

# Astérisque

MICHEL COSNARD

## Étude des solutions de l'équation fonctionnelle de Feigenbaum

*Astérisque*, tome 98-99 (1982), p. 143-162

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1983\\_\\_98-99\\_\\_143\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__98-99__143_0)

© Société mathématique de France, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## ÉTUDE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE FEIGENBAUM

par

Michel COSNARD.

RÉSUMÉ : Nous présentons un algorithme de construction de solutions de l'équation fonctionnelle de Feigenbaum :  $\forall x \in [-1,+1]$ ,  $f(x) = -\frac{1}{\alpha} f^2(-\alpha x)$ . Nous étudions en détail leur comportement d'itérations : reproduction à un niveau microscopique de la dynamique macroscopique, présence de cycles d'ordre  $2^i$ , pour tout  $i$ , et d'un attracteur cantorien. L'étude de l'attracteur cantorien permet la mise en évidence d'une bifurcation d'un type particulier : dédoublement de certains points et différence qualitative de la convergence des suites attractées.

ABSTRACT : We introduce an algorithm to construct solutions to Feigenbaum's functional equation :  $\forall x \in [-1,+1]$ ,  $f(x) = -\frac{1}{\alpha} f^2(-\alpha x)$ . We study in details their iterative behaviour : reproduction to a microscopic level of the macroscopic dynamic, cycles of order  $2^i$  for all  $i$  and Cantor attracting set. The study of the Cantor attracting set allows us to show a bifurcation of a peculiar type : splitting of certain points and qualitative difference in the convergence of the attracted sequences.

INTRODUCTION : Lors de l'étude numérique de certaines familles de fonctions réelles dépendant d'un paramètre  $\mu$ , Feigenbaum [7], [8], [9] a mis en évidence une propriété surprenante : si l'on note  $\mu_j$  la valeur de  $\mu$  pour laquelle le cycle d'ordre  $2^j$  est super-attractif, pour une large classe de fonctions, la vitesse de convergence des  $\mu_j$  vers leur limite  $\mu_\infty$  est asymptotiquement égale à  $K \delta^{-j}$ , où  $\delta = 4.6692..$  ne paraît pas dépendre de la famille considérée.

Une méthode de démonstration a été proposée par Feigenbaum et utilisée par Collet, Eckmann et Lanford [3] dans un cadre plus restreint. Cette méthode consiste à remarquer que le graphe de  $f^2$  sur une partie de l'intervalle de définition "ressemble" à celui de  $f$  sur tout l'intervalle et, via une homothétie, à renormaliser  $f$ , c'est à

dire, agrandir cette partie de l'intervalle de définition à tout l'intervalle. L'opérateur, ainsi défini, possède des points fixes (voir Collet, Eckmann et Lanford [3], mais aussi Campanino et Epstein [1] où une preuve non constructive de l'existence de tels points fixes est proposée).  $\delta$  serait alors la plus grande valeur propre de la dérivée de cet opérateur évaluée en un de ces points fixes. Cette explication n'est encore qu'une conjecture, fortement motivée par le travail de Collet, Eckmann et Lanford et par les résultats obtenus par Cosnard [4] dans un cas plus simple et par Lanford [14] pour des fonctions analytiques. Malheureusement, un handicap important à la compréhension de ce phénomène réside dans le fait que l'on ne connaît explicitement aucun point fixe de l'opérateur.

Le but de ce travail est de proposer un algorithme de construction des solutions de l'équation fonctionnelle et d'étudier leurs propriétés itératives. Chacune de ces fonctions est obtenue, de manière récurrente, à partir de la donnée d'un homéomorphisme sur une partie de l'intervalle. Nous étudions leur continuité et leur degré de dérivabilité et illustrons ces propriétés sur de nombreux exemples.

Cette construction conduit naturellement à introduire un second opérateur, dit de  $\theta$ -renormalisation ou renormalisation non linéaire, dont ces fonctions sont aussi points fixes. La combinaison de ces deux propriétés permet d'explicitier totalement le comportement itératif de ces fonctions : existence de cycles d'ordre  $2^i$ , quel que soit  $i$  de  $\mathbb{N}$  et d'un attracteur cantorien dont nous étudions la structure.

Les démonstrations complètes de l'ensemble des résultats présentés dans ce travail se trouvent dans Cosnard et Eberhard [5] et [6].

I - RAPPELS ET DÉFINITIONS : Soit  $f$  une application paire de  $[-1,+1]$  dans lui-même telle que  $f \circ f$  (la composée de  $f$  par elle-même) laisse invariant  $[-\alpha, +\alpha]$  où  $0 < \alpha < 1$ . Nous appellerons opérateur de renormalisation, l'application qui à  $f$  fait correspondre

$$Rf(x) = -\frac{1}{\alpha} f^2(-\alpha x) \quad , \quad \forall x \in [-1,+1]$$

Nous nous proposons donc de construire et d'étudier des solutions paires et continues de l'équation fonctionnelle suivante

$$f(x) = -\frac{1}{\alpha} f^2(-\alpha x) \quad , \quad \forall x \in [-1,+1] \quad (1)$$

II - CONSTRUCTION D'UNE SOLUTION : Soient  $\alpha, \beta, \mu$  et  $\nu$  quatre réels vérifiant  $0 < \alpha < \beta < 1$  et  $-1 \leq \mu < \nu \leq 1$  et soit  $f$  un homéomorphisme décroissant de  $[\beta, 1]$  dans  $[\mu, \nu]$ .

Soient  $i$  de  $\mathbb{N}$  et  $x \in [\alpha^{i+1}\beta, \alpha^{i+1}]$ . Supposons que  $f_i(\frac{x}{\alpha})$  soit un homéomorphisme décroissant tel que  $\mu \leq -\alpha f_i(\frac{x}{\alpha}) \leq \nu$ . Nous pouvons alors définir  $f_{i+1}$  par

$$f_{i+1}(x) = f_0^{-1}[-\alpha f_i(\frac{x}{\alpha})] \quad , \quad \forall x \in [\alpha^{i+1}\beta, \alpha^{i+1}]$$

L'existence des  $f_i$  est conditionnée par la condition suivante :

$$\mu < 0 < -\mu\alpha < \nu < -\frac{\mu}{\alpha} \quad \text{et} \quad f_i(\frac{x}{\alpha}) \leq -\frac{\mu}{\alpha}$$

Soit  $g_0$  une application continue de  $[\alpha, \beta]$  dans  $[-1, +1]$  vérifiant

$$g_0(\alpha) = f_1(\alpha) \quad ; \quad g_0(\beta) = f_0(\beta) \quad (2)$$

Soient  $i$  de  $\mathbb{N}$  et  $x \in [\alpha^{i+2}, \alpha^{i+1}]$ . Supposons que  $g_i(\frac{x}{\alpha})$  soit une application continue telle que  $\mu \leq -\alpha g_i(\frac{x}{\alpha}) \leq \nu$ . Nous pouvons alors définir  $g_{i+1}$  par

$$g_{i+1}(x) = f_0^{-1}[-\alpha g_i(\frac{x}{\alpha})] \quad , \quad \forall x \in [\alpha^{i+2}, \alpha^{i+1}\beta]$$

L'existence des  $g_i$  est conditionnée par la condition suivante :

$$-\frac{\nu}{\alpha} \leq g_0(\frac{x}{\alpha}) \leq -\frac{\mu}{\alpha} \quad \text{et} \quad g_i(\frac{x}{\alpha}) \leq -\frac{\mu}{\alpha}$$

Lorsque  $i \rightarrow \infty$ , la suite  $f_i(\alpha^i)$ , bornée par  $-\frac{\mu}{\alpha}$ , est croissante. Soit  $m$  sa limite. On pose alors

$$f_\infty(0) = m = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\alpha^i)$$

Nous définissons  $f$  sur  $[-1, +1]$  comme une application paire, à partir des  $f_i$ , des  $g_i$  et de  $f_\infty$ , de la manière suivante :

$$f(x) = \begin{cases} f_i(|x|) & \text{si } |x| \in [\alpha^i\beta, \alpha^i] \text{ , } i \in \mathbb{N} \\ g_i(|x|) & \text{si } |x| \in ]\alpha^{i+1}, \alpha^i\beta[ \text{ , } i \in \mathbb{N} \\ f_\infty(0) & \text{si } x = 0 \text{ .} \end{cases} \quad (3)$$

Rajoutons une hypothèse simplificatrice :  $\mu \leq -\alpha$ . Nous obtenons le résultat suivant :

PROPOSITION 1 : Soient i)  $\alpha, \beta, \mu, \nu$  quatre réels vérifiant  $0 < \alpha < \beta < 1$ ,  $-1 \leq \mu \leq -\alpha < 0 < -\alpha\mu \leq \nu \leq 1$  ;

ii)  $f_0$  un homéomorphisme décroissant de  $[\beta, 1]$  dans  $[\mu, \nu]$

iii)  $g_0$  une application continue de  $[\alpha, \beta]$  dans  $[-\frac{\nu}{\alpha}, 1]$

Alors, il existe une application unique  $f$ , paire, de  $[-1, +1]$  dans lui-même, définie par (3). □

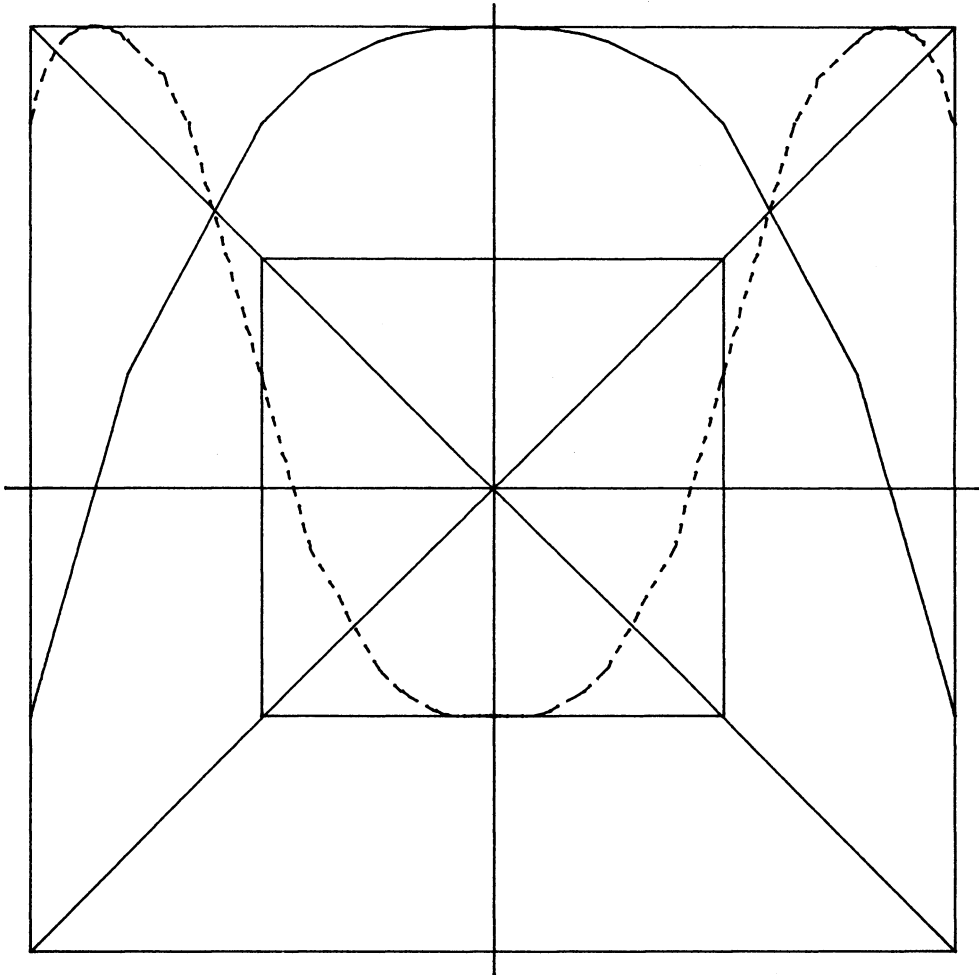


Figure 1 : Solution de l'équation de Feigenbaum linéaire par morceaux. Si  $f_0$  et  $g_0$  sont linéaires par morceaux chacune des  $f_i$  et des  $g_i$  est linéaire par morceaux.  $f$  est continue et dérivable en 0.

Étudions maintenant la continuité de l'application ainsi construite. Il n'est pas difficile de démontrer la :

PROPOSITION 2 : Si les hypothèses de la proposition 1 et la condition (2) sont vérifiées alors  $f$  est continue sur  $[-1,0[ \cup ]0,1]$ .

□

Figure 2 :

Solution linéaire par morceaux avec  $f(0) < 1$

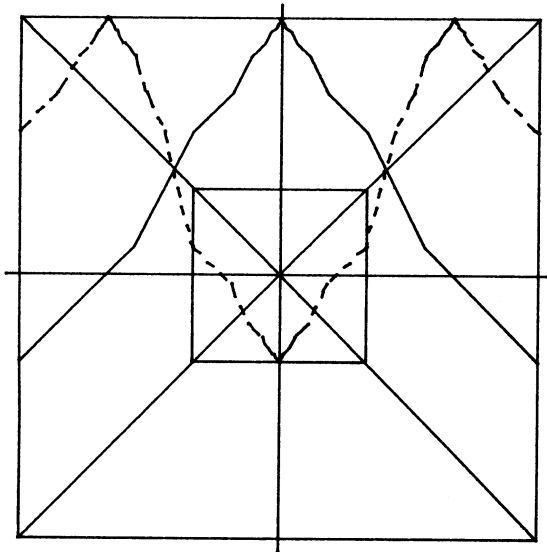
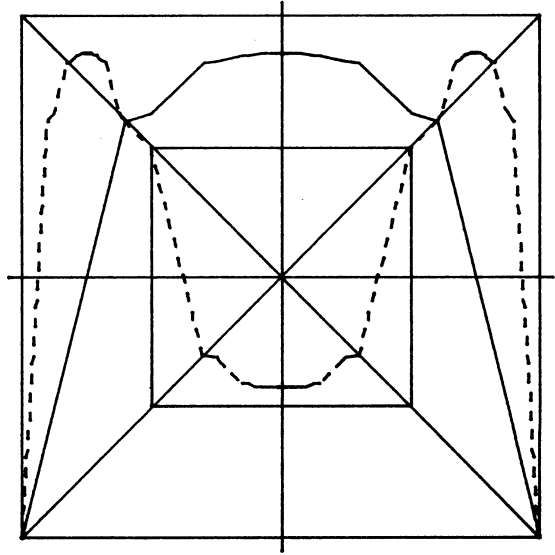


Figure 3 :

Solution de (1) dont la dérivée en 0 n'est pas définie.

Nous avons défini  $f$  en  $0$  par  $f(0) = m = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\alpha^i)$ . Un calcul direct montre que  $m$  est solution de l'équation  $f_0(x) + \alpha x = 0$ . Il n'est donc pas étonnant que la continuité de  $f$  en  $0$  soit liée au nombre et à la position des racines de cette équation. Le lien se fait grâce au résultat suivant dont la démonstration est assez technique.

LEMME 1 : Soit  $u_0$  un réel tel que  $-\frac{\nu}{\alpha} < u_0 \leq 1$ . Définissons la suite

$$u_{i+1} = f_0^{-1}(-\alpha u_i) \quad , \quad i \in \mathbb{N}$$

Alors, i) pour tout  $i$ ,  $u_i$  existe

ii) si  $u_1 > u_0$  (resp.  $=, <$ ), la suite  $u_i$  est croissante (resp. constante, décroissante)

iii)  $u_i$  est convergente et admet pour limite une des racines de  $f_0(x) + \alpha x = 0$

iiii) s'il existe  $s$  tel que  $u_0 = f_0(s)$ , alors  $\forall i \in \mathbb{N}, u_i = f_i(\alpha^i s)$   
s'il existe  $t$  tel que  $u_0 = g_0(t)$ , alors  $\forall i \in \mathbb{N}, u_i = g_i(\alpha^i t)$   $\square$

Soit maintenant  $E$  l'ensemble des solutions de  $f_0(x) + \alpha x = 0$ . C'est un compact contenu dans  $[\beta, 1]$ . Posons  $M = \max_{x \in [\alpha, \beta]} g_0(x)$ . On a  $M \geq \beta$  et  $M \geq \nu$ .

PROPOSITION 3 :  $f$  est continue en  $0$  si et seulement si

$$\text{Card}(E \cap [\alpha, M]) \leq 1 \tag{4}$$

DÉMONSTRATION (grandes lignes) : Si  $E \cap [\alpha, M]$  contient deux éléments  $p$  et  $q$ , les suites  $u_i$  du lemme 1 construites en prenant  $u_0 = p$  et  $u_0 = q$  sont stationnaires. Comme de plus  $\exists s, t \in [\alpha, \beta]$  tels que  $g_0(s) = p$  et  $g_0(t) = q$ , le iii) du lemme 1 contredit la continuité et la condition est nécessaire. Pour démontrer la condition suffisante nous utilisons des arguments similaires (applications répétées du lemme 1) pour déduire la continuité de la propriété suivante :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \max_{x \in [\alpha^i, \alpha^{i+1}]} f(x) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \inf_{x \in [\alpha^i, \alpha^{i+1}]} f(x) = m \quad \square$$

Les figures 1 à 6 montrent diverses solutions de (1) construites à partir de (3) et illustrent les problèmes de continuité en  $0$ .

Figure 4 :

Solution non monotone.  
On remarque une infinité  
d'oscillations au  
voisinage de 0.

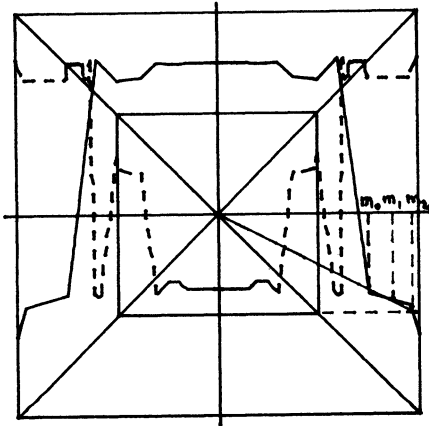
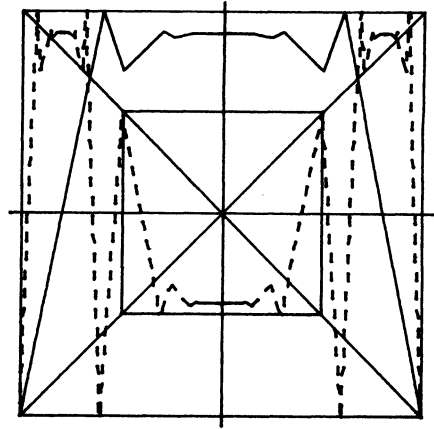
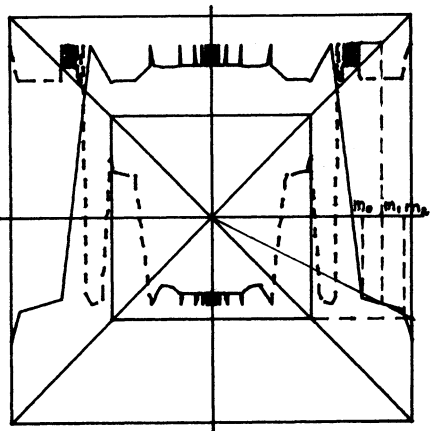


Figure 5 :

Illustration de la proposition 3.  $E = \{m_0, m_1, m_2\}$  et  $M < m_1$ .  $f$  est continue en 0.

Figure 6 :

Illustration de la proposition 3.  $E = \{m_0, m_1, m_2\}$  et  $M \geq m_1$ .  $f$  n'est pas continue en 0 et présente une infinité d'oscillations d'amplitude  $m_1 = m_0$ .





L'ensemble des résultats ci-dessus nous permet de montrer que  $f$  est une solution de notre problème.

THÉORÈME 1 : Si les hypothèses de la proposition 1 et les conditions (2) et (4) sont vérifiées, alors (3) définit une application paire, continue, de  $[-1,+1]$  dans lui-même, solution de l'équation fonctionnelle (1).

□

Bien évidemment, il existe des solutions de (1) qui ne sont pas obtenues par le procédé de construction que nous venons de décrire. Nous pouvons cependant obtenir une espèce de réciproque du théorème 1. En effet, si  $h$  est une solution de (1), paire, de  $[-1,+1]$  dans lui-même, continue, strictement monotone décroissante sur  $[0,1]$ , telle que  $h(0) = m > 0$ , l'application  $f$  définie par  $\forall x \in [-1,+1]$ ,  $f(x) = \frac{1}{m} h(mx)$  est une solution de (1) possédant les mêmes propriétés que  $h$  mais telle que  $f(0) = 1$ . Définissons alors  $\beta = f^{-1}(\alpha^2)$ ,  $f_0$  la restriction de  $f$  à  $[\beta,1]$ ,  $g_0$  la restriction de  $f$  à  $[\alpha,\beta]$  et  $\tilde{f}$  l'application obtenue par (3), à partir de  $\alpha,\beta,f_0$  et  $g_0$ . L'application  $\tilde{h}$  définie par

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} m \tilde{f}\left(\frac{|x|}{m}\right) & , \quad \text{si } |x| \leq m \\ -\frac{m}{\alpha} \tilde{f}^2\left(\alpha \frac{|x|}{m}\right) & , \quad \text{si } m \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

est identique à  $h$  sur  $[-1,+1]$ .

III - SOLUTIONS CONTINUEMENT DIFFÉRENTIABLES : Dans cette partie, nous imposerons, pour simplifier la rédaction :

$$\mu = -\alpha, \quad \nu = \alpha^2, \quad \forall x \in [\beta,1[ \quad f_0(x) > -\alpha x$$

(cette condition entraîne que  $f$  est continue en 0 avec  $f(0) = 1$ ).

Nous avons vu que, pour obtenir la continuité de  $f$  en  $x \neq 0$ , il suffit de supposer de bons raccords en  $\alpha$  et  $\beta$ . De même, pour que  $f$  soit  $k$  fois continuellement différentiable en  $x \neq 0$  nous supposerons des raccords d'ordre  $k$  en  $\alpha$  et  $\beta$ .

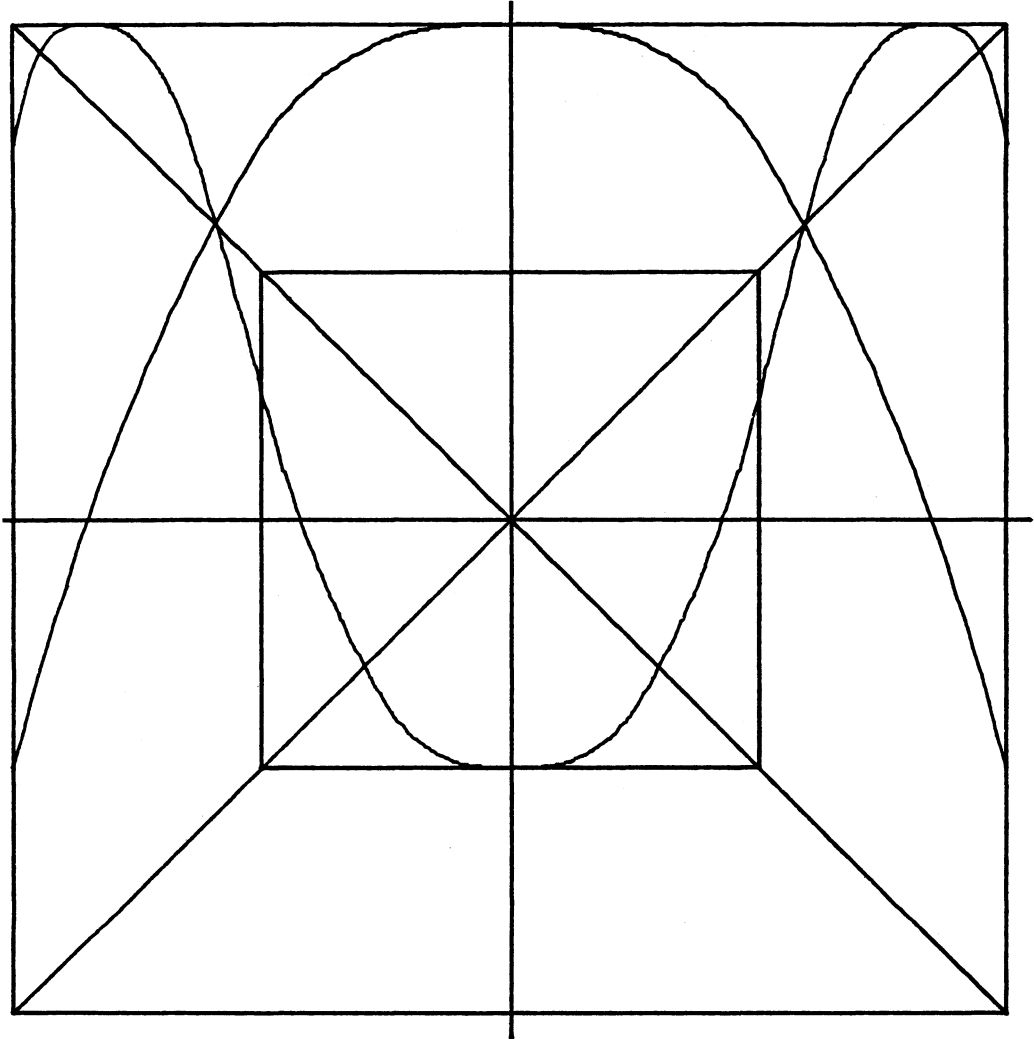


Figure 7 : Solution  $C^1$ . Les  $f_i$  et les  $g_i$  sont des morceaux d'hyperboles équilatères.

PROPOSITION 4 : Si i)  $f_0$  et  $g_0$  sont  $k$  fois continuellement différentiables sur  $[\beta, 1]$  et  $[\alpha, \beta]$

ii)  $\forall x \in [\beta, 1], f_0'(x) \neq 0$

iii)  $\forall \ell, 1 \leq \ell \leq k, g_0^{(\ell)}(\alpha) = f_1^{(\ell)}(\alpha), g_0^{(\ell)}(\beta) = f_0^{(\ell)}(\beta)$

alors  $f$  est  $k$  fois continuellement différentiable sur  $[-1, 0[ \cup ]0, 1]$ .

□

La démonstration de la proposition 4 est simple. Par contre l'étude de la dérivabilité en 0 est beaucoup plus délicate. Si l'on suppose que  $f'_0(1) < -1$  alors  $f'(0) = 0$ , d'où l'existence d'une solution continuellement différentiable (voir figure 7). De même, si  $f'_0(1) < -\frac{1}{\alpha}$  alors  $f''(0) = f'(0) = 0$ . Ce résultat peut se généraliser à un ordre quelconque. Cependant l'existence d'une solution telle que  $f''(0) \neq 0$  n'a pu être prouvée en utilisant le procédé de construction. Par contre, à l'aide d'un algorithme différent (se donner  $f_0$  sur  $[0, \alpha]$  et construire les  $f_i$  sur  $[\beta, 1]$ ), on peut obtenir une solution de (1) admettant en 0 une dérivée seconde non nulle. Malheureusement la difficulté est déplacée en l'antécédent de 0 ( $\xi$  tel que  $f(\xi) = 0$ ). Ce problème possède donc un caractère global qui le rend très proche de celui de l'existence d'une solution analytique, elle-même impossible à obtenir avec la technique introduite dans ce travail.

Nous allons maintenant étudier les propriétés des solutions de l'équation fonctionnelle de Feigenbaum avec pour objectif final l'étude de leur comportement itératif. Soit donc  $f$  une solution paire, continue, strictement décroissante sur  $[0, 1]$  et telle que  $f(0) = 1$ . Une telle application peut être obtenue par (3) en définissant  $\alpha, \beta, f_0$  et  $g_0$  de la même manière que dans la réciproque du théorème 1. Remarquons que  $[-1, -\alpha[$  est une source pour  $f$ . Nous allons donc restreindre l'étude de  $f$  sur  $I = [-\alpha, 1]$ .

IV - RENORMALISATION ET RELATIONS DE CONJUGAISON EN CHAÎNE  
 La dynamique macroscopique de  $f$  sur  $I$  est donnée par



où  $J_1 = [-\alpha, \alpha^2]$ ,  $K_0 = ]\alpha^2, \beta[$ ,  $J_0 = [\beta, 1]$ .

Le comportement de  $f$  sur  $K_0$  est donné de manière immédiate par le

LEMME 2 :  $K_0$  contient strictement un intervalle fermé  $K'_0$  tel que  $f(K'_0) = g_0(K'_0) = K'_0$  et que

$$\forall x \in K_0 - K'_0, \exists n \in \mathbb{N}, f^n(x) \in J_1 \cup J_0$$

□

La relation (1) s'interprète comme une relation de conjugaison liant  $f^2$  et  $f$  par l'intermédiaire de l'homéomorphisme  $\tau(x) = -\frac{x}{\alpha}$  de  $J_1$  dans  $I$  :  $f^2 = \tau^{-1} \circ f \circ \tau$  (6). Nous en déduisons que la dynamique de  $f^2$  sur  $J_1$  est identique à celle de  $f$  sur  $I$ .

Définissons l'homéomorphisme  $\theta$  de  $J_0$  dans  $I$  par  $\theta = \tau \circ f_0$ . Nous obtenons alors sur  $J_0$  une relation analogue à (6). Cette relation de conjugaison est appelée  $\theta$ -renormalisation.

**PROPOSITION 5** :  $\forall x \in J_0, f^2(x) = \theta^{-1} \circ f \circ \theta(x)$  (7)

**DÉMONSTRATION** : Elle consiste à utiliser les formules (3) en distinguant trois cas suivant que  $|f(x)|$  appartient à  $[\alpha^i_\beta, \alpha^i]$ ,  $[\alpha^{i+1}, \alpha^i_\beta]$  ou est égal à 0.  $\square$

En général, le graphe de  $f^2$  dans  $J_0 \times J_0$  n'est pas identique à celui de  $f$  dans  $I \times I$ . En effet  $\theta$  est non linéaire. Dans le cas particulier où  $f_0$  est une application affine, et seulement dans ce cas,  $\theta$  est une application affine et les graphes de  $f$  et de  $f^2$  sont homothétiques : nous dirons alors qu'il y a double renormalisation. Ce cas correspond à un opérateur de renormalisation étudié par Tresser et Coulet [16].

Les relations de conjugaison définies sur  $J_0$  et  $J_1$  nous permettent alors d'obtenir des relations de conjugaison en chaîne :

**PROPOSITION 6** : Soit  $n_1, n_2, \dots, n_q$  une suite d'entiers non tous nuls avec  $\sum_{i=1}^q n_i = n$ .

$$\forall x \in \theta^{-n_1} \circ \tau^{-n_2} \circ \theta^{-n_3} \circ \dots \circ \tau^{-n_q}(I)$$

$$f^{2^n}(x) = \theta^{-n_1} \circ \dots \circ \tau^{-n_q} \circ f \circ \tau^{n_q} \circ \dots \circ \theta^{n_1}(x)$$

(8)  $\square$

#### V - DE LA DYNAMIQUE MACROSCOPIQUE À LA

DYNAMIQUE MICROSCOPIQUE : Les relations (8) nous permettent de connaître le comportement itératif de  $f$  sur les images de  $I$  par une combinaison quelconque de  $\tau^{-1}$  et de  $\theta^{-1}$ . Introduisons quelques notations.

Soient  $n, k_n \in \mathbb{N}$  tels que  $0 \leq k_n \leq 2^n - 1$  et  $b(k_n)$  l'écriture binaire à  $n$  digits de  $k_n$

$$b(k_n) = b_{n-1} b_{n-2} \dots b_0$$

On pose :

$$\forall i, 0 \leq i \leq n-1 \quad \varphi^{b_i} = \begin{cases} \theta^{-1} & \text{si } b_i = 0 \\ \tau^{-1} & \text{si } b_i = 1 \end{cases} \quad \text{et } \varphi^b = \varphi^{b_0} \circ \dots \circ \varphi^{b_{n-1}}$$

On note  $\varphi^{-b}$  l'inverse de  $\varphi^b$ . Remarquons que (8) s'écrit

$$f^{2^n} = \varphi^b \circ f \circ \varphi^{-b}. \text{ Nous utiliserons la notation}$$

$0_n, \dots, k_n, \dots, (2^n - 1)_n$  pour écrire les  $2^n$  entiers compris entre 0 et  $2^n - 1$  et dont nous utiliserons les écritures binaires à n digits. Nous définissons l'opération suivante :

- si  $0 \leq k_n < (2^n - 1)_n$  alors  $k_{n+1} = (k+1)_n$
- si  $k_n = (2^n - 1)_n$  alors  $k_{n+1} = 0_n$

PROPOSITION 7 : Soient  $J_{k_n} = \varphi^b(I)$ ,  $b = b(k_n)$ .

- 1/ i)  $J_{k_n}$  est un intervalle fermé tel que  $\forall k'_n \neq k_n, J_{k'_n} \cap J_{k_n} = \emptyset$   
 ii)  $f(J_{k_n}) = J_{k_{n+1}}$  et donc  $f^{2^n}(J_{k_n}) = J_{k_n}$
- 2/ On peut décomposer  $J_{k_n}$  en :  $J_{k_n} = J^1_{k_n} \cup K_{k_n} \cup J^0_{k_n}$  où  
 i)  $J^0_{k_n} = \varphi^b(J_0) = J_{k_{n+1}}$ ,  $J^1_{k_n} = \varphi^b(J_1) = J_{(k+2^n)_{n+1}}$   
 ii)  $K_{k_n}$  est un intervalle ouvert et  $K_{k_n} = \varphi^b(K_0)$
- 3/  $K_{k_n}$  contient strictement un intervalle fermé  $K'_n$  tel que  
 i)  $K'_n = \varphi^b(K'_0)$ ,  $f(K'_n) = K'_{n+1}$  et donc  $f^{2^n}(K'_n) = K'_n$   
 ii)  $\forall x \in K_{k_n} - K'_n, \exists m \in \mathbb{N}, f^{2^n \cdot m}(x) \in J^0_{k_n} \cup J^1_{k_n}$

□

La dynamique macroscopique de  $f$  sur  $I$  s'étend grâce aux homéomorphismes  $\varphi^b$  à un niveau quelconque sur les intervalles  $J_{k_n}$  pour  $f^{2^n}$ . En effet,  $J_{k_n}$  est invariant par  $f^{2^n}$ , peut être partitionné en une source  $K_{k_n}$  contenant un intervalle  $K'_n$  invariant par  $f^{2^n}$  et deux

intervalles  $J_{k_n}^0$  et  $J_{k_n}^1$  qui s'échangent par  $f^{2^n}$ .  $n$  étant donné, les  $2^n$  intervalles forment donc un cycle d'ordre  $2^n$ , l'ordre des éléments du cycle correspondant à une addition binaire modulo  $2^n$ .

Définissons les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} K_n &= \bigcup_{k=0}^{2^n-1} K_{k_n} & L_n &= \bigcup_{m=0}^n K_m & K &= \bigcup_{m=0}^{\infty} K_m \\ K'_n &= \bigcup_{k=0}^{2^n-1} K'_{k_n} & L'_n &= \bigcup_{m=0}^n K'_m & K' &= \bigcup_{m=0}^{\infty} K'_m \\ J_n &= \bigcup_{k=0}^{2^n-1} J_{k_n} & J &= \bigcap_{m=0}^{\infty} J_n \end{aligned}$$

Notons que  $K_n$ ,  $L_n$  et  $K$  sont des ouverts alors que  $K'_n$ ,  $L'_n$ ,  $J_n$  et  $J$  sont des fermés et que  $K \cup J = I$ .

VI - DYNAMIQUE DE  $f$  SUR  $K$  ET  $K'$  ; Une conséquence immédiate du lemme 2 et de la proposition 7 est la

PROPOSITION 8 : i)  $f$  admet dans  $K'_n$  un cycle unique d'ordre  $2^n$ ,  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{2^n-1}$  tel que  
 $\forall k, 0 \leq k \leq 2^n-1, \xi_k \in K'_{k_n}$

Ce cycle est attractif (resp. répulsif) si le point fixe de  $f$  (dans  $K'_0$ ) est attractif (resp. répulsif). Le domaine d'attraction immédiat du cycle est  $K'_n$ .

ii)  $f$  n'admet dans  $K'_n$  aucun cycle d'ordre différent de  $2^n$  et  $2^{n+1}$ . □

Examinons maintenant la dynamique de  $f$  sur  $K-K'$ . Pour cela nous introduisons la définition suivante : si  $x$  est élément de  $I$ , nous noterons  $L_f(x)$  l'ensemble des points d'accumulation de  $f^n(x)$

$$L_f(x) = \{y \in I / \exists n_i \nearrow, f^{n_i}(x) \rightarrow y\}$$

Le résultat qui suit est aussi une conséquence du lemme 2 et de la proposition 7.

PROPOSITION 9 : Si  $x$  est un élément de  $K-K'$  alors une des deux relations suivantes est vérifiée :

i)  $\exists m \in \mathbb{N}, \forall p \geq m, f^p(x) \in K'$  ; ii)  $L_f(x) \subseteq J$ . □

Le mouvement de  $f$  sur  $K$  est donc assez clair : une suite issue de  $K$  entre au bout d'un temps fini dans  $K'$  ou s'approche de  $J$  qui joue le rôle d'attracteur. Avant d'étudier la dynamique de  $f$  sur  $J$  nous allons préciser la structure de  $K$  et de  $J$  grâce à l'application  $h$  de  $I$  dans lui même définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \tau(x) & \text{si } x \in J_1 \\ x & \text{si } x \in K_0 \\ \theta(x) & \text{si } x \in J_0 \end{cases}$$

Le lien entre  $h$  et les  $\varphi^b$  est le suivant : pour  $n$  fixé les  $2^n$  applications  $\varphi^{b(k_n)}$  sont les inverses d'ordre  $n$  de  $h$  sur  $J_1$  et  $J_0$ . On a alors les caractérisations suivantes :

$$K = \{x \in I / \exists n, h^n(x) \in K_0\} ;$$

$$J = \{x \in I / \forall n, h^n(x) \notin K_0\} .$$

La construction de  $J$  est de type cantorien :  $K$  est l'union de tous les intervalles que l'on a enlevé,  $J$  est ce qui reste.

VII - DYNAMIQUE DE  $f$  SUR  $J$  : Pour étudier la dynamique de  $f$  sur  $J$ , nous allons utiliser une technique de codage, identique à celle des itinéraires, développée par Milnor et Thurston [11] et utilisée par Guckenheimer [10] et Misiurewicz [13] (pour une présentation des principaux résultats voir Collet et Eckmann [2]).

Nous retrouverons un certain nombre de résultats dûs à Guckenheimer [8] et Misiurewicz [11], mais dans un cadre légèrement différent.

Remarquons tout d'abord, que  $h(J) = J$ . Introduisons maintenant un code sur  $I$ . Soit  $E$  l'ensemble des suites infinies formées avec 0, 1 ou 2. A  $x$  de  $I$  nous associons un élément  $\sigma$  de  $E$  défini par

$$\sigma(x) = \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_i \dots$$

$$\sigma_i = \begin{cases} 0 & \text{si } h^i(x) \in J_0 \\ 1 & \text{si } h^i(x) \in J_1 \\ 2 & \text{si } h^i(x) \in K_0 \end{cases}$$

Remarquons que  $J = \{x \in I \quad \forall i, \sigma_i \neq 2\}$  et posons  $\mathcal{E} = \{\sigma \in E \quad \forall i, \sigma_i \neq 2\}$ . Nous définissons l'application de codage  $S$  de la manière suivante :

$$S : J \rightarrow \mathcal{E}, \quad \forall x \in J, \quad S(x) = \sigma(x)$$

Pour simplifier nous introduisons une hypothèse supplémentaire H :  
 J ne contient aucun intervalle

$$\forall x, x' \in J, x < x' \Rightarrow \exists x'' \notin J, x < x'' < x'.$$

LEMME 3 : Si J vérifie H alors S est une bijection.

DÉMONSTRATION : Que S soit une surjection résulte de la dynamique de h sur  $J_0$  et  $J_1$ . Par contre, le fait que S soit une injection est conséquence d'un résultat de Milnor et Thurston [9]. L'hypothèse H est essentielle dans ce cas. □

Nous munissons  $\mathcal{E}$  d'une distance naturelle qui en fait un espace métrique séquentiellement compact :

$$\forall \sigma, \sigma' \in \mathcal{E} \quad d(\sigma, \sigma') = \begin{cases} \frac{1}{i+1} & \text{si } \exists i \sigma_i \neq \sigma'_i \quad \forall j < i, \sigma_j = \sigma'_j \\ 0 & \text{si } \sigma = \sigma' \end{cases}$$

Introduisons sur  $\mathcal{E}$  les deux applications suivantes :

- l'application décalage  $\Delta$  :

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}, \sigma = \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_i \dots, \Delta(\sigma) = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_i \dots$$

-  $\forall \sigma \in \mathcal{E}, \sigma = \underbrace{1 \dots 1}_i 0 \sigma_{i+1} \dots$

$$\phi(\sigma) = \underbrace{0 \dots 0}_i 1 \sigma_{i+1} \dots, \quad i \in \mathbb{N}$$

On notera  $\phi(\sigma) = \sigma + 1$  par analogie avec la proposition 7 et l'addition des nombres binaires. L'utilisation des résultats précédents ainsi que l'algorithme de construction conduit à la proposition suivante où  $h_J$  et  $f_J$  sont les restrictions de h et f à J.

PROPOSITION 10 : Si J vérifie H alors

- i) S est un homéomorphisme de J dans  $\mathcal{E}$
- ii)  $h_J$  et  $\Delta$  sont conjuguées topologiquement par S :  
 $\forall x \in J, h(x) = S_0^{-1} \circ \Delta \circ S(x)$
- iii)  $f_J$  et  $\phi$  sont conjuguées topologiquement par S :  
 $\forall x \in J, f(x) = S_0^{-1} \circ \phi \circ S(x).$



Donc l'action de  $f$  sur  $J$  (sous l'hypothèse  $H$ ) est identique à celle de l'additionneur binaire. Ce résultat n'est pas entièrement nouveau puisqu'on rencontre des relations de ce type chez Misiurewicz [13] et Collet et Eckmann [2]. Les différences entre ces résultats résident dans les hypothèses, les motivations et les démonstrations. On peut déduire de ce résultat un certain nombre de propriétés de  $f$  concernant l'existence de mesures invariantes ou l'ergodicité (voir les références précédentes). Nous nous bornons au comportement d'itérations de  $f$  sur  $J$  grâce au résultat suivant :

THÉORÈME 2 : Si  $J$  vérifie  $H$ , alors, quel que soit  $x$  de  $J$ , l'orbite de  $x$  sous  $f$  est dense dans  $J$ , c'est-à-dire,

$$L_f(x) = J, \quad \forall x \in J.$$

DÉMONSTRATION : Suivant la proposition 10, il suffit de montrer la même propriété pour  $\phi$  ce qui n'est pas difficile. □

En résumé,  $J$  est un ensemble de Cantor ne contenant aucun intervalle (hypothèse  $H$ ). Sous l'action de  $f$ , c'est un compact invariant minimal qui attire toutes les suites qui ne sont pas ultérieurement dans  $K'$ . Le mouvement de  $f$  sur  $J$  est identique à l'action d'un additionneur binaire.  $n$  étant fixé,  $J$  est approché par  $\bigcup_{k=0}^{2^n-1} J_k$ . Ces intervalles forment un cycle d'ordre  $2^n$  :  $J$  peut donc être considéré comme un cycle d'ordre  $2^\infty$ . Mais nous n'avons aucun renseignement sur sa mesure. Dans les exemples que nous avons étudiés elle est toujours nulle.

Un autre problème est celui de l'hypothèse  $H$ . Nous ne connaissons aucune caractérisation simple des applications  $h$  vérifiant cette hypothèse. Dans les travaux proches de celui-ci [2], [10], [13] une hypothèse classique impliquant  $H$  est que  $f$  soit à dérivée de Schwarz négative (voir Singer [15]). Nous lui préférons une condition plus locale.

LEMME 4 : Une condition suffisante pour que  $J$  vérifie  $H$  est que

$$\forall x, x' \in J_0, \quad x \neq x', \quad |h(x) - h(x')| > |x - x'|$$

ce qui est équivalent à :

$$\forall x, x' \in J_0, \quad x \neq x', \quad |f_0(x) - f_0(x')| > \alpha |x - x'| \quad \square$$

VIII - DYNAMIQUE DE  $f$  SUR  $J$  EN L'ABSENCE DE  $H$  .

Supposons maintenant que  $J$  contient un intervalle  $V$ . Choisissons le maximal (il est donc fermé). Le lemme 3 et la proposition 10 sont alors modifiés en :

- PROPOSITION 11 : i)  $S$  est une surjection continue de  $J$  dans  $\mathcal{E}$   
 ii)  $h_J$  et  $\Delta$  sont semi conjuguées topologiquement par  $S$  :  
 $\forall x \in J$  ,  $S \circ h(x) = \Delta \circ S(x)$   
 iii)  $f_J$  et  $\phi$  sont semi conjuguées topologiquement par  $S$  :  
 $\forall x \in J$  ,  $S \circ f(x) = \phi \circ S(x)$  .

□

Rappelons maintenant deux définitions introduites par Misiurewicz [10].

DÉFINITIONS : Soit  $W$  un intervalle de  $I$ . Nous dirons que  $W$  est un homtervalle si, quel que soit  $n$  de  $\mathbf{N}$ ,  $f^n$  est un homéomorphisme de  $W$  sur son image.

Nous dirons que  $W$  est un puits s'il existe  $n$  de  $\mathbf{N}$  tel que  $f^n$  est un homéomorphisme de  $W$  dans lui-même.

Remarquons qu'un puits est un homtervalle, mais la réciproque est fausse (construire un contre exemple n'est pas simple).

PROPOSITION 12 : i)  $V$  est un homtervalle, mais n'est pas un puits

- ii)  $\forall n, p \in \mathbf{N}$  ,  $n \neq p$  ,  $f^n(V) \cap f^p(V) = \emptyset$

□

Nous sommes alors en mesure d'étudier l'action de  $f$  sur  $J$ . Pour cela introduisons les notations suivantes :

$$F_1 = \{x \in J / \forall x' \in J , x' \neq x \Rightarrow S(x') \neq S(x)\}$$

$$F_2 = \{x \in J / \forall x' \in J , x' \neq x , S(x') = S(x) \Rightarrow x' < x\}$$

$$F_3 = \{x \in J / \forall x' \in J , x' \neq x , S(x') = S(x) \Rightarrow x < x'\}$$

$$F = F_1 \cup F_2 \cup F_3$$

THÉORÈME 3 :  $\forall x \in J$  ,  $L_f(x) = F$  .

DÉMONSTRATION : Que  $L_f(x) \subset F$  résulte du fait qu'un compact invariant minimal est d'intérieur vide. Par contre l'inclusion inverse est plus difficile à prouver. Elle fait appel à un argument utilisant de manière non triviale la continuité de  $f$  en  $O$ .

□

En résumé, en l'absence de l'hypothèse  $H$ , la situation est la suivante.  $J$  est un ensemble de Cantor contenant des intervalles. Sous l'action de  $f$ , toutes les suites de  $K$  qui ne sont pas ultérieurement dans  $K'$  ainsi que celles issues de l'intérieur de  $J$  convergent vers un compact invariant minimal, formé des points isolés de  $J$  et des extrémités des intervalles contenus dans  $J$ . Le mouvement de  $f$  sur  $J$  est identique à celui d'un additionneur binaire, avec la différence que tous les points d'un même intervalle de  $J$  ont le même code par  $S$ .

Cette situation est fréquente et peut se rencontrer facilement grâce à l'étude que nous venons de présenter. En effet  $h$  admet des cycles de tous les ordres dans  $J_0$  et  $J_1$ . Bien entendu les éléments de ces cycles appartiennent à  $J$ . Prenons par exemple le cas du cycle d'ordre 2 :  $\xi_0 \in J_0$  et  $\xi_1 \in J_1$ . Il est bien évident que nous pouvons choisir  $h$  (c'est-à-dire  $\theta$ ) tel que  $(\xi_0, \xi_1)$  soit attractif. Appelons  $V$  la partie du domaine immédiat d'attraction du cycle contenue dans  $J_0$ .  $V$  est un intervalle de  $J$  et joue le rôle du homtervalle précédent pour l'application  $f$  construite à partir de  $h$  (de  $\theta$  on obtient  $f_0$  ce qui nous permet de construire  $f$ ).

La construction précédente met en évidence une bifurcation non triviale. En effet considérons une application  $\theta$  vérifiant les hypothèses des pages précédentes ( $\theta$  est un homéomorphisme de  $J_0$  dans  $I$  possédant, en  $1$ , un unique point fixe). Plongeons  $\theta$  dans une famille à un paramètre  $\theta_\mu$  telle que la famille  $h_\mu$  associée possède la propriété suivante : le cycle d'ordre 2 de  $h_\mu$  est répulsif pour  $\mu < \mu_0$  et attractif pour  $\mu > \mu_0$  ( $\mu_0$  appartenant au domaine de définition de  $\mu$ ). La famille  $f_\mu$  de solutions de (1) associée à  $h_\mu$  admettra donc en  $\mu = \mu_0$  une bifurcation d'un type très particulier. L'ensemble de Cantor  $J_\mu$  qui ne contient aucun intervalle pour  $\mu < \mu_0$  va se modifier lorsque  $\mu$  traversera la valeur  $\mu_0$ . Des points de  $J_\mu$  (ceux qui correspondent au cycle d'ordre 2 de  $h_\mu$  et à ses antécédents) vont se transformer en des intervalles (des homtervalles pour  $f_\mu$ ). L'attracteur sera toujours cantorien, mais nous assisterons à un dédoublement de certains points et à une différence qualitative de la convergence des suites attractées : suites appartenant à  $K-K'$  et suites appartenant

à J-F. Ce phénomène ressemble étrangement au doublement de période des cycles d'ordre  $2^i$  en cycle d'ordre  $2^{i+1}$ . Rien n'exclut que de nouvelles bifurcations du même type se produisent en cascade pour donner à J une structure des plus complexes.

IX - GÉNÉRALISATIONS : L'ensemble des résultats présentés dans les pages précédentes se généralise de diverses manières. Il est possible d'obtenir des solutions non paires en modifiant légèrement l'algorithme de construction. De même si nous choisissons pour  $f_0$  une surjection ayant localement un nombre fini d'inverses nous obtiendrons différentes solutions suivant le choix de l'inverse.

Cependant, c'est au niveau du comportement d'itérations de  $f$  que les généralisations sont les plus intéressantes. En effet nous avons vu que les relations de conjugaison en chaîne permettent de transporter à un niveau quelconque la dynamique de  $f$  sur  $K_0$ . Mais le choix de  $g_0$  sur  $K_0$  est totalement arbitraire, (cf. paragraphe II). Nous pouvons, par exemple, choisir  $g_0$  avec un cycle d'ordre 3 et donc un comportement chaotique sur  $K'_0$  (cf. lemme 2). Ce comportement sera transporté à un ordre quelconque sur les  $\varphi^b(K'_0)$  et donc sur  $K'$ . Comme la mesure de  $K'$  peut être aussi proche de 1 que l'on veut on se rend compte que les solutions de l'équation de Feigenbaum peuvent avoir un comportement chaotique. De manière similaire, on peut choisir pour  $g_0$  l'homothétique d'une solution de (1) construite comme précédemment.  $f$  admettra alors sur  $I$  une infinité d'attracteurs cantorien.

RÉFÉRENCES :

- [1] M. CAMPANINO et H. EPSTEIN, "On the existence of Feigenbaum's fixed point", I.H.E.S. preprint P/80/35 (1980).
- [2] P. COLLET et J.P. ECKMANN, "Iterated maps on the interval as dynamical systems, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1980.
- [3] P. COLLET, J.P. ECKMANN et O.E. LANFORD, "Universal properties of maps on an interval", Commun. Math. Phys. 76 (1980), 211-254.
- [4] M. COSNARD, "Etude du comportement d'itérations d'un opérateur de renormalisation", R.A.I.R.O. Analyse Numérique 16, 4, (1982). à paraître.

- [5] M. COSNARD et A. EBERHARD, "Etude d'un opérateur de renormalisation. Première partie, construction de points fixes". R.R. IMAG 305 (1982).
- [6] M. COSNARD et A. EBERHARD, "Etude d'un opérateur de renormalisation. Deuxième partie : comportement itératif des solutions de l'équation de points fixes", R.R. IMAG 306 (1982).
- [7] M. FEIGENBAUM, "Quantitative universality for a class of non-linear transformation", J. Stat. Phys. 19 (1978) 25-52.
- [8] M. FEIGENBAUM, "The universal metric properties of non-linear transformation", J. Stat. Phys. 21 (1979) 669-706.
- [9] M. FEIGENBAUM, "The transition to aperiodic behavior in turbulent systems", Commun. Math. Phys. 77 (1980) 65-86.
- [10] J. GUCKENHEIMER, "Sensitive dependence to initial conditions for one dimensional maps"; Commun. Math. Phys. 70 (1979) 133-160.
- [11] J. MILNOR et P. THURSTON, "On iterated maps of the interval I, II". Preprint Princeton (1977).
- [12] M. MISIUREWICZ, "Absolutely continuous measures for certain maps of an interval". I.H.E.S. Preprint M/79/293 (1979).
- [13] M. MISIUREWICZ, "Invariant measures for continuous transformations of  $[0,1]$  with zero topological entropy". Lecture Notes Math. 729. (1980) 144-152.
- [14] O.E. LANFORD III, "A computer assisted proof of the Feigenbaum conjectures", I.H.E.S. Preprint P/81/17 (1981).
- [15] D. SINGER, "Stable orbits and bifurcation of maps of the interval", SIAM J. Appl. Math. 35 (1978), 260-267.
- [16] C. TRESSER et P. COULLET, "Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation". C.R. Acad. Sc. Paris 287 (1978) 577-580.

Michel COSNARD  
Laboratoire IMAG  
Université de Grenoble 1  
B.P. 53 X  
38041 GRENOBLE cédex.