Astérisque

JEAN-PIERRE BOURGUIGNON

Introduction à l'usage de la solution des conjectures de Calabi

Astérisque, tome 126 (1985), p. 19-28

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__19_0>

EXPOSÉ II

INTRODUCTION À L'USAGE DE LA SOLUTION DES CONJECTURES DE CALABI

Jean-Pierre BOURGUIGNON

Soit X une variété complexe de dimension (complexe) m . L'idée directrice de cet exposé (et d'une partie du séminaire) est que, <u>sous certaines hypothèses globales sur la structure complexe</u>, <u>certaines quantités différentielles sur</u> X (<u>comme une métrique hermitienne</u>) <u>peuvent se déduire de cette donnée</u>.

Pour cela il nous faut passer en revue successivement quelques constructions classiques sur le fibré tangent, les métriques kählériennes et les conjectures de Calabi. Dans le dernier paragraphe nous mentionnons quelques questions ouvertes. Pour une introduction systématique à ces sujets, nous renvoyons à [3], [5] et [6].

1. QUELQUES CONSTRUCTIONS CLASSIQUES SUR LE FIBRÉ TANGENT

Nous notons TX le fibré tangent de X considéré comme variété réelle. Rappelons pour commencer que sur le fibré tangent réel d'une variété complexe telle que X il y a une structure presque complexe naturelle que nous notons J . Si (z^α) est un système de coordonnées locales holomorphes avec $z^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha$ (où x^α et y^α sont réels), on peut définir J par

$$\begin{cases} J(\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}) = \dfrac{\partial}{\partial y^\alpha} \\ J(\dfrac{\partial}{\partial y^\alpha}) = -\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha} \end{cases} .$$

Si nous voulons diagonaliser J, il faut complexifier l'espace tangent. Le fibré $TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ se décompose en fibrés propres pour le champ d'endomorphismes J , à savoir

$$TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X \quad .$$

Les éléments ξ de $T^{1,0}X$ en un point m s'identifient aux vecteurs $\frac{1}{2}(x - iJx)$ où x est un vecteur tangent réel à X. Naturellement $J\xi = i\xi$. Dans cet isomorphisme nous notons $\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$ l'image de $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$. L'espace $T^{0,1}X$ est conjugué de l'espace $T^{1,0}X$ (quelquefois appelé T'X) par l'application $Id \otimes \gamma$ (où γ est la conjugaison de $\mathbb{C}$) de $TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ dans lui-même. Nous appellerons les éléments de $T^{1,0}$ <u>les vecteurs tangents holomorphes</u>.

Par construction même, la base des $(\frac{\partial}{\partial z^\alpha})$ est duale de la base (dz^α) de l'espace $(T^{1,0}X)^*$. Avec ces notations, pour toute fonction f sur X à valeurs complexes, nous avons l'identité

$$df = \sum_{\alpha=1}^{m} \{\frac{\partial f}{\partial z^\alpha} dz^\alpha + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\alpha} d\bar{z}^\alpha\} \quad .$$

Parmi les invariants attachés à la variété complexe X, il y a <u>les classes de Chern</u> de son fibré tangent (vu comme fibré complexe sur X grâce à J) notées $c_i(X)$ $(c_i(X) \in H^{2i}(X,\mathbb{Z}))$. En fait nous allons surtout nous intéresser aux classes de Chern réelles $c_i^{\mathbb{R}}(X)$ grâce à l'homomorphisme de changement de coefficients $H^{2i}(X,\mathbb{Z}) \to H^{2i}(X,\mathbb{R})$. Cette opération peut faire perdre de l'information puisqu'il existe des variétés complexes ayant des classes de Chern de torsion (ainsi les surfaces d'Enriques, quotients de surfaces K3 par une involution holomorphe, ont une première classe de Chern de torsion d'ordre 2).

D'autre part nous aurons besoin de considérer <u>des métriques hermitiennes</u>. Plusieurs façons de les définir peuvent être données.

Une métrique hermitienne h peut s'exprimer en coordonnées locales (z^α) par

$$h = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} h_{\alpha\bar{\beta}} \, dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta$$

où la matrice $(h_{\alpha\bar{\beta}})$ est hermitienne positive.

On peut aussi partir d'un produit scalaire réel, autrement dit d'une métrique riemannienne g et dire qu'il a la symétrie hermitienne si la structure presque complexe J est orthogonale pour lui (pour tous v, w de $T_m X$ pour m dans X $g(v,w) = g(Jv,Jw)$). On peut alors définir une 2-forme antisymétrique ω par

$$\omega(v,w) = g(Jv,w) \quad .$$

La 2-forme ω est appelée la forme de Kähler.

Le lien entre ces deux constructions est le suivant. Le caractère orthogonal de J par rapport au produit scalaire réel g entraîne que l'extension $\mathbb{C}$-bilinéaire $g_{\mathbb{C}}$ de g à $TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est nulle sur $T^{1,0}X \times T^{1,0}X$. La partie réelle de la restriction de $g_{\mathbb{C}}$ à $T^{0,1}X \times T^{1,0}X$ coïncide avec g pour les isomorphismes de l'espace vectoriel complexe TX avec $T^{1,0}X$ et $T^{0,1}X$ respectivement, d'où la première écriture introduite pour une forme hermitienne h. La partie imaginaire coïncide, elle, avec la forme de Kähler ω. Avec les notations utilisées pour la forme hermitienne, nous avons pour ω l'expression locale

$$\omega = i \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} g_{\alpha\bar\beta} \, dz^{\alpha} \wedge d\bar z^{\beta} \quad .$$

Jusque là nous ne nous sommes préoccupés que de compatibilité algébrique ponctuelle entre la structure complexe et la métrique hermitienne.

2. MÉTRIQUES KAHLÉRIENNES

Une relation de compatibilité différentielle possible entre la métrique hermitienne et la structure complexe est d'exiger que la forme de Kähler soit fermée. On dit alors que (g,J,ω) est une métrique kählérienne.

Il apparaît tout de suite qu'une telle métrique ne peut exister sur toute variété complexe compacte. En effet, si une classe de 2-cohomologie Ω contient une forme fermée de Kähler (on dit que Ω est une classe de Kähler) donc définie positive, alors sa puissance m-ième Ω^m est non-nulle dans $H^{2m}(X,\mathbb{R})$ puisque $\int_X \Omega^m$ est le volume de X. D'autres conditions nécessaires pour qu'une variété complexe X admette une métrique kählérienne peuvent être établies grâce notamment à la théorie de Hodge (cf. [3] ou [2] pour une contribution plus récente).

L'exemple fondamental de métrique kählérienne est la métrique de Fubini-Study de l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^m$ qui est sa métrique naturelle. Nous en donnons une description locale un peu plus loin.

Pour cela il nous faut analyser plus en détail la structure de l'algèbre des formes différentielles extérieures à valeurs complexes sur X. Le fibré $\Lambda^r T^* X \otimes \mathbb{C}$ se décompose suivant <u>les types</u>

$$\Lambda^r T^* X \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=r} \Lambda^{p,q} T^* X \quad ,$$

une section φ de type (p,q) s'écrivant localement

$$\varphi = \Sigma\, \varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p \bar{\beta}_1 \ldots \bar{\beta}_q}\, dz^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz^{\alpha_p} \wedge d\bar{z}^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{\beta_q} \quad .$$

(C'est l'extension tensorielle de la décomposition de $T^* X \otimes \mathbb{C}$ vu au n° 1.)

Ceci est vrai dès que TX admet une structure presque complexe. L'intégrabilité de la structure complexe sur X assure de plus que la différentielle extérieure d applique les formes de type (p,q) dans les formes de type $(p+1,q)$ et $(p,q+1)$. Les composantes de d de bidegré $(1,0)$ et $(0,1)$ sont notées respectivement d' et d'' de telle sorte que $d = d' + d''$. Il est important de noter que le caractère holomorphe du fibré cotangent se traduit par les relations $d'^2 = d''^2 = 0$.

Un opérateur qui intervient souvent dans la théorie des variétés kählériennes est l'opérateur $id'd''$. Il applique l'espace des formes différentielles de type (p,q) $\Gamma(\Lambda^{p,q}T^*X)$ dans $\Gamma(\Lambda^{p+1,q+1}T^*X)$ et est un opérateur réel (il transforme les formes à coefficients réels en formes à coefficients réels ou, si l'on préfère, il commute à la conjugaison).

Un des lemmes fondamentaux est le suivant :

<u>Lemme</u> . <u>Soit</u> φ <u>une forme différentielle fermée de type</u> $(1,1)$ <u>réelle</u>. <u>Il existe localement une fonction réelle</u> Φ <u>telle que</u> $\varphi = id'd''\Phi$.

La preuve s'appuie uniquement sur le lemme de Dolbeault-Grothendieck, l'analogue pour les opérateurs d' et d'' du lemme de Poincaré pour d (voir par exemple [3] , p. 74).

Ainsi toute forme de Kähler s'écrit localement $id'd''\Phi$ pour une fonction Φ réelle. La métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{C}P^m$ s'écrit par exemple, sur l'ouvert affine U_α de $\mathbb{C}P^m$ défini par $z^\alpha \neq 0$ dans les coordonnées homogènes $[z^o;z^1;\ldots;z^m]$

$$\omega = id'd'' \log \frac{|z|^2}{|z^\alpha|^2} \quad .$$

Il existe une autre caractérisation plus géométrique (et quelquefois un peu méconnue) du caractère kählérien d'une métrique.

"La métrique riemannienne g est kählérienne si et seulement s'il existe en tout point une carte holomorphe dans laquelle g est osculatrice à la métrique hermitienne standard de $\mathbb{C}^m$."

Pour présenter la courbure, il est utile d'introduire la dérivation covariante D, dite de Levi Civita, associée à la métrique g. Grâce à elle, nous allons pouvoir calculer des différentielles de champs de tenseurs de tous types.

La condition de Kähler $d\omega = 0$ implique par un calcul un peu subtil que ω est une forme parallèle (i.e. $D\omega = 0$) soit, comme la métrique est elle-même parallèle par définition de D , que J est parallèle comme champ d'endomorphismes.

La condition de Kähler assure que la métrique et la structure complexe sont compatibles au premier ordre et en fait à tous les ordres puisque J est invariant par transport parallèle.

Pour deux vecteurs x et y tangents en un point m, la courbure $R_{x,y}$ est un endomorphisme de T_mX. (On rappelle que pour des champs de vecteurs $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ prolongeant x et y ,

$$R_{x,y} = D_x \circ D_{\tilde{y}} - D_y \circ D_{\tilde{x}} - D_{[\tilde{x},\tilde{y}]} \quad .)$$

Par définition de la courbure,

$$R_{x,y} = - R_{y,x}$$

et

$$(D_tR)_{x,y} + (D_xR)_{y,t} + (D_yR)_{t,x} = 0$$

(c'est la deuxième identité de Bianchi).

La métrique g étant parallèle, $R_{x,y}$ prend ses valeurs dans les matrices antisymétriques (algèbre de Lie du groupe orthogonal).

La dérivation covariante D étant sans torsion, la courbure vérifie aussi, pour tous vecteurs tangents x, y et t, la première identité de Bianchi

$$R_{x,y}t + R_{y,t}x + R_{t,x}y = 0 \quad .$$

La structure presque complexe J étant parallèle, $R_{x,y}$ prend ses valeurs dans les matrices antihermitiennes vues comme sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie du groupe orthogonal (c'est la symétrie kählérienne). A cause de la première identité de Bianchi, la courbure a la propriété de symétrie dite en paires, à savoir

$$g(R_{x,y}t,u) = g(R_{t,u}x,y) \quad ,$$

de telle sorte que la symétrie kählérienne peut s'écrire

$$R_{Jx,Jy} = R_{x,y} \quad .$$

3. LES CONJECTURES DE CALABI

Le point de départ en est la théorie de Chern-Weil qui permet de représenter les classes de Chern réelles par des polynômes en la courbure. Plus précisément, dans la classe $c_i^{\mathbb{R}}(X)$, il y a une 2i-forme fermée qui est un polynôme de degré i en la courbure. En particulier $2\pi c_1^{\mathbb{R}}(X)$ se représente par la forme de Ricci ρ qui est une fonction linéaire de la courbure définie ainsi : la courbure de Ricci r est une 2-forme différentielle symétrique obtenue par contraction de R . Pour deux vecteurs tangents x et y ,

$$r_{x,y} = \sum_{i=1}^{2m} (R_{x,e_i}e_i, y)$$

où (e_i) est une base orthonormée de l'espace tangent T_mM au point m où se trouvent x et y .

Lorsque la métrique est kählérienne, alors la courbure de Ricci a la symétrie hermitienne (pour tous x , y , $r_{x,y} = r_{Jx,Jy}$), de telle sorte qu'à r on peut associer une forme de type (1,1) en posant $\rho_{x,y} = r_{Jx,y}$ (en coordonnées locales,

$$\rho = i \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} r_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta \quad).$$

En prenant une trace de la deuxième identité de Bianchi, on montre que ρ est fermée et nous avons justement

$$[\rho] = 2\pi\, c_1^{\mathbf{R}}(X) \quad .$$

Cette relation se comprend mieux si on examine de plus près les symétries kählériennes. En effet, pour une métrique kählérienne, la courbure de Ricci peut se définir comme

$$\rho_{\alpha,\bar{\beta}} = \mathrm{Trace}_{\mathbf{C}}(R_{\alpha,\bar{\beta}}) \quad .$$

Ainsi elle apparaît comme la forme de courbure du fibré des éléments de volume complexe $\Lambda^{m,0}T^*X$ encore appelé <u>fibré canonique</u>. Ce fibré en droites complexes a comme métrique fibrée induite la forme déterminant associée à la forme hermitienne. Il est alors classique que sa forme de courbure, qui s'identifie à ρ comme nous l'avons dit, puisse s'exprimer localement par

$$\rho = id'd'' \,\mathrm{Log}(\det(g_{\alpha\bar{\beta}})) \quad .$$

Ainsi toute forme de Kähler ω détermine une forme ρ_ω dans la classe de cohomologie $2\pi\, c_1^{\mathbf{R}}(X)$.

Si on cherche à normaliser ω par une relation à ρ_ω, la plus simple consiste à poser $\rho = k\omega$. On dit alors que ω est une métrique de <u>Kähler-Einstein</u>. En modifiant ω par une homothétie, ρ ne change pas de telle sorte qu'on peut se limiter à une des trois relations obtenues en faisant $k = -1$, 0 ou $+1$.

Une telle relation ne peut être satisfaite sur n'importe quelle variété complexe même kählérienne puisque, lorsque $k = 0$, la première classe de Chern réelle doit être nulle et que dans les autres cas elle doit contenir une forme définie (qu'elle contienne des formes de type $(1,1)$ est automatique comme l'expression locale en $id'd''$ le montre). Dans ce dernier cas on dit que <u>la première forme de Chern est définie</u>.

Remarquons cependant que les surfaces orientables, autrement dit les courbes complexes compactes, ont toutes une première forme de Chern ou définie ou nulle.

Remarquons encore que la première classe de Chern est définie négative (resp. positive) si et seulement si le fibré $\Lambda^{m,0}T^*X$, que nous avons appelé le fibré canonique, (resp. son dual) est ample.

Les résultats obtenus à ce jour sont les suivants :

Si $c_1^{\mathbb{R}}(X)$ est définie négative et X compacte, il existe une et une seule forme de Kähler ω dans la classe $2\pi c_1^{\mathbb{R}}(X)$ telle que

$$\rho_\omega = -\omega .$$

Ce théorème a été obtenu par T. Aubin [1] et S.T. Yau [7].

Ce résultat est important car il dit qu'à toute structure complexe à première classe de Chern négative est associée une unique forme de Kähler bien particulière ayant des propriétés de courbure assez simples. Comme, dans une petite déformation de la métrique, la classe de Chern ne change pas en tant que classe de cohomologie, elle reste définie négative. Ces métriques particulières peuvent être utiles pour étudier l'espace des modules des structures complexes de ces variétés, puisque leur sont attachés de façon naturelle des objets géométriques intéressants comme une dérivation covariante, ou des représentants canoniques des classes de cohomologie, les formes différentielles extérieures harmoniques (pour ces métriques spéciales).

L'unicité de la métrique de Kähler-Einstein assure aussi que toute transformation holomorphe de cette métrique est en fait une isométrie. Il est important de remarquer que lorsque $c_1^{\mathbb{R}}(X)$ est négative le groupe des transformations holomorphes est fini.

Parmi les variétés complexes à première classe de Chern négative, citons les hypersurfaces de degré $d \geq m+3$ dans $\mathbb{C}P^{m+1}$ ou plus généralement les intersections complètes dans $\mathbb{C}P^{m+k}$ de degrés $(d_i)_{1\leq i\leq k}$ tels que $\sum_{i=1}^{k} d_i \geq m+k+2$.

Le résultat est obtenu en résolvant une généralisation de l'équation de Monge-Ampère complexe, donc par un théorème d'existence qui se prouve par des techniques d'équations aux dérivées partielles. Jusqu'à maintenant aucun exemple explicite n'a été obtenu. En particulier on ne sait pas si certaines de ces métriques de Kähler-Einstein sont induites par un plongement dans un espace projectif en grande codimension.

Lorsque $c_1(X) = 0$, nous cherchons des formes de Kähler à courbure de

Ricci nulle. Le résultat est alors contenu dans la solution de la conjecture de Calabi due à S.T. Yau (cf. [7]) :

Si X est compacte avec $c_1^{\mathbb{R}}(X)=0$, alors, dans chaque classe de Kähler, il existe une et une seule métrique kählérienne à courbure de Ricci nulle.

A la différence du cas précédent, la classe de Kähler n'est pas fixée par la structure complexe.

Parmi les variétés complexes à première classe de Chern réelle nulle, citons les hypersurfaces de $\mathbb{C}P^{m+1}$ de degré m+2 ou plus généralement les intersections complètes dans $\mathbb{C}P^{m+k}$ de degrés $(d_i)_{1\leq i\leq k}$ tels que $\sum_{i=1}^{m} d_i = m+k+1$. Parmi les surfaces complexes à $c_1^{\mathbb{R}}(X)=0$, il y a justement les surfaces K3 auxquelles une partie de ce séminaire est consacrée.

Là encore, le théorème d'existence n'est pas constructif et donner une description explicite d'une métrique à courbure de Ricci nulle sur une variété complexe simplement connexe reste un problème ouvert, même sur les surfaces K3.

Parmi les conséquences de la solution de la conjecture de Calabi, citons le résultat suivant :

Si X est une variété kählérienne compacte à première et deuxième classes de Chern réelles nulles, alors X est revêtue par un tore complexe.

Là encore, toute transformation holomorphe qui préserve la classe de Kähler doit être une isométrie de la métrique à courbure de Ricci nulle à cause de l'unicité à classe de Kähler donnée.

Le cas des variétés complexes compactes à première classe de Chern positive est lui tout à fait différent. Il existe en effet une obstruction à l'existence d'une métrique de Kähler-Einstein : l'algèbre de Lie du groupe des transformations holomorphes doit être la complexifiée de l'algèbre de Lie du groupe des isométries, donc être une algèbre de Lie complexe réductive. C'est un théorème dû à Y. Matsushima (cf. [4]).

Parmi les variétés complexes ne vérifiant pas cette propriété, citons la variété complexe obtenue en éclatant un point dans le plan projectif complexe $\mathbb{C}P^2$ (cf. [X], page 143).

Il est intéressant de noter que certaines variétés ayant une première classe de Chern positive comme la variété complexe obtenue en éclatant 4 à 8 points en position générale dans le plan projectif $\mathbb{C}P^2$ ont un groupe des transformations holomorphes fini. Il serait intéressant de décider si ces variétés ont une métrique de Kähler-Einstein. La technique analytique qui a permis d'obtenir les résultats précédents est inopérante pour ce cas-là.

***

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Aubin : Equations de Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes, C.R. Acad. Sc. Paris, 283 (1976), 119-121.

[2] P. Deligne, P.A. Griffiths, J.W. Morgan, D. Sullivan : Real homotopy theory of Kähler manifolds, Inventiones Math. 29 (1975), 245-274.

[3] K. Kodaira, J. Morrow : Complex manifolds, Holt, Rinehart Winston, (1971).

[4] Y. Matsushima : Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kählérienne, Nagoya Math. J. 11 (1957), 145-150.

[5] R.O. Wells : Differential analysis on complex manifolds, Grad. Texts in Math. n° 65, Springer, New York (1980).

[6] Première classe de Chern et courbure de Ricci : preuve de la conjecture de Calabi, Séminaire Palaiseau, Astérisque 58, Soc. Math. France (1978).

[7] S.T. Yau : On the Ricci curvature of a complex Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I, Comm. Pure and Appl. Math. XXI (1978), 339-411.

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 PALAISEAU Cedex (France)

"L.A. du C.N.R.S. n° 169"