Astérisque

RENÉE ELKIK

Critère d'amplitude de Nakai

Astérisque, tome 17 (1974), p. 110-125

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__17__110_0>

CRITERE D'AMPLITUDE DE NAKAI

par Renée ELKIK

Ce critère fournit une caractérisation numérique de l'amplitude. La démonstration originale de Nakaï [1] suppose le schéma considéré projectif sur un corps.

Nous rapportons ici la démonstration donnée par Kleiman dans sa thèse [2] qui s'applique à tout schéma propre.

Dans une première partie, il est nécessaire de définir les nombres d'intersection de diviseurs avec des sous-schémas fermés et d'en donner quelques propriétés. Le critère de Nakaï exprime alors que pour qu'un diviseur D sur X soit ample, il faut et il suffit que pour tout entier $t > 0$ et pour tout sous-schéma fermé intégré Y de X de dimension t le nombre d'intersection $(D^t.Y)$ soit positif.

Nous montrons ensuite, grâce à des exemples dus à Mumford et Ramanujan, qu'il n'est pas suffisant de supposer l'intersection de D avec toute courbe de X positive pour en déduire l'amplitude de D.

Dans toute la suite X désigne un schéma propre sur un corps.

§ 1. Nombres d'intersection.

1) THEOREME (Snapper) [2].- Soient G un faisceau cohérent sur X, s la dimension du support de G et $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_t$, t faisceaux inversibles sur X. Alors la caractéristique d'Euler-Poincaré

$$\chi(G \otimes \mathcal{L}_1^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_t^{\otimes n_t}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_k H^i(X, G \otimes \mathcal{L}_1^{\otimes n_1} \dots \otimes \mathcal{L}_t^{\otimes n_t})$$

est donnée par un polynôme numérique en $n_1 \dots n_t$ de degré total s.

On rappelle que par polynome numérique en $n_1 \ldots n_t$, on entend un polynome à coefficients rationnels, qui prend des valeurs entières chaque fois que les n_i sont entiers.

Démonstration.

Soit K' l'ensemble des faisceaux cohérents G sur X pour lesquels le théorème est vérifié. K' est un ensemble exact c'est-à-dire que si on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0$$

et que la propriété est vérifiée par deux des trois faisceaux G, G', G'' , alors elle l'est par le troisième.

On procède alors à une série de devissages et à une récurrence sur $\dim \operatorname{Supp}(G)$. Soit s cet entier et supposons la propriété démontrée pour tout faisceau dont le support à une dimension $\leq s-1$. Si Y est le sous-schéma fermé de X coïncidant ensemblistement avec $\operatorname{Supp}(G)$ et tel que G soit un O_Y-module, on peut, remplaçant X par Y , supposer qu'on a $\operatorname{Supp}(G) = X$, $\dim(X) = s$.

Montrons qu'on peut alors supposer X irréductible en raisonnant par récurrence sur le nombre de composantes irréductibles. Soient $X_1, \ldots, X_k$ ces composantes et I_1 l'idéal définissant X_1 . La suite exacte

$$0 \longrightarrow I_1 G \longrightarrow G \longrightarrow G/I_1 G \longrightarrow 0 .$$

Par hypothèse de récurrence, la propriété est vérifiée par $I_1 G$ et $G/I_1 G$, donc par G .

On peut aussi supposer X réduit. En effet, soit $\mathcal{N}$ le nilradical, il existe un entier r tel qu'on ait $\mathcal{N}^r = 0$. Considérons la chaine

$$0 = \mathcal{N}^r G \subset \mathcal{N}^{r-1} G \ \ldots \subset G .$$

On a les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}^r G \longrightarrow \mathcal{N}^{r-1} \longrightarrow \mathcal{N}^{r-1} G / \mathcal{N}^r G \longrightarrow 0 .$$

Si on fait une récurrence sur r , il suffit de démontrer la propriété pour les faisceaux $\mathcal{N}^{r-1}G/\mathcal{N}^r G$ c'est-à-dire pour des faisceaux G vérifiant $\mathcal{N}G = 0$ donc pour des faisceaux sur X_{red} .

On a donc réduit le problème au suivant: X est intègre, la propriété est vérifiée par tout faisceau cohérent dont le support est strictement inclus dans X et on veut montrer qu'elle est vérifiée par tout faisceau cohérent de O_X-modules.

Il suffit alors de démontrer la propriété pour le faisceau structural O_X . En effet, soit y le point générique de X . $O_{X_y} = k_y$ est un corps et G_y un espace vectoriel de dimension finie m sur k_y .

On peut donc trouver un ouvert V de X et un isomorphisme

$$O_X^m|_V \xrightarrow{\sim} O|_V \quad .$$

Le graphe $\mathcal{H}$ de cet isomorphisme est un sous O_X -module cohérent de $O_X^m \oplus G|_V$ isomorphe à $O_X^m|_V$ et à $G|_V$. Il se prolonge en un sous O_X-module cohérent H_o de $O_X^m \oplus G$. Les morphismes canoniques

$$H_o \longrightarrow O_X^m \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_o \longrightarrow G$$

ont des noyaux et des conoyaux dont le support est contenu dans $X - W$. Ils appartiennent donc à K' . Puisque K' est exact, O_X^m appartient à K' et donc $\mathcal{H}_o$ appartient à K' donc G appartient à K' .

Montrons alors que la propriété est vérifiée par O_X . On raisonne par récurrence sur t , le cas $t = 0$ est trivial. Soit alors D_1 un diviseur tel que $O_X(D_1) \simeq \mathcal{L}_1$. $O_X(D_1)$ est un sous-faisceau du faisceau $\mathcal{K}_X$ des anneaux totaux de fractions de O_X .

Posons $I = O_X(-D_1) \cap O_X$ et $\mathcal{J} = I \otimes O_X(D_1) = I.O_X(D_1)$. Ce sont des faisceaux cohérents non nuls d'idéaux. Posons alors

$$G = O_X|_I \quad , \quad G = O_X|_{\mathcal{J}} \quad .$$

Par hypothèse F et G appartiennent à K' . On a d'autre part les suites exactes

$$0 \longrightarrow I \otimes \mathcal{L}_1^{\otimes n_1} \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes n_2} \dots \otimes \mathcal{L}_t^{\otimes n_t} \longrightarrow \mathcal{L}_1^{\otimes n_1} \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes n_2} \dots \otimes \mathcal{L}_t^{\otimes n_t} \longrightarrow F \otimes \mathcal{L}_1^{\otimes n_1} \dots \otimes \mathcal{L}_t^{n_t} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \otimes \mathcal{L}_1^{\otimes n_1 - 1} \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes n_2} \dots \otimes \mathcal{L}_t^{\otimes n_t} \longrightarrow \mathcal{L}_1^{\otimes n_1 - 1} \dots \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes n_2} \dots \otimes \mathcal{L}_t^{\otimes n_t} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow G \otimes \mathcal{L}_1^{\otimes n_1 - 1} \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes n_2} \dots \otimes \mathcal{L}_t^{\otimes n_t} \longrightarrow 0 \quad .$$

Et

$$I \otimes \mathcal{L}_1^{\otimes n_1} \dots \otimes \mathcal{L}_t^{\otimes n_t} = \mathcal{J} \otimes \mathcal{L}_1^{\otimes n_1 - 1} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_t^{\otimes n_t} \quad .$$

Il en résulte alors des suites exactes précédentes qu'on a

$$\chi(\mathcal{L}_1^{\otimes n_1} \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes n_2} \dots \mathcal{L}_t^{\otimes n_t}) - \chi(\mathcal{L}_1^{\otimes n_1 - 1} \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes n_2} \dots \mathcal{L}_t^{\otimes n_t}) =$$

$$\chi(F \otimes \mathcal{L}_1^{n_1} \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes n_2} \dots \otimes \mathcal{L}^{n_t}) - \chi(G \otimes \mathcal{L}_1^{\otimes n_1 - 1} \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes n_2} \dots \otimes \mathcal{L}_t^{\otimes n_t}) =$$

polynome en les n_i de degré égal à $s-1$.

Et ceci démontre que $\chi(\mathcal{L}_1^{\otimes n_1} \dots \otimes \mathcal{L}_t^{\otimes n_t})$ est un polynome numérique en les n_i de degré total égal à s .

2) Nombre d'intersection.

Soient toujours G un faisceau cohérent sur X , s la dimension de son support et soient $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_t$, t faisceaux inversibles sur X , $t \geq s$. On définit alors le nombre d'intersections de $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_t$ avec G :

$$(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_t \cdot G)_X = (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_t \cdot G)$$

comme étant le coefficient du monome $n_1 \dots n_t$ dans le polynome

$$\chi(G \otimes \mathcal{L}_1^{\otimes n_1} \dots \otimes \mathcal{L}_t^{\otimes n_t}) \quad .$$

3) Propriétés du nombre d'intersection.

a) C'est un entier.- En effet, on sait qu'on peut écrire tout polynome numérique F sous la forme

$$F(n_1 \dots n_t) = \sum_i a(i_1 \dots i_t) \binom{n_1 + i_1}{i_1} \dots \binom{n_t + i_t}{i_t} \quad .$$

b) $(\mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_t \cdot G)$ est une forme t-linéaire symétrique en $\mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_t$.

En effet, remplaçons

$$\mathcal{L}_1^{\otimes n_1} \quad \text{par} \quad \mathcal{L}_1^{(1)\otimes n_1^{(1)}} \otimes \mathcal{L}_1^{(2)\otimes n_1^{(2)}} \quad .$$

On peut écrire

$$\chi(G \otimes \mathcal{L}_1^{(1)\otimes n_1^{(1)}} \otimes \mathcal{L}_1^{(2)\otimes n_1^{(2)}} \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes n_2} \dots \otimes \mathcal{L}_t^{\otimes n_t}$$

$$= n_1^{(1)} n_2 \dots n_t \ \text{Truc } 1 + n_1^{(2)} n_2 \dots n_t \ \text{Truc } 2 + \dots$$

Si on fait successivement $n_1^{(2)}$ puis $n_1^{(1)} = 0$ on trouve

$$\text{Truc } 1 = (\mathcal{L}_1^{(1)} \dots \mathcal{L}_t \cdot G)$$

puis

$$\text{Truc } 2 = (\mathcal{L}_1^{(2)} \dots \mathcal{L}_t \cdot G) \quad .$$

Si on fait ensuite $n_1^{(1)} = n_1^{(2)}$ on vérifie qu'on a

$$\text{Truc } 1 + \text{Truc } 2 = (\mathcal{L}_1^{(1)} + \mathcal{L}_1^{(2)}, \mathcal{L}_2 \dots \mathcal{L}_t \cdot G)$$

$$= (\mathcal{L}_1^{(1)} \cdot \mathcal{L}_2 \dots \mathcal{L}_t \cdot G) + (\mathcal{L}_1^{(2)} \dots \mathcal{L}_t \cdot G) \quad .$$

c) $(\mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_t \cdot G) = 0$ si $\dim \operatorname{supp}(G) < t$.

d) Etant donné une suite exacte

$$0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0$$

on a

$$(\mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_t \cdot G) = (\mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_t \cdot G') + (\mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_t \cdot G'') \quad .$$

Si dans $\mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_t$, p_1 des $\mathcal{L}_i$ sont égaux à H_1 , p_2 à H_2 , $\dots$ p_k à H_k , avec $p_1 + \cdot p_k = t$ on notera

$$(H_1^{p_1} \dots H_k^{p_k} \cdot G) \quad \text{pour} \quad (\mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_t \cdot G)$$

[ne pas confondre avec $(H_1^{\otimes p_1} \dots H_k^{\otimes p_k} \cdot G)$] .

D'autre part, si Y est un sous-schéma fermé de X , on notera

$$(\mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_t \cdot Y) \quad \text{pour} \quad (\mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_t \cdot O_Y) \quad .$$

e) Il est clair que si j désigne l'inclusion canonique $j : Y \longrightarrow X$, on a

$$(j^* \mathcal{L}_1 \dots j^* \mathcal{L}_t \cdot Y)_Y = (\mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_t \cdot Y)_X \quad .$$

f) Si $\mathcal{L}_1$ est associée à un diviseur effectif D_1 et qu'on a la suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{L}_1^{\otimes(-1)} \longrightarrow O_X \longrightarrow O_{D_1} \longrightarrow 0$, on a

$$(\mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_t \cdot X) = (\mathcal{L}_2 \dots \mathcal{L}_t \cdot O_{D_1}) = (\mathcal{L}_2 \dots \mathcal{L}_t \cdot D_1) \quad .$$

Cela provient de l'exactitude de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_1^{\otimes n_1 - 1} \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes n_2} \dots \otimes \mathcal{L}_t^{\otimes n_t} \longrightarrow \mathcal{L}_1^{\otimes n_1} \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes n_2} \dots \otimes \mathcal{L}_t^{\otimes n_t} \longrightarrow$$
$$\mathcal{L}_1^{\otimes n_1} \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes n_2} \dots \otimes \mathcal{L}_t^{\otimes n_t} \otimes O_{D_1} \longrightarrow 0$$

qui conduit à la relation

$$\chi(\mathcal{L}_1^{\otimes n_1} \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes n_2} \dots \otimes \mathcal{L}_t^{\otimes n_t}) - \chi(\mathcal{L}_1^{\otimes n_1 - 1} \dots \otimes \mathcal{L}_t^{\otimes n_t}) =$$

$$\chi(\mathcal{L}_1^{\otimes n_1} \dots \otimes \mathcal{L}_t^{\otimes n_t} \otimes O_{D_1}) \quad .$$

On admettra les deux propositions suivantes dont on peut trouver une démonstration dans Kleiman [2] et que nous n'utiliserons pas.

g) Si $f : \bar{X} \longrightarrow X$ est un morphisme de degré fini, si de plus on a $\dim(\bar{X}) \geqslant \dim X$ et $t \geqslant \dim \bar{X}$, alors

$$(\mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_t) = \deg(f) . (f^*(\mathcal{L}_1) \dots f^*(\mathcal{L}_t)) \quad .$$

h) Le symbole $(\mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_t \cdot G)_X$ est uniquement déterminé par les propriétés a) à g) . Il coïncide, en particulier, avec les nombres d'intersection définis dans les cas usuels.

§ 2. Critère de Nakaï.

DEFINITION.- <u>On dit qu'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X est arithmétiquement positif si l'on a, pour tout $s > 0$ et tout sous-schéma fermé intègre Y de X de dimension s</u> , $(\mathcal{L}^s . Y) > 0$.

THEOREME.- <u>Le faisceau $\mathcal{L}$ est ample si et seulement s'il est arithmétiquement positif.</u>

Notons d'abord qu'on peut supposer X intègre. Un faisceau $\mathcal{L}$ est ample (resp. arithmétiquement positif) si et seulement s'il l'est sur toute composante irréductible réduite de X .

1) $\Longrightarrow$ On raisonne alors par récurrence sur la dimension. Soit $s = \dim X$, $s \geq 1$.

D'après l'hypothèse de récurrence, pour montrer $\Longrightarrow$ il suffit de démontrer que si $\mathcal{L}$ est ample on a $(\mathcal{L}^s) > 0$. Quitte à le remplacer par un multiple. On peut supposer $\mathcal{L}$ très ample. Soit H une section hyperplane de X (plongé dans un projectif grâce à $\mathcal{L}$).

On a vu qu'on avait alors (propriété ?)

$$(\mathcal{L}^s) = (\mathcal{L}^{s-1} . H) \quad .$$

Ce qui démontre le résultat d'après l'hypothèse de récurrence.

2) $\Longrightarrow$ On raisonne encore par récurrence sur $s = \dim X$.

Notons d'abord qu'on a $\chi(\mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow +\infty$, si $n \to \infty$. En effet,

$$(\mathcal{L}^s . X) = (\mathcal{L}^s) = s ! \, a$$

où a est le coefficient du terme de degré s dans $\chi(\mathcal{L}^{\otimes n})$.

On pourra remarquer que c'est seulement sous cette forme que sert l'hypothèse, si bien qu'on démontre en réalité. Supposons que $\chi(\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes O_Y) \longrightarrow \infty$, pour tout Y sous-schéma fermé intègre de X , alors $\mathcal{L}$ est ample.

On montre que $H^o(\mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow \infty$. Puisque X est supposé intègre, on a $\mathcal{L} = O_X(D)$ pour un certain diviseur D . En particulier, on a un plongement $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{K}_X$.

Soient $I = \mathcal{L}^{\otimes -1} \cap O_X$,

$J = \mathcal{L} \otimes I = \mathcal{L}$. Ce sont des faisceaux cohérents d'idéaux non nuls. Soient Y et Z les fermés de X respectivement définis par I et J . Notons $\mathcal{L}_{|Y}$ et $\mathcal{L}_{|Z}$ les faisceaux induits sur Y et Z par . Ils sont amples par hypothèse de récurrence. On a donc pour $n \gg 0$ et $i > 0$,

$$H^i(Y, \mathcal{L}^{\otimes n}_{|Y}) = H^i(Z, \mathcal{L}^{\otimes n}_{|Y}) = 0 \quad .$$

Considérons les suites exactes

$$0 \longrightarrow I \otimes \mathcal{L}^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{L}^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{L}^{\otimes n}_{|Y} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow J \otimes \mathcal{L}^{\otimes n-1} \longrightarrow \mathcal{L}^{\otimes n-1} \longrightarrow \mathcal{L}^{\otimes n-1}_{|Z} \longrightarrow 0$$

on a $\quad I \otimes \mathcal{L}^{\otimes n} = \otimes \mathcal{L}^{\otimes n-1}$.

Les suites exactes de cohomologie associées fournissent

$$H^i(\mathcal{L}^{\otimes n}_{|Y}) \longrightarrow H^{i+1}(\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes I) \longrightarrow H^{i+1}(\mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow H^{i+1}(\mathcal{L}^{\otimes n}_{|Y}) \longrightarrow$$

et

$$H^i(\mathcal{L}^{\otimes n-1}_{|Z}) \longrightarrow H^{i+1}(\mathcal{L}^{\otimes n-1} \otimes J) \longrightarrow H^{i+1}(\mathcal{L}^{\otimes n-1}) \longrightarrow H^{i+1}(\mathcal{L}^{\otimes n}_{|Z}) \longrightarrow 0 \quad .$$

Pour $i \geqslant 1$ et $n \gg 0$, les deux termes* de chacune des deux suites sont nuls.

On a donc pour $i > 2$:

$$H^i(\mathcal{L}^{\otimes n}) \simeq H^i(\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes I)$$

$$H^i(\mathcal{L}^{\otimes n-1}) \simeq H^i(\mathcal{L}^{\otimes n-1} \otimes J) \simeq H^i(\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes I) \quad .$$

Donc

$$H^i(\mathcal{L}^{\otimes n}) \simeq H^i(\mathcal{L}^{\otimes n-1}) \quad .$$

En particulier, à partir d'un certain rang la quantité $\sum_{i \geqslant 2} (-1)^i \dim H^i(\mathcal{L}^{\otimes n})$ est constante.

Donc

$$\dim H^o(\mathcal{L}^{\otimes n}) - \dim H'(\mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow \infty \quad , \text{ si } \quad n \to \infty \quad .$$

En particulier

$$\dim H^o(\mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow \infty \quad .$$

On peut donc dans la suite supposer $\mathcal{L} \simeq O_X(D)$ pour un certain diviseur D

---

* lire "termes extrêmes"

effectif.

Montrons que, pour $n \gg 0$, $\mathcal{L}^{\otimes n}$ est engendré par ses sections globales.

Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}^{\otimes -1} \longrightarrow O_X \longrightarrow O_D \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \longrightarrow \mathcal{L}^{\otimes n-1} \longrightarrow \mathcal{L}^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{L}^{\otimes n}_{|D} \longrightarrow 0 \quad .$$

Par hypothèse $\mathcal{L}_{|D}$ est ample et $H^i(\mathcal{L}^{\otimes n}_{|D}) = 0$ pour $i > 0$ et $n \gg 0$.
La suite exacte de cohomologie donne donc, pour $n \gg 0$,

$$H^o(\mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow H^o(\mathcal{L}^{\otimes n}_{|D}) \longrightarrow H^1(\mathcal{L}^{\otimes n-1}) \longrightarrow H^1(\mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow 0 \quad .$$

La dimension de $H^1(\mathcal{L}^{\otimes n})$ décroit donc avec n à partir d'un certain rang.
Comme ce sont des k espaces vectoriels de dimension finie, la dimension de $H^1(\mathcal{L}^{\otimes n})$ est stationnaire pour $n \gg 0$.

Pour $n \gg 0$, on obtient une surjection

$$H^o(\mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow H^o(\mathcal{L}^{\otimes n}_{|D}) \quad .$$

Mais, par hypothèse de récurrence, $\mathcal{L}^{\otimes n}_{|D}$ est engendré par ses sections globales pour $n \gg 0$ et le lemme de Nakayama permet alors d'affirmer que $\mathcal{L}^{\otimes n}$ est engendré par ses sections globales pour $n \gg 0$.

Quitte à remplacer $\mathcal{L}$ par un de ses multiples, on peut donc définir un morphisme φ de X dans un projectif sur k tel que $\varphi^*(O_{\mathbf{P}}(1)) = \mathcal{L}$. Ce morphisme est nécessairement à fibres finies donc fini. En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi, alors il existerait une fibre fermée contenant une courbe intègre de X . Mais le faisceau, induit sur cette courbe par $\mathcal{L}$, serait nécessairement trivial, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.
L'image réciproque d'un faisceau ample par un morphisme fini étant ample, $\mathcal{L}$ est ample.

§ 3. Quelques commentaires - (Hartshorne [3]).

On s'est demandé si dans le critère précédent, il n'était pas suffisant de supposer $(D.C) > 0$ pour toute courbe intègre de X.

Cette conjecture paraît renforcée par le résultat de Kleiman [2], qui montre que, si on a $(D.C) \geqslant 0$ pour toute courbe C de X, alors on a $(D^s.Y) \geqslant 0$ pour tout sous-schéma fermé de dimension s de X. De tels diviseurs sont appelés par Kleiman pseudo-amples.

Un exemple de Mumford montre qu'on peut trouver D, vérifiant $(D.C) > 0$ pour toute courbe C, et non ample. Dans cet exemple, X est une surface régulière mais D n'est pas effectif. Sur une surface régulière, l'hypothèse supplémentaire D effectif permet d'affirmer l'amplitude de D.

Mais ceci n'est plus vrai en dimension supérieure, comme le montre un exemple de Ramanujan dans lequel X est un schéma régulier de dimension 3 (comme toujours complet sur K algébriquement clos), D un diviseur effectif vérifiant $(D.C) > 0$, pour toute courbe C, mais qui n'est pas ample.

Ces exemples sont tous deux développés dans Hartshorne [3], on les rapporte à la fin de cet exposé. On peut noter, avec Hartshorne, que ces exemples sont donnés en caractéristique 0. En existe-t-il de semblables en caractéristique p ?

Par ailleurs, Seshadri et Kleiman ont tous deux donné un critère d'amplitude, obtenu en renforçant la condition $(D.C) > 0$ pour toute courbe. Dans les deux cas, on développe une méthode permettant de mesurer les courbes. Seshadri définit $m(Y)$, pour toute courbe Y, comme le maximum de multiplicité des points de Y. Le théorème dit alors que D est ample, s'il existe $\varepsilon > 0$, tel que l'on ait, pour toute courbe Y intègre, $(D.Y) \geqslant \varepsilon m(Y)$.
Kleiman, avec quelques hypothèses un peu plus restrictives sur X (par exemple régulier), munit l'espace vectoriel $A_1(X) \otimes \mathbb{R}$ d'une norme [$A_1(X)$ désigne le groupe des 1-cycles sur X modulo l'équivalence numérique] et il affirme que D est ample si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$, tel que l'on ait

$(D.Y) \geq \varepsilon \|Y\|$, pour toute courbe Y sur X .

C'est encore au premier chapitre de Hartshorne [3], qu'on peut se reporter pour trouver une démonstration de ce critère.

Contre-exemple de Mumford.

Mumford donne l'exemple d'un diviseur D tracé sur une surface régulière (complète sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0) de self-intersection négative (donc non ample) et dont la multiplicité d'intersection avec toute courbe intègre tracée sur la surface est positive.

Avant de construire cet exemple, il est nécessaire de faire quelques rappels. Soient C une courbe lisse projective, E un faisceau localement libre de rang 2 sur C , et

$$X = \mathbb{P}(E) = \operatorname{Proj}(\bigoplus_{n\geq 0} S^n(E)) = \operatorname{Proj} \mathcal{S} .$$

Soient $\pi : X \longrightarrow C$ le morphisme canonique et $L = \mathcal{O}_X(1)$ le faisceau très ample relativement à π canonique, D le diviseur correspondant.

Les fibres fermées de π définissent des diviseurs sur X , qui sont tous équivalents modulo l'équivalence numérique. Si on désigne par f une telle classe pour l'équivalence numérique et par m l'application $\operatorname{Pic} X \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $D \longrightarrow (D.f)$, il est facile de voir qu'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{Pic} C \xrightarrow{\pi^*} \operatorname{Pic} X \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 .$$

On peut noter aussi que si Y est une courbe effective tracée sur X , $m(Y)$ est égal au degré de Y sur C .

PROPOSITION.- Pour tout $m > 0$, il y a une correspondance bijective entre

a) les courbes Y tracées sur X n'ayant aucune fibre comme composante, de degré m sur C ;

b) les sous-fibrés M de $S^m(E)$.

La correspondance est donnée par :

$Y \longrightarrow \pi_* O_X(m - Y)$

$M \longrightarrow$ sous-schéma de X défini par l'idéal homogène $M.\mathcal{J}$ engendré par M .

Le diviseur relatif $mD - Y$ induit un diviseur de degré 0 sur les fibres isomorphes à $\mathbb{P}^1_k$, donc $O_X(m - Y)$ est trivial le long des fibres et $\pi_*(O_X(m - Y))$ est localement libre de rang 1 . C'est d'autre part, un sous-faisceau de $\pi_* O_X(m) = S^m(E)$.

Il est clair, par ailleurs, que M définit un diviseur relatif de X sur E (localement défini par une équation non diviseur de 0) de degré m . De plus, ces deux correspondances sont inverses l'une de l'autre.

PROPOSITION.- <u>Sous la correspondance précédente, on a</u>

$$(D.Y) = md - \deg M \quad \underline{\text{où}} \quad d = \deg E \ .$$

Rappelons que si $\mathcal{E}$ est un faisceau localement libre de rang n sur la courbe C , le degré de $\mathcal{E}$ est, par définition, le degré du faisceau inversible $\Lambda^d \mathcal{E}$. Pour calculer $(D.Y)$, on utilise les suites exactes suivantes

$$0 \longrightarrow O_X(m - Y) \longrightarrow O_X(m) \longrightarrow O_Y(m) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow O_X(m - 1 - Y) \longrightarrow O_X(m - 1) \longrightarrow O_Y(m - 1) \longrightarrow 0 \ .$$

$O_X(m - Y)$ est trivial le long des fibres et $O_X(m - 1 - Y)$ induit $O_X(-1)$ sur chaque fibre.

On a donc

$$R^1\pi_*(O_X(m - Y)) = R^1\pi_*(O_X) = 0$$
$$R_1 {}_*(O_X(m - 1 - Y)) = R^1\pi_*(O_X(-1)) = 0$$
$$\pi_*(O_X(m - 1 - Y)) = \pi_* O_X(-1) = 0 \ .$$

On déduit donc des suites exactes précédentes :

$$(*) \quad \begin{array}{l} 0 \longrightarrow M \longrightarrow S^m(E) \longrightarrow \pi_* O_Y(m) \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow S^{m-1}(E) \longrightarrow \pi_* O_Y(m - 1) \longrightarrow 0 \ . \end{array}$$

On a de plus le lemme.

LEMME.- <u>Soit</u> $\;: Y \longrightarrow C$ <u>un morphisme fini plat de courbes et soit</u> N <u>un faisceau inversible sur</u> Y . <u>On a alors</u>

$$\deg \pi_*(N) = \deg \pi_*(O_Y) + \deg N \quad .$$

Soit L inversible sur C . On a

$$\deg \pi_*(N \otimes \pi^* L) = \deg \pi_*(N) \quad L = \deg \pi_*(N) + \deg L \deg \pi \quad .$$

Il suffit donc de vérifier la formule pour $N \otimes \pi^*(L)$ pour un certain L sur C , de sorte qu'en choisissant $\deg L << 0$, on peut supposer que N est un faisceau d'idéaux sur Y . Et le lemme est conséquence des suites exactes

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow O_Y \longrightarrow O_Z \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \pi_*(N) \longrightarrow \pi_*(O_Y) \longrightarrow \pi_* \longrightarrow 0 \quad .$$

Les suites (*) fournissent alors

$$\deg S^m(E) = \frac{1}{2}(m^2 + m)d = \deg M + \deg \pi_*(O_Y) + \deg O_Y(m)$$

$$\deg S^{m-1}(E) = \frac{1}{2}(m^2 - m)d = \deg \pi_*(O_Y) + \deg(O_Y(m-1)) \quad .$$

De plus $\deg O_Y(n) = n(D.Y)$.

On en déduit aisément le résultat requis.

COROLLAIRE.- $D^2 = d$.

Il suffit, pour le vérifier, d'écrire D comme différence de deux diviseurs relatifs effectifs et d'appliquer le résultat précédent.

$$D = D_1 - D_2 \quad .$$

On a $(m_1 - m_2) = D.f = 1$

$$D^2 = D(D_1 - D_2) = d(m_1 - m_2) - \deg M_1 + \deg M_2 \quad .$$

Mais

$$O_X(1) = O_X(D_1) \otimes O_X(-D_2) \quad .$$

Donc

$$\mathcal{O}_X(m_1 - D_1) = \mathcal{O}_X(m_2 - D_2)$$

et

$$M_1 = M_2 \ .$$

Avant de pouvoir décrire l'exemple de Mumford, il faut encore faire quelques rappels sur les fibres stables sur une courbe. Un faisceau localement libre E sur une courbe C est dit stable (resp. semi-stable) si l'on a, pour tout sous-fibre E',

$$\deg(E')/_{\mathrm{rang}(E')} < \deg(E)/_{\mathrm{rang}(E)} \quad , \quad \mathrm{resp}(\leq) \ .$$

Nous admettrons le théorème suivant :

<u>Soit</u> C <u>une courbe de genre</u> $g \geq 2$ <u>sur le corps des complexes. Alors</u>

1) <u>Si</u> E <u>est stable, toute puissance symétrique</u> $S^m(E)$ <u>est semi-stable</u>.

2) <u>Pour tout</u> $r > 0$, $d \in \mathbb{Z}$, <u>il existe un fibre stable</u> E <u>de rang et degré</u> d , <u>dont toutes les puissances symétriques sont stables</u>.

Ce théorème est démontré par Hartshorne dans [3]. C'est une conséquence du théorème de Narashiman et Seshadri, qui exprime que les fibrés stables correspondent aux représentations irréductibles et unitaires d'un groupe engendré par des éléments

$$a_1 \ldots a_g \ , \quad b_1 \ldots b_g \ , \quad C$$

liés par les relations

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots\ldots\ldots \ a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$$

$$C^N = 1$$

où g est le genre de la courbe et N un entier dépendant du rang et du degré de E .

Après de tels préambules, il est facile de deviner maintenant quel est le contre-exemple de Mumford. Soit C une courbe de genre $g \geq 2$ sur $\mathbb{C}$ et soit E un faisceau stable de rang 2 et degré 0 dont les puissances symétriques sont stables. Soient $X = \mathbb{P}(E)$ et D le diviseur correspondant à $O_X(1)$. Si Y est une fibre de π, $(Y.D) = 1$. Si Y est un diviseur relatif de $d^o m$ sur C, alors Y correspond à un sous-faisceau M de $S^m(E)$ donc $\deg M < 0$.

On a donc

$$(D.Y) = md - \deg(M)$$

$$(D.Y) > 0 .$$

Mais D n'est pas ample puisqu'on a $D^2 = d = 0$.

<u>Exemple de Ramanujan.</u>

Reprenons, pour (X,D), l'exemple constuit par Mumford. Soit H un diviseur ample effectif sur X. Soit $\bar{X} = \mathbb{P}(O_X(D - H) \otimes O_X)$ et soit $\pi : \bar{X} \to X$ le morphisme canonique. Soit encore X_o le fermé de $\bar{X}$ défini par la section de $\bar{X}$ au-dessus de X.

$X \longrightarrow \bar{X}$ correspondant au quotient O_X de $O_X \oplus O_X(D - H)$;

X_o est un diviseur effectif relatif de $\bar{X}$ sur X et on a

$$(X_o)^2 = (D - H)_{X_o} .$$

Posons

$$\bar{D} = X_o + \pi^*(H) .$$

Calculons $(D.Y)$ pour toute courbe intègre Y tracée sur X. Nous distinguons trois cas.

1°) Y est une fibre de π. Alors

$$(D.Y) = (X.Y) + (\pi^*H.Y) = 1 + 0 = 1 .$$

2°) Si $Y \subseteq X_o$ alors

$$(\bar{D}.Y) = (\bar{D}_{|X_o}.Y)_{X_o} = (D - H + H.Y)_{X_o}$$

$$= (D.Y)_{X_o} > 0 .$$

3°) Soit $Y \not\subseteq X_o$ et telle que (Y) soit une courbe Y de X. Alors

$$(\bar{D}.Y) = (X_o.Y) + (\pi^*H.Y) \quad .$$

Mais $X_o . Y \geqslant 0$ et $\pi^*H.Y = (H.Y')_X$ grâce à la formule de projection.
Et c'est donc 0 car H est ample.

Donc $(\bar{D}.Y) > 0$, pour toute courbe Y sur $\bar{X}$. Pourtant D n'est pas ample puisque

$$(\bar{D}^2 . X_o) = (\bar{D}^2_{|X_o})_{X_o} = (D^2)_{X_o} = 0 \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. NAKAI - A criterion of an ample sheaf on a projective scheme, Amer. J. Math., 85 (1963), p. 14-26.

[2] S. KLEIMAN - Towards a numerical theory of ampleness, Ann. of Math., 84 (1966), p. 293-344.

[3] R. HARTSHORNE - Ample subvarieties of algebraic varieties, Springer Lecture Notes n° 156, Berlin Heidelberg, 1970.