \in \mathrm{gr}_x W[Z]\ ,$$

$h_\ell \in K$. Relevant $Q_{i,\ell}$ en $q_{i,\ell}$ comme plus haut, on trouve que

$$\nu(h_1 - \sum_{i,\ell} q_{i,\ell}\, h_\ell\, f_i, \delta) > \nu$$

et posant $h_2 = h_1 - \sum_{i,\ell} q_{i,\ell}\, h_\ell\, f_i$ on voit que $h_2 \in J$, $\tilde{h}_2 = \tilde{h}_1 = \tilde{h}$.

Ainsi, dans tous les cas, on a su modifier le relèvement h de $\tilde{h}$ de façon que $\nu(h,\ \delta) > \nu$. Au bout d'un nombre fini de tels pas, on sera ramené au cas a) . Ceci achève la démonstration de la partie "si" du théorème 1 .

1.5. Il nous faut maintenant montrer que si $r^h : X^h \to W^h$ $(= W')$ est plat en $x \times x'$, $(h,\ x')$ se factorise par $(\mathbb{P}\ ,\ x) \subset (W,\ x)$.

1.5.1. Considérons d'abord le cas où $h : W' \to W$ est une immersion. Le problème étant local en $x' \in h^{-1}(x)$, nous supposons que h est une immersion fermée : $(W',\ x') \subset (W,\ x)$. Soit $(f_1, .., f_m;\ g_1, .., g_m)$ comme en 1.2.. Notons f_i^h (resp. g_j^h) l'image de f_i (resp. g_j) dans $\mathcal{O}_{Z^h,x}$ $(Z^h = Z \underset{W}{\times} W')$ et $\overline{f_i}$ l'image de f_i dans $\mathcal{O}_{r^{-1}(x),x}$. D'après 1.3. $(\mathrm{in}\ \overline{f_i}, .., \mathrm{in}\ \overline{f_m})$ est un système minimal de générateurs de $\mathrm{In}_x(X \cap r^{-1}(x),\ r^{-1}(x))$. Nous supposons $r^h : X^h \to W^h$ (où $X^h = X \cap r^{-1}(W'),\ W^h = W'$) plat en x , et voulons montrer que $(W^h,\ x) \subset (\mathbb{P}\ ,\ x)$. D'après ([4], 4.8.2) , il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(\mathrm{in}\ (f_1^h,\ \delta), \ldots, \mathrm{in}\ (f_m^h,\ \delta))$ soit un système minimal de générateurs de $\mathrm{in}_x(\mathbb{A}^h,\ \underline{\mathbb{A}}^h,\ \delta)$ pour tout $\delta \in [0,\ \varepsilon]$. On peut choisir, par exemple, ε plus petit que d_1 , plus petit tropisme critique non nul de $\mathbb{A}$ en x . Dans ces conditions $\mathrm{in}\ (f_i,\ \delta) = \lambda_i(Z) = \mathrm{in}\ \overline{f_i}$ $\quad 1 \leq i \leq m$.
Soit $j \in (1, \ldots, n)$. Si $g_j^h \neq 0$, on peut d'après ce qui précède écrire :

$$\mathrm{in}\ (g_j^h,\ \delta) = \sum_i Q_i\ \lambda_i(Z) \quad \text{où} \quad Q_i \in \mathrm{gr}_x\ W'[Z] = \mathrm{gr}_x\ W/_{\mathrm{in}\ (W',W)}\ [Z]\ .$$

Ecrivant $g_j = \sum_A g_{j,A}\ Z^A$ avec $g_{j,A} \in \mathcal{O}_{W,x}$, $g_j^h = \sum_A (g_{j,A} \mid W')Z^A = \sum_A g_{j,A}^h\ Z^A$ et $\mathrm{in}\ (g_i^h,\ \delta) = \sum_A G_{j,A}\ Z^A$, où $G_{j,A} \in \mathrm{gr}_x\ W'$ est homogène de degré $\delta(\nu(g_j^h,\ \delta) - |A|)$. Ceci nous permet d'identifier les composantes bihomogènes dans l'égalité : $\operatorname{in}(g_j^h, \delta) = \sum_i Q_i . \lambda_i(Z) = \sum_A G_{j,A}\, Z^A$. On en déduit l'existence d'un exposant $A \in E = \operatorname{Exp}(\lambda_1(Z), \dots, \lambda_m(Z))$ (cf. [4], § 5) tel que $G_{j,A} \neq 0$. Mais ceci entraîne $g_{j,A} \neq 0$, ce qui contredit la condition 3) de 1.2.. On doit donc avoir $g_j^h = 0$ $(1 \leq j \leq h)$, c'est à dire que l'idéal définissant (W', x) dans (W, x) contient K , ce qu'il fallait démontrer.

1.5.2. Dans le cas général, en se localisant au voisinage de x' , on peut plonger $(W', x') \overset{i}{\hookrightarrow} (\mathbb{C}^k, 0)$, et écrire h comme composée :

$$(W', x') \xhookrightarrow{h' = h \times i} (W \times \mathbb{C}^k, x \times 0) \xrightarrow{pr_1} (W, x)$$

où h' est une immersion.

Le système $(f_1, \dots, f_m ; g_1, \dots, g_n)\, \mathcal{O}_{W \times \mathbb{C}^k, x \times 0}$ vérifie toutes les conditions de 1.2.. Par conséquent, d'après 1.5.1., si $r^h : X^h \to W'$ est plat en $x \times x'$, (h', x') se factorise à travers $(\mathbb{P} \times \mathbb{C}^k, x \times 0)$, et donc (h, x) par $(\mathbb{P}, x) \subset (W, x)$.

1.6. <u>Remarque</u>. - Dans les conditions du théorème 1 , posant $\mathbb{A}_{\mathbb{P}} = (X_{\mathbb{P}}, Z_{\mathbb{P}}, W_{\mathbb{P}} ; r_{\mathbb{P}})$ $(W_{\mathbb{P}} = \mathbb{P})$, le premier tropisme critique de $\mathbb{A}_{\mathbb{P}}$ en x est supérieur ou égal à d_1 , plus petit tropisme critique non nul de $\mathbb{A}$ en x . Nous avons, en effet, montré en chemin que $C^{\delta}_{\mathbb{A}_{\mathbb{P}}, x}$ est indépendant de $\delta \in [0, d_1[$.

Nous obtenons comme corollaire du théorème 1 :

<u>THEOREME 1'</u> . - Soient $f : X \to W$ un morphisme d'espaces analytiques complexes, $w \in W$ et L un sous-ensemble compact de $f^{-1}(w)$. Il existe un germe de sous-espace analytique $(\mathbb{P}_{f,L}, w) \subset (W, w)$ possédant la propriété suivante :
Pour tout morphisme $h : W' \to W$, et tout point $w' \in h^{-1}(w)$, considérons le changement de base de f par h :

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ W' & \xrightarrow{h} & W \end{array}$$

f' est plat en tout point de $w' \times L$ si et seulement si (h, w') se factorise à travers $(\mathbb{P}_{f,L}, w)$.

<u>Démonstration</u>. – Au voisinage de tout point $x \in L$ on peut installer f, c'est à dire fabriquer une installation $\mathbb{A} = (X, Z, W; r)$ cf. [4], 1.4. telle que $r \mid X = f$. Le théorème 1 nous donne l'existence d'un platificateur local pour f en x, $\mathbb{P}_{f,x}$ défini par un idéal $K_{f,x}$ de $\mathcal{O}_{W,w}$.

Le sous-germe de (W, w) défini par $\sum_{x \in L} K_{f,x}$ est celui que nous cherchons,

(i.e. c'est $\bigcap_{x \in L} \mathbb{P}_{f,x} = \mathbb{P}_{f,L}$).

§ 2 . Eclatement du platificateur

2.1. Transformé strict d'un morphisme par un éclatement de la base.
Soit $f : X \to W$ un morphisme d'espaces analytiques complexes, et soit (U, E, π) un éclatement local de W , c'est à dire la donnée d'un ouvert U de W , d'un sous-espace analytique fermé E de $W \mid U$, et du morphisme $\pi : W_1 \to W$ composé de l'éclatement de centre E dans $W \mid U$ et de l'inclusion $W \mid U \subset W$. On en déduit un éclatement local $(f^{-1}(U), f^{-1}(E), \varphi)$ de X , et par la propriété universelle de l'éclatement, un unique morphisme f_1 rendant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ W_1 & \xrightarrow{\pi} & W \end{array}$$

f_1 est appelé transformé strict de f par (U, E, π) . (ou plus simplement par π) .

2.2. Remarque . - Le morphisme canonique $X_1 \to X_{W_1} = X \underset{W}{\times} W_1$ est une immersion fermée. En fait, c'est un isomorphisme de X_1 sur le sous-espace analytique fermé de X_{W_1} défini par l'Idéal cohérent (grâce au théorème de Cartan)

$\bigcup_{\nu \geq 0} \underline{\mathrm{Ann}}_{\mathcal{O}_{X_{W_1}}} (I_1^{\nu} \cdot \mathcal{O}_{X_{W_1}})$ où I_1 est l'Idéal inversible de $\mathcal{O}_{W_1}$ définissant le diviseur exceptionnel de (U, E, π) . ($\underline{\mathrm{Ann}}$ désigne le faisceau (cohérent) des annihilateurs).

2.3. En particulier, pour tout $w \in U$, et tout $w_1 \in \pi^{-1}(w)$ on a une immersion fermée :

$$f_1^{-1}(w_1) \hookrightarrow f^{-1}(w)$$

puisque $f^{-1}(w)$ est aussi la fibre de X_{W_1} au dessus de w_1 .

2.3. THEOREME 2 . - Soient $\Delta = (X, Z, W; r)$ une bonne installation, $x \in W \cap X$, et soit $(\mathbb{P}, x) \subset (W, x)$ le germe de platificateur universel donné par le théorème 1 . Soit U un voisinage ouvert de x dans W dans lequel $(\mathbb{P}, x)$

est représenté par un sous-espace analytique fermé $\mathbb{P}$ de $W \mid U$, et soit $(U, \mathbb{P}, \pi)$ l'éclatement local correspondant. Notons $\mathbb{A}_{W_1} = (X_{W_1}, Z_{W_1}, W_1; r_1)$ l'installation obtenue par changement de base par $\pi : W_1 \to W$.

$$\begin{tikzcd}
 & & Z_{W_1} \arrow[rr, "\omega^o"] \arrow[ddl, "r_1"] & & Z \arrow[ddl, "r"] \\
X_1 \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f_1"'] & X_{W_1} \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "\omega_o"] \arrow[d] & & X \arrow[ur, hook] \arrow[d, "f"'] & \\
 & W_1 \arrow[rr, "\pi"] & & W &
\end{tikzcd}$$

Soit f_1 le transformé strict de $f = r \mid X$ par π . Pour tout $w_1 \in \pi^{-1}(x)$, notant $x_1 = x \underset{W}{\times} w_1$

$$f_1^{-1}(w_1) \underset{\neq}{\hookrightarrow} f^{-1}(x)$$

i.e. l'inclusion de 2.3. est <u>stricte</u> .

<u>Démonstration</u> . – Notons x_1 pour $x \underset{W}{\times} w_1 \in X_{W_1}$, et reprenons les notations du § 1 . Soit $(f_1, \ldots, f_m ; g_1, \ldots, g_n)$ un système de générateurs de J comme en 1.2.. Notons $f_i' = f_i \circ \omega^o$, $g'_j = g_j \circ \omega^o$. $(f'_1, \ldots, f'_m ; g'_1, \ldots, g'_n)$ est un système de générateurs pour l'idéal J' définissant X_{W_1} dans Z_{W_1} en x_1 . Ecrivant $Z = W \times \mathbb{C}^t$ au voisinage de x comme toujours, $f_i = \sum_A f_{i,A} \cdot z^A$; $g_j = \sum g_{j,A} \cdot z^A$, et posant encore $f_{i,A}' = f_{i,A} \circ \pi$; $g_{j,A}' = g_{j,A} \circ \pi$ nous avons dans l'installation $\mathbb{A}_{W_1}$, au voisinage de x_1 :

$$f'_i = \sum_A f'_{i,A} z^A \ ; \ g'_j = \sum_A g'_{j,A} z^A \ .$$

Puisque π est l'éclatement local dont le centre est défini par l'idéal engendré par les $g_{j,A}$ $(1 \leq i \leq n \ , \ A \in \mathbb{N}^t)$ il existe $g \in \mathcal{O}_{W_1, w_1}$ (générateur local pour l'idéal du diviseur exceptionnel) tel que

$$(*) \qquad g'_{j,A} = \beta_{j,A} \cdot g \qquad 1 \leq j \leq n \ ; \ A \in \mathbb{N}^t$$

et pour au moins un couple (j_o, A_o) , β_{j_o, A_o} est inversible dans $\mathcal{O}_{W_1, w_1}$.

(*) nous permet d'écrire :

$$g'_j = (g \circ r_1) \cdot \sum_A \beta_{j,A}\, z^A$$

Nous allons montrer que :

a) La restriction de $\sum_A \beta_{j_o,A}\, z^A$ à X_{W_1} (au voisinage de x_1) appartient à l'idéal définissant X_1 dans X_{W_1} en x_1, c'est à dire (cf. 2.2.) l'idéal des éléments de $\mathcal{O}_{X_{W_1},x_1}$ annulés par une puissance de g. (via le morphisme $\mathcal{O}_{W_1,w_1} \to \mathcal{O}_{X_{W_1},x_1}$).

b) Posons pour simplifier $X_{W_1} = \widetilde{X}_1$, et notons $\widetilde{f}_1 : \widetilde{X}_1 \to W_1$ la projection. Alors, la forme initiale en x_1 de la restriction de $\sum_A \beta_{j_o,A}\, z^A$ à $r_1^{-1}(w_1)$ n'appartient pas à $\mathrm{in}_{x_1}(\widetilde{f}_1^{-1}(w_1)\ ,\ r_1^{-1}(w_1))$.

Ceci montrera que $\quad C_{f_1^{-1}(w_1),\, x_1} \subsetneq C_{\widetilde{f}_1^{-1}(w_1),x_1} \qquad \left(\simeq C_{f^{-1}(x),\, x}\right)$

et donc a fortiori le théorème.

En fait, a) et b) sont démontrés simultanément comme suit :

Posons $g''_{j_o} = \sum_A \beta_{j_o,A}\, z^A$. Pour montrer que la classe modulo J' de g''_{j_o} définit un élément de g-torsion, il suffit de montrer que $g''_{j_o} \notin J'$, puisque $g \cdot g''_{j_o} = g'_{j_o} \in J'$.

Or, si $g''_{j_o} \in J'$, on doit avoir, en notant par une barre la restriction à $r_1^{-1}(w_1)$ $\ (= r^{-1}(x) \simeq \mathbb{C}^t$ localement) $\bar{g}''_{j_o} \in (\bar{f}_1,\dots, \bar{f}_m)\, \mathbb{C}\{z_1,\dots, z_t\}$ (idéal définissant $\widetilde{f}_1^{-1}(w_1)$ dans $r_1^{-1}(w_1)$) et $\bar{g}''_{j_o} \neq 0$ puisqu'il existe A_o tel que β_{j_o,A_o} soit inversible en x_1. D'après ce que nous avons vu au § 1 , ceci entraîne :

$$\mathrm{in}_{x_1} \bar{g}''_{j_o} \in (\lambda_1,\dots, \lambda_m)\, \mathbb{C}[Z_1,\dots, Z_t]$$

$$(= \mathrm{in}_{x_1}(\widetilde{f}_1^{-1}(w_1)\ ,\ r_1^{-1}(w_1))$$

Or, $in_{x_1}\bar{g}''_{j_o} = \sum_A k_{j_o,A} Z^A$, où les exposants A sont certains des exposants qui apparaissent dans le développement $g_{j_o} = \sum_A g_{j_o,A} z^A$. Ceci contredit la condition 3) de 1.2. , donc $in_{x_1}\bar{g}''_{j_o} \notin in_{x_1}(\tilde{f}_1^{-1}(w_1), r_1^{-1}(w_1))$ ce qui montre à la fois a) et b) et donc le théorème.

2.4. <u>THEOREME 2'</u>. – Soient $f : X \to W$ un morphisme d'espaces analytiques, $w \in W$ et L un compact de $f^{-1}(w)$. Soit U un voisinage ouvert de w dans W dans lequel le germe de platificateur universel $(\mathbb{P}_{f,L}, w)$ est représenté par un sous-espace analytique fermé $\mathbb{P}_{f,L}$ de $W \mid U$, et soit $(U, \mathbb{P}_{f,L}, \pi)$ l'éclatement local correspondant. Ecrivons le diagramme du transformé strict

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & X \\ \Big\downarrow f_1 & & f \Big\downarrow \\ W_1 & \xrightarrow{\pi} & W \end{array}$$

Pour tout $w_1 \in \pi^{-1}(w)$, il existe au moins un point $x \in L$ tel que l'inclusion de germes (cf. 2.3.)

$$(f_1^{-1}(f_1(x_1)),\ x_1) \subset (f^{-1}(w),\ x)$$

soit stricte. (où $x_1 = x \times w_1$)

<u>Démonstration</u> . – Souvenons-nous que l'idéal $K_{f,L}$ définissant $(\mathbb{P}_{f,L}, w)$ dans (W, w) est $\sum_{x \in L} K_{f,x}$. Mais $K_{f,L} \cdot \mathcal{O}_{W_1,w_1}$ est un idéal inversible, et donc il existe certainement $x \in L$ tel que

$$K_{f,L} \cdot \mathcal{O}_{W_1,w_1} = K_{f,x} \cdot \mathcal{O}_{W_1,w_1} \quad .$$

Il suffit donc d'installer f au voisinage de x ([4], 1.4.) et d'appliquer le théorème 2 .

2.5. <u>Remarque</u> . – Il résulte de la propriété universelle de $\mathbb{P}_{f,L}$ que la formation de $\mathbb{P}_{f,L}$ commute au changement de base, c'est à dire que si l'on a :

$$\begin{tikzcd} X_{W'} \arrow[r] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ W' \arrow[r, "h"] & W \end{tikzcd}$$

où $X_{W'} = X \times_W W'$ et $w \in W$, L comme dans le théorème 2 , pour tout $w' \in h^{-1}(w)$

$$(\mathbb{P}_{f',L}, w') = (h^{-1}(\mathbb{P}_{f,L}), w')$$

De plus, la platitude se transporte par autoconjugaison : si $f : X \to W$ est complexifié d'un morphisme analytique réel $f^{\mathbb{R}} : X^{\mathbb{R}} \to W^{\mathbb{R}}$, ($X$ et W sont munis d'autoconjugaisons compatibles σ_X et σ_W) et si $\sigma_X(L) = L$, $\sigma_W(w) = w$, $\mathbb{P}_{f,L}$ est le complexifié d'un sous-espace analytique réel $\mathbb{P}^{\mathbb{R}}_{f,L}$ de $W^{\mathbb{R}}$, platificateur universel de $(f^{\mathbb{R}}, L)$, puisqu'il résulte immédiatement de la définition du complexifié d'un morphisme d'espaces analytiques réels que le complexifié est plat si et seulement si le morphisme réel l'est.

§ 3 . Aplatissement local

3.1. Soit $f : X \to W$ un morphisme d'espaces analytiques complexes, où W est réduit. Soient $w \in W$ et L un compact de $f^{-1}(w)$.
Nous notons $\mathcal{E}(W)$ la catégorie dont les objèts sont les morphismes $\pi : W' \to W$, compositions de suites finies d'éclatements locaux au-dessus de W , et dont les morphismes sont les W-morphismes. (cf. [1]).
Soit $\mathcal{E}_W$ la voûte étoilée au-dessus de W , et soit $p_W : \mathcal{E}_W \to W$ l'application canonique (cf. [1]). Rappelons-nous que, par définition, une étoile $e \in \mathcal{E}_W$ est une sous-catégorie de $\mathcal{E}(W)$ maximale parmi celles qui ont la propriété suivante : Si $\pi_i : W_i \to W$ appartiennent à e $(i = 1, 2)$, il existe $\pi_3 : W_3 \to W$ appartenant à e , et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & W_1 \arrow[dr, "\pi_1"] & \\ W_3 \arrow[ur, "q_1"] \arrow[rr, "\pi_3"] \arrow[dr, "q_2"'] & & W \\ & W_2 \arrow[ur, "\pi_2"'] & \end{tikzcd}$$

tels que W_3 soit non vide et que l'image $q_i(W_3)$ soit relativement compacte dans W_i $(i = 1, 2)$.
Soit $e \in \mathcal{E}_W$ une étoile quelconque telle que $p_W(e) = w$.
Considérons une suite infinie d'éclatements locaux

$$S = \{(U_\alpha, E_\alpha, \pi_\alpha)\}_{0 \leq \alpha}$$

(où $W_0 = W$, et $\pi_\alpha : W_{\alpha+1} \to W_\alpha$ est le composé de l'éclatement de centre E_α dans $W_\alpha \mid U_\alpha$ et de l'inclusion $W_\alpha \mid U_\alpha \subset W_\alpha$)
ayant les propriétés suivantes :

3.1. La composée des π_α $0 \leq \alpha < i$ appartient à e pour tout entier $i > 0$.

3.2. Soit $f_i : X_i \to W_i$ le transformé strict de f par $\{(U_\alpha, E_\alpha, \pi_\alpha)\}_{0 \leq \alpha < i}$.
(cf. § 2) $(X_0 = X , \quad f_0 = f)$

$$\begin{tikzcd} X_{i+1} \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "f_{i+1}"] & X_i \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_i"] & X_{i-1} \underset{W}{\times} W_i \overset{\text{def.}}{=} X'_i \\ W_{i+1} \arrow[r, "\pi_i"] & W_i & \end{tikzcd}$$

Posons $L_i = L_{i-1} \underset{W}{\times} p_{W_i}(e) \subset X_{i-1} \underset{W}{\times} W_i$ où $p_{W_i} : \mathcal{E}_{W_i} \to W_i$ désigne l'application canonique de la voûte étoilée au-dessus de W_i, et $\mathcal{E}_{W_i}$ est canoniquement identifiée avec un ouvert de $\mathcal{E}_W$ (cf. [1]).

On a vérifié (cf. Théorème 1') qu'il existe un sous-espace analytique complexe $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}_{f_i, L_i}$ fermé dans un voisinage de $w_i = p_{W_i}(e)$ dans W_i, qui est platificateur universel pour (f_i, L_i).

La seconde condition imposée à S est que pour tout i, $\mathbb{P}_i$ soit un sous-espace analytique fermé de $W_i \mid U_i$, et que $E_i = \mathbb{P}_i \cap W_i^*$, où W_i^* désigne l'adhérence (sous-espace analytique complexe réduit) de $W_i \mid U_i - \mathbb{P}_i$ dans $W_i \mid U_i$. (cette condition implique que E_i est rare dans $W_i \mid U_i$).

3.3. <u>Remarque</u>. – Etant donné (f, L, e), si $S' = \{(U'_\alpha, E'_\alpha, \pi'_\alpha)\}_{0 \leq \alpha}$ avec $\pi'_\alpha : W'_{\alpha+1} \to W'_\alpha$ et $W'_0 = W$ est une autre suite ayant les mêmes propriétés 3.1. et 3.2., alors il existe une suite de voisinages ouverts V_α de $p_{W_\alpha}(e)$ dans U_α et une suite de plongements ouverts $j_\alpha : W_\alpha \mid V_\alpha \to W'_\alpha$ $0 \leq \alpha < \infty$ tels que

a) $\pi_\alpha(V_{\alpha+1}) \subset V_\alpha$ pour tout α

b) $\pi'_\alpha \circ j_{\alpha+1} = j_\alpha \circ \pi_\alpha \mid V_{\alpha+1}$ pour tout α, et j_0 est l'inclusion canonique.

c) $j_\alpha(V_\alpha) \subset U'_\alpha$ et $j_\alpha^{-1}(E'_\alpha) = E_\alpha \mid V_\alpha$ pour tout α.

Autrement dit, la suite des "germes" des éclatements $(U_\alpha, E_\alpha, \pi_\alpha)$ aux points $p_{W_\alpha}(e)$ est unique pour chaque (f, L, e). C'est une conséquence immédiate de l'unicité du germe de $\mathbb{P}_{f,L}$ du Théorème 1' au point $w \in W$.

THEOREME 3 . – L'hypothèse étant comme ci-dessus sur $f : X \to W$, $L \subset X$, $e \in \mathcal{E}_W$ et S , il existe un entier $\alpha_0 \geq 0$ tel que pour tout $\alpha \geq \alpha_0$ le transformé strict $f_\alpha : X_\alpha \to W_\alpha$ de 3.2. soit plat en tout point de $X_\alpha \cap (L \underset{W}{\times} W_\alpha) \cap f_\alpha^{-1}(p_{W_\alpha}(e))$ i.e. en tout point de X_α dont l'image par le morphisme canonique $X_\alpha \to X$ est dans L , et dont l'image par f_α est $p_{W_\alpha}(e)$.

Démonstration . – Pour chaque $\alpha \geq 1$, soit X'_α le produit fibré de $X_{\alpha-1}$ et W_α au-dessus de $W_{\alpha-1}$ par rapport à $f_{\alpha-1}$ et $\pi_{\alpha-1}$. Soit $f'_\alpha : X'_\alpha \to W_\alpha$ la projection canonique. Posons $L_\alpha = L_{\alpha-1} \times p_\alpha(e) \subset X'_\alpha$ $(L_0 = L)$ où $p_\alpha = p_{W_\alpha} : \mathcal{E}_{W_\alpha} \to W_\alpha$. On a un plongement fermé canonique $X_\alpha \hookrightarrow X'_\alpha$ de sorte que f'_α induise f_α (cf. § 2) . Il est évident que l'autre projection $X'_\alpha \to X_{\alpha-1}$ induit un isomorphisme des fibres $f'^{-1}_\alpha(p_\alpha(e)) \simeq f^{-1}_{\alpha-1}(p_{\alpha-1}(e))$. Ceci induit un plongement fermé :

$$\varphi_{\alpha-1} \; : \; f_\alpha^{-1}(p_\alpha(e)) \hookrightarrow f^{-1}_{\alpha-1}(p_{\alpha-1}(e)) \quad .$$

Nous nous proposons de démontrer que si f_α n'est pas plat en tout point de $L_\alpha \cap X_\alpha$, $\varphi_{\alpha-1}$ n'est pas un isomorphisme. Reprenons les notations de 3.2.. La propriété d'aplatissement de $\mathbb{P}_{\alpha-1}$ est locale au point $p_{W_{\alpha-1}}(e) \in W_{\alpha-1}$, donc on peut supposer que $\mathbb{P}_{\alpha-1}$ est contenu dans $U_{\alpha-1}$. Alors, $W_{\alpha-1}$ étant réduit, on a $W_{\alpha-1} \mid U_{\alpha-1} = W^*_{\alpha-1} \cup \mathbb{P}_{\alpha-1}$. Puisque le centre $E_{\alpha-1} = W^*_{\alpha-1} \cap \mathbb{P}_{\alpha-1}$, W_α est l'union disjointe des transformés stricts de $W^*_{\alpha-1}$ et $\mathbb{P}_{\alpha-1}$ par l'éclatement $\pi_{\alpha-1}$. Si $p_\alpha(e)$ est contenu dans le transformé strict de $\mathbb{P}_{\alpha-1}$, alors il existe un voisinage V_α de $p_\alpha(e)$ dans W_α tel que $\pi_{\alpha-1}$ induise un morphisme de $W_\alpha \mid V_\alpha$ dans $\mathbb{P}_{\alpha-1}$. Alors la propriété de $\mathbb{P}_{\alpha-1}$ (cf. Th. 1', § 1) implique que f'_α soit plat en tout point de L_α , d'où $X_\alpha \hookrightarrow X'_\alpha$ est un isomorphisme dans un voisinage de $L_\alpha \cap X_\alpha$, et f_α est plat en tout point de $L_\alpha \cap X_\alpha$. Ceci contredit l'hypothèse sur $(f_\alpha , L_\alpha \cap X_\alpha)$. Donc $p_\alpha(e)$ est dans le transformé strict de $W^*_{\alpha-1}$ par $\pi_{\alpha-1}$, qui sera noté W^{**}_α . Evidemment, $f_\alpha^{-1}(W_\alpha{**}) \to W_\alpha{**}$, induit par f_α , est le transformé strict de $f^{-1}_{\alpha-1}(W^*_{\alpha-1}) \to W^*_{\alpha-1}$ induit par $f_{\alpha-1}$ (ceci résulte du fait que $f_\alpha^{-1}(W_\alpha{**})$ est ouvert dans X_α) . En plus, $E_{\alpha-1}(= W^*_{\alpha-1} \cap \mathbb{P}_{\alpha-1})$ a la propriété d'être "universellement aplatissant" pour ce dernier morphisme en $L_{\alpha-1} \cap f^{-1}_{\alpha-1}(W^*_{\alpha-1})$. Grâce au Théorème 2' , § 2 , il existe au moins un point $z_{\alpha-1} \in L_{\alpha-1}$ tel que le germe de $\varphi_{\alpha-1}$ au point $z_\alpha = z_{\alpha-1} \times p_\alpha(e)$ ne soit pas un isomorphisme. Ceci vérifie ce que nous avions proposé.

Or, si f_α n'est pas plat en tout point de $L_\alpha \cap X_\alpha$, pour tout $\alpha \geq 1$, alors on obtient une suite infinie de fibres $f_\alpha^{-1}(p_\alpha(e))$ strictement décroissante aux points z_α par rapport aux plongements canoniques $f_{\alpha+1}^{-1}(p_{\alpha+1}(e)) \hookrightarrow f_\alpha^{-1}(p_\alpha(e))$, $\alpha \geq 0$. C'est impossible d'après le théorème de Cartan déjà utilisé en 2.2.. Ceci achève la démonstration du Théorème 3 .

3.4. <u>Remarque</u> . – Supposons que $f : X \to W$ soit donné comme complexifié d'un morphisme d'espaces analytiques réels $f^{\mathbb{R}} : X^{\mathbb{R}} \to W^{\mathbb{R}}$. Alors, par définition, on a des autoconjugaisons complexes τ_0 de $X = X_0$ et σ_0 de $W = W_0$ telles que $X^{\mathbb{R}}$ (resp. $W^{\mathbb{R}}$) soit le sous-espace invariant de X (resp. W) par τ_0 (resp. σ_0) et $f_0\tau_0 = \sigma_0 f_0$, où $f_0 = f$.
Soient $w = w_0 \in X$ et L_0 un compact de $f^{-1}(w)$ tel que $\tau_0(L_0) = L_0$. Etant donné une suite $S = \{(U_\alpha, E_\alpha, \pi_\alpha)\}_{0 \leq \alpha}$ ayant les propriétés 3.1. et 3.2., nous voulons construire une nouvelle suite $S' = \{(U'_\alpha, E'_\alpha, \pi'_\alpha)\}_{0 \leq \alpha}$ ayant les mêmes propriétés et de plus la propriété suivante :

3.4.1. Il existe une autoconjugaison complexe σ_α de W'_α (où $\pi'_\alpha : W'_{\alpha+1} \to W'_\alpha$, $\alpha \geq 0$) , pour chaque $\alpha \geq 0$ telle que $\sigma_\alpha(U'_\alpha) = U'_\alpha$, $\sigma_\alpha(E'_\alpha) = E'_\alpha$ et $\pi'_\alpha \sigma_{\alpha+1} = \sigma_\alpha \pi'_\alpha$ pour tout $\alpha \geq 0$. (Ici σ_0 est donnée) . Par récurrence, supposons que, β étant un entier ≥ 0 , tous les $(U_\alpha, E_\alpha, \pi_\alpha) = (U'_\alpha, E'_\alpha, \pi'_\alpha)$ avec $\alpha < \beta$ satisfassent 3.4.1.. Puisque $\pi_{\beta-1} : W_\beta \to W_{\beta-1}$ (dans le cas $\beta > 0$) est l'éclatement de centre $E_{\beta-1}$ au-dessus de $U_{\beta-1}$, cette hypothèse entraîne qu'il existe une autoconjugaison complexe (unique) σ_β de W_β telle que . $\pi_{\beta-1}\,\sigma_\beta = \sigma_{\beta-1}\,\pi_{\beta-1}$. ($\sigma_\beta = \sigma_0$ est donnée si $\beta = 0$) . En outre, par définition de la transformée stricte, le morphisme canonique $r_\alpha : X_{\alpha+1} \to X_\alpha$ est l'éclatement local de centre $f_\alpha^{-1}(E_\alpha)$ au-dessus de $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$. Donc on a des autoconjugaisons complexes τ_α de X_α telles que $r_{\alpha-1}\,\tau_\alpha = \tau_{\alpha-1}\,r_{\alpha-1}$ pour tous les $\alpha \leq \beta$. Evidemment, $f_\alpha \tau_\alpha = \sigma_\alpha f_\alpha$ pour tout $\alpha \leq \beta$ (τ_0 est donnée). Etant donné $(U_\beta, E_\beta, \pi_\beta)$ comme ci-dessus, on a $\mathbb{P}_\beta \subset W_\beta \mid U_\beta$, et W_β^* , qui ont la propriété 3.2.. Puisque $\mathbb{P}_\beta$ a la propriété universelle d'aplatissement pour $(f_\beta, L_\beta \cap X_\beta)$, $\sigma_\beta(\mathbb{P}_\beta)$ a la même propriété pour $(f_\beta, \tau_\beta(L_\beta \cap X_\beta))$.
Soit $w_\beta = p_{W_\beta}(e)$. Si $w_\beta = \sigma_\beta(w_\beta)$, la propriété universelle implique que $\mathbb{P}_\beta$ et $\sigma_\beta(\mathbb{P}_\beta)$ donnent le même germe analytique complexe au point w_β . Si $w_\beta \neq \sigma_\beta(w_\beta)$ il existe un voisinage ouvert V de w_β dans W_β tel que $V \cap \sigma_\beta(V) = \emptyset$.
En tout cas, on trouve un voisinage ouvert U'_β de w_β (et de $\sigma_\beta(w_\beta)$ en même

temps) dans $U_\beta \cap \sigma_\beta(U_\beta)$ tel que :

$$\mathbb{P}_\beta \mid U'_\beta \cap U_\beta \cap \sigma_\beta(U_\beta) = \sigma_\beta(\mathbb{P}_\beta) \mid U'_\beta \cap U_\beta \cap \sigma_\beta(U_\beta)$$

et
$$W_\beta{*} \mid U'_\beta \cap U_\beta \cap \sigma_\beta(U_\beta) = \sigma_\beta(W_\beta{*}) \mid U'_\beta \cap U_\beta \cap \sigma_\beta(U_\beta)$$

Soit alors $\mathbb{P}_\beta'$ le sous-espace analytique complexe fermé de $W_\beta \mid U'_\beta$ tel que $\sigma_\beta(\mathbb{P}_\beta') = \mathbb{P}_\beta')$ et $\mathbb{P}_\beta' \mid U'_\beta \cap U_\beta = \mathbb{P}_\beta \mid U'_\beta \cap U_\beta$, soit $W^{*\prime}_\beta$ le sous-espace analytique complexe fermé de $W_\beta \mid U'_\beta$ tel que $\sigma_\beta(W^{*\prime}_\beta) = W^{*\prime}_\beta$ et $W^{*\prime}_\beta \mid U'_\beta \cap U_\beta = W^*_\beta \mid U'_\beta \cap U_\beta$, et soit $E'_\beta = \mathbb{P}_\beta' \cap W^{*\prime}_\beta$. Soit enfin $(U'_\gamma, E'_\gamma, \pi'_\gamma)$ la restriction de $(U_\gamma, E_\gamma, \pi_\gamma)$ au-dessus de l'image réciproque de U'_β dans W_γ pour tout $\gamma > \beta$. Alors $\{(U'_\alpha, E'_\alpha, \pi'_\alpha)\}$ a les propriétés 3.1., 3.2., et de plus 3.4.1. pour tout $\alpha \leq \beta$. On montre ainsi par récurrence l'existence de la suite S' cherchée.

3.5. Remarque . - Dans l'hypothèse de 3.4. si la suite S satisfait 3.4.1. pour tout $\alpha \geq 0$, alors on a une autoconjugaison complexe τ_α de X_α (une et une seule pour chaque α) de sorte que le diagramme canonique commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
X_\alpha & \longrightarrow & X = X_0 \\
\Big\downarrow f_\alpha & & \Big\downarrow f \\
W_\alpha & \xrightarrow[\prod_{\alpha > j \geq 0} \pi_j]{} & W = W_0
\end{array}$$

commute, en outre, avec les autoconjugaisons complexes σ_0, τ_0, σ_α et τ_α . Donc il existe un morphisme analytique réel $f^{\mathbb{R}}_\alpha : X^{\mathbb{R}}_\alpha \to W^{\mathbb{R}}_\alpha$ dont f_α est un complexifié. Ici, il est possible que $W^{\mathbb{R}}_\alpha$ soit vide (et donc $X^{\mathbb{R}}_\alpha$ l'est aussi). En général, si W est un complexifié d'un espace analytique réel $W^{\mathbb{R}}$, alors pour toute étoile $e \in \mathcal{E}_W$, il existe sa conjuguée complexe $\sigma_\infty(e) \in \mathcal{E}_W$ définie comme suit : Soit $\pi : W' \to W$ un morphisme quelconque appartenant à e . Soit $*W'$ l'espace analtyique complexe conjugué de W' (ou simplement : le conjugué de W'). ($*W'$ est identique à W' en tant qu'espace annelé, et sa structure complexe est obtenue par la conjugaison complexe usuellle $\rho : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Autrement dit, $*W'$ est obtenu de W' par l'extension de base $\rho : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$). Alors on a le morphisme de conjugaison canonique $\rho_{W'} : W' \to *W'$ (qui, par définition, est l'identité de W' en tant qu'espace annelé et induit ρ du corps des fonctions constantes de W' dans celui de $*W'$). Ensuite, il existe un morphisme analytique complexe $*\pi : *W' \to W$ (unique) qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} W' & \xrightarrow{\pi} & W \\ {\scriptstyle \rho_{W'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ *W' & \xrightarrow{*\pi} & W \end{array}$$

où σ $(= \sigma_o)$ désigne l'autoconjugaison donnée de W . (En fait, il existe un diagramme canonique

$$\begin{array}{ccc} W' & \xrightarrow{\pi} & W \\ {\scriptstyle \rho_{W'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_W} \\ *W' & \xrightarrow{\pi_\rho} & *W \end{array}$$

où π_ρ est identique à π en tant que morphisme d'espaces annelés. Alors σ est donnée comme étant $\varkappa . \rho_W$ où $\varkappa$ est un isomorphisme analytique complexe $\varkappa : *W \to W$. On a $*\pi = \varkappa . \pi_\rho$.)

Si nous regardons une étoile e comme une classe de morphismes $\{\pi\}$; $\pi : W' \to W$, alors $\{*\pi\}$, avec les $*\pi$ définis comme ci-dessus, est encore une étoile au-dessus de W , que l'on désigne par $\sigma_\infty(e)$. Ainsi on obtient un automorphisme (topologique) σ_∞ de $\mathcal{E}_W$ et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_W & \xrightarrow{\rho_W} & W \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_\infty} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ \mathcal{E}_W & \xrightarrow{\rho_W} & W \end{array}$$

Les $e \in \mathcal{E}_W$ telles que $\sigma_\infty(e) = e$ s'appellent les étoiles réelles au-dessus de W . Si $e \in \mathcal{E}_W$ est réelle, les espaces $W_\alpha^{\mathbb{R}}$ associés à la suite donnée S comme ci-dessus ne sont pas vides.

Soit W un espace analytique complexe, et soit $\{\pi_i : W_i \to W\}$ une famille de morphismes dont chacun est obtenu par composition d'une suite finie d'éclatements locaux au-dessus de W .

3.6. Soit U un ouvert de W . On dit que $\{\pi_i\}$ est <u>complète</u> au-dessus de U si

$$p_W^{-1}(U) \subset \bigcup_i \mathcal{E}_{\pi_i}$$

où $\mathcal{E}_{\pi_i}$ désigne l'ouvert de $\mathcal{E}_W$ formé de toutes les étoiles $e \in \mathcal{E}_W$ contenant π_i . (C'est à dire que $\mathcal{E}_{\pi_i}$ est l'image du plongement canonique $\mathcal{E}_{W_i} \to \mathcal{E}_W$ induit par π_i . Cf. [1], Prop. 2.7.). Pour une famille $\{\pi_i\}$ finie, être complète équivaut à dire que pour tout sous-ensemble compact K de U il existe un système de sous-ensembles compacts $K_i \subset W_i$ (un pour chaque i) tels que K $K \subset \bigcup_i \pi_i(K_i)$ (cf. [1], Th. 3.5.).

<u>THEOREME 4</u> . – (Aplatissement local). Soit $f : X \to W$ un morphisme quelconque d'espaces analytiques complexes, où W est réduit. Soient $w \in W$ et L un sous-ensemble compact de $f^{-1}(w)$. Alors il existe un voisinage ouvert U de w dans W et une famille finie de morphismes $\{\pi_j : W_j \to W\}_{1\leq j\leq m}$ obtenus par composition de suites finies d'éclatements locaux, ayant les propriétés suivantes :

1) $\{\pi_j\}_{1\leq j\leq m}$ est complète au-dessus de U

2) Si les diagrammes canoniques des transformés stricts sont notés par :

$$\begin{array}{ccc} X_j & \xrightarrow{q_j} & X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f_j} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ W_j & \xrightarrow{\pi_j} & W \end{array}$$

alors f_j est plat en tout point de $q_j^{-1}(L)$ pour tout j $1\leq j\leq m$.

En outre, si f est donné comme complexifié d'un morphisme analytique réel $f^{\mathbb{R}}$, alors on peut choisir les π_j de telle façon qu'il existe un morphisme analytique réel $\pi_j^{\mathbb{R}}$ dont π_j est un complexifié. Par conséquent, f_j est un complexifié d'un morphisme analytique réel $f_j^{\mathbb{R}}$ (on suppose bien sûr $L \subset X^{\mathbb{R}}$).

<u>Démonstration</u> . – Grâce au Théorème 3 , pour chaque $e \in \mathcal{E}_W$ tel que $p_W(e) = w$, il existe $\pi_e : W_e \to W$ $(= \prod_{0\leq i<\alpha} \pi_i$ pour une suite $S = \{(U_i, E_i, \pi_i)\}_{0\leq i}$ ayant les propriétés 3.1., 3.2. par rapport à $(f, L))$ tel que si $f_e : X_e \to W_e$

est le transformé strict de f par π_e (ou bien, par $\{(U_i, E_i, \pi_i)\}_{0\le i<\alpha}$), f_e soit plat en tout point de $X_e \cap f_e^{-1}(p_{W_e}(e))$ dont l'image par le morphisme canonique $q_e : X_e \to X$ est dans L. Par l'ouverture de la platitude et la compacité de L, (donc de $q_e^{-1}(L) \cap f_e^{-1}(p_{W_e}(e))$ il existe un voisinage ouvert N_e de $q_e^{-1}(L) \cap f_e^{-1}(p_{W_e}(e))$ dans X_e tel que f_e soit plat en tout point de N_e.

Puisque f_e induit un morphisme propre $q_e^{-1}(L) \to W_e$ (souvenons-nous de l'existence d'un plongement fermé $X_e \hookrightarrow X \underset{W}{\times} W_e$), nous trouvons un voisinage ouvert V_e de $w_e = p_{W_e}(e)$ dans W_e tel que $f_e^{-1}(V_e) \cap q_e^{-1}(L) \subset N_e$. $\mathcal{E}_{W_e}$ étant considéré de façon naturelle comme un ouvert de $\mathcal{E}_W$, $p_{W_e}^{-1}(V_e)$ est un voisinage ouvert de e dans $\mathcal{E}_W$, et l'on a $p_W^{-1}(w) \subset \bigcup_e p_{W_e}^{-1}(V_e)$, où e parcourt $p_W^{-1}(w)$. Or grâce au théorème 3.4. de [1], $p_W : \mathcal{E}_W \to W$ est propre, et donc $p_W^{-1}(w)$ est compact. Donc il existe un nombre fini de $e_j \in p_W^{-1}(w)$ $(1 \le j \le m)$ tel que

$$p_W^{-1}(e) \subset \bigcup_{j=1}^{m} p_{W_{e_j}}^{-1}(V_{e_j})$$

et encore par la propreté de p_W, il existe un voisinage ouvert U de w dans W tel que

$$p_W^{-1}(U) \subset \bigcup_{j=1}^{m} p_{W_{e_j}}(V_{e_j}) \quad .$$

(ici les W_{e_j} sont les W_e considérés au début de cette démonstration, avec $e = e_j$).

Soit $W_j = W_{e_j} \mid V_{e_j}$, et soit $\pi_j : W_j \to W$ le morphisme induit par π_{e_j}. $(1 \le j \le m)$.

Alors, il est évident que la famille $\{\pi_j\}_{1\le j\le m}$ a les propriétés 1) et 2) du théorème.

Dans le cas où f est complexifié d'un morphisme analytique réel $f^{\mathbb{R}}$ on peut d'après les remarques 3.4., 3.5. pour chaque $e \in p_W^{-1}(w)$ choisir la suite $S = \{(U_i, E_i, \pi_i)\}_{0\le i}$ de telle façon que tous les π_i soient complexifiés de morphismes analytiques réels. De plus, on peut choisir $N_e \subset X_e$ puis $V_e \subset W_e$ de sorte que ceux-ci soient invariants par les auto-conjugaisons complexes respectives. Dans ce cas, les morphismes π_j définis ci-dessus sont complexifiés de morphismes analytiques réels $W_j^{\mathbb{R}} \to W^{\mathbb{R}}$ où $W^{\mathbb{R}}$ est la structure analytique réelle donnée.

3.7. Remarque . – La seconde partie du théorème 4 ci-dessus implique le théorème analogue d'aplatissement pour un morphisme analytique réel.

REFERENCES

[1] H. HIRONAKA, La voûte étoilée (ce volume).

[2] H. HIRONAKA, "Flattening of complex analytic maps", preprint Harvard 1973 (à paraître).

[3] J. FRISCH, Aplatissement en géométrie analytique. Prétirage.

[4] M. LEJEUNE-JALABERT et B. TEISSIER, Transversalité, polygône de Newton et installations (Notes de M. Galbiati) (ce volume).

[5] M. RAYNAUD, Flat Modules in Algebraic Geometry, Compositio Mathematica, Vol. 24, Fasc. 1, 1972, pp. 11-31.

[6] M. RAYNAUD et L. GRUSON, "Critères de platitude et de projectivité", Inventiones Math. 13, (1971), 1-89.