

# *Astérisque*

RENÉE ELKIK

## **Solution d'équations au-dessus d'anneaux henséliens**

*Astérisque*, tome 16 (1974), p. 116-132

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1974\\_\\_16\\_\\_116\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__16__116_0)

© Société mathématique de France, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SOLUTION D'EQUATIONS AU-DESSUS D'ANNEAUX HENSELIENS

par R. ELKIK

§ 1. Le théorème d'approximation

THEOREME 1.- Soient A un anneau noethérien,  $\mathcal{J}$  un idéal de A . On suppose A complet pour la topologie  $\mathcal{J}$ -adique. Soit B une A-algèbre de type fini, telle que Sp B soit lisse sur Sp A en dehors du fermé défini par  $\mathcal{J}$  . Alors il existe deux entiers  $n_0$  et r tels que pour tout n supérieur à  $n_0$  et toute section de B approchée modulo  $\mathcal{J}^n$  , il existe une A section de B congrue à la précédente modulo  $\mathcal{J}^{n-r}$  .

Donnons-nous une présentation de B

$$B = A[X_1 \dots X_N] / \mathcal{J} \quad \mathcal{J} = (f_1 \dots f_q) \subset A[X_1 \dots X_N] .$$

On suppose pour simplifier l'écriture que la dimension relative de  $\text{Sp } B |_{\text{Sp } A} - V(\mathcal{J})$  sur  $\text{Sp } A - V(\mathcal{J})$  est constante et égale à  $N - p$  .

Pour tout p tuple  $(\alpha) = (\alpha_1 \dots \alpha_p)$   $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \dots < \alpha_p \leq q$  ,  $f(\alpha)$  représente la famille d'équations  $(f_{\alpha_1} \dots f_{\alpha_p})$  ,  $M_\alpha(X)$  la matrice jacobienne du système  $f(\alpha)$  ,  $\Delta(\alpha)$  l'idéal engendré par les mineurs d'ordre p de  $M_\alpha(X)$  .

$M(X)$  désigne d'autre part la matrice jacobienne associée à l'ensemble des équations  $f_1 \dots f_q$  .

Désignons d'autre part par  $K(\alpha)$  le conducteur de  $\mathcal{J}$  dans  $f(\alpha)$  , c'est-à-dire

$$K(\alpha) = \left\{ k \in A[X_1 \dots X_N] / k \mathcal{J} \subset f(\alpha) \right\} .$$

Si on appelle  $H$  l'idéal de  $A[X_1 \dots X_N]$  engendré par les produits  $K_{(\alpha)} \Delta_{(\alpha)}$  pour les différents  $p$  triples  $(\alpha)$  possibles on a dans  $\text{Sp} A [X_1 \dots X_N]$  :

$$V(H) \cap \text{Sp} B \subset V(\mathcal{J} A[X_1 \dots X_N])$$

puisque le fermé défini par  $H$  dans  $\text{Sp} B$  est le complémentaire de l'ouvert de  $\text{Sp} B$  où  $\text{Sp} B$  est lisse de dimension relative  $q$  sur  $\text{Sp} A$ . Il existe donc un entier  $h$  tel que

$$(1) \quad H + \mathcal{J} \supset \mathcal{J}^h A[X_1 \dots X_N] \dots$$

On pourra noter, sur la démonstration qui suit, que les entiers  $n_0$  et  $r$  ne dépendent de  $B$  que par  $h$ .

La partie essentielle de la démonstration est dans le lemme suivant :

LEMME.— Sous les hypothèses précédentes, on suppose de plus l'idéal  $\mathcal{J}$  de  $A$  principal, engendré par  $t$ .

Soient  $I$  un idéal quelconque de  $A$ ,  $\wedge$  l'idéal de  $A$  formé des éléments annulés par une puissance de  $t$  et  $k$  un entier tel que

$$\wedge \cap (t^k) = (0) \text{ .}$$

On considère un morphisme

$$\begin{array}{ccc} \varphi_a : A[X_1 \dots X_N] & \longrightarrow & A \\ X_i & \longrightarrow & a_i \end{array}$$

définissant une section modulo  $t^n I$  de  $B$  avec  $n > 2h + k$ . On montre

alors qu'on peut trouver  $a' = (a'_1 \dots a'_N) \in A^N$  vérifiant :

$$a'_i \equiv a_i \pmod{t^{n-h} I}$$

et définissant une section de  $B$ .

On procède par approximations successives en montrant qu'on peut trouver  $y = (y_1 \dots y_N) \in A^N$  tel que

VI-03

$$y \equiv 0 \quad (t^{n-h} I)$$

et définissant une section modulo  $t^{2n-2h} I$  de  $B$ . Le choix de  $n$  assurant  $2n - 2h$  supérieur à  $n$  le résultat sera établi.

Démonstration du lemme.

On peut écrire un développement de Taylor

$$(2) \quad \begin{bmatrix} f_1(a-y) \\ - \\ - \\ f_q(a-y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(a) \\ - \\ - \\ f_q(a) \end{bmatrix} - M(a) \begin{bmatrix} y_1 \\ \\ \\ y_N \end{bmatrix} + \sum_{i,j} y_i y_j Q_{ij}(y,a)$$

où  $M(a)$  désigne la valeur de la jacobienne en  $(a)$  et où  $Q_{ij}$  est un  $q$  vecteur colonne dont les composantes sont des polynômes en  $y$  et  $a$ .

Il suffit de trouver  $y \equiv 0 \quad (t^{h-k} I)$  pour lequel

$$(3) \quad \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \\ \\ f_q(a) \end{bmatrix} \equiv M(a) \begin{bmatrix} y_1 \\ \\ \\ y_N \end{bmatrix} \pmod{t^\alpha I} \quad \text{avec} \quad \alpha \geq 2n - 2h$$

Il est clair d'après (2) qu'on aura alors

$$\forall i \in [1, q], \quad f_i(a-y) \in t^{2n-2h} I.$$

On a écrit en (1)

$$H + J \supset t^h A[x_1 \dots x_N].$$

Désignant par  $H(a)$  et  $J(a)$  les images de ces idéaux par  $\varphi_a$ , on peut en déduire

$$(4) \quad H(a) + J(a) \supset t^h.$$

Mais d'autre part

$$J(a) \subset t^n.$$

On peut écrire pour tout  $i \in [1, q]$

$$f_i(a) = h_i(a) + \sum \lambda_{ij} t^{n-h} f_j(a)$$

où  $h_i(a) \in H(a)$  ,  $\lambda_{ij} \in A$  .

Considéré comme système d'équation linéaire en les  $f_i(a)$  ce système a un déterminant congru à 1 modulo  $t^{n-h}$  , donc inversible. On peut donc résoudre et exprimer les  $f_i(a)$  en fonction d'éléments de  $H(a)$  .

Il résulte donc de (4) qu'on a

$$H(a) \supset t^h .$$

D'autre part  $H$  est engendré par des éléments de la forme  $k_\alpha \delta_\alpha$  où  $\delta_\alpha$  est un mineur d'ordre  $N - q$  de la matrice  $M_{(\alpha)}$  et  $k_\alpha$  un élément de  $A[X]$  tel que

$$k_\alpha \delta_\alpha \in f_{(\alpha)} .$$

On va montrer que pour tout élément  $k_\alpha \delta_\alpha$  du type précédent on peut trouver

$(z) = (z_1 \dots z_N) \in A^N$  tel que

$$z_i \in t^n I$$

et

$$(5) \quad k_\alpha(a) \delta_\alpha(a) \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_q(a) \end{bmatrix} \equiv M(a) \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} \pmod{(t^{2n} I)} .$$

On montre d'abord comment ceci implique le lemme. Puisque  $t^h$  appartient à l'idéal  $H(a)$  on peut déduire de (5) qu'il existe  $(v) = (v_1 \dots v_N) \in A^N$  où  $v_i \in t^n I$  tel que

$$t^h \begin{bmatrix} f_1(a) \\ - \\ - \\ f_q(a) \end{bmatrix} \equiv M(a) \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \pmod{(t^{2n} I)}$$

VI-05

et puisque  $n$  a été choisi suffisamment grand pour que

$$\Lambda \cap (t^{n-h}) = (0)$$

on en déduira

$$\begin{bmatrix} f_1(a) \\ - \\ - \\ f_q(a) \end{bmatrix} \equiv M(a) \begin{bmatrix} y_1 \\ - \\ - \\ y_N \end{bmatrix} \pmod{t^{2n-h_I}}$$

où  $y_i$  appartient à  $t^{n-h_I}$ ,  $t^h y_i = v_i$  ceci est ce qu'on avait annoncé en (3).

Il reste donc seulement à établir (5).

Prenons pour fixer les idées  $(\alpha) = (1 \dots p)$  et pour  $\partial_\alpha$  le mineur d'ordre  $p$  de la matrice  $M$  correspondant aux  $p$  premières équations et aux premières variables.

On note seulement dans la suite  $\partial$  pour  $\partial_\alpha$ ;  $k$  pour  $k_\alpha$ .

Par définition de  $k$  on peut trouver dans  $A[X_1 \dots X_N]$  des polynômes

$\lambda_{ij}$  tels que

$$k f_j = \sum_{i=1}^p \lambda_{ij} f_i, \quad \forall j \in [p+1, q]$$

ce qui, après dérivation par rapport à  $X_1$ , conduit à

$$k \frac{\partial f_j}{\partial X_1} \equiv \sum_{i=1}^p \lambda_{ij} \frac{\partial f_i}{\partial X_1} \pmod{\mathcal{J}} \quad \forall j \in [p+1, q], \forall i \in [1, N].$$

On a donc en (a) :

$$(5) \quad \begin{cases} k(a) f_j(a) = \sum_{i=1}^p \lambda_{ij}(a) f_i(a), & \forall j \in [p+1, q] \\ k(a) \frac{\partial f_j}{\partial X_1}(a) \equiv \sum_{i=1}^p \lambda_{ij}(a) \frac{\partial f_i}{\partial X_1}(a) \pmod{t^n} & \forall i \in [1, N] \end{cases}$$

Ce dernier système de relations implique que, pour tout vecteur  $\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_q \end{bmatrix}$  dans l'image de  $M(a)$  on a :

$$k(a)g_j \equiv \sum_{i=1}^p \lambda_{ij}(a)g_i \quad (t^n I) , \quad \forall j \in [p+1, q]$$

et plus précisément si

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_q \end{pmatrix} = M(a) \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix}$$

où les  $h_i$  appartiennent à un idéal  $P$  de  $A$  .

$$(7) \quad \forall j > p , \quad k(a)g_j \equiv \sum_{i=1}^p \lambda_{ij} g_j \quad (t^n I) .$$

Désignant par  $M_o$  la matrice  $(p,p)$   $(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(a))$   $i=1, p ; j=1 \dots p$  et par  $N_o$  la matrice  $(p, p)$  telle que

$$M_o N_o = N_o M_o = \partial(a) Id_p$$

où  $Id_p$  représente la matrice unité d'ordre  $p$  .

Soit  $N'_o$  la matrice  $(N,p)$  obtenue en prolongeant  $N_o$  par 0 .

Ecrivons

$$MN'_o \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_p(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial(a)f_1(a) \\ \vdots \\ \partial(a)f_p(a) \\ y_{p+1} \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}$$

ceci étant une définition des  $y_j$  ,  $j \in [p+1, q]$  .

On a d'après (7) :

$$\forall j > p , \quad k(a)y_j \equiv (a) \sum_{i=1}^p \lambda_{ij}(a)f_i(a) \quad (t^{2n} I) .$$

VI-07

Mais d'après (6) :

$$\forall j > p, \quad k(a)f_j(a) = \sum_{i=1}^p \lambda_{ij}(a)f_i(a).$$

Donc

$$k(a)y_j \equiv k(a)\partial(a)f_j(a) \quad (t^{2n}I).$$

Donc

$$MN'_0 k(a) \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_p(a) \end{bmatrix} \equiv k(a)\partial(a) \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_q(a) \end{bmatrix} \quad (t^{2n}I)$$

ce qu'on se proposait d'établir.

Fin de la démonstration du théorème 1.

On revient au cas où  $\mathcal{J}$  est un idéal quelconque. On raisonne par récurrence sur le nombre minimal d'éléments engendrant un idéal de définition de la topologie  $\mathcal{J}$ -adique.

Soit  $l$  ce nombre. Pour  $l = 0$ , le résultat est trivial. Supposons  $l$  établi pour  $l = l-1$  et soient  $t_1 \dots t_l$  des éléments engendrant un idéal de définition.

Soit  $T$  l'idéal formé des éléments de  $A$  à support dans  $V(t_1)$  et soit  $k$  un entier tel que

$$T \cap (t_1^k) = (0).$$

Soit  $A' = A|_{t_1}^{2h+k+1}$ .

Par hypothèse de récurrence, il existe  $n'_0$  et  $r'$  tels que pour tout  $n$  supérieur à  $n'_0$  et toute section

$$\begin{aligned} A[X_1 \dots X_N] &\longrightarrow A \\ X_i &\longrightarrow a_i \end{aligned}$$

induisant une section modulo  $\mathcal{J}^n$  de  $B$  on peut trouver



$$a' = (a'_1 \dots a'_N) ; \quad a'_i \equiv a_i \quad (\mathcal{J}^{n-r'})$$

tel que

$$\mathcal{J}(a') \subset t_1^{2h+k+1} .$$

On a en réalité

$$\mathcal{J}(a') \subset t_1^{2h+k+1} \cap \mathcal{J}^{n-r'} .$$

Donc pour  $n$  assez grand

$$\mathcal{J}(a') \subset t_1^{2h+k+1} \cdot \mathcal{J}^{n-r'-\lambda} \quad (\text{Artin-Rees}) .$$

Le lemme précédent implique qu'on peut trouver

$$(b) = (b_1 \dots b_N) \in A^N, \quad b_i \equiv a'_i \quad (t_1^{h+k} \mathcal{J}^{n-r'-\lambda})$$

et tel que

$$\mathcal{J}(b) = 0 .$$

Ce qui établit le théorème.

#### Remarque.

On a pu noter, en lisant la démonstration de ce théorème, que  $n_0$  et  $r$  ne dépendent de l'algèbre  $B$  que par la puissance de  $\mathcal{J}$  contenue par  $H$ .

D'autre part pour étendre une section approchée donnée, on n'utilise pas la lissité de  $B$  sur tout l'ouvert  $\text{Sp} B - V(\mathcal{J}B)$ , on utilise seulement le fait que l'image réciproque de  $H$  contient une puissance de  $\mathcal{J}$ .

On aurait donc pu dire plus précisément : étant donné un anneau noethérien  $A$  complet pour la topologie  $\mathcal{J}$ -adique pour tout entier  $h$ , il existe un couple d'entiers  $(n_0, r)$  ayant la propriété suivante : si  $n \geq n_0$  et si  $\epsilon_n$  est une section approchée modulo  $t_1^n$  d'une  $A$ -algèbre de type fini  $B$ , telle que  $\epsilon_n^*(H) \supset \mathcal{J}^h$  (où  $H$  est défini dans  $B$  comme plus haut) alors il existe une section  $\epsilon$  de  $B$  congrue à  $\epsilon_n$  modulo  $\mathcal{J}^{n-r}$ , se factorisant au-dessus de  $\text{Sp} A - V(\mathcal{J})$  à travers l'ouvert de lissité de  $B$ .

§ 2. Cas des couples henséliens.Définitions - Rappels.

Soient  $A$  un anneau,  $S = \text{Sp } A$ ,  $\mathcal{J}$  un idéal contenu dans le radical de  $A$ , et  $S_0$  le fermé défini par  $\mathcal{J}$  dans  $S$ .

On dit que le couple  $(A, \mathcal{J})$  est hensélien, ou que le schéma  $S$  est hensélien le long de  $S_0$  si la condition suivante est satisfaite : si  $B$  est une  $A$ -algèbre telle que le morphisme

$$\begin{array}{c} \text{Sp } B = X \\ \downarrow \\ \text{Sp } A = S \end{array}$$

soit étale, alors tout  $S$ -morphisme de  $S_0$  dans  $X$  se relève en une  $S$ -section de  $X$ .

On peut noter que cette propriété ne dépend que de la topologie définie par  $\mathcal{J}$ , que, d'autre part, si  $\mathcal{J}'$  est un idéal contenu dans  $\mathcal{J}$ , et si  $(A, \mathcal{J})$  est hensélien alors  $(A, \mathcal{J}')$  est hensélien.

D'autre part si  $A$  est un anneau complet pour la topologie  $\mathcal{J}$ -adique, le couple  $(A, \mathcal{J})$  est hensélien.

A tout couple  $(A, I)$  consistant en la donnée d'un anneau  $A$  et d'un idéal  $I$  de  $A$  on peut associer un couple  $(\tilde{A}, \tilde{I})$  hensélien muni d'un morphisme de couple

$$\varphi : (A, I) \longrightarrow (\tilde{A}, \tilde{I})$$

[par morphisme de couple, on entend un morphisme de  $A$  dans  $\tilde{A}$  telle que  $\varphi(I) \subset \tilde{I}$ ]

et possédant la propriété universelle suivante : pour tout morphisme  $\psi$  de  $(A, I)$  dans un couple hensélien  $(B, \mathcal{J})$  il existe un unique morphisme

$$\psi^\sim : (\tilde{A}, \tilde{I}^\sim) \longrightarrow (B, \mathcal{J})$$

tel que  $\Psi = \Psi \tilde{\varphi}$ .

On dit que  $\tilde{A}$  est le hensélisé de  $A$  le long de  $I$  ou que le schéma  $\text{Sp } \tilde{A}$  est le hensélisé de  $\text{Sp } A$  le long de  $V(I)$ .

Les anneaux  $A$  et  $\tilde{A}$  ont des séparés complétés, pour la topologie  $I$ -adique, qui sont isomorphes.

Si  $I$  est contenu dans le radical de  $A$ ,  $\tilde{A}$  est fidèlement plat sur  $A$ .

Référence.— (cf. M. Raynaud - Anneaux locaux henséliens, Lecture notes).

On va établir pour les couples henséliens l'analogie du théorème 1.

THEOREME 2.— Soit  $(A, \mathfrak{J})$  un couple hensélien noethérien. Soit  $B$  une  $A$ -algèbre de type fini, lisse sur  $A$  en dehors du fermé défini par  $\mathfrak{J}$ . Alors il existe deux entiers  $n_0$  et  $r$  tels que pour tout  $n \gg n_0$  et toute section de  $B$  approchée mod  $\mathfrak{J}^n$  il existe une  $A$ -section de  $B$  congrue à la précédente modulo  $\mathfrak{J}^{n-r}$ .

Le théorème 2 implique le théorème 1. Mais la démonstration donnée ici ne fournit aucun renseignement sur les indices  $n_0$  et  $r$  et l'énoncé, donné en remarque après le théorème 1, ne peut pas se déduire de la démonstration qui va suivre.

Le théorème 2 admet comme corollaire immédiat : sous les hypothèses du théorème 2 et si  $\hat{A}$  désigne le complété  $\mathfrak{J}$ -adique de  $A$  pour tout  $n$  et toute  $\hat{A}$ -section  $\tilde{\varepsilon} : B \otimes_A \hat{A} \rightarrow \hat{A}$ , il existe une section  $\varepsilon : B \rightarrow A$  congrue à  $\tilde{\varepsilon}$  mod  $\mathfrak{J}^n$ .

On pourrait démontrer le résultat un peu plus général suivant :

VI-11

si  $(A, \mathcal{J})$  est un couple hensélien,  $\hat{A}$  le complété  $\mathcal{J}$ -adique de  $A$ ,  
 $B$  une  $A$ -algèbre de type fini,  $\bar{B} = B \otimes_A \hat{A}$ . Soit  $\bar{\epsilon}$  une  $\hat{A}$ -section  
de  $\bar{B}$  dont la restriction au-dessus de l'ouvert  $\text{Sp} \hat{A} - V(\mathcal{J})$  se factorise  
à travers l'ouvert de lissité de  $B$ . Alors pour tout  $n$ , il existe une  
 $A$ -section de  $\bar{B}$  congrue à  $\bar{\epsilon}$  modulo  $\mathcal{J}^n$ .

De ce résultat, qu'on ne démontre pas en détail ici, on peut alors  
dédire pour les couples henséliens un résultat analogue à celui donné  
en remarque après le théorème 1.

Démonstration du théorème 2.

LEMME 1.- Il s'agit de démontrer le théorème 2 dans le cas où  $B$  est une  
intersection complète au-dessus de  $A$ .

$$\text{Soit ; } B = \frac{A[X_1 \dots X_N]}{(f_1 \dots f_p)},$$

on suppose  $\text{Sp} B$  lisse sur  $\text{Sp} A$  de dim rel.  $N-p$  en dehors de  $V(\mathcal{J}B)$ .

Soit  $\Delta = (\partial_1, \dots, \partial_p)$  l'idéal engendré par les différents mineurs  
d'ordre  $p$  de la matrice jacobienne  $(\partial f_i / \partial X_j)$   $i = 1 \dots p, j = 1 \dots N$ .

Dans  $\text{Sp} A[X_1 \dots X_N]$

$$V(\Delta) \cap \text{Sp} B \subset V(\mathcal{J}A[X_1 \dots X_N]).$$

Donc il existe  $h$  tel que

$$(1) \quad \Delta + (f_1 \dots f_p) \supset \mathcal{J}^h A[X_1 \dots X_N].$$

Soit  $a^\circ = (a_1^\circ, \dots, a_p^\circ) \in A^N$  tel que :

$$\forall i \in [1; p], \quad f_i(a^\circ) \in \mathcal{J}^{2h+1} P$$

où  $P$  est un idéal quelconque de  $A$ .

On va montrer qu'il existe  $a = (a_1 \dots a_N) \in A^N$  vérifiant

$$\begin{cases} a_i \equiv a_i^{\circ} & (J^{h+1}_P) \\ f_i(a) = 0 & \forall i \in [1, p] \end{cases} .$$

Notons d'abord qu'un raisonnement déjà fait permet de déduire de (1)

$$\Delta(a^{\circ}) \supset J^h .$$

Si on note  $M_o$  la valeur en  $a^{\circ}$  de la jacobienne, et  $\partial_i$  pour  $\partial_i(a^{\circ})$  ses mineurs d'ordre  $p$ , soient  $N_i$  les matrices  $(N, p)$  telles que

$$M_o N_i = \partial_i I$$

où  $I$  désigne la matrice unité d'ordre  $p$ .

On peut écrire

$$\begin{pmatrix} f_1(a^{\circ}) \\ \vdots \\ f_p(a^{\circ}) \end{pmatrix} = \sum_{i,j} \partial_i \partial_j \begin{bmatrix} e_{ij}^1 \\ \vdots \\ e_{ij}^p \end{bmatrix} \quad \text{où } e_{ij}^k \in J .$$

où en notation vectorielle  $f(a^{\circ}) = \sum_{i,j} \partial_i \partial_j E_{ij}$ .

On cherche à résoudre

$$\begin{bmatrix} f_1(a^{\circ} + \sum \partial_i U_i) \\ \vdots \\ f_p(a^{\circ} + \sum \partial_i U_i) \end{bmatrix} = 0 \quad \text{où } U_i = (u_i^1, \dots, u_i^N) \in A^N .$$

Un développement de Taylor en notation vectorielle fournit

$$(2) \quad 0 = f(a^{\circ} + \sum \partial_i U_i) = f(a^{\circ}) + M_o \cdot \sum \partial_i U_i + \sum \partial_i \partial_j Q_{ij}$$

où  $Q_{ij}$  est un  $p$ -vecteur colonne dont les composantes sont les polynômes en  $y$  et  $a$  de degré au moins 2.

$$(3) \quad \Leftrightarrow 0 = \sum_i \partial_i M_o U_i + \sum_{i,j} \partial_i \partial_j (Q_{ij} + E_{ij}) .$$

Puisque

$$M_o N_j = \partial_j I$$

cette égalité peut se réécrire

$$0 = \sum \partial_i M_o \cdot U_i + \sum \partial_i M_o [\sum_j N_j (Q_{ij} + E_{ij})] .$$

Il suffit alors de résoudre les différents systèmes d'équations

$$U_i + \sum N_j (Q_{ij} + E_{ij}) = 0$$

qui admet  $U = 0$  comme solution modulo  $J^{n-2h}$  et dont la jacobienne en 0 est la matrice identité d'ordre  $N$ . On est donc ramené à résoudre des systèmes d'équations dont on a une solution approchée et définissant une algèbre étale sur  $A$  au voisinage de cette section.

Il existe donc une solution relevant cette solution approchée d'après la définition même de couple hensélien - soit  $u_i = (u_i^1 \dots u_i^N)$  et  $\mathcal{F} + \sum \partial_i u_i$  est la solution cherchée du système d'équations  $f$ .

Le lemme 2 va permettre de réduire, en quelque sorte, le cas général au cas traité par le lemme 1.

LEMME 2.- Soient  $A$  un anneau noethérien,  $B$  une  $A$ -algèbre de type fini, supposée lisse sur  $A$ . Soit  $B = A[X_1 \dots X_N] / \mathcal{J}$  une présentation de  $B$ ,  $\mathcal{J} = (f_1, \dots, f_q) \subset A[X_1 \dots X_N]$ . Alors le fibré vectoriel associé au  $B$ -module  $\mathcal{J} / \mathcal{J}^2$  est lisse sur  $\text{Sp} A$  de dimension relative  $N$  et est globalement une intersection complète au-dessus de  $A$ .

Soit  $C$  l'algèbre symétrique du  $B$ -module  $\mathcal{J} / \mathcal{J}^2$  et considérons

$$\begin{array}{ccc} \text{Sp} C & \xrightarrow{f} & \text{Sp} B \xrightarrow{\pi} \text{Sp} A \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \text{Sp} A \end{array}$$

$g$

$\text{Sp} C$  est lisse sur  $A$  et de dimension relative constante égale à  $N$ . En effet au voisinage d'un point de  $B$  où la dimension relative de  $B$  sur  $A$

est d ,  $\mathcal{J}|_{\mathcal{Y}^2}$  est libre de rang  $N - d$  sur  $B$  . Donc la dimension relative de  $\text{Sp } C$  sur  $B$  au-dessus d'un tel point est  $N - d$  .

$\text{Sp } C$  est plongé dans l'espace affine de dimension  $q$  sur  $B$  . Soit  $I|_{\mathcal{I}^2}$  le faisceau conormal de l'immersion :  $\text{Sp } C \hookrightarrow \text{Sp } B [Y_1 \dots Y_q]$  . On peut d'autre part considérer  $\text{Sp } C$  comme plongé dans l'espace affine de dimension  $N + q$  sur  $A$  . Soit  $K|_{\mathcal{K}^2}$  le faisceau conormal de  $\text{Sp } C$  dans  $\text{Sp } A [X_1 \dots X_N, Y_1 \dots Y_q]$  .

On peut écrire les suites exactes suivantes, qui sont des suites de modules localement libres sur des schémas affines donc scindées.

$$(1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{J}|_{\mathcal{Y}^2} \longrightarrow \Omega_{A[X]|_A} |^B \longrightarrow \Omega_{B|_A} \longrightarrow 0$$

qui induit au-dessus de  $\text{Sp } C$

$$(2) \quad 0 \longrightarrow f^*(\mathcal{J}|_{\mathcal{Y}^2}) \longrightarrow C^N \longrightarrow f^*(\Omega_{B|_A}) \longrightarrow 0 .$$

D'autre part

$$(3) \quad 0 \longrightarrow f^*(\Omega_{B|_A}) \longrightarrow \Omega_{C|_A} \longrightarrow \Omega_{C|_B} \longrightarrow 0$$

$\text{Sp } C$  étant le fibré vectoriel associé au  $B$ -module  $\mathcal{J}|_{\mathcal{Y}^2}$  ,  $\Omega_{C|_B}$  est égal au module  $f^*(\mathcal{J}|_{\mathcal{Y}^2})$  .

Il résulte de cette identification et des suites (2) et (3) que  $\Omega_{C|_A}$  est globalement libre de rang  $N$  sur  $C$  :

$$\Omega_{C|_A} \simeq f^*(\mathcal{J}|_{\mathcal{Y}^2}) \oplus f^*(\Omega_{B|_A}) \simeq C^N .$$

Considérant donc  $\text{Sp } C$  comme plongé dans  $\text{Sp } A [X_1 \dots X_N, Y_1 \dots Y_q]$  on peut écrire

$$0 \longrightarrow K|_{\mathcal{K}^2} \longrightarrow C^{N+q} \longrightarrow \Omega_{C|_A} \longrightarrow 0$$

ou

$$0 \longrightarrow K|_{\mathcal{K}^2} \longrightarrow C^{N+q} \longrightarrow C^N \longrightarrow 0 .$$

VI-15

Mais considérons alors  $\text{Sp } C$  comme plongé dans un espace affine sur  $A$  de dimension  $2N + q$  :  $\text{Sp } A[X_1 \dots X_N, Y_1 \dots Y_q, T_1 \dots T_N]$  et défini par les équations supplémentaires :  $T_i = 0$  ,  $i \in [1, N]$  .

Soit  $K'|_{K,2}$  le faisceau conormal associé à cette nouvelle immersion. Il est globalement libre sur  $C$  , on a en effet :

$$K'|_{K,2} \simeq K|_{K,2} \oplus C^N \simeq C^{N+q} .$$

Il existe donc  $N + q$  éléments de  $A[X_1 \dots X_N, Y_1 \dots Y_q, T_1 \dots T_N]$  engendrant l'idéal définissant  $C$  dans cette algèbre, sur un voisinage de  $\text{Sp } C$  dans  $\text{Sp } A[X_1 \dots X_N, Y_1 \dots Y_q, T_1 \dots T_N]$  .

Démonstration du théorème.

Reprenons  $B = A[X_1 \dots X_N]|_{\mathcal{J}}$  avec  $\text{Sp } B$  lisse sur  $A$  en dehors du fermé défini par  $\mathcal{J}$  .

Soit  $C$  l'algèbre symétrique du  $B$ -module  $\mathcal{J}|_{\mathcal{J},2}$  et considérons

$$\begin{array}{c} \text{Sp } C \\ \downarrow f \\ \text{Sp } B \\ \downarrow \pi \\ \text{Sp } A \end{array}$$

une section approchée de  $B$  définit, grâce à la section unité du fibré vectoriel, une section approchée de  $C$  . Il suffit donc de démontrer le théorème pour  $C$  , puis de projeter par  $f$  la section obtenue sur  $\text{Sp } B$  .

Cela revient à dire qu'on peut supposer qu'au-dessus de tout ouvert affine de la base contenu dans  $\text{Sp } A - V(\mathcal{J})$  on peut supposer  $\mathcal{J}$  engendré dans un voisinage de  $\text{Sp } B$  par  $p$  éléments, la dimension relative de



$\text{Sp } B - V(\mathcal{J})$  sur  $\text{Sp } A - V(\mathcal{J})$  étant  $N - p$ .

On va alors raisonner par récurrence sur le nombre d'ouverts affines (localisés de  $A$ ) nécessaire pour recouvrir  $\text{Sp } A - V(\mathcal{J})$ . Soit  $l$  ce nombre et soient  $(\alpha_1 \dots \alpha_l)$  des éléments de  $\mathcal{J}$  tels que les  $\text{Sp } A_{\alpha_i}$  recouvrent  $\text{Sp } A - V(\mathcal{J})$ . Pour  $l = 0$ , le résultat est clair. On le suppose établi pour  $l = l - 1$ .

Soient  $(f_1, \dots, f_{N-p})$  des éléments de  $\mathcal{J}$  engendrant cet idéal dans un voisinage de  $\text{Sp } B \otimes_A A_{\alpha_1}$ . Soit  $\Delta$  l'idéal de  $A[X_1 \dots X_N]$  engendré par les mineurs d'ordre  $N-p$  de la jacobienne  $(\partial f_i / \partial X_j)$ . On a dans  $\text{Sp } A[X_1 \dots X_N]$  :

$$V(\Delta) \cap \text{Sp } B \subset V(\alpha_1 A[X_1 \dots X_N]) .$$

Donc

$$(\gamma) \quad \exists \gamma \mid \Delta + \mathcal{J} \supset \alpha_1 A[X_1 \dots X_N] .$$

Si on désigne par  $Q$  l'idéal de  $A[X_1 \dots X_N]$  conducteur de  $\mathcal{J}$  dans  $(f_1 \dots f_{N-p})$ , un argument du même type permet d'écrire

$$(\beta) \quad \exists \beta \mid Q + \mathcal{J} \supset \alpha_1^\beta A[X_1 \dots X_N] .$$

Soit enfin  $\mathcal{L}$  l'idéal de  $A$  formé des éléments à support dans  $V(\alpha_1)$

$$(\lambda) \quad \exists \lambda \mid \mathcal{L} \cap (\alpha_1^\lambda) = (0) \quad (\text{Artin-Rees}) .$$

Soit  $t$  un entier vérifiant  $t > \sup(2\gamma, \gamma + \beta, \gamma + \lambda)$ . D'après l'hypothèse de récurrence, il existe deux entiers  $n'_0$  et  $r'$  tels que si on a un morphisme

$$\begin{array}{ccc} \varphi : A[X_1 \dots X_N] & \longrightarrow & A \\ & & X_i \longrightarrow a_i \end{array}$$

définissant une section modulo  $\mathcal{J}^n$  de  $B$  (avec  $n > n'_0$ ) alors il existe  $a' = (a'_1 \dots a'_N)$  vérifiant  $a'_i \equiv a_i \pmod{(\mathcal{J}^{n-r'})}$ ,  $\mathcal{J}(a') \subset \alpha_1^t$ .

On a en fait

$$\mathcal{J}(a') \subset \alpha_1^t \cap \mathcal{J}^{n-r'}$$

VI-17

Donc pour  $n$  assez grand

$$(1) \quad \mathcal{J}(a') \subset \alpha_1^t \cdot \mathcal{J}^{n-r'-k} \quad (\text{Artin-Rees})$$

Un raisonnement déjà fait montre qu'on a alors (cf. démonstration du théorème 1) :

$$(2) \quad \Delta(a') \supset \alpha_1^\gamma \cdot$$

Il résulte alors du lemme 1 et des relations (1) et (2) qu'il existe  $c = (c_1 \dots c_N) \in A^N$  vérifiant

$$\begin{aligned} c_i &= a'_i \quad (\mathcal{J}^{n-r'-k} \alpha_1^{t-\gamma}) \\ f_i(c) &= 0 \quad \forall i \in [1, N-p] \cdot \end{aligned}$$

Il reste à montrer que  $c$  définit une section de  $B$  c'est-à-dire qu'on a

$$\mathcal{J}(c) = 0 \cdot$$

Mais

$$\begin{cases} \mathcal{J}(a') \subset \mathcal{J}^{n-r'-k} \alpha_1^t \\ c \equiv a' \pmod{\mathcal{J}^{n-r'-k} \alpha_1^{t-\gamma}} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{J}(c) \subset \mathcal{J}^{n-r'-k} \alpha_1^{t-\gamma} \cdot$$

D'autre part on a

$$Q(c) \supset (\alpha_1^\beta) \cdot$$

Donc

$$\alpha_1^\beta \mathcal{J}(c) \subset (f_i(c))$$

$$\alpha_1^\beta \mathcal{J}(c) = 0 \cdot$$

Mais  $t$  a été choisi supérieur à  $\gamma + \lambda$  .

Donc (cf.  $(\lambda)$ ) :  $\mathcal{J}(c) = 0 \cdot$